Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

УДК 530.145

Дудинец Иван Васильевич

Исследование преобразований квантовых состояний в томографическом представлении при унитарной и неунитарной эволюции в квантовой оптике и квантовой механике

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф.
Манько Владимир Иванович

Долгопрудный — 2021

Работа прошла апробацию на кафедре теоретической физики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Манько Владимир Иванович.

Ведущая организация: ООО «Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий».

Защита состоится 1 октября 2021 в – на заседании диссертационного совета ЛФИ.01.04.02.006 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физикотехнического института (национального исследовательского университета) `https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php`.

Работа представлена «21» июня 2021 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п.3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научнотехнической политике».

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию свойств квантовых систем с дискретными (кубиты) и непрерывными (линейные и нелинейные осцилляторы) переменными в рамках вероятностного представления квантовой механики. В работе исследовано движение частицы в поле дельта-функции Дирака. Рассмотрены квантовые корреляции в открытой системе связанных осцилляторов, а также нелинейных f−осцилляторов. Впервые применен метод реплик для определения энтропийных характеристик смеси когерентных (глауберовых) состояний.

Актуальность темы. В связи с развитием квантовых технологий в научной среде возникает интерес в исследовании основ квантовой механики, а также свойств квантовых систем и поиск новых закономерностей в их поведении. Для получения информации о квантовой системе необходимо оценить ее состояние.

Состояние квантовой системы может быть задано стандартным способом с помощью волновой функции или оператора плотности. Существует альтернативный способ определения квантового состояния через функции распределения квазивероятности в фазовом пространстве, таких как функции Вигнера, Хусими или Глаубера-Сударшана. Ввиду соотношения неопределенностей координаты и импульса данные функции не обладают всеми свойствами распределения вероятности.

В томографическом (вероятностном) представлении [1—3] состояния квантовых систем идентифицируются с функциями распределения вероятности, называемыми квантовыми томограммами. Важность представления обусловлена возможностью экспериментального измерения томограмм [4]. Матрица плотности системы связана с томографическими распределениями вероятности при помощи обратимых интегральных преобразований.

Следовательно, матрица плотности может быть восстановлена по измеренной в эксперименте томограмме. В использовании матрицы плотности системы нет необходимости, так как все необходимые физические величины могут быть в явном виде найдены через томограммы. Кроме того, уравнения, описывающие эволюцию квантовой системы, могут быть написаны как уравнения для томограмм состояний. Томографическое представление дает возможность единым образом описывать классические и квантовые системы. Неотрицательность томограмм позволяет использовать их в моделировании.

В связи с новой формулировкой квантовой механики возникает необходимость в исследовании квантовых систем в вероятностном представлении. Были расмотрены свободное движение частицы, гармонический, параметрический осцилляторы, вынужденные колебания, движение в электрическом и магнитном полях. В настоящей диссертационной работе изучается движение квантовой частицы в дельта-потенциале в томографическом представлении. Некоторые аспекты данной задачи были рассмотрены в [5].

Для исследования состояний многочастичных систем была введена томограмма центра масс [6]. Настоящая диссертационная работа посвящена развитию формализма томограммы центра масс и ее обобщению — кластерной томограммы.

Запутанные состояния с непрерывными переменными имеют большое значение в квантовой теории информации. Взаимодействие системы с окружающей средой приводит к деградации или возникновению запутанности в системе. Окружающая среда может моделироваться тепловыми резервуарами, состоящими из независимых квантовых осцилляторов [7—9]. В диссертационной работе изучается квантовые корреляции в системе из двух связанных квантовых осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своей тепловой баней, характеризуемых своей собственной температурой. Каждая из бань моделируется бесконечным набором независимых гармонических осцилляторов. Данная система была рассмотрена в работе [10]. Было показано, что система в процессе эволюции достигает равновесного состояния, которое не является гиббсовским и характеризуется температурами обоих бань.

Нелинейности играют важную роль в различных областях физических явлений. Нелинейные колебания могут быть связаны с деталями энергетических спектров атомов и молекул. Примером нелинейных колебаний в классической и квантовой механиках является f-осциллятор [11]. Зависимость частоты колебаний f-осциллятора от амплитуды определяется функцией f. Нелинейный осциллятор представляет интерес в связи с изучением неклассических фотонных состояний в квантовой оптике [12; 13].

С квантовыми f-осцилляторами связано понятие f-когерентных состояний. Были предложены способы реализации нелинейных когерентных состояний и их суперпозиции. f-осциллятор и f-когерентные состояния встречаются в различных физических моделях и явлениях. f-осцилляторы рассматривались в рамках симплектической томографии [14; 15]. В данной диссертационной работе в рамках новой формулировки квантовой механики рассматриваются нелинейные колебания (f-осцилляторы).

Недавно было предложено специального вида вероятностное описание состояний (квантовый супрематизм) [16]. В этом представлении оператор плотности спина$-1/2$ (кубита) параметризуется тремя вероятностями проекции спина $+1/2$ на три перпендикулярные направления в пространстве. Вероятностное описание было обобщено на системы с более высокими размерностями (кутриты, кудиты) [17]. Преимущество вероятностного описания заключается в возможности получения различных энтропийных неравенств для элементов матрицы плотности. Представляет интерес дальнейшее развитие вероятностного описания и его применения к конкретным задачам квантовой теории информации.

Изменение квантового состояния в результате физического процесса может быть описано линейным вполне положительным отображением — квантовым каналом. Существуют отображения, которые могут не быть вполне положительными [18]. В настоящей диссертационной работе рассматривается нелинейное отображения матрицы плотности (нелинейный канал) [19] в вероятностном представлении. Данное отображение является квантово-механическим аналогом эскорт распределения, применяющегося в различных областях физики. Отображение похожего вида было недавно рассмотрено в [20].

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является развитие вероятностного представления квантовой механики и квантовой оптики, а также изучение свойств квантовых систем в этом представлении.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Исследовать движение квантовой частицы, движущейся в дельта-потенциале в вероятностном (томографическом) представлении квантовой механики. Получить явные выражения для функций квазивероятности (функций Хусими, Вигнера) и томограмм (оптической и симплектической) для связанного состояния частицы и исследовать их связь. Найти вероятность ионизации при изменении параметров потенциала, используя полученные функции и томограммы. Проверить выполнение энтропийного неравенства для оптической томограммы связанного состояния.

2. Получить формулу для энтропии фон Неймана смеси когерентных состояний с использованием метода реплик. Применить полученную формулу для нахождения энтропии состояния смеси шредингеровских котов.

3. Изучить состояния многомодового электромагнитного поля в вероятностном (томографическом) представлении. Использовать формализм квантайзеров и деквантайзеров для нахождения связи центра масс и кластерной томограмм. Получить формулу для ядра звездочного произведения кластерной схемы.

4. Рассмотреть нелинейные колебания (f-осцилляторы) и соответствующие нелинейные (f-когерентные) состояния в вероятностном (томографическом) представлении. Вывести общие выражения для симплектической, оптической томограмм, томограммы счета фотонов и функции Хусими f-когерентного состояния. Использовать известные энтропийные неравенства для квантовых систем, а также полученное выражение для томограммы счета фотонов для вывода новых неравенств для полиномов Лагерра.

5. Исследовать квантовые корреляции связанных квантовых осцилляторов, взаимодействующих с тепловыми резервуарами.

6. Изучить действие нелинейного канала (нелинейного отображения) на матрицы плотности кубитов в вероятностном представлении квантовой механики.

Научная новизна.

1. Впервые получена формула для функции Хусими связанного состояния частицы, движущейся в дельта-потенциале, исследованы ее свойства, связь с соответствующими функцией Вигнера, оптической и симплектической томограммами. Рассмотрена задача о вероятности ионизации частицы при изменении параметров потенциала.

2. Впервые применен метод реплик для нахождения энтропии фон Неймана смеси когерентных (глауберовских) состояний, а также смеси

шредингеровских котов. Независимым способом проверена достоверность полученных формул.

3. Найдены формулы для ядра звездочного произведения кластерной схемы, связи томограммы центра масс и кластерной томограммы.

4. Доказана сепарабельность состояния связанных квантовых осцилляторов, каждый из которых помещен в тепловой резервуар, поддерживаемый при своей температуре. Найдены функция Вигнера и матрица плотности состояния, к которому приходят осцилляторы с течением времени (квазиравновесного состояния). Проверено, что в случае равенства температур резервуаров квазиравновесное состояние является гиббсовским.

5. Получены общие выражения для симплектической, оптической томограмм, томограммы счета фотонов и функции Хусими f-когерентного состояния. Найдены новое семейство неравенств для обобщенных полиномов Лагерра. Подробно исследованы свойства f-осцилляторов.

6. Впервые изучено нелинейное отображение (нелинейный канал) матриц плотности кубитов и его свойства в вероятностном представлении квантовой механики.

Практическая значимость. Полученные в данном диссертационном исследовании результаты играют важную роль для совершенствования вероятностного (томографического) представления, а также развития основ квантовой механики. Значимость развития фундаментальных аспектов квантовой механики обусловлена тем, что на ее принципах основываются различные квантовые технологии. Методы и формулы, полученные в данном диссертационном исследовании, нашли свое применение в работах [21; 22].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. получено явное выражение для функции Хусими связанного состояния квантовой частицы, движущейся в дельта потенциале;
2. получена явная формула для энтропии фон Неймана смеси двух когерентных состояний с использованием метода реплик;
3. найдены выражение для ядра звездочного произведения кластерной схемы, а также формулы для связи кластерной томограммы и томограммы центра масс;
4. доказана сепарабельность квазиравновесного состояния связанных квантовых осцилляторов, каждый из которых поддерживается при своей температуре;
5. получены новые соотношения для обобщенных полиномов Лагерра с помощью известных энтропийных неравенств для квантовых систем;
6. исследовано нелинейное отображение (нелинейный канал) матрицы плотности кубита в вероятностом представлении квантовой механики

Апробация работы. Результаты работы представлены в докладах на 6 всероссийских и международных конференциях:

- Дудинец И.В. «Связанные состояния частицы в дельта-потенциале в вероятностном представлении квантовой механики» 55-ая научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществ» (г.Долгопрудный, 19–25 ноября 2012 г.).
- Дудинец И.В. «Квазираспределения Хусими и Глаубера–Сударшана для частицы, движущейся в дельта-потенциале» 56-ая научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных есте-

ственных и технических наук в современном информационном обществе» (г.Долгопрудный, 25–30 ноября 2013 г.).

- Дудинец И.В., Манько В.И. «Метод реплик в квантовой механике» 57-ая научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе» (г. Долгопрудный, 24–29 ноября 2014 г.).

- Dudinets I.V. «Two coupled quantum oscillators interacting with two heat baths», Probability Theory and Mathematical Statistics, International Conference, (Казань, 7-10 ноября, 2017)

- Дудинец И.В., Манько В.И. «f-осцилляторы в квантовой механике» 60-ая всероссийская научная конференция МФТИ (г. Долгопрудный, 20-26 ноября 2017 г.).

- Dudinets I.V. «Nonlinear map in probability representation as purification method of qubit states» MIPT (PhysTech)-QUANT, International Conference, (г. Долгопрудный, 9-15 сентября, 2018)

Личный вклад. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Постановка большинства задач была выполнена научным руководителем. Обсуждения результатов работ проводились совместно с соавторами.

Структура диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, семи глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 127 страниц, включая 13 рисунков. Список литературы содержит 239 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована научная актуальность диссертации, сформулированы ее цели и задачи, описана практическая значимость представленных в диссертационной работе результатов и их научная новизна. Приведен перечень всероссийских и международных конференций, на которых результаты исследования проходили апробацию, и список печатных работ, в которых были представлены результаты диссертации.

В первой главе рассмотрены базовые понятия квантовой механики и квантовой оптики: матрица плотности, когерентные состояния, состояния котов Шредингера. Даны определения и основные свойства функций Вигнера и Хусими.

Функции Вигнера $W(q,p)$ и Хусими $Q(q,p) = \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$, где $|\alpha\rangle$ глуберовское когерентное состояние, $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$, являются функциями квазираспределения на фазовом пространстве и задают состояние системы. Функции применяются в квантовой оптике для томографических целей.

Приведен подробный обзор вероятностного (томографичекого) представления квантовой механики. Введены оптическая, симплектическая томограммы и томограмма счета фотонов, обсуждены связь томограмм с функциями квазираспределения.

Симплектическая томограмма $M(X,\mu,\nu)$ является распределением вероятности наблюдаемой X. Параметры μ и ν описывают ансамбль систем отсчета в фазовом пространстве, подвергнутых преобразованиям поворота и изменения масштаба осей координат, в которых измеряется наблюдаемая X.

Во второй главе исследуется движение частицы в притягивающем дельта потенциале Дирака в томографическом представлении квантовой механики. Потенциал имеет вид

$$V(x) = -k\,\delta(x),$$

где k — параметр потенциала.

Найдена явная формула для функции Хусими единственного связанного состояния частицы в рассматриваемом потенциале

$$Q(q,p) = \frac{k\sqrt{\pi}e^{-p^2+k^2}}{2}\left|e^{-k(q+ip)}Erfc\left(\frac{k-q-ip}{\sqrt{2}}\right) + e^{k(q+ip)}Erfc\left(\frac{k+q+ip}{\sqrt{2}}\right)\right|^2.$$

и изучены ее свойства. Функция Хусими выражается через функцию ошибок

$$Erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

Воспользовавшись явным видом томограммы связанного состояния [5], а также асимптотическим выражением функции ошибок, найдены плотности вероятности координаты и импульса частицы. Проверены энтропийные неравенства, которым удовлетворяет оптическая томограмма частицы, движущейся в дельта потенциале.

Рассмотрена задача об ионизации частицы при внезапном изменении параметра дельта ямы. Вероятность ионизации посчитана через интегралы, содержащие квантовые томограммы, а также через функцию Вигнера связанного состояния частицы. Подробно изучены интегральные соотношения между томограммами и функцией Хусими для частицы, движущейся в дельта-потенциале.

Рассмотрена задача о квантовой частице, находящейся в поле двух дельта-ям.

Третья глава посвящена томограмме центра масс и ее связи с другими томографическими функциями, а также с функциями распределения квазивероятности. Приводится обзор квантования с помощью звездочного произведения. Рассматривается квантовая система с N степенями свободы.

В формализме звездочного произведения строится обратимое отображение операторов на функции, называемые символами операторов, с помощью квантайзера и деквантайзера. Например, квантайзер и деквантайзер в схеме томографии центра масс имеют вид

$$\hat{U}_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \delta(\xi - \vec{\mu}\hat{\vec{q}} - \vec{\nu}\hat{\vec{p}}), \quad \hat{D}_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N}e^{i(\xi-\vec{\mu}\hat{\vec{q}}-\vec{\nu}\hat{\vec{p}})},$$

где $\vec{\mu}\hat{\vec{q}} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \hat{q}_i$.

Величина $\xi = \sum_{i=1}^{N} \mu_i q_i + \nu_i p_i$ имеет смысл координаты центра масс в системе отсчета в фазовом пространстве, подвергнутой преобразованиям поворота и изменения масштаба осей координат. Параметры $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ определяют поворот и изменение масштаба осей.

Томограмма центра масс, задающая состояние системы, определяется как символ оператора плотности

$$w_\rho(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}\,\hat{U}_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})].$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\hat{\rho} = \int w_\rho(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})\hat{D}_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})d\xi d\vec{\mu}\, d\vec{\nu}.$$

Аналогичным образом определяется отображение произвольного оператора A на символ $w_A(\vec{x})$, где $\vec{x} = (\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})$. Звездочное произведение символов

$$(w_A \star w_B)(\vec{x}) = w_{AB}(\vec{x}) = \int w_A(\vec{x}_2)w_B(\vec{x}_1)K_{cm}(\vec{x}_2,\vec{x}_1,\vec{x})d\vec{x}_1 d\vec{x}_2,$$

определяется ядром $K_{cm}(\vec{x}_2,\vec{x}_1,\vec{x}) = \mathrm{Tr}[\hat{D}_{cm}(\vec{x}_2)\hat{D}_{cm}(\vec{x}_1)\hat{U}_{cm}(\vec{x})]$.

Подробно рассмотрено отображение, дуальное по отношению к отображению центра масс и получающееся заменой между собой квантайзера и деквантайзера схемы центра масс

$$\hat{U}^d_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N} e^{i(\xi - \vec{\mu}\hat{\vec{q}} - \vec{\nu}\hat{\vec{p}})}, \quad \hat{D}^d_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \delta(\xi - \vec{\mu}\hat{\vec{q}} - \vec{\nu}\hat{\vec{p}}).$$

Символ оператора $\hat{A}$, $w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})$, в схеме, дуальной отображению центра масс позволяет вычислять среднее значение оператора следующим образом

$$\langle \hat{A} \rangle = \int w_\rho(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})\, d\xi\, d\vec{\mu}\, d\vec{\nu}.$$

Найдено ядро звездочного произведения, соответствующее дуальной схеме

$$K^d_{cm}(\xi_1,\vec{\mu}_1,\vec{\nu}_1,\xi_2,\vec{\mu}_2,\vec{\nu}_2,\xi_3,\vec{\mu}_3,\vec{\nu}_3) = e^{i\xi_3}\int \frac{dk_1 dk_2}{4\pi^2}$$
$$\times \exp\left[ik_1k_2(\vec{\mu}_2\vec{\nu}_1 - \vec{\mu}_1\vec{\nu}_2)/2 + i(k_1\xi_1 + k_2\xi_2)\right]$$
$$\times\delta(k_1\vec{\mu}_1 + k_2\vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3)\delta(k_1\vec{\nu}_1 + k_2\vec{\nu}_2 + \vec{\nu}_3).$$

Выведена формула, которая связывает ядро Грюневальда с ядром центра-масс

$$K_{cm}(\xi_1,\vec{\mu}_1,\vec{\nu}_1,\xi_2,\vec{\mu}_2,\vec{\nu}_2,\xi_3,\vec{\mu}_3,\vec{\nu}_3) = (2\pi)^{-3N}e^{i(\xi_1+\xi_2)}\int G(\vec{q}_1,\vec{p}_1,\vec{q}_2,\vec{p}_2,\vec{q}_3,\vec{p}_3)$$
$$\times \exp\left[-i(\vec{\mu}_1\vec{q}_1 + \vec{\mu}_2\vec{q}_2 + \vec{\nu}_1\vec{p}_1 + \vec{\nu}_2\vec{p}_2)\right]\delta(\xi_3 - \vec{\mu}_3\vec{q}_3 - \vec{\nu}_3\vec{p}_3)d\vec{q}_1d\vec{p}_1d\vec{q}_2d\vec{p}_2d\vec{q}_3d\vec{p}_3.$$

Ядро Грюневальда представляет собой ядро звездочного произведения символов Вейля, определенных на фазовом пространстве.

Мы изучаем обобщение отображения центра-масс — кластерное отображение. Рассматривается квантовая система (кластер) с N степенями свободы, составленная из r подсистем. k-ая подсистема имеет N_k степеней свободы, $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_r$. Мы определяем квантайзер и деквантайзер всей системы

$$\hat{U}_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = \prod_{k=1}^{r}\delta\left(\xi_k - \vec{\mu}_k\,\hat{\vec{q}}_k - \vec{\nu}_k\,\hat{\vec{p}}_k\right),$$

$$\hat{D}_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N}\prod_{k=1}^{r}\exp\Big\{\left(\xi_k - \vec{\mu}_k\,\hat{\vec{q}}_k - \vec{\nu}_k\,\hat{\vec{p}}_k\right)\Big\},$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$ — r- компонентный вектор, вектора $\vec{\mu} = (\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2,\ldots,\vec{\mu}_r)$ и $\vec{\nu} = (\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2,\ldots,\vec{\nu}_r)$ имеют по N компонент. Кластерное отображение (гибрид центра масс и симплектического отображений) является отображением операторов на функции (символы), осуществляемого с помощью квантейзера $\hat{D}_{cl}$ и деквантайзера $\hat{U}_{cl}$.

Получено ядро кластерной схемы

$$K_{cl}(\vec{\xi}'',\vec{\mu}'',\vec{\nu}'',\vec{\xi}',\vec{\mu}',\vec{\nu}',\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N-r}\exp\left[i\vec{e}\left(\vec{\xi}''+\vec{\xi}'\right)+i(\vec{\mu}^{'}\vec{\nu}^{''}-\vec{\nu}^{'}\vec{\mu}^{''})/2\right]$$
$$\times\int e^{-i\vec{k}\vec{\xi}}\delta\left(\vec{\mu}^{''}+\vec{\mu}^{'}-\vec{k}\circ\vec{\mu}\right)\delta\left(\vec{\nu}^{''}+\vec{\nu}^{'}-\vec{k}\circ\vec{\nu}\right)d\vec{k},$$

где $\vec{k}=(k_1,k_2,\dots,k_r)$ и $\vec{e}=(1,1,\dots,1)$ — r-компонентные вектора и $\vec{k}\circ\vec{\mu}=(k_1\vec{\mu}_1,k_2\vec{\mu}_2,\dots,k_r\vec{\mu}_r)$—поточечное произведение векторов.

Кластерная томограмма $w_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu})$ определяется как символ оператора плотности. Найдена связь между центра-масс и кластерной томограммами

$$w_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) =(2\pi)^{-r}\int w_{cm}(Y,\vec{k}\circ\vec{\mu},\vec{k}\circ\vec{\nu})e^{i(Y-\vec{k}\vec{\xi})}d\vec{k}dY,$$
$$w_{cm}(Y,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \int w_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu})\delta(Y-\vec{e}\vec{\xi})d\vec{\xi}.$$

Получено выражение для томограммы центра-масс одной из подсистем (m-ой подсистемы) через томограммы центра-масс составной системы

$$w_{cm}^{(m)}(\xi_m,\vec{\mu}_m,\vec{\nu}_m) = (2\pi)^{-1}\int w_{cm}\left(Y,k\widetilde{\vec{\mu}}^{(m)},k\widetilde{\vec{\nu}}^{(m)}\right)e^{i(Y-k\xi_m)}dk\,dY,$$

где обозначение $\widetilde{\vec{\mu}}^{(m)}$ означает, что все компоненты вектора $\vec{\mu}$ равны нулю за исключением $\vec{\mu}_m$, т.е. $\widetilde{\vec{\mu}}^{(m)}=(\vec{0},\dots,\vec{\mu}_m,\dots,\vec{0})$.

Рассмотрен пример системы, состоящей из двух подсистем со степенями свободы N_1 и N_2.

Применяя методы, приведенные в [23], мы показываем, что томограмма центра масс $w_{cm}(\xi|\vec{\mu},\vec{\nu})$ является условным распределением вероятности величины ξ при фиксированных $\vec{\mu}$, $\vec{\nu}$. Мы обобщаем понятие томограммы центра масс, вводя совместную функцию распределения величин ξ, $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ и обсуждаем неоднозначность построения этого обобщения.

Рассмотрен пример четной и нечетной суперпозиций когерентных состояний (коты Шредингера) $|\vec{\alpha}_\pm\rangle = N_\pm(|\alpha_1,\alpha_2\rangle\pm|-\alpha_1,-\alpha_2\rangle)$, где $N_\pm$ — нормировочные постоянные. Получена формула для томограммы центра масс состояний $|\vec{\alpha}_\pm\rangle$

$$
\begin{aligned}
&w^{\pm}_{cm,\vec{\alpha}}(\xi,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2) = \pi^{-1/2}\sigma^{-1/2}N^2_{\pm}(\vec{\alpha}) \times \\
&\Big\{ \exp\Big\{ \Big[-(\xi - \sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\mu_1 - \sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\mu_2 - \sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\nu_1 - \sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big]\Big\} \\
&\pm \exp\{[-2|\alpha_1| - 2|\alpha_2|]\} \times \\
&\exp\Big\{ \Big[-(\xi - i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\mu_1 - i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\mu_2 + i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\nu_1 + i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big]\Big\} \\
&\pm \exp\{[-2|\alpha_1| - 2|\alpha_2|]\} \times \\
&\exp\Big\{ \Big[-(\xi + i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\mu_1 + i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\mu_2 - i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\nu_1 - i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big]\Big\} \\
&+ \exp\Big\{ \Big[-(\xi + \sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\mu_1 + \sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\mu_2 + \sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\nu_1 + \sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big]\Big\}\Big\},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{R}\alpha$ и $\mathcal{I}\alpha$ — действительная и мнимая части комплексной переменной α, $\sigma = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2$.

Мы вычисляем линейную энтропию состояний котов Шредингера.

В четвертой главе применяется метод реплик [24] для нахождения энтропии фон-Неймана смеси глауберовских когерентных состояний.

Энтропия фон-Неймана состояния, определяемого матрицей плотности $\hat{\rho}$, согласно методу реплик, равна

$$
S(\hat{\rho}) = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}) = -\lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^n.
$$

Метод позволяет обойти задачу диагонализации матрицы плотности, необходимую для получения энтропии стандартным методом.

Мы рассматриваем квантовое состояние

$$
\hat{\rho} = a\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + c\,|\alpha\rangle\langle\beta| + c^*\,|\beta\rangle\langle\alpha| + b\,|\beta\rangle\langle\beta|,
$$

представляющее собой смесь глауберовских когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$. Константы a и b положительные, а c комплексное. Вычисляя в явном виде след n реплик оператора плотности, мы получаем энтропию смеси когерентных состояний

$$S(\hat{\rho}) = - \frac{1+\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2}\right) - \frac{1-\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2} \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2}\right).$$

Найденную формулу мы используем для вычисления энтропии подсистем смеси котов Шредингера

$$\hat{\rho} = a\,|\overrightarrow{\alpha}_+\rangle\langle\overrightarrow{\alpha}_+| + b\,|\overrightarrow{\alpha}_-\rangle\langle\overrightarrow{\alpha}_-|,$$

где четная $|\overrightarrow{\alpha}_+\rangle$ и нечетная $|\overrightarrow{\alpha}_-\rangle$ суперпозиции когерентных состояний имеют вид

$$|\overrightarrow{\alpha}_\pm\rangle = N_\pm(|\alpha_1,\alpha_2\rangle \pm |-\alpha_1,-\alpha_2\rangle), \quad N_\pm^{-2} = \left(2 \pm 2e^{-2|\alpha_1|^2-2|\alpha_2|^2}\right).$$

В пятой главе мы изучаем модель открытой системы, представляющую собой два связанных квантовых осциллятора, каждый из которых помещен в свой тепловой резервуар (баню). Каждая из тепловых бань описывается бесконечным набором невзаимодействующих осцилляторов. Гамильтониан всей системы имеет вид

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) + \lambda\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right) + \sum_k \omega_k\left(\hat{b}_{1k}^\dagger\hat{b}_{1k} + \hat{b}_{2k}^\dagger\hat{b}_{2k}\right) + \sum_k\left[\lambda_k\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{b}_{1k} + \hat{a}_2^\dagger\hat{b}_{2k}\right) + \lambda_k^*\left(\hat{a}_1\hat{b}_{1k}^\dagger + \hat{a}_2\hat{b}_{2k}^\dagger\right)\right].$$

Бозонные операторы рождения и уничтожения $\hat{a}_1^\dagger$, $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2^\dagger$, $\hat{a}_2$ относятся к связанным осцилляторам одинаковой частоты ω, а операторы $\hat{b}_{1k}^\dagger$, $\hat{b}_{1k}$ и $\hat{b}_{2k}^\dagger$, $\hat{b}_{2k}$ к осцилляторам резервуаров с частотами ω_k; комплексные константы взаимодействия рассматриваемых осцилляторов с осцилляторами бань и между собой обозначены λ_k и λ, соответственно.

Предполагается, что в начальный момент времени A осциллятор находится в факторизованном когерентном состоянии $|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle$, а осцилляторы первого и второго резервуаров в тепловых состояниях

$$\hat{\rho}_{1k} = \int \exp\left\{\left(-\frac{|\beta_{1k}|^2}{\langle n_{1k}\rangle}\right)\right\}|\beta_{1k}\rangle\langle\beta_{1k}|\frac{d^2\beta_{1k}}{\pi\langle n_{1k}\rangle},$$
$$\hat{\rho}_{2k} = \int \exp\left\{\left(-\frac{|\beta_{2k}|^2}{\langle n_{2k}\rangle}\right)\right\}|\beta_{2k}\rangle\langle\beta_{2k}|\frac{d^2\beta_{2k}}{\pi\langle n_{2k}\rangle},$$

где средние числа заполнения задаются формулами

$$\langle n_{1k}\rangle = \left(\exp\left(\frac{\omega_k}{T_1}\right) - 1\right)^{-1}, \quad \langle n_{2k}\rangle = \left(\exp\left(\frac{\omega_k}{T_2}\right) - 1\right)^{-1}.$$

Таким образом каждая из тепловых бань характеризуется своей температурой.

Данная система обладает тем свойством, что изначально гауссовские состояния остаются гауссовскими в процессе эволюции. Система является интегрируемой.

В работе [10] было найдено, что оператор плотности A осциллятора в произвольный момент времени дается выражением

$$\hat{\rho}_A(t) = \int |\alpha_1(t),\alpha_2(t)\rangle\langle\alpha_1(t),\alpha_2(t)| \prod_{ik} \exp\left(-\frac{|\beta_{ik}|^2}{\langle n_{ik}\rangle}\right)\frac{d^2\beta_{ik}}{\pi\langle n_{ik}\rangle},$$

где функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1(t)}{dt} = -\, i\omega\alpha_1(t) - i\sum\limits_k \lambda_k\beta_{1k}(t) - i\lambda\alpha_2(t), \\ \dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = -\, i\omega\alpha_2(t) - i\sum\limits_k \lambda_k\beta_{2k}(t) - i\lambda\alpha_1(t), \\ \dfrac{d\beta_{ik}(t)}{dt} = -\, i\omega_k\beta_{ik}(t) - i\lambda_k^*\alpha_i(t) \end{cases}$$

с начальными условиями $\alpha_i(0) = \alpha_i, \quad \beta_{ik}(0) = \beta_{ik}$. Воспользовавшись сходством полученной системы уравнений с системой, рассмотренной Вайскопфом и Вигнером при рассмотрении задачи по теории излучения атомов, можно найти явный вид функций, входящих в оператор плотности связанных осцилляторов

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = & \alpha_1 \left(u_1(t) + u_2(t)\right)/2 + \alpha_2 \left(u_1(t) - u_2(t)\right)/2 \\ & + \sum\limits_k \beta_{1k} \left(v_{1k}(t) + v_{2k}(t)\right)/2 + \beta_{2k} \left(v_{1k}(t) - v_{2k}(t)\right)/2, \\ \alpha_2(t) = & \alpha_1 \left(u_1(t) - u_2(t)\right)/2 + \alpha_2 \left(u_1(t) + u_2(t)\right)/2 \\ & + \sum\limits_k \beta_{1k} \left(v_{1k}(t) - v_{2k}(t)\right)/2 + \beta_{2k} \left(v_{1k}(t) + v_{2k}(t)\right)/2. \end{cases}$$

Функции $u_i(t)$ и $v_{ik}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(t) = & \exp\left[-\varkappa_1 t - i(\Omega_1 + \delta\Omega_1)t\right], \quad u_2(t) = \exp\left[-\varkappa_2 t - i(\Omega_2 + \delta\Omega_2)t\right] \\ v_{1k}(t) = & \frac{-i\lambda_k}{\varkappa_1 + i(\Omega_1 + \delta\Omega_1 - \omega_k)} \left\{\exp\left[-i\omega_k t\right] - \exp\left[-\varkappa_1 t - i(\Omega_1 + \delta\Omega_1)t\right]\right\}, \\ v_{2k}(t) = & \frac{-i\lambda_k}{\varkappa_2 + i(\Omega_2 + \delta\Omega_2 - \omega_k)} \left\{\exp\left[-i\omega_k t\right] - \exp\left[-\varkappa_2 t - i(\Omega_2 + \delta\Omega_2)t\right]\right\}, \end{aligned}$$

где $\Omega_1 = \omega + \lambda$ и $\Omega_2 = \omega - \lambda$. Константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, играющие роль коэффициентов затухания, а величины $\delta\Omega_1$ и $\delta\Omega_2$, представляющие собой смещение частот, неявно определяются выражением

$$\delta\Omega_1 - i\varkappa_1 = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{\Omega_1 - \omega_k + i\epsilon}, \quad \delta\Omega_2 - i\varkappa_2 = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{\Omega_2 - \omega_k + i\epsilon}.$$

При решении данной системы уравнений предполагалось, что константы $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, а также $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ должны быть малы по сравнению с частотами Ω_1 и Ω_2 и константой взаимодействия осцилляторов λ.

В процессе эволюции связанные осцилляторы достигают равновесного состояния, задающегося матрицей ковариаций

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1p_1} & Q_{x_1x_2} & Q_{x_1p_2} \\ Q_{x_1p_1} & Q_{p_1p_1} & Q_{x_2p_1} & Q_{p_1p_2} \\ Q_{x_1x_2} & Q_{x_2p_1} & Q_{x_2x_2} & Q_{x_2p_2} \\ Q_{x_1p_2} & Q_{p_1p_2} & Q_{x_2p_2} & Q_{p_2p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{-1}A & 0 & \omega^{-1}B & 0 \\ 0 & \omega A & 0 & \omega B \\ \omega^{-1}B & 0 & \omega^{-1}A & 0 \\ 0 & \omega B & 0 & \omega A \end{pmatrix},$$

где

$$
\begin{aligned}
A =& \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\langle n_1^{\Omega_1}\rangle + \langle n_2^{\Omega_1}\rangle + \langle n_1^{\Omega_2}\rangle + \langle n_2^{\Omega_2}\rangle\right),\\
B =& \frac{1}{4}\left(\langle n_1^{\Omega_1}\rangle + \langle n_2^{\Omega_1}\rangle - \langle n_1^{\Omega_2}\rangle - \langle n_2^{\Omega_2}\rangle\right),\\
&\langle n_j^{\Omega_i}\rangle = \left(\exp\left(\frac{\Omega_i}{T_j}\right) - 1\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Полученная ковариационная матрица соответствует негиббсовскому состоянию и определяется температурами обеих тепловых бань.

Найденная матрица плотности A осциллятора $\hat{\rho}_A$ не факторизуется, так как функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ линейно зависят от β_{1k} и β_{2k}. Является ли равновесное состояние $\hat{\rho}_A(t \to \infty)$ запутанным или сепарабельным? Для исследования корреляций, возникающих между рассматриваемыми осцилляторами, мы применяем следствие критерия Саймона [25]: если элементы ковариационной матрицы двухмодового гауссового состояния удовлетворяет неравенству

$$
\det\begin{pmatrix} Q_{x_1x_2} & Q_{x_1p_2} \\ Q_{x_2p_1} & Q_{p_1p_2} \end{pmatrix} \geq 0,
$$

то данное состояние является сепарабельным.

Мы доказываем, что равновесное состояние является сепарабельным.

Мы находим матрицу плотности равновесного состояния

$$
\begin{aligned}
\rho_A(x_1',x_2',x_1,x_2) = \frac{\omega}{\pi\sqrt{\coth\frac{\Omega_1}{2T_1}\coth\frac{\Omega_2}{2T_2}}}\\
\times\exp\left[-\frac{\omega}{4}\left(\coth\frac{\Omega_1}{T_1} + \coth\frac{\Omega_2}{T_2}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2\right)\right.\\
+\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\sinh\frac{\Omega_1}{T_1}} + \frac{1}{\sinh\frac{\Omega_2}{T_2}}\right)(x_1x_1' + x_2x_2') - \frac{\omega}{2}\left(\coth\frac{\Omega_1}{T_1} - \coth\frac{\Omega_2}{T_2}\right)(x_1x_2 + x_1'x_2')\\
\left.+\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\sinh\frac{\Omega_1}{T_1}} - \frac{1}{\sinh\frac{\Omega_2}{T_2}}\right)(x_1'x_2 + x_1x_2')\right],
\end{aligned}
$$

to

(2)

а также соответствующую функцию Вигнера

$$W_A(x_1,p_1,x_2,p_2) = \frac{\left(e^{\Omega_1/T_1}-1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}-1\right)}{\pi^2\left(e^{\Omega_1/T_1}+1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}+1\right)} \times$$
$$\exp\left(-\frac{e^{\Omega_1/T_1+\Omega_2/T_2}-1}{\left(e^{\Omega_1/T_1}+1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}+1\right)}\left(\omega x_1^2+\omega^{-1}p_1^2+\omega x_2^2+\omega^{-1}p_2^2\right)\right.$$
$$\left.+2\,\frac{e^{\Omega_2/T_2}-e^{\Omega_1/T_1}}{\left(e^{\Omega_1/T_1}+1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}+1\right)}\left(\omega x_1x_2+\omega^{-1}p_1p_2\right)\right).$$

Было показано, что в случае равных температур резервуаров равновесное состояние является гиббсовским.

В шестой главе рассматриваются f-осцилляторы и соответствующие f - когерентные состояния, являющиеся обобщением обычных когерентных состояний на случай нелинейных колебаний.

$f-$осциллятор есть нелинейный осциллятор, зависимость частоты колебаний от энергии которого определяется функцией f

$$\hat H_f = (\hat A\hat A^\dagger + \hat A^\dagger\hat A)/2, \quad \hat A = \hat a f\left(\hat a^\dagger\hat a\right).$$

f-когерентное состояние $|\alpha,f\rangle$ определяется как собственное состояние деформированного оператора уничтожения $\hat A$, $\hat A|\alpha,f\rangle=\alpha|\alpha,f\rangle$. Разложение f-когерентного состояния по фоковским состояниям, имеет вид

$$|\alpha,f\rangle = N_f(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}f(n)!}|n\rangle, \quad N_f(\alpha) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n![f(n)!]^2}\right]^{-1/2}$$

где $f(n)! = f(0)f(1)f(2)\dots f(n)$.

Получены формулы для симплектической, оптической томограмм, томограммы счета фотонов и функции Хусими f-осциллятора. Например, симплектическая томограмма имеет вид

$$M(X,\mu,\nu) = N_f^2(\alpha)\frac{\exp\left\{\left(-\frac{X^2}{\mu^2+\nu^2}\right)\right\}}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!f(n)!}\left(\frac{\mu-i\nu}{\sqrt2\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)^n H_n\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)\right|^2.$$

H_n — полиномы Эрмита. Рассмотрен пример f-когерентного состояния

$$|\alpha,f_\lambda\rangle = \left[{}_0F_1\left(\lambda,\lambda|\alpha|^2\right)\right]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sqrt{\frac{\lambda^n \Gamma(\lambda)}{n!\,\Gamma(\lambda+n)}}|n\rangle,$$

где ${}_0F_1(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Gamma(a)/\left(n!\,\Gamma(a+n)\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Данное когерентное состояние соответствует функции

$$f_\lambda(\hat{n}) = \lambda^{-1/2}\sqrt{\hat{n}-1+\lambda}.$$

f-когерентные состояния такого типа могут представлять интерес в различных задачах, например, имеющих отношение к эффекту Керра или связанных с потенциалом Пёшль-Теллера.

Далее мы используем метод, разработанный в [26], а также известные энтропийные неравенства [27] для получения неравенств для обобщенных полиномов Лагерра

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\lambda_{2m}(n,x)+\lambda_{2m+1}(n,x)\right)\ln\left(\lambda_{2m}(n,x)+\lambda_{2m+1}(n,x)\right) \\ -\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m}(n,x)\right)+x\,e^{x} \\ -\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m+1}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m+1}(n,x)\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m(n,x)\ln\lambda_m(n,x)\geq 0,$$

где $x>0$ и

$$\lambda_m(n,x) = \begin{cases} \frac{n!}{m!}x^{m-n}\left[L_n^{(m-n)}(x)\right]^2, & \text{for} \quad m\geq n,\\ \frac{m!}{n!}x^{n-m}\left[L_m^{(n-m)}(x)\right]^2, & \text{for} \quad m\leq n.\end{cases}$$

Далее мы приводим общую схему, с помощью которой можно получить множество других неравенств. Например, при $s\geq 2$ выполнено

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{s-1}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{l=0}^{s-1}\lambda_{sj+l}(n,x)\right) \\ -\sum_{l=0}^{s-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m(n,x)\ln\lambda_m(n,x)+x\,e^{x}\geq 0.$$

Мы изучаем обобщение нелинейных когерентных состояний на случай двух мод

$$|\alpha_1\,\alpha_2,f\rangle = N_f(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}}{\sqrt{n_1!\,n_2!\,f(n_1+n_2)!}}|n_1\,n_2\rangle,$$

$$N_f(\alpha_1,\alpha_2) = \left(\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{|\alpha_1|^{2n_1}|\alpha_2|^{2n_2}}{n_1!n_2![f(n_1+n_2)!]^2}\right)^{-1/2}.$$

Мы показываем, что нелинейность, описываемая функцией f, приводит к запутанности состояний. Запутанность мы анализируем с использованием линейной энтропии $S_f = 1 - \mathrm{Tr}\hat{\rho}_1^2$, где $\hat{\rho}_1 = \mathrm{Tr}_2|\alpha_1\,\alpha_2,f\rangle\langle\alpha_1\,\alpha_2,f|$

$$S_f(\alpha_1,\alpha_2) = 1 - N_f^4(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n,m,p,k=0}^{\infty}\frac{|\alpha_1|^{2(n+p)}|\alpha_2|^{2(k+m)}}{m!\,n!\,k!\,p!f(n+m)!f(p+m)!f(p+k)!f(n+k)!}.$$

Мы подробно изучаем полученную формулу для различных предельных случаев параметров системы.

Также рассмотрены суперпозиции двухмодовых f-когерентных состояний, являющиеся обобщением состояний шредингеровских котов на нелинейный случай

$$|\psi\rangle_f^{\pm} = N_{\pm}(|\alpha\,\alpha,f\rangle \pm |-\alpha\,-\alpha,f\rangle),$$

где $N_{\pm}$ — нормировочные константы. Мы изучаем запутанность этих состояний при помощи линейной энтропии.

В седьмой главе мы используем вероятностное представление для исследования действия нелинейного квантового канала [19]

$$\rho \to \Phi_\alpha(\rho) = \frac{\rho^\alpha}{\mathrm{Tr}\rho^\alpha}.$$

Канал сохраняет эрмитовость, неотрицательность и след матрицы плотности. Данное отображение является квантово-механическим аналогом эскорт распределения, применяющегося в различных областях физики.

В вероятностном представлении матрица плотности параметризуется тремя величинами p_1, p_2 и p_3 имеющими интерпретацию вероятностей проекции спина $m = +1/2$ на три взаимно перпендикулярных оси в пространстве

$$\rho = \frac{I}{2} + \sum_{k=1}^{3} \left(p_k - \frac{1}{2} \right) \sigma_k \,,$$

где σ_k — матрицы Паули и I — единичная матрица. Вероятности удовлетворяют неравенствам

$$(p_1 - 1/2)^2 + (p_2 - 1/2)^2 + (p_3 - 1/2)^2 \leq 1/4 \,.$$

Мы находим матрицу плотности, полученную после действия канала

$$\Phi_\alpha(\rho) = \frac{I}{2} + \left(\tilde{p}_k - \frac{1}{2} \right) \sigma_k \,,$$

где

$$\tilde{p}_k - \frac{1}{2} = \frac{\left(p_k - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\mu_\alpha - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)^2}}.$$

Параметр чистоты состояния $\Phi_\alpha(\rho)$ равен

$$\mu_\alpha = \mathrm{Tr}\, \Phi_\alpha^2(\rho) = \frac{\lambda_+^{2\alpha} + \lambda_-^{2\alpha}}{(\lambda_+^\alpha + \lambda_-^\alpha)^2}.$$

и изменяется в пределах от $1/2$ до 1 для максимально смешанного, $I/2$, и чистого состояний, соответственно. Далее мы показываем, что параметр чистоты состояния, полученного после действия канала при больших значениях параметра α, практически равен единице. Таким образом нелинейное отображение приводит к «очищению» начального состояния. Канал тождественен единице для максимально смешанного состояния.

Далее мы рассматриваем «расстояние» между двумя квантовыми состояниями, полученными после действия нелинейного отображения. В качестве меры расстояния выбрана относительная энтропия Тсаллиса

$$S_q(\rho \parallel \sigma) = \frac{1}{1-q} \left(1 - \mathrm{Tr} \rho^q \sigma^{1-q} \right) \,.$$

Получена формула для относительной энтропия Тсаллиса состояний $\Phi_\alpha(\rho)$ и $\Phi_\beta(\rho)$

$$S_q(\Phi_\alpha(\rho) \parallel \Phi_\beta(\rho)) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \frac{\lambda_+^{\alpha q+\beta(1-q)} + \lambda_-^{\alpha q+\beta(1-q)}}{\left(\lambda_+^\alpha + \lambda_-^\alpha\right)^q \left(\lambda_+^\beta + \lambda_-^\beta\right)^{1-q}}\right).$$

Мы используем энтропию Тсаллиса, являющуюся обобщением энтропии фон Неймана, для анализа свойств нелинейного отображения.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Список публикаций по теме диссертации

[1] *Dudinets, I. V.* Bound State of a Particle in the Dirac Delta Potential in the Tomographic-Probability Representation of Quantum Mechanics / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. – 2013. – Vol. 34, no. 6. – P. 593–602.

[2] *Dudinets, I. V.* Optical Tomograms and Husimi Q-Function for a Particle Moving in the Dirac Delta Potential / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. – 2014. – Vol. 35, no. 5. – P. 470–477.

[3] *Dudinets, I. V.* The replica method and entropy for a mixture of two-mode even and odd Schrödinger cat states / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. – 2015. –Vol. 36, no. 3. –P. 251–257

[4] *Dudinets, I. V.* Center-of-Mass Tomography and Wigner Function for Multimode Photon States / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // International Journal of Theoretical Physics. – 2018. – P. 1–14.

[5] Tomography on f-oscillators / I. Dudinets [et al.] // Physica Scripta. – 2017. – Vol. 92, no. 11. – P. 115101.

[6] *Dudinets, I. V.* Characterization of the nonlinear qubit map using the probability parametrization / I. Dudinets, V. Man'ko // EPL (Europhysics Letters). – 2018. –Vol. 123, no. 5. –– P. 50004.

[7] *Dudinets, I. V.* Quantum correlations for two coupled oscillators interacting with two heat baths / I. Dudinets, V. Man'ko // Canadian Journal of Physics. –2019.

Список литературы

1. *Mancini S.*, *Man'Ko V.*, *Tombesi P.* Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // Physics Letters A. — 1996. — Т. 213, № 1/2. — С. 1—6.

2. *Mancini S.*, *Man'ko V. I.*, *Tombest P.* Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography // Foundations of Physics. — 1997. — Т. 27, № 6. — С. 801—824.

3. An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics / A. Ibort [и др.] // Physica Scripta. — 2009. — Т. 79, № 6. — С. 065013.

4. *Lvovsky A. I.*, *Raymer M. G.* Continuous-variable optical quantum-state tomography // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Т. 81, № 1. — С. 299.

5. *Manko V.*, *Chikhachev A.* Classical-like description of quantum states and propagator for particles in time-independent and dispersing δ potentials // Physics of Atomic Nuclei. — 2001. — Т. 64, № 8. — С. 1457—1463.

6. *Arkhipov A. S.*, *Manko V. I.* Quantum transitions in the center-of-mass tomographic probability representation // Physical Review A. — 2005. — Т. 71, № 1. — С. 012101.

7. *Liu K. L.*, *Goan H. S.* Non-Markovian entanglement dynamics of quantum continuous variable systems in thermal environments // Physical Review A. — 2007. — Т. 76, № 2. — С. 022312.

8. *Castro A. de*, *Siqueira R.*, *Dodonov V.* Effect of dissipation and reservoir temperature on squeezing exchange and emergence of entanglement between two coupled bosonic modes // Physics Letters A. — 2008. — Т. 372, № 4. — С. 367—374.

9. *Dorofeyev I.* Dynamics and stationarity of two coupled arbitrary oscillators interacting with separate reservoirs // Journal of Statistical Physics. — 2016. — Т. 162, № 1. — С. 218—231.
10. *Glauber R.*, *Man'ko V.* Damping and fluctuations in coupled quantum oscillator systems // Sov. Phys. JETP. — 1984. — Т. 60. — С. 450—457.
11. f-Oscillators and nonlinear coherent states / V. I. Man'ko [и др.] // Physica Scripta. — 1997. — Т. 55, № 5. — С. 528.
12. *Faghihi M. J.*, *Tavassoly M. K.* Number-phase entropic squeezing and nonclassical properties of a three-level atom interacting with a two-mode field: intensity-dependent coupling, deformed Kerr medium, and detuning effects // J. Opt. Soc. Am. B. — 2013. — Т. 30, № 11. — С. 2810—2818.
13. *Kilin S. Y.*, *Mikhalychev A. B.* Single-atom laser generates nonlinear coherent states // Physical Review A. — 2012. — Т. 85, № 6. — С. 063817.
14. A tomographic setting for quasi-distribution functions / V. Man'ko [и др.] // Reports on Mathematical Physics. — 2008. — Т. 61, № 3. — С. 337—359.
15. *Manko V. I.*, *G M.*, *Zaccaria F.* Moyal and tomographic probability representations for f-oscillator quantum states // Physica Scripta. — 2010. — Т. 81, № 4. — С. 045004.
16. *Chernega V. N.*, *Man'ko O. V.*, *Man'ko V. I.* Triangle Geometry of the Qubit State in the Probability Representation Expressed in Terms of the Triada of Malevich's Squares // Journal of Russian Laser Research. — 2017. — Т. 38, № 2. — С. 141—149.
17. *Chernega V. N.*, *Manko O. V.*, *Manko V. I.* Quantum suprematism picture of Triada of Malevichs squares for spin states and the parametric oscillator evolution in the probability representation of quantum mechanics. — 2018.

18. *Carteret H. A., Terno D. R., Zyczkowski K.* Dynamics beyond completely positive maps: Some properties and applications // Physical Review A. — 2008. — Т. 77, № 4. — С. 042113.

19. *Man'ko V., Puzko R.* Entropic and information inequality for nonlinearly transformed two-qubit X-states // EPL (Europhysics Letters). — 2015. — Т. 109, № 5. — С. 50005.

20. Quantum state identification of qutrits via a nonlinear protocol / P. Pyshkin [и др.] // arXiv preprint quant-ph/1808.10360. — 2018.

21. *Figueiredo E., Malbouisson J.* A note on the time evolution of a density operator interpolating between pure and mixed states // The European Physical Journal B. — 2020. — Т. 93, № 10. — С. 1—6.

22. *Arqand A., Memarzadeh L., Mancini S.* Quantum capacity of a bosonic dephasing channel // Physical Review A. — 2020. — Т. 102, № 4. — С. 042413.

23. *Man'ko M. A., Man'ko V. I.* Tomographic entropic inequalities in the probability representation of quantum mechanics // AIP Conf. Proc. (Mexico). Т. 1488. — AIP. 2012. — С. 110—121.

24. Entropy generation in Gaussian quantum transformations: applying the replica method to continuous-variable quantum information theory / C. N. Gagatsos [и др.] // npj Quantum Information. — 2016. — Т. 2. — С. 15008.

25. *Simon R.* Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems // Physical Review Letters. — 2000. — Т. 84, № 12. — С. 2726.

26. *Man'ko M. A., Man'ko V. I.* Properties of nonnegative Hermitian matrices and new entropic inequalities for noncomposite quantum systems // Entropy. — 2015. — Т. 17, № 5. — С. 2876—2894.

27. *Lieb E. H.*, *Ruskai M. B.* Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy // Journal of Mathematical Physics. — 1973. — T. 14, № 12. — C. 1938—1941.