МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Рооп Михаил Дмитриевич

Критические явления в решениях нелинейных дифференциальных уравнений механики сплошных сред

Специальность 01.01.03 —«Математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре физико-математических методов управления физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Кушнер Алексей Гурьевич,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры физико-математических методов управления физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.
Официальные оппоненты:	**Алексеевский Дмитрий Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН
	Богаевский Илья Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории динамических систем механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.
	Овчинников Алексей Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 24 ноября 2021 г. в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.06 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, ауд. 4-46.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). С информацией о регистрации участия в защите и с диссертацией в электронном виде можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/393434413/

Автореферат разослан «_____» ____________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.06,
доктор физико-математических наук,
профессор П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Система уравнений механики сплошных сред, как известно, состоит из дифференциальных законов сохранения энергии, массы (уравнение неразрывности) и импульса [1–3]. При этом закон сохранения импульса в различных ситуациях принимает разнообразные формы. Например, в наиболее общем случае вязких сжимаемых сред это уравнение Навье-Стокса, для невязких сред он принимает вид уравнения Эйлера, а для сред, совершающих движение в пористой среде, — это закон Дарси [4–10]. Кроме того, указанная система уравнений оказывается неполной. Для ее замыкания требуются дополнительные соотношения на термодинамические переменные, входящие в уравнения, такие как давление, температура, плотность, энергия и энтропия, называемые *уравнениями состояния* [11]. Таким образом, термодинамика среды существенно влияет на ее движение.

Геометрическая формулировка термодинамических состояний [15–18] как лежандровых многообразий в некотором специальном термодинамическом контактном пространстве позволяет применить теорию лежандровых и лагранжевых особенностей В.И. Арнольда [12–14] для анализа таких явлений как *фазовые переходы* — скачки среды из одного агрегатного состояния в другое (например, жидкость-газ). А именно, область фазовых переходов определяется особенностями проекции термодинамических лежандровых многообразий на подпространство интенсивных переменных (например, таких как давление и температура). Большинство таких лежандровых многообразий, отвечающих термодинамическим состояниям реальных газов, обладают особенностью типа сборки. С другой стороны, сами уравнения нелинейны, а значит, их решения могут иметь особенности. Эти два типа особенностей, а именно особенности решений нелинейных уравнений механики сплошных сред и особенности термодинамической природы, можно объединить вместе термином «критические явления», чему и посвящена данная диссертация.

Актуальность темы. Фундаментальные уравнения гидро- и газодинамики описывают важные процессы, протекающие в природе и промышленности. Понимание структуры решений этих уравнений, в особенности критические режимы, такие как фазовые переходы и ударные волны, позволяют развивать эффективные методы разработки нефтяных и газовых месторождений, управления течениями газов в трубах при транспортировке газа, прогнозирование погодных явлений. Например, лагранжевы особенности решений уравнений квазигеострофических теорий [22], интерпретируются как погодные фронты. Кроме того, изучение точных решений и решений с особенностями традиционно представляет теоретический интерес [23].

Развитие аналитических методов анализа нелинейных уравнений в частных производных позволяет развивать более эффективные численные методы. В последнее время прослеживается тенденция к разработке численных методов, учитывающих внутреннюю геометрию уравнений гидро- и газодинамики [19–21]. Поэтому понимание геометрических структур, лежащих в основе уравнений газовой динамики, сегодня является актуальным при решении задач прикладного характера.

В любом типе газовых течений, будь то фильтрационные течения, течения газов в трубах и атмосфере, термодинамика играет существенную роль. Несмотря на обилие работ в области газовой динамики, на сегодняшний день не выработан единый относительно различных термодинамических моделей подход решения задач газовой динамики. В данной диссертации основные результаты формулируются для общего вида термодинамических моделей, без выделения какой-либо конкретной. Это позволяет исследовать течения не только, например, идеального газа, которому традиционно уделяется большое внимание в контексте задач газовой динамики, но и, например, Ван дер Ваальса, для которого точных решений уравнений газовой динамики известно очень мало ввиду меньшей симметрии по сравнению с идеальным газом. В настоящей диссертации этот пробел отчасти заполняется, наряду с возможностью напрямую исследовать фазовые переходы в течениях газов, конструктивно находя области фазовых превращений.

Сегодня уже ясно, что язык контактной и симплектической геометрии является естественным для термодинамики. Геометрия, которая лежит в основе равновесной термодинамики, вместе с теорией лежандровых и лагранжевых особенностей являются не только красивыми математически, но и позволяют эффективно исследовать явления фазовых переходов. Недавнее наблюдение о тесной связи между теорией измерений и термодинамикой [18] возродило интерес к этим уже ставшими классическими направлениям математики. А именно, контактная и риманова структуры, изучавшиеся давно и подробно [15–17], являются частью гораздо более общей картины измерений экстенсивных термодинамических величин, в контексте которой естественно рассматривать не только контактную и риманову структуры, связанные соответственно со средними значениями измеряемых величин и их дисперсией, но и структуры высших порядков, соответствующие высшим центральным моментам. Например, ясно, что все центральные моменты четных порядков должны быть положительно определены, что дает дополнительные условия на область применимости термодинамических моделей. Наряду со своей важностью и естественностью структуры высших порядков незаслуженно обделены вниманием и мало изучены.

Кроме того, геометрический подход к термодинамике позволяет эффективно решать оптимизационные задачи для равновесных систем. В такого рода задачах важным является выбор ограничения для управляющих параметров, и римановы структуры могут служить инструментом, позволяющим такие области найти. Поскольку ранее задачи оптимального управления в термодинамике решались без учета римановых и контактных структур, то можно ожидать, что применение геометрического формализма приведет к новым оптимальным термодинамическим процессам, что и реализовано в данной диссертации.

Цель работы. Целью настоящей работы является исследование критических явлений (ударные волны и фазовые переходы) на решениях нелинейных уравнений газовой динамики, теории фильтрации, а также анализ симметрических тензоров высших порядков на термодинамических лагранжевых многообразиях и нахождение оптимальных равновесных термодинамических процессов. Указанная цель достигается путем решения следующих **задач**:

- определение областей допустимых состояний с помощью симметрических форм 4-го порядка на термодинамических лагранжевых многообразиях для и идеального и газа Ван дер Ваальса;

- нахождение оптимальных термодинамических процессов для идеальных газов, исследование интегрируемых свойств соответствующей гамильтоновой системы, особенностей ее инвариантного многообразия, построение решения гамильтоновой системы, анализ управляемости динамической системы;
- решение задачи стационарной фильтрации реальных газов в пористых средах для различных термодинамических моделей, определение областей фазовых переходов на течениях газов;
- нахождение конечномерных динамик и соответствующих им точных решений нелинейных уравнений нестационарной фильтрации, установление областей фазовых переходов для полученных решений;
- решение задачи стационарного истекания реального газа из точечного источника для произвольной термодинамической модели среды, нахождение области существования решения, его асимптотического поведения;
- исследование геометрических структур, ассоциированных с уравнениями Эйлера, исследование вопросов их интегрируемости, нахождение фактор-уравнений относительно группы x-трансляций, построение точных многозначных решений для произвольной модели термодинамического состояния среды, построение множества особенностей проекции многозначных решений на плоскость (t, x), построение кривых разрыва с помощью законов сохранения, установление областей фазовых переходов для модели Ван дер Ваальса.

Научная новизна

- Впервые исследованы симметрические формы 4-го порядка для термодинамических лагранжевых многообразий идеальных газов и газа Ван дер Ваальса, установлена новая область допустимых состояний газа Ван дер Ваальса;
- Найдены новые классы оптимальных термодинамических процессов для идеальных газов; постановка задачи оптимального управления впервые использует римановы структуры на термодинамических лагранжевых многообразиях;

- Впервые задача стационарной фильтрации газов в пористых средах решена в общем виде для всех термодинамических моделей; для полученных решений найдены области фазовых переходов;
- Впервые задача истекания газа из точечного источника решена в общем виде для всех термодинамических моделей, с учетом фазовых переходов;
- Найдены новые конечномерные динамики второго порядка для уравнений нестационарной фильтрации, построены новые точные решения, им соответствующие;
- Получен новый класс многозначных точных решений уравнений Эйлера для всех термодинамических моделей, для которого рассчитаны местоположение каустик и фронта ударной волны. Найдена термодинамическая модель среды, для которой можно получить все x-инвариантные совместные с системой уравнений Эйлера дифференциальные связи.
- Впервые взаимодействие ударных волн и фазовых переходов проанализировано на основе новых точных многозначных и разрывных решений уравнений Эйлера.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации могут быть использованы для разработки новых численных методов для построения решений уравнений газовой динамики с особенностями. Нахождение областей фазовых переходов и ударных волн может быть использовано при разработке нефтяных и газовых месторождений, для управления особенностями течения газов по трубам. Из полученных классов точных решений можно находить новые решения методом размножения решений с помощью симметрий, а также найденные решения можно использовать для разработки новых численных методов. Уточнение области допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса может быть использовано для более детального анализа фазовых переходов, описываемых с помощью этой модели.

Методология и методы исследования. Описание термодинамических состояний сред и геометрических структур на них основано на методах контактной, симплектической и римановой геометрии, теории лежандровых и лагранжевых особенностей. Построение решений стационарных уравнений фильтрации основано на аналитических методах теории дифференциальных уравнений, построение решений для нестационарных уравнений фильтрации основано на теории конечномерных динамик и геометрической теории дифференциальных уравнений. При построении точных многозначных решений уравнений Эйлера были использованы методы теории уравнений Монжа-Ампера, методы теории симметрий и дифференциальных инвариантов, теории совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Решена задача оптимального управления термодинамическими процессами в идеальных газах. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой и построено ее решение в квадратурах. Установлены условия, при которых инвариантное многообразие гамильтоновой системы имеет различное число компонент связности. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы.
2. Получена новая область допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса, вычисленная с помощью формы 4-го порядка. Полученная область отличается от ранее известной, рассчитываемой с помощью формы 2-го порядка, в области критической точки.
3. Решения основных уравнений стационарной фильтрации получены в общем виде путем сведения их к уравнению Лапласа для всех моделей термодинамических состояний среды. Установлено, что в общем случае эти решения многозначные, были найдены условия, при которых решение является единственным. Оно совпадает с условием термодинамической устойчивости. Рассмотрен случай точечных источников в области фильтрации для различных моделей термодинамических состояний. Было установлено, что в окрестности стоков наблюдается конденсация среды.
4. Для уравнений нестационарной фильтрации были найдены конечномерные динамики первого порядка, и соответствующие им решения были получены для любой модели термодинамического состояния газа. Об-

ласти фазовых переходов в пространстве-времени были построены для двух типов процессов — адиабатического и изоэнтальпического. Динамики второго порядка были найдены для специальных видов процессов. Они отличаются от известных ранее динамик второго порядка для этого уравнения. Соответствующие им решения разрушаются за конечное время.

5. Решена задача адиабатического истекания реального газа в трехмерном пространстве из точечного источника заданной интенсивности с учетом фазовых переходов. Получены точные решения стационарных уравнений Эйлера для произвольной модели термодинамического состояния среды. Установлено, что вблизи источника наблюдается конденсация среды. Установлена область существования решений и асимптотическое поведение решений на бесконечности. Установлено, что найденные решения регулярны на бесконечности.
6. Найдены новые классы многозначных точных решений уравнений Эйлера для произвольного класса реальных газов и термодинамических процессов и построены соответствующие разрывные решения, которым отвечают ударные волны. Для различных конкретных примеров таких решений установлены области появления особенностей проекции на плоскость независимых переменных (каустики), получены области возникновения фазового перехода (в модели Ван дер Ваальса), и возникновения ударных волн. Установлено, что ударная волна может сопровождаться также фазовым переходом.
7. Установлено условие интегрируемости характеристических распределений, ассоциированных с уравнениями Эйлера. Этому условию отвечают определенные термодинамические состояния сред (политропические газы с показателем политропы 3).
8. Получено фактор-уравнение для уравнений Эйлера относительно группы трансляций вдоль x, установлено условие его приводимости к волновому уравнению. Этому условию отвечает определенное термодинамическое состояние среды, для которого можно найти все x-инвариантные совместные с уравнениями Эйлера дифференциальные связи.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечена

- использованием классических математических моделей;
- использованием строгих аналитических методов исследования;
- сравнением полученных результатов с известными ранее.

Апробация работы. Основные результаты работы представлены автором на следующих конференциях и семинарах:

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых «Ломоносов». Москва, 9-13 апреля 2018 г.
- Научная школа-конференция «Зимняя геометрическая школа». Переславль-Залесский, 22-27 января 2018 г.
- 11, 12, 13 Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем» , ИПУ РАН, Москва, 1-3 октября, 2018, 2019, 2020.
- 13-ое Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ XIII), Москва, 17-20 июня 2019.
- 14 Международная Казанская научная школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», Казань, 7-12 сентября 2019.
- Научный семинар «Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений» под руководством И.С. Красильщика, 14 ноября 2018, Независимый московский университет, Москва, Россия.
- Научный семинар лаборатории «Проблем качественного исследования нелинейных динамических систем» ИПУ РАН под руководством А.Г. Кушнера и В.В. Лычагина, 29 ноября 2018, 31 января 2019, 27 апреля 2020.
- Научный семинар кафедры физико-математических методов управления, МГУ, Москва, 9 декабря 2020.
- International Conference «Local and Nonlocal Geometry of PDEs and Integrability», dedicated to the 70th birthday of Joseph Krasil'shchik, 8-12 October, 2018, Trieste, Italy.
- Summer scientific school and workshop Wisla-2019 «Geometrical methods in nonlinear PDEs and critical phenomena» (Wisla, Poland, 19-28 August,

2019), a registered satellite meeting of ICIAM 2019, The International Congress on Industrial and Applied Mathematics, to be held in Valencia (Spain), July 15-19, 2019.

- Winter School and Workshop Wisla-2021 «Groups, Invariants, Integrals, and Moving Frames» (Wisla, Poland), January, 25 - February, 5, 2021.
- Scientific seminar «Cohomology in algebra, geometry, physics and statistics», Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Prague, May 6, 2020.
- Hamiltonian Systems Seminar, University of Toronto and University of Arizona, Toronto, Canada, April 13, 2021.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 11 статьях [R1-R11] в рецензируемых журналах из баз данных Scopus и Web of Science, из которых 1 входит в Q1 (Web of Science), 3 входят в Q1 (Scopus), Q2 (Web of Science), 5 входят в Q2 (Scopus), 3 статьи опубликованы в журналах, входящих также в перечень ВАК, 5 работ [R12-R16] опубликованы в сборниках трудов конференций. Всего 16 печатных работ.

Личный вклад. Все основные результаты получены автором самостоятельно. Вклад автора диссертации в работах [R2-R4, R6, R7, R16] составляет 70%, в работах [R5, R8-R15] вклад автора составляет 85%.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения, содержит 26 рисунков. Список литературы содержит 101 наименование. Полный объем диссертации составляет 122 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проводится обзор литературы по проблемам, затрагиваемым в диссертации, обосновывается актуальность темы исследования, формулируются цель работы и задачи, указывается новизна полученных результатов, методология и методы исследования, обосновывается теоретическая и практическая значимость работы, формулируются положения, выносимые на защиту, и приводятся сведения об апробации.

В **первой главе** приводятся подготовительные сведения из термодинамики, и особый акцент делается на ее связи с теорией измерений. Такой подход естественным образом приводит к формулировке равновесной термодинамики на языке контактной и симплектической геометрии, а именно, состояние термодинамической системы в равновесии задается как лежандрово или лагранжево многообразие в термодинамическом контактном или симплектическом пространстве соответственно. Дисперсия измерений экстенсивных термодинамических величин индуцирует на лагранжевых многообразиях риманову структуру и служит для определения областей применимости термодинамических моделей.

По аналогии с дисперсией, центральный момент четвертого порядка индуцирует симметрическую форму четвертого порядка на термодинамических лагранжевых многообразиях. Условие его положительности задает дополнительное условие применимости для моделей термодинамического состояния. Было установлено, что кривые вырождения формы четвертого порядка и квадратичной формы для газа Ван дер Ваальса отличаются в окрестности критической точки, и была получена новая область применимости для модели Ван дер Ваальса.

Также в этой главе решена задача оптимального управления термодинамическими процессами для идеального газа. Оптимальный термодинамический процесс является интегральной кривой линейной комбинации базисных контактных векторных полей на лагранжевом многообразии, а коэффициенты этой линейной комбинации играют роль управляющих параметров. Ограничение для управлений задается с помощью упомянутой выше римановой структуры, а именно, ее значение на двух экземплярах искомого векторного поля, отнесенное к квадрату внутренней энергии, ограничено некоторым положительным числом. Это физически означает, что дисперсия измерений экстенсивных термодинамических величин (внутренняя энергия и объем) вдоль искомого процесса ограничены некоторым числом, зависящим от значения внутренней энергии. Функционал качества, который достигает своего максимума, имеет вид интеграла 1-формы работы по искомой кривой. Таким образом, вдоль искомого процесса газ совершает максимальную работу. Такая постановка позволяет применить принцип максимума Понтрягина для решения задачи оптимального управления. Было установлено, что в случае идеального газа гамильтонова система, возникающая в результате применения принципа максимума, удовлетворяет теореме Лиувилля об интегрируемости. В этом случае траектории гамильтоновой системы являются обмотками инвариантного многообразия, заданного уровнями интегралов гамильтоновой системы. Было установлено, что инвариантное многообразие не является односвязным, в зависимости от соотношений уровней интегралов оно может иметь либо 3, либо 2 компоненты связности. Также были исследованы особенности его проекции на пространство состояний. Для того чтобы проинтегрировать гамильтонову систему, удобно записать ее в переменных «действие-угол», в которых она принимает наиболее простой вид. Эти переменные были построены, и было найдено решение гамильтоновой системы в квадратурах.

Во **второй главе** решена задача стационарной фильтрации реальных газов в трехмерном пространстве для произвольной модели термодинамического состояния.

Система уравнений, описывающих однокомпонентную фильтрацию газов в пористых средах, состоит из следующих уравнений: [4–6]

1. закон Дарси
$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \tag{1}$$
где $\mathbf{u}(x) = (u_1, u_2, u_3)$ — поле скоростей, $x \in D \subset \mathbb{R}^3$, $p(x)$ — давление, $k = k(v, T)$ и $\mu = \mu(v, T)$ коэффициенты проницаемости и вязкости соответственно, которые предполагаются функциями состояния среды.

2. Закон сохранения массы

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{2}$$

где $\rho(x) = v^{-1}(x)$ — плотность среды.

В дополнение к (1) и (2) предполагается адиабатичность течения, то есть удельная энтропия s сохраняется вдоль траекторий векторного поля $\mathbf{u}$:

$$(\mathbf{u}, \nabla s) = 0. \tag{3}$$

Для замыкания данной системы требуются уравнения состояния:

$$p = RT\phi_v, \quad e = RT^2\phi_T, \quad s = R(\phi + T\phi_T), \tag{4}$$

где функция $\phi(v, T)$ задана. Таким образом, система (1), (2)-(4) становится полной.

Теорема 1. *Пусть термодинамическое состояние газа задано лежандровым многообразием $\widehat{L}$ и $l \subset \widehat{L}$ — термодинамический процесс. Тогда уравнения фильтрации (1), (2), (4) эквивалентны задаче Дирихле*

$$\Delta(Q(\tau)) = 0, \quad \tau|_{\partial D} = \tau_0,$$

где

$$Q(\tau) = -\int v^{-1}(\tau)\frac{k(\tau)}{\mu(\tau)}p'(\tau)d\tau,$$

τ *— параметр на* l *и* Δ *— оператор Лапласа.*

На основе полученных решений дается анализ критических явлений, возникающих в фильтрационных потоках: особенности полученных решений и фазовые переходы.

В **третьей главе** исследуются нестационарные течения газов в пористых средах. Соответствующая система уравнений имеет вид [4–6]:

- закон Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu}p_x, \tag{5}$$

- уравнение неразрывности

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{6}$$

где $u(t,x)$ — скорость газа, $p(t,x)$ — давление, $\rho(t,x)$ — плотность, k и μ — коэффициенты проницаемости и вязкости соответственно. Фиксируя термодинамическое состояние (4) и кривую термодинамического процесса l на нем, получаем замкнутую систему.

Найдены некоторые классы точных решений в нестационарной фильтрации, разрушающихся за конечное время, для произвольных термодинамических моделей сред, и проанализированы фазовые переходы на полученных решениях. Основной аппарат, используемый в данной главе, — теория конечномерных динамик.

В **четвертой главе** решена задача адиабатического истекания реальных газов из точечного источника заданной интенсивности.

Движение невязких сред описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p, \\ \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ (\mathbf{u}, \nabla s) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\mathbf{u}(x)$ — поле скоростей, $p(x)$ — давление, $\rho(x) = v^{-1}(x)$ — плотность, $x \in \mathbb{R}^3$.

Задача решена для произвольного термодинамического состояния газа. Дается анализ фазовых переходов на полученных решениях, устанавливаются области существования решения. Исследовано также асимптотическое поведение решений на бесконечности.

Теорема 2. *Пусть термодинамическое состояние газа задано лежандровым многообразием $\widehat{L}$ и $l \subset \widehat{L}$ — термодинамический процесс. Пусть (a, J) — изотропный источник интенсивности J, расположенный в точке a. То-*

гда решение задачи (7) дается неявно следующим выражением

$$\frac{v^2(\tau)}{2|x-a|^4} + \left(\frac{4\pi}{J}\right)^2 \Psi(\tau) = 0, \tag{8}$$

где τ *— параметр на* l *и*

$$\Psi(\tau) = \int v(\tau)p'(\tau)d\tau.$$

В **пятой главе** найдены новые классы многозначных решений нестационарных одномерных уравнений Эйлера для произвольных моделей термодинамического состояния среды, проанализированы особенности их проекций на пространство независимых переменных, построены каустики, линии разрыва (фронты ударных волн), фазовые переходы.

Нестационарные одномерные течения газов описываются следующей двухкомпонентной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + uu_x + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\rho_x = 0, \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $E = \mathbb{R}^4$ координатами (t, x, u, ρ) — пространство 0-джетов функций на $M = \mathbb{R}^2(t, x)$. Этой системе можно сопоставить две дифференциальные 2-формы на E:

$$\omega_1 = \rho dt \wedge du + u dt \wedge d\rho - dx \wedge d\rho, \tag{10}$$

$$\omega_2 = u dt \wedge du + \frac{p'(\rho)}{\rho} dt \wedge d\rho - dx \wedge du. \tag{11}$$

Такое представление допускает естественное обобщение понятия классического решения для указанной системы. Двумерное многообразие $N \subset E$ называется *многозначным решением* системы (9), если $\omega_1|_N = \omega_2|_N = 0$. Заметим, что всякое многозначное решение системы (9) является лагранжевым многообразием. Для нахождения таких интегральных лагранжевых многообразий к системе (9) добавляется дополнительное соотношение вида

$t - f(u, \rho)/\rho = 0$, в результате чего получается переопределенная система, условие совместности которой дает уравнение, которому должна удовлетворять функция $f(u, \rho)$:

$$f_{uu} - A^{-2}(\rho) f_{\rho\rho} = 0, \tag{12}$$

где $A(\rho) = \sqrt{p'(\rho)}/\rho$.

Установлено условие приводимости уравнения (12) к волновому с постоянными коэффициентами, тем самым найдена модель термодинамического состояния газа, для которого можно описать все совместные соотношения указанного вида.

С помощью решений уравнения (12) были найдены новые классы точных многозначных решений уравнений Эйлера для произвольной модели среды, а также из них были построены разрывные, соответствующие ударным волнам. В случае модели газа Ван дер Ваальса дан также анализ фазовых переходов вместе с анализом ударных волн.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

1. Решена задача оптимального управления термодинамическими процессами в идеальных газах. Показано, что гамильтонова система в случае идеального газа является вполне интегрируемой и построено ее решение в квадратурах. Установлены условия, при которых инвариантное многообразие гамильтоновой системы имеет различное число компонент связности. Доказана теорема об управляемости рассматриваемой динамической системы.
2. Исследованы термодинамические лагранжевы и лежандровы многообразия различных газов, таких как газ Ван дер Ваальса, газ Пенга-Робинсона, газ Редлиха-Квонга. Получены области фазового перехода, особенности проекции термодинамических лагранжевых и лежандровых многообразий на пространство интенсивных переменных.
3. Получена новая область допустимых состояний в модели газа Ван дер Ваальса, вычисленная с помощью формы 4-го порядка. Полученная область отличается от ранее известной, рассчитываемой с помощью формы 2-го порядка, в области критической точки.

4. Решения основных уравнений стационарной фильтрации были получены в общем виде путем сведения их к уравнению Лапласа для всех моделей термодинамических состояний среды. Установлено, что в общем случае эти решения многозначные, были найдены условия, при которых решение является единственным. Оно совпадает с условием термодинамической устойчивости. Рассмотрен случай точечных источников в области фильтрации для различных моделей термодинамических состояний. Было установлено, что в окрестности стоков наблюдается конденсация среды.
5. В задаче нестационарной одномерной фильтрации были найдены конечномерные динамики первого порядка, и соответствующие им решения были получены для любой модели термодинамического состояния газа. Области фазовых переходов в пространстве-времени были построены для двух типов процессов — адиабатического и изоэнтальпического. Динамики второго порядка были найдены для специальных видов процессов. Они отличаются от известных ранее динамик 2 порядка для этого уравнения. Соответствующие им решения разрушаются за конечное время.
6. Решена задача адиабатического истекания реального газа в трехмерном пространстве из источника заданной интенсивности с учетом фазовых переходов. Получены точные решения стационарных уравнений Эйлера для произвольной модели термодинамического состояния среды. Установлено, что вблизи источника наблюдается конденсация среды. Установлена область существования решений и асимптотическое поведение решений на бесконечности. Установлено, что найденные решения регулярны на бесконечности.
7. Для уравнения Навье-Стокса построены асимптотические разложения решений относительно малого параметра (в случае больших и малых интенсивностей источника).
8. Найдены новые классы многозначных точных решений уравнений Эйлера для произвольного класса реальных газов и термодинамических процессов и построены соответствующие разрывные решения, которым

отвечают ударные волны.

9. Для различных конкретных примеров таких решений установлены области появления особенностей проекции на плоскость независимых переменных (каустики), получены области возникновения фазового перехода (в модели Ван дер Ваальса), и возникновения ударных волн. Установлено, что ударная волна может сопровождаться также фазовым переходом.
10. Установлено условие интегрируемости характеристических распределений, ассоциированных с уравнениями Эйлера. Этому условию отвечают определенные термодинамические состояния сред (политропические газы с показателем политропы 3).
11. Получено фактор-уравнение для уравнений Эйлера относительно группы трансляций вдоль x, установлено условие его приводимости к волновому уравнению. Этому условию отвечает определенное термодинамическое состояние среды, для которого можно найти все x-инвариантные совместные с уравнениями Эйлера дифференциальные связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М: ФИЗМАТЛИТ. 1986. 736 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
3. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge Univ. Press. 2000.
4. Scheidegger A.E. The physics of flow through porous media. Revised edition. The Macmillan Co., New-York. 1960.
5. Leibenson L.S. Motion of natural liquids and gases in a porous medium. Gostekhizdat, Moscow. 1947.
6. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media. McGraw-Hill, New-York. 1937.
7. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра. 1993. 416 с.
8. Aziz K., Settary A. Petroleum reservoir simulation. London: Applied Science Publishers Ltd. 1979. 476 pp.
9. Henk H. Fluids in Porous Media. Transport and phase changes. Morgan & Claypool Publishers. 2016. 89 pp.
10. Masoodi R., Pillai K.M. Wicking in Porous Materials: Traditional and Modern Modeling Approaches. New York: CRC Press Taylor & Francis Group. 2013. 380 pp.
11. Фортов В. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
12. Arnold V. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Springer Netherlands. 1990.
13. Arnold V. Catastrophe Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1984.
14. Arnold V., Gusein-Zade S., Varchenko, A. Singularities of Differentiable Maps. Birkhäuser, Basel. 1985.
15. Gibbs J.W. A Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic

Properties of Substances by Means of Surfaces // Transactions of the Connecticut Academy. 1873. Vol. 1. p. 382–404.

16. Mrugala R. Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics // Reports on Mathematical Physics. 1978. Vol. 14(3). p. 419–427.
17. Ruppeiner G. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory // Reviews of Modern Physics. 1995. Vol. 67(3). p. 605–659.
18. Lychagin V. Contact Geometry, Measurement, and Thermodynamics. // Nonlinear PDEs, Their Geometry and Applications. Kycia, R., Schneider, E., Ulan, M., Eds.; Birkhäuser: Cham, Switzerland. 2019. p. 3–52.
19. Modin K., Viviani M. A Casimir preserving scheme for long-time simulation of spherical ideal hydrodynamics // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 884. A-22.
20. Viviani M. A minimal-variable symplectic method for isospectral flows // BIT Numerical Mathematics. 2020. Vol. 60, p. 741–758.
21. Bauer M., Modin K. Semi-invariant Riemannian metrics in hydrodynamics // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2020. Vol. 59(2). Article 65.
22. Roulstone I., Sewell M.J. The mathematical structure of theories of semigeostrophic type // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. 1997. Vol. 355. p. 2489-2517.
23. Li Yi A., Olver P., Rosenau P. Non-Analytic Solutions of Nonlinear Wave Models // Nonlinear Theory of Generalized Functions. Research Notes in Mathematics. 1998. Vol. 401. p. 129-145.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI

R1. Roop M. Singularities in one-dimensional Euler flows // J. Geom. Phys. 2021. Vol. 166. Article 104272.
Impact factor JCR (WoS): 1.056. DOI: 10.1016/j.geomphys.2021.104272.

R2. Lychagin V., Roop M. Phase transitions in filtration of Redlich-Kwong gases // J. Geom. Phys. 2019. Vol. 143. p. 33–40.
Impact factor JCR (WoS): 1.056. DOI: 10.1016/j.geomphys.2019.05.002.

R3. Lychagin V., Roop M. Steady filtration of Peng-Robinson gases in a porous medium // Global and Stochastic Analysis. 2019. Vol. 6(2). p. 59–74.
Impact factor SJR: 0.297.

R4. Lychagin V., Roop M. Critical Phenomena in Filtration Processes of Real Gases // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, Iss. 3. p. 382–399.
Impact factor SJR: 0.346. DOI: 10.1134/S1995080220030129.

R5. Lychagin V., Roop M. Critical phenomena and singular solutions in non-stationary filtration of real gases // Global and Stochastic Analysis. 2020. Vol. 7, Iss. 1. p. 73–86. Impact factor SJR: 0.297.

R6. Кушнер А.Г., Лычагин В.В., Рооп М.Д. Контактная геометрия в оптимальном управлении термодинамическими процессами в газах // Доклады Российской Академии Наук. 2020. Т. 493(1). С. 99-103; Kushner A., Lychagin V., Roop M. Contact Geometry in Optimal Control of Thermodynamic Processes for Gases // Doklady Mathematics. 2020. Vol. 102(1). p. 346-349.
Impact factor JCR (WoS): 0.548. DOI: 10.1134/S1064562420040109.

R7. Kushner A., Lychagin V., Roop. M. Optimal Thermodynamic Processes for Gases // Entropy. 2020. Vol. 22, Iss. 4. p. 448 (1-14).
Impact factor JCR (WoS): 2.494. DOI: 10.3390/e22040448.

R8. Lychagin V., Roop. M. On Higher Order Structures in Thermodynamics // Entropy. 2020. Vol. 22, Iss. 10. p. 1147 (1-8).
Impact factor JCR (WoS): 2.494. DOI: 10.3390/e22101147.

R9. Lychagin V., Roop. M. Real gas flows issued from a source // Analysis and Mathematical Physics. 2020. Vol. 10, Iss. 1. p. 3 (1-16).
Impact factor JCR (WoS): 2.056. DOI: 10.1007/s13324-019-00349-z.

R10. Lychagin V., Roop. M. Shock Waves in Euler Flows of Gases // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, Iss. 12. p. 2466–2472.
Impact factor SJR: 0.346. DOI: 10.1134/S1995080220120276.

R11. Lychagin V., Roop. M. Singularities in Euler Flows: Multivalued Solutions, Shockwaves, and Phase Transitions // Symmetry. 2021. Vol. 13, Iss. 1. p. 54 (1-11).
Impact factor JCR (WoS): 2.645. DOI: 10.3390/sym13010054.

Иные публикации

R12. Lychagin V., Roop. M. Critical Phenomena in Darcy and Euler Flows of Real Gases // E. Schneider, M. Ulan (eds). Differential Geometry, Differential Equations, and Mathematical Physics. Basel, Switzerland: Springer Nature. 2021. p. 151-186. DOI: 10.1007/978-3-030-63253-3_5.

R13. Лычагин В.В., Рооп М.Д. Стационарная фильтрация реальных газов // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского (Казань, 2019). Казань: Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. Т. 57. С. 220–224.

R14. Рооп. М.Д. Применение нормализаторов к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений // Сборник тезисов докладов XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых «Ломоносов». Москва, 9-13 апреля 2018 г., с. 712-713.

R15. Лычагин В.В., Рооп М.Д. Стационарная адиабатическая фильтрация реальных газов // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1099-1103.

R16. Кушнер А.Г., Лычагин В.В., Рооп М.Д. Оптимальные термодинамические процессы для идеальных газов // Труды 13-ой Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD-2020, Москва, 2020). М.: ИПУ РАН, 2020, С. 755-757.