МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Кибкало Владислав Александрович

Топология интегрируемых многопараметрических аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли»

Специальность 01.01.04 —
геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководителиь: **Фоменко Анатолий Тимофеевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН

Официальные оппоненты: **Соколов Сергей Викторович,**
доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национально-исследовательский университет)», заведующий кафедрой теоретической механики.

Рябов Павел Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, доцент, ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», Факультет информационных технологий и анализа больших данных, Департамент анализа данных и машинного обучения, профессор.

Цветкова Анна Валерьевна,
кандидат физико-математических наук, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория механики природных катастроф, научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 15 октября 2021 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а так же со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС "ИСТИНА": https://istina.msu.ru/dissertations/378944486

Автореферат разослан 15 сентября 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ МГУ,
д.ф.-м.н., доцент

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

В последние годы и десятилетия было открыто множество новых интегрируемых систем, а также интегрируемых возмущений классических интегрируемых систем геометрии, механики и математической физики. В основе этого — быстрый рост возможностей вычислительной техники и развитие программных сред символьных вычислений [1], новые алгебраические [2] [3] и аналитические [4] подходы и конструкции.

Диссертация посвящена изучению топологических свойств таких аналогов знаменитого случая Ковалевской [5] интегрируемости уравнений тяжелого твердого тела, называемого также волчком Ковалевской или классическим случаем Ковалевской.

Как оказалось, эта система может быть различными путями обобщена с сохранением интегрируемости. Так, И.В.Комаровым были построены [6] ее аналоги на алгебрах $so(4)$ и $so(3,1)$. В работах Х.М.Яхьи была показана интегрируемость или частичная интегрируемость различных аналогов системы Ковалевской, например при добавлении гиростата (система Ковалевской–Яхьи) или магнитного поля [7] , а также сингулярных слагаемых [8] (для некоторых добавок имеет место лишь частичная интегрируемость). В работах В.В.Соколова был открыт новый класс систем, например, волчок Ковалевской–Соколова [9] . Еще один класс аналогов связан с рассмотрением псевдо–евклидовых аналогов известных систем механики. Он был рассмотрен А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым [10] . Отметим, что там же были построены псевдо–евклидовы аналоги и для ряда других классических систем.

Все эти системы устроены сложнее, чем классический случай Ковалевской, и зависят от большего количества числовых параметров. Для их исследования

[1] Соколов В.В., *Новый интегрируемый случай уравнений Кирхгофа*, ТМФ 2001, **129**, No.1, p. 31–37.

[2] Оден М., *Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем*, Изд-во УдГУ, Ижевск 1999.

[3] Adler M., van Moerbeke P., *A new geodesic flow on SO(4)*, Probability, Statistical Mechanics, and Number Theory. Adv. Math. Suppl. Stud. Orlando, Fla.: Acad. Press. 1986. **9**, p. 81–96.

[4] Yehia H. M., *The Master integrable two-dimensional system with a quartic second integral*, J. Phys. A: Math. Gen., 2006, **39**, p. 5807 – 5824.

[5] Kowalewski S., *Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Mathematica. 1889. **12**, p. 177–232.

[6] Komarov I.V., *Kowalewski basis for the hydrogen atom*, Theoret. and Math. Phys. 1981. **47**, No.1, p. 320–324.

[7] Yehia H.M., *New Integrable Cases in the Dynamics of Rigid Bodies"*, Mech. Res. Comm., 1986, **13**:3 (1986), 169–172.

[8] Yehia H.M., *New generalizations of the integrable problems in rigid body dynamics*, J. Phys A: Math. Gen. 1997, **30**, p. 7269–7275.

[9] Sokolov V.V., *A Generalized Kowalewski Hamiltonian and New Integrable Cases on e(3) and so(4)*, in "Kowalevski property", V. B. Kuznetsov (Ed.), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 32, Providence, R.I.: AMS, 2002, pp. 304–315.

[10] Borisov A.V., Mamaev I.S., *Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces*, Rus. J. of Math. Phys. 2016. **23**:4, p. 431–454.

оказываются полезны разнообразные методы, развитые в последние годы. В рамках подхода, заложенного С. Смейлом [11] , изучается их критическое множество и бифуркационные диаграммы. Топологические и динамические инварианты, построенные А.Т. Фоменко, его соавторами и учениками (см. базовые работы [12] [13] [14] [15] и, подробнее, монографию [16] А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко), успешно вычисляются [17] [18] [19] для различных систем геометрии, механики и математической физики, а также систем интегрируемых биллиардов на клеточных комплексах. [20]. Еще одним подходом является анализ критических подсистем, предложенный М.П. Харламовым и выполненный им же [21] [22], П.Е. Рябовым [23] [24] и С.В. Соколовым [25] для различных интегрируемых обобщений классических систем.

Изучение многопараметрических систем с точки зрения топологии их слоений Лиувилля представляется достаточно перспективным: с одной стороны, особенности таких систем зачастую оказываются объединены в параметрические семейства, что дает надежду встретить интересные примеры их бифуркаций. Отметим, что изучение бифуркаций слоений Лиувилля, зависящих от параметра, и их связей с теорией особенностей в параметрических семействах гладких функций

[11]Smale S., *Topology and Mechanics: 1*, Invent. Math. 1970, **10**, No.4 p. 305–331.

[12]Фоменко А.Т., *Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1986. **50**, No.6, с. 1276–1307.

[13]Фоменко А.Т., Цишанг Х., *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990, **54**, No.3, с. 546–575

[14]Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т., “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, УМН. 1990, **45**, No.2 (272), с. 49–77

[15]Болсинов А.В., Фоменко А.Т., “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I”, Матем. сб. 1994, **185**, No.4, с. 27–80

[16]Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.* Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999, т. 1, 2.

[17]Oshemkov A.A., *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations.* In book: Topological Classification of Integrable Systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6). AMS, Providence (1991), P. 67–146.

[18]Болсинов А. В., Рихтер П. Х., Фоменко А. Т., *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сб. 2000. **191**, No.2, с. 3–42.

[19]Fomenko A.T., Morozov P.V., *Some new results in topological classification of integrable systems in rigid body dynamics*, Contemp. geom. and related topics, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004, 201–222.

[20]Ведюшкина В.В., *Интегрируемые биллиарды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы*, Докторская диссертация 2020.

[21]Kharlamov M.P., *Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields*, RCD, 2005, **10**, No.4, с. 381–398.

[22]Kharlamov M. P., *Extensions of the appelrot classes for the generalized gyrostat in a double force field*, RCD, 2014, **19**, No.2, с. 226–244.

[23]Рябов П. Е., *Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела*, ТМФ, 2013, **176**, No.2, с. 205–221.

[24]Ryabov P. E. *New invariant relations for the generalized two-field gyrostat*, Journal of Geometry and Physics. 2015. **87**, p. 415–421.

[25]Соколов С.В., *Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата*, Доклады РАН, 2017, **477**, No.6, p. 660–663.

представляет значительный интерес и активно ведется в последние годы [26] [27] [28] [29] [30].

Кроме того, изучение топологии слоений Лиувилля интегрируемых обобщений классических систем часто не потребуется начинать "с нуля": существенная часть информации может быть извлечена из уже рассмотренных прежде самих классических систем. Так при изучении аналогов системы Ковалевской на алгебрах $so(4)$ и $so(3,1)$ оказываются полезными результаты о фазовой топологии двух "более простых" систем: классического случая Ковалевской и системы В.В.Соколова. Отметим также, что бывает верно и обратное: существенная часть информации о классической системе может быть получена [31] из анализа ее $so(4)$-аналога путем предельного перехода по параметру пучка скобок Ли–Пуассона (т.е. от алгебры $so(4)$ к алгебре Ли $e(3)$).

Другим активно развивающимся в последние годы направлением является изучение явление некомпактности слоев слоения Лиувилля и их особенностей в интегрируемых системах. В обзорной работе [32] Д.А.Федосеев и А.Т.Фоменко привели широкий список таких особенностей, причем некоторые их них происходят без падения ранга отображения момента, что существенно усложняет их поиск. Отметим также недавние работы [33] [34] [35] [36] , посвященные их изучению.

Как было обнаружено нами, некомпактные слои слоения Лиувилля и некомпактные особенности возникают в псевдо–евклидовых аналогах классической системы Ковалевской и ее аналогов на алгебрах Ли $so(3,1)$ и $so(4)$. В связи с этим важным вопросом является описание условий компактности совместных поверхностей уровня четырех первых интегралов таких псевдо-евклидовых аналогов.

[26] V. V. Kalashnikov, *Typical integrable Hamiltonian systems on a four-dimensional symplectic manifold.* Izvestiya: Mathematics, 1998, **62**, No.2, p. 261–285.

[27] Wassermann G., *Classification of singularities with compact Abelian symmetry.* Univ. Regensburg, preprint, 1976; Singularities Banach Center Publications, 1998, **20**, p. 475–498. PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw.

[28] Broer H.W., Chow S.N., Kim Y., Vegter G., *A normally elliptic Hamiltonian bifurcation*, Z. angew. Math. Phys., 1993, **44**, p. 389–432.

[29] Kudryavtseva E., *Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems*, arXiv:2008.01067.

[30] Bolsinov A.V., Guglielmi L., Kudryavtseva E.A., *Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom,* Phil. Trans. Royal Soc. A: Math., Phys. and Engin. Sc. 2018, **376**, No.2131, p. 20170424.

[31] Козлов И.К., *Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4)*, Матем. сб. 2014, **205**, No.4, с. 79–120.

[32] Федосеев Д.А., Фоменко А.Т., *Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем*, Фундамент. и прикл. матем. 2016, **21**, No.6, 217–243.

[33] Кудрявцева Е.А., *Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками*, Докл. РАН. 2012, **445**, No.4, с. 383–385

[34] Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т., *Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы*, Изв. РАН. Сер. матем. 2017, **81**, No.4, 20–67.

[35] Nikolaenko S.S., *Topological classification of the Goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case*, Lobachevskii J. Math. 2017, **38**, No.6, с. 1050–1060

[36] Николаенко С.С., *Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях*, Матем. сб. 2020, **211**, No.8, 68–101

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Вычислить инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на каждой неособой трехмерной изоэнергетической поверхности для аналога интегрируемой системы Ковалевской в случае алгебре Ли $so(4)$.

2. Стратифицировать трехмерное пространство значений энергии и двух функций Казимира той же системы, построить граф соседства ее трехмерных стратов, а также изучить разделяющее множество этой системы на плоскости значений двух функций Казимира.

3. Построить бифуркационные диаграммы отображения момента для аналога интегрируемой системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(3,1)$ для нулевого значения интеграла площадей и различных значений геометрического интеграла.

4. Завершить вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля неособых изоэнергетических поверхностей той же системы на каждой неособой трехмерной изоэнергетической поверхности.

5. Определить, являются ли компактными или некомпактными совместные поверхности уровня четырех первых интегралов произвольной системы из псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ составлен полный список из 27 классов попарно лиувиллево не эквивалентных слоений Лиувилля на неособых трехмерных связных изоэнергетических поверхностях. В полученном списке содержатся все классы лиувиллевой эквивалентности слоений для классического случая Ковалевской, а также слоения систем Ковалевской–Яхьи, Клебша и Соколова в подходящих зонах энергии. Допустимые базисы, соответствующие тем дугам бифуркационной диаграммы отображения момента системы Ковалевской на алгебре $so(4)$, которые не имеют аналогов в классическом случае Ковалевской, были выражены в терминах однозначно определенных циклов, соответствующих дугам, имеющим такие аналоги.

2. Для системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ найдено разделяющее множество на плоскости значений двух функций Казимира системы. Оно переходит в себя при изменении знака интеграла площадей, и в области его неотрицательных значений является объединением дуг 21 кривой, заданных в найденных подходящих координатах как явные функции одной из координат от другой. При этом было определено, как особые точки бифуркационной диаграммы отображения момента упорядочены по возрастанию значения энергии в них в зависимости от значений двух функций Казимира.

3. Для системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ выполнена стратификация трехмерного пространства параметров. Координаты точки в нем соответствуют тройке значений энергии и двух функций Казимира на некоторой изоэнергетической поверхности. Каждый страт гомеоморфен диску размерности от 0 до 3 и открыт в остове той же размерности. Было показано, что полный список трехмерных стратов (камер) содержит 54 камеры. Из них 53 камеры состоят из точек с одним и тем же классом слоения Лиувилля на соответствующей неособой трехмерной изоэнергетической поверхности, а одна камера состоит из точек, для которых соответствующая изоэнергетическая поверхность пуста. Объединение их границ разбивается на 119 двумерных стратов (соответствующих особым точкам бифуркационной диаграммы или двумерным орбитам коприсоединенного представления), 83 ребра и 17 вершин. Для каждой 2-грани указан тип особой точки и граничащие по ней 3-страты. Составлен граф соседства трехмерных камер, ребрам которого отвечают двумерные страты.

4. Для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ при нулевой постоянной площадей построена бифуркационная диаграмма отображения момента в зависимости от принадлежности значения геометрического интеграла одному из шести открытых промежутков. При этом была проверена невырожденность критических точек ранга 1 и 0 и описаны круговые молекулы особых точек этих бифуркационных диаграмм.

5. Для аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ составлен полный список из 28 инвариантов Фоменко–Цишанга его слоений Лиувилля в ограничении на неособые трехмерные изоэнергетические поверхности. Все они попарно различны. Данный список содержит все классы лиувиллевой эквивалентности классического случая Ковалевской и случая Соколова интегрируемости уравнений Кирхгофа, а также два класса слоений Лиувилля системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ (в одном из них, с точностью до изменения знака дополнительного интеграла). При этом допустимые базисы для дуг бифуркационной диаграммы отображения момента системы Ковалевской на алгебре $so(3,1)$, не имеющие аналогов в классическом случае Ковалевской, были выражены через однозначно определенные циклы

соответствующих боттовских 3-атомов. Для каждого из 25 классов грубой лиувиллевой эквивалентности системы Ковалевской–Соколова на неособых изоэнергетических поверхностях были вычислены недостающие числовые метки.

6. В случае ненулевого значения постоянной площадей вопрос о компактности совместного уровня четырех первых интегралов системы полностью решен для произвольной системы из псевдо–евклидова аналога семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли. А именно, найдена парабола на плоскости значений гамильтониана и интеграла Ковалевской, по одну сторону от которой лежат образы компактных (или пустых) совместных поверхностей уровня, а на самой параболе и по другую сторону от нее лежат образы некомпактных совместных поверхностей уровня. Коэффициенты в уравнении этой параболы зависят от параметра пучка скобок Ли–Пуассона и не зависят от значений функций Казимира.

Объект и предмет исследования

Объектом исследований являются интегрируемые аналоги известного волчка Ковалевской в случае алгебр Ли, отличных от алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства. Изучаются такие системы–аналоги в случае алгебр Ли $so(3,1)$ и $so(4)$, составляющие однопараметрическое семейство интегрируемых систем на пучке алгебр Ли $so(3,1)-e(3)-so(4)$ вместе с классической системой Ковалевской. Также изучается псевдо–евклидов аналог указанного семейства. Вместо классической системы Ковалевской в такое семейство–аналог будет входить ее аналог в случае алгебры Ли $e(2,1)$ — группы движений трехмерного псевдо–евклидова пространства.

Предметом исследования являются разнообразные топологические инварианты слоений Лиувилля данных интегрируемых систем.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно, и её новизна заключаются в следующем:

1. Вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на неособых трехмерных изоэнергетических поверхностях для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$, обнаружены эквивалентности этой системы другими интегрируемыми системами в подходящих зонах энергии.

2. Описано разделяющее множество на плоскости значений двух функций Казимира (геометрического интеграла и интеграла площадей) для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(4)$.

3. Произведена стратификация трехмерного пространства параметров (значений энергии и двух функций Казимира) для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(4)$. Построен граф соседства трехмерных стратов, которым соответствуют классы лиувиллевой эквивалентности данной системы в ограничении на неособые изоэнергетические поверхности.

4. Вычислена бифуркационная диаграмма в случае нулевой постоянной площадей для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(3,1)$.

5. Завершено вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях для интегрируемого аналога системы Ковалевской в случае алгебры $so(3,1)$ и для системы Ковалевской–Соколова в случае алгебры $e(3)$.

6. Доказан критерий компактности совместной поверхности уровня четырех первых интегралов каждой системы из псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли, если интеграл площадей отличен от нуля.

Методы исследования

В работе используются методы теории интегрируемых систем, маломерной топологии и теории алгебр Ли. Центральную роль играют подходы, развитые в работах А.Т. Фоменко, Х. Цишанга, С.В. Матвеева, А.В. Болсинова, А.А. Ошемкова, Е.А.Кудрявцевой и других, посвященных исследованию топологии слоений Лиувилля и их особенностей.

С помощью классических методов математического анализа задача о взаимном расположении нескольких плоских кривых (нахождение разделяющего множества для аналога системы Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$) была сведена к вопросу о взаимном расположении графиков нескольких явных функций одной переменной. При визуализации ряда полученных результатов использовалась компьютерная среда Wolfram Mathematica 12.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Вычисленные инварианты интегрируемых аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли $so(4)$ и $so(3,1)$ могут использоваться при исследовании топологических свойств более сложных аналогов систем типа Ковалевской и изучении бифуркаций слоений Лиувилля, возникающих в таких многопараметрических семействах. Например, весьма интересно изучить четырех-параметрическое семейство систем, включающее как указанное семейство систем на пучке алгебр Ли, так и систему Ковалевской–Яхьи на алгебре Ли $e(3)$.

Другим направлением использования полученных результатов является построение механической интерпретации для изученных аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли и объяснение различных режимов движения, возникающих в них и не встречавшихся в классической системе Ковалевской. Кроме того, полученный ответ может использоваться при изучении лиувиллевой эквивалентности различных интегрируемых систем и реализации топологии их слоений Лиувилля интегрируемыми биллиардами на клеточных комплексах.

Результаты о компактности и некомпактности совместных уровней первых интегралов псевдо-евклидового аналога семейства систем Ковалевской могут быть применены для изучения общих свойств слоений Лиувилля и динамики систем, имеющих некомпактные слои и особенности. Например, важной задачей является построение теории топологической классификации таких систем при некоторых "разумных" ограничениях на них (например, для класса алгебраически интегрируемых систем).

Апробация работы

Результаты опубликованы в пяти статьях [1-5] (см. стр. 19) из которых пять опубликованы в журналах, удовлетворяющие положению о присуждении учёных степеней в МГУ. Результаты диссертации были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- "Equadiff – 2019", г. Лейден, Нидерланды, 8-12 июля 2019
- FDIS 2019 (International Conference on Finite Dimensional Integrable systems in Geometry and Mathematical Physics), г. Шанхай, Китай, 6-12 мая 2019
- "Workshop Applied Topology 2019", г. Киото, Япония, 7-11 января 2019
- "Геометрические методы в теории управления и математической физике", г. Рязань, Россия, 25-28 сентября 2018
- "2018 International Conference on Topology and its Applications", г. Нафпактос, Греция, 7-11 июля 2018
- "Geometry, Dynamics and Integrable Systems" (GDIS-2018), г. Долгопрудный, Россия, 5-9 июня 2018

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2018”, Москва, Россия, 9-13 апреля 2018

- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018, г. Воронеж, Россия, 25-31 января 2018

- Finite Dimensional Integrable Systems FDIS-2017, г. Барселона, Испания, 3-7 июня 2017

- XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2017”, г. Москва, Россия, 10-14 апреля 2017

- Международная научно-методическая конференция “Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования”, г. Воронеж, Россия, 23-25 декабря 2016

- “XIX Geometrical Seminar”, г. Златибор, Сербия, 28 августа 2016 - 4 сентября 2016

- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, г. Казань, Россия, 26 июня - 2 июля 2016

- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2016”, г. Москва, Россия, 11-15 апреля 2016

- Международная конференция “Зимняя физико-математическая школа Крейна”, г. Воронеж, Россия, 25-31 января 2016

- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2015”, г. Москва, Россия, 13-17 апреля 2015

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» (мехмат МГУ, рук. акад. А.Т. Фоменко), на семинаре «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (мех-мат МГУ, рук. проф. А.А. Давыдов, проф. А.М. Степин), неоднократно на семинаре «Современные геометрические методы» (мех-мат МГУ, рук. акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинов, проф. А.А. Ошемков, проф. Е.А. Кудрявцева, доц. И.М. Никонов, доц. А.Ю. Коняев, доц. В.В. Ведюшкина), на семинаре «Алгебра и топология интегрируемых систем» (мех-мат МГУ, рук. проф. Е.А. Кудрявцева, проф. А.В. Болсинов, проф. А.А. Ошемков, доц. А.Ю. Коняев), на семинаре Kyoto Saturday Topology Seminar (Kyoto University of Educatrion, г. Киото, Япония), семинаре Лаборатории механики природных катастроф (Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, рук. проф. С.Ю.Доброхотов).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст работы изложен на 178 страницах. Список литературы содержит 130 наименований.

Содержание работы

Во введении дается общая характеристика работы, формулируется ее цель, кратко излагается история вопроса, основные используемые нами понятия и результаты из теории интегрируемых систем и содержание работы.

Содержание главы 1

Глава 1 имеет вспомогательный и обзорный характер характер. В разделе 1.1. данной главы приведены определения основных понятий и формулировки ключевых теорем из теории интегрируемых гамильтоновых систем.

Напомним, что гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ на четырехмерном симплектическом многообразии (M^4, ω) вполне интегрируема по Лиувиллю, если у нее имеется первый интеграл — функция F, для которой $\omega(\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} F) = 0$. Кроме того, требуют линейную независимость их косых градиентов почти всюду на M^4 и полноту гамильтоновых векторных полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} F$.

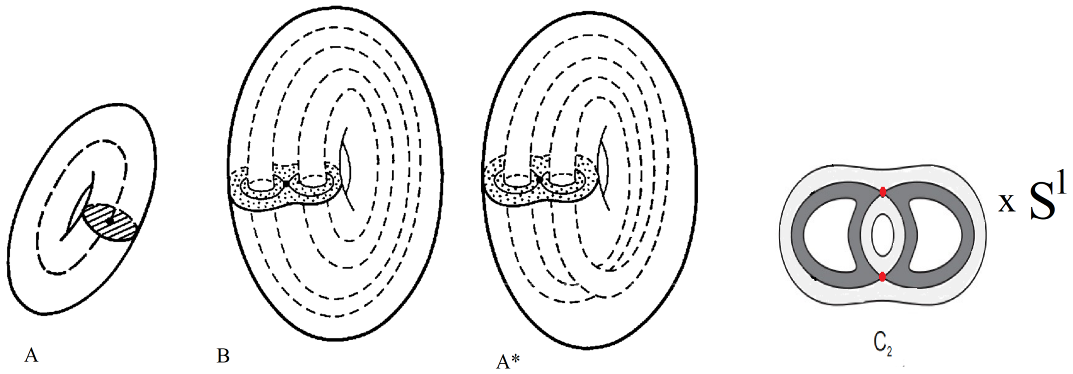
Изоэнергетической поверхностью $Q = Q_h$ называют уровень $H = h$ в M^4.

Определение. Ограничения двух интегрируемых систем $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2,$ на трехмерные неособые ($\mathrm{d}\, H_i \neq 0$) инвариантные подмногообразия Q_1^3 и Q_2^3 называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм Q_1^3 и Q_2^3, сохраняющий ориентацию Q_i относительно (M_i^4, ω_i) и направление поля $\operatorname{sgrad} H_i$ на критических окружностях интеграла F_i.

Рассмотрев множество критических точек интегрируемой системы (в них падает ранг системы векторов $\operatorname{sgrad} H$, $\operatorname{sgrad} F$), определим бифуркационную диаграмму Σ как образ этого множества. Потребовав невырожденность всех критических точек в Q^3 и отсутствие в нем точек ранга 0 (и ряд дополнительных условий), сформулируем теорему топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем.

Теорема (А.Т. Фоменко, Х. Цишанг)**.** *Слоения Лиувилля двух ИГС в ограничении на неособые инвариантные 3-многообразия Q_h^3 (с дополнительными свойствами выше) лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда инварианты Фоменко–Цишанга их слоений Лиувилля на этих Q_h^3 совпадают.*

Полным инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности является граф Фоменко — графом Кронрода–Риба функции F на Q^3, вершины которого оснащены



символами *3-атомов*, т.е. перестроек торов Лиувилля, содержащих окружности из невырожденных критических точек. Примеры атомов A, B, C_2, A^* приведены на рисунке выше.

Числовые метки r, ε на ребрах графа и метки n на некоторых подграфах (называемых семьях) вычисляются по матрицам склейки — матрицам перехода между *допустимыми базисами* на граничных торах 3-атомов. Подробные определения приведены в главе 4 тома 1 монографии А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко.

Система Ковалевской и ее аналоги исходно задаются не на симплектическом многообразии M^4, а на пространстве $\mathbb{R}^6$ с координатами $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$ и скобкой Ли–Пуассона следующего вида (ε_{ijk} — знак перестановки $(ijk) \to (123)$):

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k.$$

Разным знакам $\varkappa \in \mathbb{R}$ — параметра пучка скобок Пуассона — соответствуют разные алгебры: $\varkappa = 0, \varkappa > 0$ $so(3,1)$ при $\varkappa < 0$, $e(3)$ при $\varkappa = 0$ и $so(4)$ при $\varkappa > 0$.

Система Ковалевской и ее аналоги на алгебрах $so(3,1)$ и $so(4)$ задаются следующим гамильтонианом H и обладают, в зависимости от $\varkappa$, следующим первым интегралом K:

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1 x_1,$$
$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1 J_2 - 2c_1 x_2^2)^2.$$

Симплектическими листами (исключая $a = b = 0$ при $\varkappa \leq 0$) являются совместные уровни следующих функций Казимира, называемых геометрическим интегралом и интегралом площадей:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2),$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3.$$

Выбрав уровень $M^4_{a,b}$, где $f_1 = a, f_2 = b$, получим в ограничении на него системы Ковалевской или ее аналога интегрируемую гамильтонову системами с двумя степенями. В случае $\varkappa > 0$ они компактны, и потому такой аналог также называем компактным случаем Ковалевской.

Определение. *Плоскостью орбит* будем называть называть 2-плоскость $\mathbb{R}^2(a,b)$ значений функций f_1 и f_2. Также будем обозначать ее Oab или $\mathbb{R}^2(a,b)$.

Далее приведены результаты по изучению фазовой топологии системы Ковалевской и ее аналогов (в разделе 1.2: работы М.П.Харламова и работа А.В.Болсинова, П.Рихтера, А.Т.Фоменко для классической системы, в разделе 1.3: работа И.К.Козлова для случая $\varkappa > 0$, работа М.П.Харламова, П.Е.Рябова и А.Ю.Савушкина для системы Ковалевской–Соколова на алгебре $e(3)$). Последняя система отображается в случай Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ с сохранением значений скобки Пуассона и переводит слоение Лиувилля в слоение Лиувилля, исключая множество орбит $M^4_{a,0}$ при $a \leq 0$ алгебры $so(3,1)$.

Затем коротко описана конструкция, позволяющая ввести псевдо-евклидовы аналоги известных систем динамики, предложенная А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым.

Содержание главы 2

Сформулируем две основные теоремы, содержащие результаты лиувиллева анализа аналога системы Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ (который будем также называть компактным случаем Ковалевской, т.к. все симплектические листы компактны) и найденные случаи эквивалентности слоений изучаемой системы и других систем.

Теорема. *В системе Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ имеется ровно 27 классов $L_1, ..., L_{27}$ лиувиллево неэквивалентных слоений на связных компонентах неособых изоэнергетических поверхностей.*

В таблицах 2.5 и 2.6 главы 2 диссертации перечислены инварианты Фоменко–Цишанга всех слоений на неособых $Q^3_{a,b,h}$ при фиксированной ориентации Q^3 и направлении роста интеграла K. Классы лиувиллевой эквивалентности $L_1, \dots, L_{27}$ для связных компонент этих слоений 1-32 указаны в таблице 2.10 главы 2 диссертации.

Пунктирная линия в таблицах 2.5 и 2.6 главы 2 означает совпадение меток слева и справа от нее, т.е. симметрию слоения Лиувилля и его меченой молекулы на данных “ярусах”, т.е. особых уровнях дополнительного интеграла.

Теорема. *Среди слоений $L_1, \dots, L_{27}$ компактного случая Ковалевской следующие слоения лиувиллево эквивалентны слоениям известных интегрируемых систем в некоторых зонах энергии:*

1) слоения $L_1, L_{12}, L_3, L_4, L_{15}, L_{27}, L_{24}, L_{20}, L_{24}, L_{18}$ эквиваленты слоениям A, ... , J классического случая Ковалевской [18] соответственно, *2) слоения L_2 и L_{23} эквивалентны слоениям Лиувилля случая Ковалевской–Яхьи в зонах энергии h_2 и h_{10}, h_{23}, см. работы П.В.Морозова* [37] *и Н.С.Славиной* [38] *соответственно,*

3) слоения L_1, L_2, L_9, L_{10} эквивалентны слоениям $1, 2, 6, 7$ случая Клебша [37] *соответственно,*

4) слоения L_1, L_2, L_4 эквивалентны слоениям A, B, F случая Соколова [37] *соответственно,*

5) интегрируемые биллиарды в областях A'_0, A_2, A_1, A_0, ограниченных дугами софокусных квадрик, моделируют [39] *слоения Лиувилля L_1, L_2, L_6, L_8 компактного случая Ковалевской.*

При проведении лиувиллева анализа мы используем результаты и обозначения из работ [18, 31]. В первой из них для классического случая Ковалевской были найдены допустимые базисы для дуг $\alpha_1, \ldots, \delta_2$ бифуркационных диаграмм (их однозначно определенные λ-циклы изображены на рис. 1.6 главы 1 диссертации) и вычислен инвариант Фоменко–Цишанга для слоений изоэнергетических поверхностей. Во второй работе для компактного случая Ковалевской были описаны все бифуркационные диаграммы отображения момента и круговые молекулы особых точек $y_1, y_{13}, z_1 \ldots, z_{10}$ (таблицы 2.3 и 2.4 главы 2 диссертации).

По аналогии с работой [18] обозначим "новые" дуги бифуркационной диаграммы символами $\xi_1, ..., \xi_5$. В таблице 2.7 главы 2 эти дуги заданы своими концами $z_1, ..., z_{11}$. Семейства торов (1)-(5) были пронумерованы в [18].

Утверждение. *Следующие базисы $(\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i})$ являются допустимыми для дуг ξ_i, $i = 1..5$:*

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_1}\\ \mu_{\xi_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\gamma_1}\\ \lambda_{\gamma_3}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\lambda_{\xi_2}\\ \mu_{\xi_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\beta_2}\\ \lambda_{\gamma_2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_3}\\ \mu_{\xi_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\delta_1}\\ \lambda_{\beta_1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\lambda_{\xi_4}\\ \mu_{\xi_4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\gamma_4}\\ \lambda_{\gamma_3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_5}\\ \mu_{\xi_5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\gamma_3}\\ \lambda_{\beta_1}\end{pmatrix}$$

Далее в разделе 2.1.3 главы 2 рассматриваются вопросы перечисления слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических $Q^3_{a,b,h}$ системы Ковалевской на $so(4)$ и разбиения пространства орбит $\mathbb{R}^2(a, b)$ на связные компоненты, точкам (a, b) которых соответствуют одинаковые в описанном ниже смысле слоения Лиувилля на $M^4_{a,b}$.

[37] Морозов П.В., Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела, Кандидатская диссертация, 2007.

[38] Славина Н.С., *Топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи*, Матем. сб. 2014, **205**, No.1, с. 105–160.

[39] Фокичева В.В., *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб. 2015, **206**, No.10, с. 127–176

Приписав каждому 3-атому в инварианте Фоменко (молекуле без меток) символ одной из дуг $\alpha_1, \dots, \delta_2$, на которой лежит $\mathfrak{F}$-образ соответствующей особенности, введено понятие *графа Фоменко с именованными атомами.* По такому инварианту и найденным допустимым базисам $\alpha_1, \dots \delta_2, \xi_1, \dots, \xi_5$ для всех дуг однозначно находятся метки инварианта Фоменко–Цишанга. Итоговый ответ на этот вопрос дается в следующем утверждении.

Утверждение. *В компактном случае Ковалевской встречается ровно* 32 *различных графа Фоменко с именованными атомами для слоений на неособых $Q^3_{a,b,h}$. Полный список дается в таблицах 2.8 и 2.9 главы 2 диссертации.*

Остается определить, какие наборы дуг $\alpha_1, \dots, \xi_5$ может пересечь вертикальная прямая $H = h$, на которой лежит образ $Q^3_{a,b,h}$ при отображении $\mathfrak{F} = (H, K)$, т.е. какие инварианты Фоменко с именованными атомами встречаются в системе.

Для было определено, как при разных a, b упорядочены координаты $H = h$ особых точек. Если все особые точки принадлежат семействам $y_1, \dots, z_{10}$ и имеют разные координаты $h_i < h_{i+1}$, то слоение на $M^4_{a,b}$ можно описать *кодом* — последовательностью наборов Фоменко с именованными атомами для $Q^3_{a,b,h}$ при $h \in (h_i, h_{i+1})$.

Определение. Назовем *разделяющим множеством* Θ множество пар (a, b) плоскости Oab, в окрестности которых есть пары (a_i, b_i) с различными кодами или пара (a', b'), которой не соответствует кода.

В утверждении 2.1.4 раздела 2.1.3 показано, как разделяющее множество Θ разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ значений функций Казимира f_1, f_2 на подобласти и промежутки оси Oa с одинаковыми кодами. При $b \geq 0$ получена 61 подобласть, и на оси Oa имеется 5 промежутков с попарно разными кодами. Разделяющее множество в координатах u, v, таких что $2a = u + v, 4\varkappa b^2 = uv$, изображено на рис. 2.1 и 2.2 главы 2.

В утверждении 2.1.10 раздела 2.1.6 главы 2 диссертации разделяющее множество в области $b \geq 0$ представлено в виде объединения дуг 21 гладких кривых, заданных в таблице 2.19 и в утверждении 2.1.9 главы 2 диссертации как явные функции одной переменной.

Также была построена стратификация трехмерного пространства параметров — троек значений (a, b, h) функций f_1, f_2, H — на страты размерности 0, 1, 2, 3 в зависимости от типа слоения Лиувилля на $Q_{a,b,h}$. Напомним, что система имеет симметрию, сохраняющую $f_1 = a, H = h, K = k$, и меняющую знак $f_2 = b$.

Назовем *камерой* связное множество троек (a, b, h) с неособой или пустой $Q_{a,b,h}$, а *особым множеством* $\mathbb{A}^2$ — множество троек (a, b, h) с особой $Q_{a,b,h}$. Сформулируем основное утверждение об устройстве пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$.

Утверждение. *Каждая камера в* $\mathbb{R}^3(a,b,h)$ *гомеомоморфна открытому диску* D^3, *любым двум точкам* (a,b,h) *камеры соответствуют* $Q^3_{a,b,h}$ *с одинаковым графом Фоменко с именованными атомами слоения на* $Q^3_{a,b,h}$.

Такие графы с номерами $1-11$ *реализуются каждый в своей камере, трансверсально пересекающими плоскость* $b=0$, *а каждый из остальных графов* $12-32$ *реализуется в паре симметричных друг другу камер.*

Назовем *соседними* две камеры, которые граничат друг с другом по двумерному подмножеству. Максимальное связное подмножество $\mathbb{A}^2$, каждой точке (a,b,h) которого соответствует ровно одна особая точка $\Sigma^{a,b}$ фиксированного семейства $y_1,\ldots,z_{11}$ кроме y_4 и z_7, назовем *гранью.* Проекция такой грани на плоскость Oab является инъекцией.

Теперь определим грани, лежащие в плоскостях $a=f_l(b)$ пространства $\mathbb{R}^3(a,b,h)$. Парам $a=f_l(b)>0$ соответствуют сингулярные двумерные орбиты $M^2_{a,b}\cong S^2$. Для каждой из них множество троек (a,b,h) с непустыми $Q_{a,b,h}$ является точкой или вертикальным отрезком. В такой плоскости будет ровно 2 грани (в таблице 2.21 главы 2 они имеют номера p_{65},p_{66}).

Список граней в области $b\geq 0$ и граничащих по ним 3-камер приведен в таблице 2.21 главы 2. Из них камеры $p_1,\ldots,p_{12}$. Каждая грань гомеоморфна открытому 2-диску, и две камеры (исключая 1 и 2) граничат ровно по одной грани. Две камеры 1 и 2 имеют границу, состоящую из пары симметричных граней p_{14} и p'_{14}. Граф соседства, вершинами которого являются соседние камеры, а ребра соответствуют наличию общей двумерной граничной грани, изображен на рис. 2.3 главы 2 диссертации.

Вершины стратификации (страты размерности 0) отмечены жирным черными точками на рис. рис. 2.1 и 2.2 главы 2. Количество ребер стратификации равно 83, семь из них пересекают плоскость $b=0$ и лежат по обе стороны от нее, а четыре ребра лежат в ней. Для каждого ребра указано, из какой вершины в какую оно идет, и на какую кривую разделяющего множества проецируется $(a,b,h)\to(a,b)$. Отсюда и из знания проекции каждой 2-грани (таблицы 2.12 - 2.17 и 2.21) несложно указать, какие 2-грани содержат соответствующее 2-ребро в своей границе, составив линк данного ребра.

Содержание главы 3

В случае нулевой постоянной площадей построены бифуркационные диаграммы системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$. Также проверена невырожденность критических точек и определены типы 3-атомов и особенностей ранга 0.

Теорема. *Бифуркационная диаграмма интегрируемого случая Ковалевской на* $\mathrm{so}(3,1)$ *(при* $\varkappa<0$*) для нулевого значения интеграла площадей* f_2 *(т.е. для* $b=0$*) определяется значением a функции Казимира* f_1. *При этом ось Oa разбивается на шесть интервалов XII-XVII. Диаграммы для каждой из них показаны* *на рис. 3.1 главы 3 диссертации. Здесь $4a_0 := \varkappa^2 c_1^2$.*

$$Oa: \quad -\infty,\ \mathrm{XII},\ -4a_0,\ \mathrm{XIII},\ -a_0,\ \mathrm{XIV},\ 0,\ \mathrm{XV},\ a_0,\ \mathrm{XVI},\ 4a_0,\ \mathrm{XVII},\ +\infty.$$

При произвольных значениях a, b бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ случая Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ содержит семейства дуг, не имеющие аналогов в классическом случае Ковалевской. Выше и ниже черты указаны допустимые базисы на регулярных торах в верхней и нижней границе 3-атомов (по росту функции H).

Теорема. *Допустимые базисы для "новых" дуг $\alpha_3, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \beta_4, \delta_3, \xi_6$ выражаются через однозначно определенные λ-циклы атомов-бифуркаций следующим образом:*

$$\alpha_3: \frac{(\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{\varnothing}, \quad \beta_4: \frac{(\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\gamma_8})_{(6)}}{(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\gamma_9})_{(7)}}, \quad \gamma_8: \frac{(\lambda_{\gamma_8}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{(\lambda_{\gamma_8}, -\lambda_{\beta_1})_{(1)}}, \quad \gamma_9: \frac{(\lambda_{\gamma_9}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{(\lambda_{\gamma_9}, -\lambda_{\beta_1})_{(2)}},$$

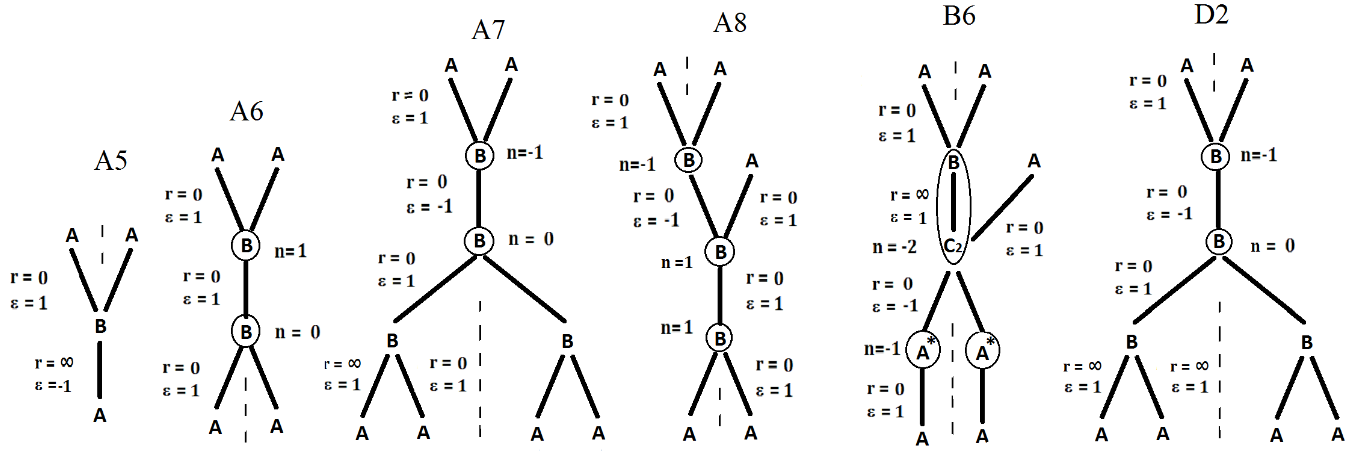
$$\gamma_{10}: \frac{(\lambda_{\gamma_{10}}, \lambda_{\beta_4})_{(6)}}{(\lambda_{\gamma_{10}}, -\lambda_{\beta_3})_{(3)}}, \quad \gamma_{11}: \frac{(\lambda_{\gamma_{11}}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{(\lambda_{\gamma_{11}}, -\lambda_{\beta_3})_{(2,5)}}, \quad \delta_3: \frac{(\lambda_{\delta_3}, \lambda_{\beta_4})_{(7)}}{\varnothing}, \quad \xi_6: \frac{\varnothing}{(\lambda_{\xi_6}, \lambda_{\gamma_5})_{(6)}}.$$

В работе [40] изучена система Ковалевской–Соколова, в частности, определены все классы инвариантов Фоменко (молекул без меток). Из оказалось 25, и они обозначены там и в диссертации как $\mathbb{A}_1 - \mathbb{G}$. Аналогичный результат для системы Ковалевской на алгебре $so(3,1)$ при $f_2 = b \neq 0$ верен из наличия пуассонова морфизма между системами.

Теорема. *1. В системе Ковалевской на алгебре* $\mathrm{so}(3,1)$ *все 25 классов слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 (существующих при $b \neq 0$) попарно лиувиллево не эквивалентны, т.е. имеют различные инварианты Фоменко–Цишанга:*

- *10 классов $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{B}_3, \mathbb{D}_1, \mathbb{A}_4$ совпадают с классами A–J соответственно для классической системы Ковалевской (на алгебре* $\mathrm{e}(3)$*),*
- *3 класса $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{F}_1$ совпадают с классами A, B, C системы Соколова* [37]*,*
- *6 классов $\mathbb{B}_4, \mathbb{B}_5, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4, \mathbb{F}_2, \mathbb{G}$ могут быть получены из классов E, F, I, H, D, G системы Соколова путем возмущения $C_2 \longrightarrow B \dfrac{r=\infty}{\varepsilon=1} B$,*
- *инварианты Фоменко–Цишанга классов $\mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_8, \mathbb{B}_6, \mathbb{D}_2$ показаны на следующем рисунке.*

[40] Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushkin A.Yu., *Topological Atlas of the Kowalevski-Sokolov Top*, RCD, 2016, **21**, No.1, p. 24–65.



2. В случае $b = 0$ каждое слоение Лиувилля принадлежит к одному из следующих классов: классов A-I системы Соколова, классов A-D классической системы Ковалевской или классов $\mathbb{A}_5, \mathbb{A}_6$ системы Ковалевской–Соколова, существующих также при $b \neq 0$.

3. Слоения $\mathbb{A}_5$ и $\mathbb{A}_6$ принадлежат соответственно к классам L_{26} и L_7 системы Ковалевской на алгебре $\mathrm{so}(4)$ (возможно, после изменения знака боттовского интеграла).

Содержание главы 4

Рассматриваются псевдо-евклидовы аналоги системы Ковалевской со следующими скобками Ли–Пуассона на пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, предложенными в [10]:

$$\mathbb{P}_{new} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma J_3 & -J_2 & 0 & \sigma x_3 & -x_2 \\ -\sigma J_3 & 0 & J_1 & \sigma x_3 & 0 & x_1 \\ J_2 & -J_1 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & \sigma x_3 & -x_2 & 0 & \varkappa\sigma J_3 & -\varkappa J_2 \\ -\sigma x_3 & 0 & x_1 & -\varkappa\sigma J_3 & 0 & \varkappa J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & \varkappa J_2 & -\varkappa J_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\sigma > 0$. При произвольном значении $\varkappa$ функции Казимира $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$ имеют вид

$$\hat{f}_1 \;=\; x_1^2 + x_2^2 - \sigma x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 - \sigma J_3^2) \;=\; a,$$

$$\hat{f}_2 \;=\; x_1 J_1 + x_2 J_2 - \sigma x_3 J_3 \;=\; b.$$

Гамильтониан псевдо-евклидовых аналогов системы Ковалевской имеет следующий вид

$$H_{ps} = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 - 2\sigma J_3^2) + c_1 x_1.$$

В качестве первого интеграла возьмем интеграл $F_{ps} = K/4$. Совместный уровень $\hat{f}_1, \hat{f}_2, H_{ps}, F_{ps}$ в $\mathbb{R}^6$ обозначим $T_{a,b,h,f}$:

$$T_{a,b,h,f} = \{\mathbb{R}^6 | \hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b, H_{ps} = h, F_{ps} = f\}.$$

Следующее достаточное условие его компактности доказано для любого $b = f_2$.

Теорема. *Пусть для $H_{ps} = h, F_{ps} = f, \varkappa$ выполнено $(2h - \varkappa c_1^2)^2 > 4f = k$. Тогда для неевкилидовой системы Ковалевской со значением параметра $\varkappa$ пучка скобок Пуассона и любых значений функций Казимира $\hat{f}_1 = a, \hat{f}_2 = b$ совместная поверхность уровня интегралов $T_{a,b,h,f}$ компактна.*

Доказан следующий критерий компактности совместного уровня четырех первых интегралов.

Теорема. *Пусть $b \neq 0$ и $-\widetilde{f} \leq \varkappa c_1^2 - 2h \leq \widetilde{f}$, где $F_{ps} = f = \widetilde{f}^2/4 = k/4$. Тогда совместная поверхность уровня $T_{a,b,h,f}$ со значениями (a, b, h, f) содержит как минимум одну неограниченную компоненту.*

Отсюда, в частности, следует, что при $b \neq 0$ в слоении Лиувилля системы всегда есть некомпактные слои и их некомпактные перестройки в компактные (или пустые) слои.

Заключение

В диссертации были получены результаты о топологических свойствах нескольких аналогов интегрируемой системы Ковалевской на нескольких разных алгебрах Ли.

В случае алгебры Ли $so(4)$ составлен полный список классов лиувиллевой эквивалентности этой системы на неособых изоэнергетических поверхностях и построена стратификация пространства параметров, 3-стратам котрой соответствуют классы лиувиллевой эквивалентности. При этом также получено описание разделяющего множества — проекции его 1-остова.

В случае алгебры Ли $so(3,1)$ также удалось вычислить инварианты Фоменко–Цишанга для произвольной неособой изоэнергетической поверхности. Во-первых, для этого в случае нулевой постоянной площадей была также построена бифуркационная диаграмма отображения момента в зависимости от значения геометрического интеграла.

Для обеих систем, на основе классического случая Ковалевской и свойств особенности типа центр–центр, были получены допустимые базисы на тех дугах бифуркационных диаграмм, у которых нет аналога в классическом случае Ковалевской. Отсюда получены числовые метки их инвариантов Фоменко–Цишанга.

Полученные результаты могут быть основой для исследования топологии других систем, входящих в многопараметрические семейства интегрируемых систем вместе с системой Ковалевской или ее аналогов на алгебрах Ли $so(3,1)$ и $so(4)$. Например, представляет интерес изучение топологии аналогов системы Ковалевской–Яхьи на $so(4)$ и $so(3,1)$, а также аналогов системы Ковалевской с сингулярными добавками в гамильтониане.

Для псевдо-евклидова аналога семейства систем Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3,1)-e(3)-so(4)$ изучен вопрос о компактности (ограниченности) совместной поверхности уровня, и получено уравнение новой бифуркационной параболы. Получен важный пример некомпактных (и, вероятнее всего, некритических) бифуркаций в интегрируемых системах. Данные исследования допускают дальнейшее развитие, в том числе для других интегрируемых систем.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику РАН проф. А.Т. Фоменко за постановку задачи, внимание и поддержку во время работы. Автор благодарен проф. Е.А. Кудрявцевой, проф. А.А. Ошемкову и доц. И.К. Козлову за ценные комментарии и обсуждения на разных этапах исследования, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за вдохновляющую атмосферу и поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. Kibkalo V.A., *Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2020. — Vol. 75, no. 6. — P. 263–267. Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras, Moscow Univ. Math. Bull. — 2020. — Vol. 75, no. 6. — P. 263–267.

   Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
   Импакт-фактор 0.314 (за 2020 год)

2. Kibkalo V., *Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(3, 1)*, Topology and its Applications. — 2020. — Vol. 275. — No. 107028. — 13 pp.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт-фактор 0.497 (за 2020 год)

3. Kibkalo V.A., *Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(4)*, Sbornik Mathematics. — 2019. — Vol. 210, no. 5. — P. 625–662.

   Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
   Импакт-фактор 1.158 (за 2020 год)

4. Kibkalo V., *Topological Analysis of the Liouville Foliation for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra so(4)*, Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, no. 9. — P. 1396–1399.

   Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
   Импакт-фактор 0.315 (за 2018 год)

5. Kibkalo V.A., *The topology of the analog of Kovalevskaya integrability case on the Lie algebra so(4) under zero area integral*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — Vol. 71, no. 3. — P. 119–123.

   Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
   Импакт-фактор 0.175 (за 2016 год)