На правах рукописи

Масаева Олеся Хажисмеловна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород – 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент,
Псху Арсен Владимирович

Официальные оппоненты:

Кожанов Александр Иванович
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник лаборатории дифференциальных и разностных уравнений

Дюжева Александра Владимировна
кандидат физико-математических наук,
ФГБОУ ВО "Самарский государственный технический университет", доцент кафедры высшей математики

Защита состоится 19 октября 2021 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета БелГУ.01.01 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ФГАОУ ВО "Белгородский государственный национальный исследовательский университет" по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы 85, корп. 17, ауд. 3-33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО "Белгородский государственный национальный исследовательский университет" и на сайте *library.bsu.edu.ru.*

Автореферат разослан "___"______________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Полунин Виктор Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения с операторами дробного дифференцирования в последние годы исследуются очень активно. Это связано с закономерностями развития общей теории дифференциальных уравнений, а также с обширными приложениями в физике и моделировании (см., например, работы авторов: А. М. Нахушев, В. В. Учайкин, F. Mainardi, В. Е. Тарасов, T. M. Atanacković и др.).

Изучению таких уравнений посвящены многочисленные исследования, которые ведутся в различных направлениях и для различных классов дифференциальных уравнений. Существенный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих операторы дробного дифференцирования внесли А. М. Нахушев, А. Н. Кочубей, А. А. Килбас, W. Wyss, W. R. Schneider, Ya. Fujita, F. Mainardi, E. Buckwar, R. Gorenflo, O. P. Agrawal, А. В. Псху, С. Д. Эйдельман, Yu. Luchko, М. О. Мамчуев, В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, Г. П. Лопушанская, А. В. Глушак, О. А. Репин, С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина, А. Н. Зарубин и многие другие.

В частности, для обширного класса дифференциальных уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка были исследованы начальные и основные краевые задачи. Однако стоит отметить, что исследования краевых задач с данными на всей границе рассматриваемой области для уравнений, содержащих частные производные дробного порядка, практически не проводились.

Результаты работы получены в рамках выполнения научно-исследовательских работ по темам государственного задания ИПМА КБНЦ РАН (№№ гос. регистрации 01200952821; 01201272416; 01201361966; АААА-А16-116022510118-6; АААА-Б19-219070390086-3), гранта РФФИ (№ 09-01-96510), государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-03-2021-071).

Цель работы. Основная цель настоящей работы состоит в исследовании краевых задач, носителями данных для которых выступает вся граница рассматриваемых областей, для уравнений в частных производных, содержащих операторы дифференцирования дробного порядка, не превосходящего двух. Рассматриваемые уравнения соответствуют уравнениям эллиптического типа, в том числе уравнению Лапласа, волновому уравнению и уравнению Лаврентьева-Бицадзе, при устремлении порядка дробных производных к двум.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием теории дробного исчисления, метода Фурье, подхода А. М. Нахушева к доказательству единственности решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа, основанного на полноте системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, метода abc, теории специальных функций, метода интегральных преобразований Станковича.

Научная новизна. В работе доказаны теоремы существования и единственности, а также построены явные представления решений, для класса краевых задач, носителями данных для которых выступает вся граница рассматриваемых ограниченных и неограниченных областей, и являющихся аналогами задач Дирихле и Неймана.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Доказаны существование и единственность решения задачи Дирихле для аналогов уравнений с оператором Лапласа с двумя независимыми переменными.

2. Доказаны принципы максимума решения для многомерных уравнений с обобщенным оператором Лапласа дробного порядка и младшими дробными производными в ограниченной и неограниченной областях.

3. Построены решения краевых задач, являющихся аналогами задачи Дирихле и Неймана в верхней полуплоскости, для обобщенного уравнения Лапласа. Доказаны существование и единственность решения указанных задач.

4. Найдено необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения в прямоугольной области.

5. Доказаны существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения второго порядка, содержащего оператор дробного дифференцирования с линией начал, лежащей внутри области (аналог уравнения смешанного типа).

Практическая и теоретическая значимость работы. Представленные в диссертации результаты имеют теоретическую и практическую значимость. Практическая значимость работы обусловлена эффективными приложениями методов дробного исчисления и теории дифференциальных уравнений дробного порядка при моделировании различных физических процессов и систем с памятью.

Апробация. Результаты, полученные в работе докладывались и обсуждались на заседаниях научно-исследовательского семинара по проблемам современного анализа, информатике и физике ИПМА КБНЦ РАН (руководитель семинара – А. М. Нахушев), на заседаниях отдела Дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН (руководитель – А. В. Псху), на математическом семинаре НИУ "БелГУ" (руководители семинара – В. Б. Васильев, С. М. Ситник, А. П. Солдатов, ноябрь 2020 г.), на объединенном семинаре кафедры прикладной математики МГСУ и ИПМА КБНЦ РАН (сентябрь 2020 г.), на Международных конференциях молодых ученых: Математический анализ и математическое моделирование (Владикавказ – 2010), Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики (Нальчик – 2011, Терскол – 2012), на IX, X, XII Школах молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики" (Нальчик – 2011, Эльбрус – 2012, Терскол – 2014), на Всероссийских и Международных научных конференциях: Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики (Нальчик – 2014), Actual problems of applied mathematics and physics and School for young scientist nonlocal boundary problems and modern problems of algebra, analysis and informatics (Elbrus – 2015), Актуальные проблемы прикладной математики (Нальчик-Эльбрус – 2018), на V Международной научной конференции, посвященной 80-летию Адама Маремовича Нахушева: Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики (Нальчик – 2018).

Публикации. Результаты, представленные в диссертации опубликованы в работах автора [1–27]. Из них работы [2–5] и [9–12] опубликованы в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук и входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования; работы [13] и [14] опубликованы в зарубежных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит следующие разделы: введение, вводная часть, три главы, разделенные на параграфы, заключение и список литературы, изложена на 104 страницах и содержит два рисунка.

Основное содержание работы

Во введении дается краткий обзор состояния предмета исследования, обосновывается актуальность темы диссертации и приводятся основные результаты исследования.

В вводной части приводятся некоторые необходимые для дальнейшего сведения из теории дробного исчисления, теории специальных функций и теории интегральных преобразований Станковича.

В первой главе изучены уравнения с операторами дробного дифференцирования, которым соответствуют эллиптические уравнения при устремлении значений порядков дробных производных к двум.

В параграфе 1.1 первой главы решена задача Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \partial_{0y}^{\alpha} u = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \tag{1}$$

на множестве $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$. Здесь $\partial_{0y}^{\alpha} u = D_{0y}^{\alpha-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$ – частная производная Герасимова-Капуто порядка α,

$$D_{at}^{\alpha}\varphi(t) = \frac{\operatorname{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^t |t-s|^{-\alpha-1}\varphi(s)ds, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{at}^{\alpha}\varphi(t) = \varphi(t), \quad \alpha = 0,$$

$$D_{at}^{\alpha}\varphi(t) = \operatorname{sign}^n(t-a)\frac{d^n}{dt^n} D_{at}^{\alpha-n}\varphi(t), \quad n-1 < \alpha \le n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D_{at}^{ν}– оператор дробного интегро-дифференцирования порядка ν в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке a.

Функцию $u = u(x, y)$ назовем регулярным решением уравнения (1) в области Ω, если выполняются включения $u \in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $\partial_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$, и соотношение (1) во всех точках $(x, y) \in \Omega$.

Задача 1. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\tau_0(x), \quad u(x,b)=\tau_b(x), \tag{3}$$

где $\tau_0(x), \tau_b(x)$ *– заданные значения.*

Для исследования вопроса существования решения сформулированной выше задачи 1 нам понадобится класс функций, удовлетворяющих условиям Дирихле на интервале (c,d), т. е. класс таких функций $f(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) функция $f(x)$ имеет конечное число разрывов первого рода на интервале (c,d);

2) интервал (c,d) можно разделить на конечное число интервалов, что на каждом интервале функция $f(x)$ монотона.

Теорема 1. *Если*

1) $\tau_0(x)\in C^1[0,a],\ \tau_b(x)\in C[0,a]$,

2) для $\tau_0''(x)$ *и* $\tau_b'(x)$ *на промежутке* $(0,a)$ *имеют место условия Дирихле,*

3) $\tau_b(0)=0, \tau_b(a)=0, \tau_0(0)=0, \tau_0(a)=0$, *то формула*

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\tau_{0n}\Big[E_{\alpha,1}\big(\lambda_n y^\alpha\big)-\frac{yE_{\alpha,2}\big(\lambda_n y^\alpha\big)}{bE_{\alpha,2}\big(\lambda_n b^\alpha\big)}E_{\alpha,1}\big(\lambda_n b^\alpha\big)\Big]+$$

$$+\tau_{bn}\frac{yE_{\alpha,2}\big(\lambda_n y^\alpha\big)}{bE_{\alpha,2}\big(\lambda_n b^\alpha\big)}\Big\}\sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

где $E_{\beta,\mu}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+\mu)}$, $\beta>0, \mu\in\mathbb{C}$ *– функция типа Миттаг-Леффлера, дает регулярное решение задачи Дирихле (1)-(3), причем коэффициенты* τ_{0n}, τ_{bn} *вычисляются по формулам*

$$\tau_{0n}=\frac{2}{a}\int_0^a\tau_0(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx,\ \tau_{bn}=\frac{2}{a}\int_0^a\tau_b(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx,\ \lambda_n=\big(\pi n/a\big)^2.$$

Теорема 2. *Задача (2), (3) для уравнения (1) имеет не более одного решения* $u\in C^1(\bar\Omega)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\partial_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega)$.

В параграфе 1.2 в области $\Omega=\{(x,y):0<x<a, 0<y<b\}$ представлено уравнение

$$D_{0x}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x}u+D_{0y}^{\beta-1}\frac{\partial}{\partial y}u+c(x,y)u(x,y)=f(x,y), \tag{4}$$

где $1<\alpha,\beta<2$.

Регулярным решением уравнения (4) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ такую, что $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0x}^{\alpha-1}u_x$, $D_{0y}^{\beta-1}u_y \in C(\Omega)$, $u_x \in L(0,a)\ \forall\ y \in]0,b[$, $u_y \in L(0,b)\ \forall\ x \in]0,a[$.

Задача 2. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (4), удовлетворяющее граничному условию*

$$u|_{\sigma} = 0, \tag{5}$$

где $\sigma = \partial\Omega$.

Теорема 3. *Пусть $c(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x,y) \in L^2(\Omega)$ и имеет место неравенство*

$$c(x,y) < 0,\ (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

Тогда для регулярного решения задачи Дирихле (5) для уравнения (4), при $D_{0x}^{\alpha-2}u_x$, $D_{0y}^{\beta-2}u_y \in C(\bar{\Omega})$, справедлива оценка

$$\|u\|_0 \leq \mu\|f\|_0,$$

где $\mu > 0$ – постоянная, не зависящая от u и f, а $\|\cdot\|_0$– норма в пространстве $L^2(\Omega)$.

Далее под $\Omega \subset \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ подразумевается область, содержащая вместе с любой точкой $(x,y) \in \Omega$ интервалы с концами в точках $(x,y),(x,0)$ и $(x,y),(0,y)$, и ограниченная кусочно-гладкой кривой Жордана.

Задача 3. *Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0x}^{\alpha-1}u_x$, $D_{0y}^{\beta-1}u_y \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (4) в области Ω и краевому условию*

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть $c(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0x}^{\alpha-2}u_x$, $D_{0y}^{\beta-2}u_y \in C(\bar{\Omega})$, $c(x,y) \leq 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Тогда задача Дирихле (6) для уравнения (4) может иметь не более одного решения $u(x,y)$.*

В параграфе 1.3 доказан принцип экстремума для многомерного уравнения.

Пусть область $\Omega \subset \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i > 0, i = \overline{1,n}\}$, ограничена кусочно-гладкой поверхностью σ, и если точка $x \in \Omega$, то

$$I_x \in \Omega, \qquad I_x = (0,x_1) \times (0,x_2) \times \cdots \times (0,x_n).$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i(x)\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}+b_i(x)\frac{\partial^{\beta_i}}{\partial x_i^{\beta_i}}\Big)u+c(x)u=0, \tag{7}$$

где $\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}u = D_{0x_i}^{\alpha_i-1}u_{x_i}$, $\frac{\partial^{\beta_i}}{\partial x_i^{\beta_i}}u = D_{0x_i}^{\beta_i-1}u_{x_i}$, $1<\alpha_i<2$, $0<\beta_i<1$, $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c(x)\in C(\bar\Omega)$, $i=\overline{1,n}$.

Под регулярным решением уравнения (7) в области Ω будем понимать функцию $u=u(x)$, $u\in C(\bar\Omega)$, $D_{0x_i}^{\alpha_i-1}u_{x_i}$, $D_{0x_i}^{\beta_i-1}u_{x_i}\in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (7) во всех точках $x\in\Omega$, такую, что производная $\frac{\partial}{\partial x_i}u$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x_i с показателем $\varepsilon>\alpha_i-1, i=\overline{1,n}$.

Имеет место следующий принцип экстремума.

Теорема 5. *Пусть*

$$a_i(x)>0,\, b_i(x)\le 0,\, c(x)\le 0\,\forall x\in\bar\Omega.$$

Тогда функция u на границе $\partial\bar\Omega$ области Ω принимает наибольшее (наименьшее) положительное (отрицательное) значение.

Задача 4. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (7), удовлетворяющее краевому условию*

$$u(x)=\varphi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция на $\partial\Omega$.

Теорема 6. *Пусть $a_i(x)>0$, $b_i(x)\le 0$, $c(x)\le 0$, $x\in\bar\Omega$. Тогда если существует регулярное решение задачи (7), (8), то оно единственно.*

Здесь же рассматривается уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\left(D_{0x_i}^{\alpha_i}+a_i(x)D_{0x_i}^{\beta_i}\right)u_{x_i}(x)=0, \tag{9}$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in(0,1),\quad \beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in(-1,0)$,

Далее, следуя работам А. В. Псху, запись $D\subset\mathcal{C}$ будет означать, что область D целиком лежит в положительном ортанте: $D\subset\{x : x_i>0\}$ и обладает следующим свойством:

$$\text{если}\quad x\in D,\quad \text{то}\quad I_x\subset D,\, I_x=(0,x_1)\times(0,x_2)\times\cdots\times(0,x_n).$$

Пусть $\partial_1=\{x\in\partial D, x_i>0,\, i=1,2,...,n\}$, $\partial_0=\partial D\setminus\partial_1$. Включение $u(x)\in H_*^{\{\lambda_1,...,\lambda_n\}}(D)$ будет означать, что функция $u(x)\in C^1(D)$ и для любого замкнутого подмножества области $D \subset \mathcal{C}$ выполняются неравенства

$$|u_{x_1}(x) - u_{x_1}(x_1 - \varepsilon, x_2, ..., x_n)| \leq C\varepsilon^{\lambda_1},\ \lambda_1 > \alpha_1,$$

$$|u_{x_2}(x) - u_{x_2}(x_1, x_2 - \varepsilon, ..., x_n)| \leq C_1\varepsilon^{\lambda_2},\ \lambda_2 > \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|u_{x_n}(x) - u_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n - \varepsilon)| \leq C_{n-1}\varepsilon^{\lambda_n},\ \lambda_n > \alpha_n,$$

где $C, C_1, ..., C_{n-1}$ – некоторые постоянные.

Регулярным решением уравнения (9) в области $D \subset \mathcal{C}$ будем называть функцию $u = u(x)$, для которой справедливы включения

$$u \in C(\bar{D}),\ u \in C^1(D \cup \partial_0),\ u \in H_*^{\{\lambda_1,...,\lambda_n\}}(D), D_{0x_i}^{\alpha_i - 1} u_{x_i}(x) \in C^1(D),$$

для всех $i = \overline{1, n}$; выполнено равенство $\lim\limits_{|x|\to\infty} u = 0$, в случае, когда D бесконечна, и удовлетворяющую уравнению (9) в области D.

Лемма 1. *Пусть $a_i(x) \leq 0$, $x \in \bar{D}$, $u(x)$ – регулярное решение уравнения* (9)*. Тогда*

$$\inf_{x\in\partial\bar{D}} u(x) \leq u(x) \leq \sup_{x\in\partial\bar{D}} u(x).$$

Задача 5. *Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (9) в области $D \subset \mathcal{C}$, удовлетворяющее граничному условию*

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial D, \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция на ∂D.

Теорема 7. *Пусть $a_i(x) \leq 0$, $x \in D$. Тогда решение задачи (9), (10) единственно.*

В параграфе 1.5 получено представление решения уравнения

$$u_{xx} + D_{0y}^{\alpha} D_{0y}^{\alpha} u = 0, \tag{11}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, в области $\Omega = \{(x, y) : |x| < \infty,\ y > 0\}$.

Функцию $u = u(x, y)$ назовем регулярным решением уравнения (11) в области Ω, если

$$y^{1-\alpha} u \in C(\bar{\Omega}),\ u_{xx}, D_{0y}^{\alpha} D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega),$$

и если она в области Ω удовлетворяет уравнению (11).

Задача 6. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (11), удовлетворяющее следующему условию*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u = \tau(x), \tag{12}$$

на всей вещественной оси, где $\tau(x)$ – заданная функция.

Теорема 8. *Пусть $\tau(x)$ – непрерывная и ограниченная на всей оси функция. Тогда функция*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\xi)G(\xi - x, y)d\xi,$$

где

$$G(x,y) = \frac{y^{2\alpha-1}}{x^2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}tE_{2\alpha,2\alpha}\left(-y^{2\alpha}/x^2\cdot t^2\right)dt,$$

является регулярным решением задачи (11), (12).

Теорема 9. *Пусть u_x, $y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$,*

$$\lim_{|x|\to\infty} u_x\cdot D_{0y}^{\alpha-1}u = 0,$$

$$\lim_{y\to\infty} D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u\cdot D_{0y}^{\alpha-1}u = 0.$$

Тогда решение задачи (11), (12) *единственно.*

Задача 7. *Найти в области Ω функцию $u(x,y)$: $y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (11) и граничному условию*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u = \tau(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{13}$$

где $\tau(x)$ – заданная на $\mathbb{R}$ функция.

Теорема 10. *Пусть $|x|^{\varepsilon+1}\tau(x)\to 0$, при $|x|\to\infty$. Тогда функция*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\xi)G(\xi - x, y)d\xi + \frac{Cy^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

где

$$G(x,y) = \frac{\ln|x|\cdot y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{y^{3\alpha-1}}{x^2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}tE_{2\alpha,3\alpha}\left(-y^{2\alpha}/x^2\cdot t^2\right)dt,$$

C– некоторая постоянная, есть решение задачи (11), (13).

Теорема 11. *Пусть* u_x, $y^{1-\alpha}D_{0y}^{\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$ *и справедливы соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty} u_x \cdot D_{0y}^{\alpha-1}u = 0,$$

$$\lim_{y\to\infty} D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u \cdot D_{0y}^{\alpha-1}u = 0.$$

Тогда решение задачи (11), (13) единственно с точностью до слагаемого $\frac{Cy^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 15–21].

В параграфе 2.1 второй главы исследовано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \partial_{0y}^{\alpha}u = 0, \tag{14}$$

где $1 < \alpha < 2$.

Функцию $u = u(x, y)$ назовем регулярным решением уравнения (14) в области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

если $u \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \partial_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega)$, и если u удовлетворяет уравнению (14) во всех точках области Ω.

Задача 8. *Найти в области* Ω *регулярное решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \;\; 0 \le y \le b, \tag{15}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \; 0 \le x \le a. \tag{16}$$

Пусть $\mathbb{Q}^{\alpha} \subset \mathbb{R}$ - множество чисел вида

$$\frac{\lambda_k^{1/\alpha}}{(\pi n)^{2/\alpha}},$$

где $n \in \mathbb{N}$, λ_k – все действительные корни функции $E_{\alpha,2}(z)$:

$$E_{\alpha,2}(-\lambda_k) = 0.$$

Отметим, что $\mathbb{Q}^{\alpha} \neq \emptyset$ (в случае $\frac{5}{3} \le \alpha < 2$, функция $E_{\alpha,2}(z)$ имеет нули). Множество $\mathbb{Q}^{\alpha}$ ограничено, точка 0 служит для этого множества точкой сгущения.

Теорема 12. *Задача (14)–(16) имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда*

$$b/a^{\frac{2}{\alpha}} \notin \mathbb{Q}^{\alpha}. \tag{17}$$

Задача 9. *Найти регулярное решение уравнения (14) в области Ω, принимающее следующие значения*

$$u(0,y)=0, \quad u(a,y)=0,\ 0<y<b, \tag{18}$$

$$u(x,0)=\tau_0(x), \quad u(x,b)=\tau_b(x),\ 0<x<a, \tag{19}$$

где $\tau_0(x)$ и $\tau_b(x)$ *– известные функции на отрезке* $[0,a]$.

Теорема 13. *Если* $\tau_0(x)\in C[0,a]$, $\tau_b(x)\in C^2[0,a]$, производные $\tau_0'(x)$, $\tau_b'''(x)$*– это функции с ограниченным изменением на отрезке* $[0,a]$,

$$\tau_0(0)=\tau_0(a)=0,\ \tau_b(0)=\tau_b(a)=0;\ \tau_b''(0)=\tau_b''(a)=0;$$

и имеет место условие (17), то функция

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\tau_{bn}\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}y)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}b)}+$$

$$+\tau_{0n}\Big[\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}y)-\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}y)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}b)}\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}b)\Big]\Big\}\sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

является регулярным решением задачи Дирихле (18), (19) для уравнения (14), где

$$\tau_{bn}=\frac{2}{a}\int\limits_0^a\tau_b(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx, \quad \tau_{0n}=\frac{2}{a}\int\limits_0^a\tau_0(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)dx;$$

$$\sin_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)},\ \cos_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)},$$

– обобщенные тригонометрические функции по терминологии А.М. Нахушева.

В параграфе 2.5 в области $D=\{(x,y):0<x<r,\ 0<y<a\}$ рассмотрено уравнение

$$u_{xx}-D_{0y}^{\alpha}u=0, \tag{20}$$

где $1<\alpha<2$.

Функцию $u=u(x,y)$ в области D назовем регулярным решением уравнения (20), если $y^{2-\alpha}u\in C(\bar{D})$, $u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u\in C(D)$, и если u удовлетворяет уравнению (20) во всех точках области D.

Задача 10. *Найти регулярное решение уравнения (20) в области D, для которого выполняются условия*

$$u\left(0,y\right)=0, \quad u\left(r,y\right)=0, \quad 0<y<a, \tag{21}$$

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-2}u=\varphi\left(x\right), \qquad 0<x<r, \tag{22}$$

$$D_{0a}^{\alpha-2}u=\psi\left(x\right), \qquad 0<x<r, \tag{23}$$

где $\varphi\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)$ – функции, заданные на отрезке $[0,r]$.

Теорема 14. *Пусть $\psi(x)\in C^1[0,r]$, $\varphi(x)\in C^1[0,r]$; вторые производные $\psi''(x)$ и $\varphi''(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[0,r]$, в точках $x=0$ и $x=r$ обращаются в ноль; и выполнено условие*

$$a/r^{\frac{2}{\alpha}}\notin\mathbb{Q}^{\alpha}, \tag{24}$$

тогда регулярное решение задачи (20)–(23) существует.

Теорема 15. *Задача Дирихле (21), (23) для уравнения (20) имеет единственное решение в классе $u\in C^1(D)$, $u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u\in C(D)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (24).*

Результаты, представленные во второй главе опубликованы в работах [4, 6, 11, 22, 26, 27].

В третьей главе исследуется обобщенное уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-D_{0y}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{25}$$

с оператором дифференцирования порядка α, $0<\alpha<1$, в области $\Omega=\{(x,y): 0<x<r,\ -a<y<b, y\neq 0\}$.

Обозначим через $\Omega^+=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega^-=\Omega\cap\{y<0\}$.

Регулярным решением уравнения (25) в области Ω назовем функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую следующим свойствам: $u\in C^1(\bar{\Omega})$, $D_{0y}^{\alpha-1}u_y\in C(\bar{\Omega}^-)\cap C(\bar{\Omega}^+)$, $u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u_y\in C(\Omega^-\cup\Omega^+)$, $u_{xy}\in C(\bar{\Omega}^+)$ и уравнению (25) в области $\Omega^-\cup\Omega^+$.

Задача 11. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (25), для которого выполняются условия*

$$u(0,y)=0,\ u(r,y)=0,\ -a<y<b, \tag{26}$$

$$u(x,-a)=\tau_a(x),\ u(x,b)=\tau_b(x),\ 0<x<r, \tag{27}$$

$$\lim_{y\to 0+} D_{0y}^{\alpha-1}u_y = \lim_{y\to 0-} D_{0y}^{\alpha-1}u_y,$$

где функции $\tau_a(x)$ и $\tau_b(x)$ в точках $x = 0$ и $x = r$ обращаются в ноль.

Теорема 16. *Пусть $\tau_a(x) \in C^2[0,r]$, $\tau_b(x) \in C^4[0,r]$, производные $\tau_a'''(x)$ и $\tau_b^{(V)}(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[0,r]$, функции $\tau_a''(x)$, $\tau_b''(x)$ и $\tau_b^{(IV)}(x)$ при $x = 0$ и $x = r$ равны нулю;*

$$b^{\alpha+1}/r^2 \geq \frac{h}{\pi^2},$$

где h наибольшее число из действительных нулей функций $E_{\alpha+1,\alpha+1}(-t)$ и *$E_{\alpha+1,1}(-t)$, тогда регулярное решение задачи (25)–(27) существует.*

Получен критерий единственности решения.

Теорема 17. *Решение задачи (25)–(27) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$b^\alpha E_{\alpha+1,\alpha+1}\left(-\lambda_n b^{\alpha+1}\right) E_{\alpha+1,1}\left(\lambda_n a^{\alpha+1}\right) \neq$$

$$-E_{\alpha+1,1}\left(-\lambda_n b^{\alpha+1}\right) a^\alpha E_{\alpha+1,\alpha+1}\left(\lambda_n a^{\alpha+1}\right),$$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2$, $n = 1, 2, ...$

Теорема 18. *Пусть $(\pi^2/r^2)b^\nu \geq \max\{z_1, z_2\}, \nu = \alpha + 1$, где $z_1 = \max\{z \in \mathbb{R} : E_{\nu,\nu}(-z) = 0\}$, $z_2 = \max\{z \in \mathbb{R} : E_{\nu,1}(-z) = 0\}$. Тогда однородная задача (25)-(27) имеет только тривиальное решение.*

Результаты третьей главы опубликованы в работах [2, 8, 13, 14, 23–25].

В заключении сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность Арсену Владимировичу Псху за постановку задач и неоценимое внимание и поддержку, а также Адаму Маремовичу Нахушеву за очень полезные рекомендации и советы во время выполнения работы.

Работы, опубликованные автором в рецензируемых научных журналах и изданиях:

1. **Масаева, О. Х.** Априорная оценка для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части / О. Х. Масаева // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 36–37.

2. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для нагруженного дифференциального уравнения / О. Х. Масаева // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2011. – Т. 13, № 2. – С. 38–40.

3. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто / О. Х. Масаева // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 442–446.

4. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения / О. Х. Масаева // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 12. – С. 1554–1559.

5. **Масаева, О. Х.** Принцип экстремума для фрактального эллиптического уравнения / О. Х. Масаева // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 31–35.

6. **Масаева, О. Х.** Необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения / О. Х. Масаева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 11. № 2. – С. 16–20.

7. **Масаева, О. Х.** Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части / О. Х. Масаева // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2015. – № 6 (68)-2. – С. 127–130.

8. **Масаева, О. Х.** О единственности решения задачи Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе с дробной производной / О. Х. Масаева // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2016. – Т. 18, №1. – С. 23–26.

9. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной / О. Х. Масаева // Челябинский физ.-мат. журнал. – 2017. – Т. 2, выпуск 3. – С. 312–322.

10. **Масаева, О. Х.** Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа / О. Х. Масаева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 23, № 3. – С. 83–90.

11. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения с производной Римана–Лиувилля / О. Х. Масаева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 27, № 2. – С. 6–11.

12. **Масаева, О. Х.** Единственность решения задачи Дирихле для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка / О. Х. Масаева // Математические заметки. — 2021. — Т. 109, выпуск 1. — С. 101–106.

13. **Masaeva, O. Kh.** Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equations with a fractional derivative / O. Kh. Masaeva // Electronic Journal of Differential Equations — 2017. — Vol. 2017, № 74. — pp. 1–8.

14. **Masaeva, O. Kh.** Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equation with a fractional derivative / O. Kh. Masaeva // Progress in Fractional Differentiation and Applications. — 2020. — Vol. 6, № 3. — pp. 239–244.

Список публикаций автора в сборниках материалов конференций

15. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка / О. Х. Масаева // Материалы V Международной научной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики", посвященной 80-летию Адама Маремовича Нахушева. Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН. — 2018. — С. 144.

16. **Масаева, О. Х.** Краевая задача для обобщенного уравнения Лапласа / О. Х. Масаева // Материалы IV Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики". Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН. — 2018. — С. 181.

17. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле в полуплоскости для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной / О. Х. Масаева // Материалы Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и физики". Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН. — 2017. — С. 146–147.

18. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для фрактального эллиптического уравнения / О. Х. Масаева // Материалы XII Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — 2014. — С. 52–53.

19. **Масаева, О. Х.** Принцип экстремума для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка / О. Х. Масаева // Материалы Всероссийской научной конференции "Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики". Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН. — 2014. — С. 92–93.

20. **Масаева, О. Х.** Априорная оценка для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части / О. Х. Масаева // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" и VII Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик–Эльбрус. — 2009. — С. 293–294.

21. **Масаева, О. Х.** Априорная оценка для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части / О. Х. Масаева // Труды Международной конференции молодых ученых "Математический анализ и математическое моделирование". Владикавказ. Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания. — 2010. — С. 103–104.

22. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для диффузионно-волнового уравнения / О. Х. Масаева // Материалы IX Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН. —2011. — С. 77–79.

23. **Масаева, О. Х.** О разрешимости задачи Дирихле для нагруженного дифференциального уравнения в прямоугольной области / О. Х. Масаева // Материалы X Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН. — 2012. — С. 75–76.

24. **Масаева, О. Х.** К вопросу о единственности решения задачи Дирихле для нелокального уравнения с оператором Римана-Лиувилля / О. Х. Масаева // Материалы Второй Международной конференции молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН. — 2012. — С. 158–159.

25. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для нагруженного дифференциального уравнения в прямоугольной области / О. Х. Масаева // Материалы Международной конференции молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН. — 2011. — С. 174–175.

26. **Масаева, О. Х.** Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения с производной Римана–Лиувилля/ О. Х. Масаева// Тезисы Международной конференции ”Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем, посвященной 70-летию А. Х. Журтова”. – Нальчик. — 2019. — С. 79.

27. **Masaeva, O. Kh.** Тне necessary and sufficient condition for uniqueness of solution of the Dirichlet problem for a nonlocal wave equation in rectangular domain / O. Kh. Masaeva // Proseedings International Russian-Chinese conference on "Actual problems of applied mathematics and physics"and Scientific School for the youth "Nonlocal boundary problems and modern problems in algebra, analysis and informatics". — 2015. — С. 131–132.

Подписано в печать 14.07.2021 г. Формат 60×84/16
Печать цифровая.
Бумага офсетная. 1.25 усл. п.л.
Тираж 120 экз. Заказ №76.

Изготовлено в издательской типографии
"Принт Центр"
г. Нальчик, ул. Братьев Кушховых, 79 "А"
www.print07.ru