

На правах рукописи



Семенов Данила Михайлович

УПРАВЛЯЕМАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СЕТЯХ НЕЙРОНОВ ХИНДМАРША-РОУЗА

Специальность 2.3.1 —
«Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика»

Автореферат

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2023

Работа выполнена в Институте проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН)

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Фрадков Александр Львович

Официальные оппоненты: **Сысоев Илья Вячеславович**,
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, профессор кафедры системного анализа и автоматического управления

Смирнова Вера Борисовна,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», профессор кафедры математики

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. И. Канта»

Защита состоится 5 декабря 2023 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ИПМаш 2.3.1. в ИПМаш РАН по адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ ИПМаш РАН по адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61 и на сайте <https://ipme.ru>.

Автореферат разослан “ ____ ” _____ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета ИПМАШ 2.3.1.,
доктор физ.-мат. наук,



М.В. Долгополик

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Задачи управления синхронизацией в динамических сетях, состоящих из сложных систем, возникают во многих научных областях, например в таких, как физика, инженерия, компьютерные науки, биология и медицина. Важным классом таких задач является управление синхронизацией между нейронами в мозге человека или животного. В популяциях нейронов синхронизация играет важную роль в формировании мозговых волн активности. Кроме того, было обнаружено, что некоторые заболевания нервной системы (например: эссенциальный тремор, эпилепсия, болезни Паркинсона и Альцгеймера, а также различные когнитивные расстройства) напрямую связаны с аномальной синхронизацией некоторых нейронных популяций. При этом изучение синхронизации нейронов в мозге *in vivo* является сложной проблемой, вызывающей множество технических, этических и других вопросов. Эта проблема может быть частично преодолена путем построения соответствующей математической модели популяций нейронов или всего мозга. Таким образом, мы можем использовать построенную модель для изучения того, как контролировать синхронизацию в этих популяциях.

В области синхронизации сложных систем и сетей, в том числе моделей биологических нейронных сетей фундаментальные результаты получили российские ученые Короновский А.А., Сысоев И.В. (СГУ), Осипов Г.В., Некоркин В.И., Казанцев В.Б. (ННГУ), Храмов А.Е., Максименко В.А. (БФУ), Леонов Г.А. (СПбГУ), Смирнова В.Б. (СПбГАСУ), Блехман И.И., Фрадков А.Л., Плотников С.А. (ИПМаш РАН), а также зарубежные ученые Kurths J., Schöll E., Nijmeijer H., Pikovsky A., Rosenblum M.G., Steur E., Hizanidis J. Однако целый ряд вопросов построения алгоритмов и исследования условий синхронизации математических моделей сетей биологических нейронов остаются открытыми. В частности, недостаточно изучены условия и алгоритмы синхронизации в сетях важного класса математических моделей нейронов: моделей Хиндмарша-Роуза. Модель Хиндмарша-Роуза – одна из самых простых моделей, описывающих важные свойства реальных нейронов: спайкинг и берстинг. Данная работа посвящена исследованию и управлению синхронизацией в сетях моделей нейронов

Хиндмарша-Роуза на основе методов современной теории автоматического управления нелинейными системами.

Вышесказанное подтверждает актуальность темы диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является исследование и управление синхронизацией в сетях нейронов Хиндмарша-Роуза. Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**.

1. Построение модели сети нейронов Хиндмарша-Роуза.
2. Синтез алгоритмов управления, обеспечивающих и гарантирующих достижение синхронизации в сети.
3. Использование адаптивных алгоритмов управления, таких как метод скоростного градиента, для настройки параметров в сети, обеспечивающих синхронизацию.
4. Проведение компьютерного моделирования исследуемой сети как при синхронизации, так и при её отсутствии.

Методы исследований. Для достижения поставленной цели использовались такие методы теории управления, как метод функций Ляпунова, алгоритм скоростного градиента и метод функционалов Ляпунова-Красовского.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие результаты диссертационной работы.

1. Показана предельная ограниченность траекторий сети нейронов Хиндмарша-Роуза и получена оценка предельного множества (Теорема 2.1).
2. Синтезирован алгоритм управления и установлено условие синхронизации двух связанных нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии возмущений, входящих в правые части уравнений (Теорема 3.1).
3. Синтезирован адаптивный алгоритм управления на основе метода скоростного градиента, обеспечивающий синхронизацию в сети между нейронами Хиндмарша-Роуза без предварительной информации о параметрах модели (Теорема 4.1).

4. На основе метода скоростного градиента получен адаптивный алгоритм настройки силы связи, позволяющий перевести сеть в синхронный режим функционирования (Теорема 5.1).
5. Синтезирован алгоритм управления, позволяющий синхронизировать нейроны в сети даже при наличии запаздывающих связей, т.е. связей, в которых присутствуют временные задержки (Теорема 6.1).

Теоретическая и практическая значимость результатов. В диссертационной работе получены условия, при которых имеет место синхронизация в сетях нейронов Хиндмарша-Роуза. На основе проведенного анализа для каждого случая был предложен алгоритм управления синхронизацией в этих сетях. Таким образом, результаты диссертационной работы могут быть использованы в будущем для разработки алгоритмов диагностики и лечения различных болезней нервной системы.

Достоверность результатов работы подтверждается корректным применением математического аппарата теории управления и результатами численного моделирования.

Апробация результатов. Основные положения диссертационной работы доказывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах лаборатории «Управление сложными системами» ИПМаш РАН, а также на семинарах электротехнической школы Тель-Авивского университета. Кроме того, результаты диссертационной работы обсуждались на международных конференциях: 19th Conference of Young Scientists "Navigation and Motion Control", Saint Petersburg, Russia, 2017; the 18th Scientific School «Nonlinear Waves–2018», Nizhny Novgorod, Russia, 2018; 5th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, Eindhoven, The Netherlands, 2018; 21st Conference of Young Scientists "Navigation and Motion Control", Saint Petersburg, Russia, 2019; European Control Conference (ECC'20), Saint Petersburg, Russia, 2020; the 19th Scientific School «Nonlinear Waves–2020», Nizhny Novgorod, Russia.

Результаты диссертации были получены в ходе работ по грантам РНФ (проект №14-29-00142 и проект №19-72-10128), СПбГУ (ID 91924061) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект

№075-15-2021-573).

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 8 работ [1–8], в том числе 4 в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus.

Работы [4–8] написаны в соавторстве. В работе [7] диссертантом доказана предельная ограниченность сети Хиндмарша-Роуза, а также получена оценка на предельное множество, к которому стремятся траектории сети. В работе [1] предложен алгоритм управления синхронизацией простейшей сети нейронов Хиндмарша-Роуза, состоящей из двух узлов, при наличии равномерно ограниченных возмущений. В работах [4–7] диссертантом синтезированы адаптивные алгоритмы управления синхронизации в сети нейронов Хиндмарша-Роуза на основе алгоритма скоростного градиента. В работе [8] получены условия синхронизации сети нейронов Хиндмарша-Роуза при наличии запаздывания распространения сигнала между нейронами.

Объем и структура работы. Диссертация объемом 57 страниц состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы (82 источника).

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, формулируется цель и ставятся задачи диссертационного исследования, приводится обзор научной литературы по изучаемой тематике, дается краткое содержание работы по главам.

В **первой главе** диссертационной работы приводятся предварительные сведения, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

Во **второй главе** доказывается предельная ограниченность сети ней-

ронов Хиндмарша-Роуза. Рассматривается следующая сеть

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \\ f_i(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; σ есть сила связи между нейронами; $A = [\alpha_{ij}]_{N \times N}$ матрица смежности графа G ; $i, j \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$. Предполагается, что G неориентированный граф, т. е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i, j \in \mathcal{I}$.

Требуется найти предельное множество Ω , которое бы содержало в себе траектории сети (1), начиная с некоторого момента времени $T > 0$.

Теорема 2.1. *Все решения сети (1) являются глобально равномерно предельно ограниченными на множестве*

$$\Omega = \left\{ |p_i| \leq \sqrt[4]{\frac{2\Delta}{\tilde{a}}}, |q_i| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{c}}}, |n_i| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{\tilde{d}}}, i \in \mathcal{I} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{a}{4}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{a} (b^2 + 2d^2), \quad \tilde{c} = \frac{a}{8d^2}, \quad \tilde{d} = \frac{1}{s}, \quad \Delta = \frac{a}{4d^2} I^2 + \tilde{\beta}, \\ \tilde{\beta} &= \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{a}{2d^2} I^2 \geq \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}} - \frac{a}{2d^2} I^2 \right), & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы использовалась функция Ляпунова вида

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N V_0(x_i), \quad (2)$$

где $V_0(x_i) = (p_i^2 + k_q q_i^2 + k_n n_i^2) / 2$, $i \in \mathcal{I}$ радиально неограниченные и положительно определенные функции; $\mathbf{x} = \text{col}\{x_1, \dots, x_N\}$.

В третьей главе рассматривается задача управления синхронизацией для простейшей сети — двух связанных нейронов, при наличии равномерно

ограниченных возмущений на примере следующей сети:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + \sigma\varphi(x_1, x_2) + \xi_1 + Bu, \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + \sigma\varphi(x_2, x_1) + \xi_2, \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $\xi_i = \text{col}\{\xi_{pi}, \xi_{qi}, \xi_{ni}\}$, $B = \text{col}\{1, 0, 0\}$; σ есть сила связи между нейронами; u — искомое управление; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь ξ_i , $i = 1, 2$ есть вектор равномерно ограниченных возмущений, т.е.

$$|\xi_{pi}(t)| \leq \frac{\Delta_p}{2}, |\xi_{qi}(t)| \leq \frac{\Delta_q}{2}, |\xi_{ni}(t)| \leq \frac{\Delta_n}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \geq 0.$$

Вводятся обозначения, которые будут использованы далее:

$$\begin{aligned} e(t) &= x_1(t) - x_2(t), \quad \eta(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t) \\ \psi^{(1)}(t) &= p_1^3(t) - p_2^3(t), \quad \psi^{(2)}(t) = p_1^2(t) - p_2^2(t), \end{aligned}$$

где $e(t) = \text{col}\{e_p(t), e_q(t), e_n(t)\}$ вектор отклонений между координатами нейронов.

Основываясь на приведенных выше обозначениях, формулируется задача управляемой координатной ε -синхронизации моделей (3) как достижение следующей цели управления:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e_p(t)| \leq \varepsilon_p, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e_q(t)| \leq \varepsilon_q, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e_n(t)| \leq \varepsilon_n, \quad (4)$$

где ε_p , ε_q , ε_n есть уровни точности синхронизации.

Для введенной цели строится алгоритм управления:

$$u(t) = -(\gamma + b\psi^{(2)}) + d\psi^{(2)}e_q. \quad (5)$$

Далее делается предположение

$$\gamma + 2\sigma - 1 > 0 \quad (6)$$

и формулируется теорема о достижении цели управления.

Теорема 3.1. Пусть условие (6) выполнено. Тогда закон управления в форме (5) гарантирует достижение цели управления (4) $\forall x_i(0)$, $i = 1, 2$ в системе (3).

Таким образом, теорема 3.1 является достаточным условием для достижения ε -синхронизации связанных систем (3). Для доказательства теоремы используется функция Ляпунова вида

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} \left(e_p^2 + e_q^2 + \frac{1}{r_s} e_n^2 \right). \quad (7)$$

В четвертой главе рассматривается адаптивное управление синхронизацией сети нейронов Хиндмарша-Роуза на примере следующей сети:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j) + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $x_i = \text{col} \{p_i, q_i, n_i\}$; $B = \text{col} \{1, 0, 0\}$; $\sigma > 0$ обозначает силу связи между нейронами; α_{ij} , $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем считать, что G есть неориентированный граф.

Строится уравнение средней динамики для сети (8):

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f_s(x_s, \psi(p)), \quad f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \quad (9) \\ p_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \\ \psi_s^{(1)}(p) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2, \end{aligned}$$

где $x_s = \text{col} \{p_s, q_s, n_s\}$, $p = \text{col} \{p_1, \dots, p_N\}$, $\psi_s(p) = \text{col} \{ \psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p) \}$.

Далее вводятся ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Последовательно вычитая уравнения средней динамики (9) из уравнений сети (8), мы получаем сеть ошибок синхронизации, которая может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f(e_i, \psi_i(p)) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j) + B u_i, \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix}, \\ \psi_i^{(1)}(p) &= p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $e_i = \text{col} \{e_{pi}, e_{qi}, e_{ni}\}$, $\psi_i(p) = \text{col} \{\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p)\}$.

Таким образом, задача адаптивной синхронизации для сети (8) переформулируется в задачу адаптивной стабилизации сети (10) в начале координат. Для решения задачи адаптивной стабилизации вводится следующая цель управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{pi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{qi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ni} = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (11)$$

Далее синтезируется алгоритм управления, который имеет вид

$$u_i(t) = - \left[\gamma_0 + \theta_1(t) \psi_i^{(2)}(t) \right] e_{pi}(t) + \theta_2(t) \psi_i^{(2)}(t) e_{qi}(t), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (12)$$

где γ_0 есть коэффициент усиления в законе управления $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ — настраиваемые параметры. В качестве алгоритма настройки коэффициентов $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ используется метод скоростного градиента:

$$\dot{\theta} = \gamma \begin{bmatrix} \psi_i^{(2)}(p) e_{pi} \\ -\psi_i^{(2)}(p) e_{qi} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где $\gamma > 0$ есть коэффициент усиления алгоритма; $\theta = \text{col} \{\theta_1, \theta_2\}$. Предполагая выполнимость теорем о сходимости скоростного градиента, форму-

лируется следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть граф связей G является неориентированным. Тогда сеть (10) стабилизируема в начале координат с помощью алгоритма (12), (13), т.е. полученный алгоритм обеспечивает достижение цели управления (11) для любых $e_1(0), \dots, e_N(0)$ и $\theta(0)$.

Учитывая предельную ограниченность сети (8), получаем, что при выполнении теоремы 4.1 была обеспечена синхронизация между нейронами в сети (8).

В пятой главе рассматривается синхронизация сети нейронов Хиндмарша-Роуза при помощи адаптивной настройки силы связи на примере следующей сети:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $\sigma > 0$ обозначает силу связи между нейронами; $\alpha_{i,j}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем предполагать, что G есть связный и неориентированный граф.

Строится уравнение средней динамики для сети (14):

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f_s(x_s, \psi(p)), \quad f_s(x_s, \psi(p)) = \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \quad (15) \\ p_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \\ \psi_s^{(1)}(p) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2, \end{aligned}$$

где $x_s = \text{col}\{p_s, q_s, n_s\}$, $p = \text{col}\{p_1, \dots, p_N\}$, $\psi_s(p) = \text{col}\{\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p)\}$.

Далее вводятся ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Последовательно вычитая уравнения средней динамики (15) из уравнений сети (14), мы получаем сеть ошибок синхронизации, которая может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f(e_i, \psi_i(p)) + \sigma \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j), \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix}, \\ \psi_i^{(1)}(p) &= p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $e_i = \text{col}\{e_{pi}, e_{qi}, e_{ni}\}$, $\psi_i(p) = \text{col}\{\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p)\}$.

Таким образом, задача адаптивной синхронизации для сети (14) может быть переформулирована в задачу адаптивной стабилизации сети (16) в начале координат. Для решения задачи адаптивной стабилизации зададимся следующей целью управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{pi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{qi} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ni} = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \tag{17}$$

Очевидно, что определенная цель управления соответствует как адаптивной синхронизации сети (14) (при условии наличия свойства предельной ограниченности данной сети), так адаптивной стабилизации сети (16). Таким образом, нам необходимо найти такой адаптивный закон управления, который бы обеспечивал достижение цели (17). В работе мы используем алгоритм скоростного градиента для поиска такого управления, а в качестве настраиваемого параметра рассматривается параметр σ – сила связи в сети:

$$\dot{\sigma} = \gamma p^T L(G) p, \tag{18}$$

где $\gamma > 0$ есть коэффициент усиления алгоритма; $L(G)$ матрица Лапласа графа G . Предполагая выполнимость теорем о сходимости скоростного

градиента, формулируется следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть граф связей G является неориентированным и связным. Тогда сеть (16) стабилизируема в начале координат с помощью алгоритма (18), т.е. полученный алгоритм (18) обеспечивает достижение цели управления (17) для любых $e_1(0), \dots, e_N(0)$ и $\sigma(0)$.

Учитывая предельную ограниченность сети (14), получаем, что при выполнении теоремы 5.1 мы обеспечили синхронизацию между нейронами в сети (14).

В **шестой главе** рассматривается управляемая синхронизация в регулярной сети моделей Хиндмарша-Роуза с запаздывающими связями на примере следующей сети:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(x_i, x_j(t-h)) + Bu_i, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (19)$$

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} q_i - ap_i^3 + bp_i^2 - n_i + I \\ -dp_i^2 - q_i \\ r(sp_i - n_i) \end{bmatrix}, \quad \varphi(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} (p_j - p_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $x_i = \text{col}\{p_i, q_i, n_i\}$; $B = \text{col}\{1, 0, 0\}$; $h > 0$ обозначает постоянную задержку в связях; u_i есть искомое управление i -го нейрона; $\alpha_{i,j}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ элементы матрицы смежности $A(G)$ графа связей G ; $\varphi(\cdot)$ обозначает функцию связи в сети. Здесь и далее будем считать, что выполнены следующие предположения относительно рассматриваемой сети:

- G есть связный и неориентированный граф;
- G является регулярным графом, т.е. $d_i(G) = d_j(G)$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$;
- решения (19) являются предельно ограниченными.

Строится уравнение средней динамики для сети (19):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_s &= f_s(x_s, \psi(p)) + d(G)\varphi(x_s, x_s(t-h)), \\
f_s(x_s, \psi(p)) &= \begin{bmatrix} q_s - a\psi_s^{(1)}(p) + b\psi_s^{(2)}(p) - n_s + I \\ -d\psi_s^{(2)}(p) - q_s \\ r(sp_s - n_s) \end{bmatrix}, \\
p_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, \quad q_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i, \quad n_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i, \\
\psi_s^{(1)}(p) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^3, \quad \psi_s^{(2)}(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $x_s = \text{col}\{p_s, q_s, n_s\}$, $p = \text{col}\{p_1, \dots, p_N\}$, $\psi_s(p) = \text{col}\{\psi_s^{(1)}(p), \psi_s^{(2)}(p)\}$; $d(G)$ есть степень вершин G .

Далее вводятся ошибки синхронизации

$$e_{pi} = p_i - p_s, \quad e_{qi} = q_i - q_s, \quad e_{ni} = n_i - n_s.$$

Тогда сеть ошибок синхронизации может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i &= f(e_i, \psi_i(p)) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi(e_i, e_j(t-h)) + Bu_i, \\
f(e_i) &= \begin{bmatrix} e_{qi} - a\psi_i^{(1)}(p) + b\psi_i^{(2)}(p) - e_{ni} \\ -d\psi_i^{(2)}(p) - e_{qi} \\ r(se_{pi} - e_{ni}) \end{bmatrix}, \\
\psi_i^{(1)}(p) &= p_i^3 - \psi_s^{(1)}(p), \quad \psi_i^{(2)}(p) = p_i^2 - \psi_s^{(2)}(p), \quad \forall i \in \mathcal{I},
\end{aligned} \tag{21}$$

где $e_i = \text{col}\{e_{pi}, e_{qi}, e_{ni}\}$, $\psi_i(p) = \text{col}\{\psi_i^{(1)}(p), \psi_i^{(2)}(p)\}$.

Таким образом, задача синхронизации для сети (19) может быть переформулирована в задачу стабилизации сети (21) в начале координат.

Вводится управление вида

$$u_i = -\frac{2\gamma^4(b^2 + d^2)}{a} e_{pi}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \tag{22}$$

для которого формулируется следующая теорема

Теорема 6.1. Пусть регулярный граф G ориентированный и связный, тогда управление (22) обеспечивает асимптотическую устойчивость (21) начала координат.

Доказательство данной теоремы основано на применении функционала Ляпунова-Красовского, который имеет следующий вид:

$$V(t, z) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} e_i^T P e_i + \theta_0 \int_{t-h}^t e_{pi}^2 ds \right), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1/rs \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где $z = \text{col} \{e_1, \dots, e_N\}$; μ есть некоторая положительная постоянная.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Семенов Д. М. Управление синхронизацией двух связанных неидентичных систем Хиндмарш-Роуз // Управление большими системами. – 2018. – № 75. – С. 30–49.
2. Семенов Д. М. Управляемая синхронизация двух связанных нейронных моделей Хиндмарш-Роуз при наличии возмущений // XVIII научная школа «Нелинейные волны-2018»: тезисы докладов молодых ученых. Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2018. С. 168–170.
3. Семенов Д. М. Адаптивная синхронизация гетерогенной сети Хиндмарша-Роуз // XIX научная школа «Нелинейные волны-2020»: тезисы докладов молодых ученых. Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2020. С. 226–227.
4. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization of two coupled non-identical Hindmarsh-Rose systems by the Speed Gradient method // IFAC PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, Issue 33. – P. 12–14.
5. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization for the heterogeneous network of Hindmarsh-Rose neurons // 2020 European Control Conference (ECC). IEEE, 2020. P. 306–308.

6. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive control of synchronization for the heterogeneous Hindmarsh-Rose network // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 51, Issue 5. – P. 146–151.
7. Semenov D. M., Fradkov A. L. Adaptive synchronization in the complex heterogeneous networks of Hindmarsh–Rose neurons // Chaos, Solitons & Fractals. – 2022. – Vol. 150. – 111170.
8. Semenov D. M., Plotnikov S. A., Fradkov A. L. Controlled synchronization in regular delay-coupled networks of Hindmarsh-Rose neurons // 2022 6th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA). IEEE, 2022. P. 236–239.