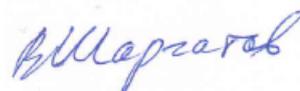


Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»

На правах рукописи



Шаргатов Владимир Анатольевич

**Математическое моделирование процессов
дисперсии, диссипации и фазовых переходов в
сложных средах**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ»

Официальные оппоненты:

Пухначев Владислав Васильевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН.

Головизнин Василий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительные методы» факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Сидняев Николай Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой "Высшая математика" Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана.

Булатов Виталий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник «Лаборатории механики сложных жидкостей» Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН .

Защита состоится 6 октября 2021 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета МИФИ.05.02 при Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, 31.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке НИЯУ «МИФИ», а также по ссылке <https://ds.mephi.ru/shared/dissertations>.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, профессор



Леонов А.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время актуально исследование моделей, описывающих сложные физические процессы, протекающие в различного рода сплошных средах (упруго-пластические, сыпучие среды, разреженные газы, среды с протекающими реакциями, и т.д.). Для многих сред такого рода в терминах уравнений с частными производными построены модели, описывающие их свойства. Однако эти уравнения часто настолько сложны, что исследование их возможно только при помощи численного моделирования. Поэтому актуально развитие теории уравнений в частных производных, позволяющей доказать корректность поставленных задач, а также свести исходные задачи к более простым, для которых возможно получить аналитические результаты. Эта редукция может быть проведена на основе различных принципов и служит необходимым промежуточным шагом для анализа полных моделей, поскольку позволяет сделать выводы о фундаментальных свойствах решения полной задачи.

Разрывы (ударные волны и фронты фазовых превращений) хорошо изучены в сравнительно просто описываемых средах, таких как газ, жидкость, и в некоторых простейших вариантах упругих сред. В то же время практические потребности делают актуальной проблему изучения сильных разрывов, их формирования и распространения в существенно более сложных системах, таких как упругопластические среды, сыпучие среды, жидкие кристаллы и многие другие. Еще одной важной проблемой является исследование устойчивости решений.

В широком классе численных методов, являющихся развитием метода Годунова, используется решение задачи о распаде разрыва. Эта задача во многих случаях решается для редуцированной системы уравнений, например, в акустическом приближении. Решение может иметь множественную неединственность, если ударная адиабата имеет две или более точки перегиба. Вопрос об устранении этой неединственности требует выхода за рамки гиперболических уравнений и использования усложненных уравнений с целью изучения структуры разрывов и их устойчивости. Проблема исследования устойчивости в случаях, представляющих практический интерес, как правило, связана с решением очень сложных систем уравнений. В связи с этим, на первом этапе, важную роль приобретает развитие и применение асимптотических методов

и изучение решений редуцированных систем уравнений, которые могут упростить разработку численных методов решения и обеспечить их верификацию.

Актуальность рассматриваемой проблемы в части исследования устойчивости поверхностей фазового перехода обусловлена наличием природных и техногенных процессов, математическое описание которых основано на теории фильтрации, приводящих к формулировкам задач об устойчивости течений в пористых средах. Вопрос об устойчивости в таких процессах является фундаментальным: от него зависит возможность реализации того или иного процесса. В частности, устойчивостью фронта вытеснения определяются возможность и эффективность нефтедобычи; неустойчивость в геотермальных системах приводит к формированию конвективного переноса энергии и повышению эффективности извлечения тепла Земли; засоление почв, грунтов и горных пород возникает из-за устойчивости слоя более соленой и тяжелой жидкости над слоем менее соленой и более легкой и т.д.

Исследование устойчивости помимо важности для приложений представляет интерес с методической точки зрения, поскольку более простое уравнение импульсов (по сравнению с классической гидродинамикой) позволяет получить точные решения и исследовать нелинейную стадию развития возмущений аналитическими методами.

Исследование перечисленных проблем потребовало усовершенствования и развития методов изучения многомасштабных процессов в сплошных средах, в которых содержатся нелинейные волны, в том числе фронты резкого изменения параметров, анализа стационарных и нестационарных течений сплошной среды, содержащих новые типы разрывов, выявления общих закономерностей этих течений, включая проблемы существования и единственности решений, а также влияния процессов внутри структуры разрывов на решение в целом, исследования общих вопросов устойчивости течений в пористой среде при наличии фазового перехода.

Ключевые результаты диссертации опубликованы в журналах, для которых актуальность работы является необходимым условием публикации. Это ведущие российские журналы – «Доклады Академии наук», «Механика жидкости и газа», «Журнал вычислительной математики и математической физики», «Труды Математического института имени В.А. Стеклова», «Журнал экспериментальной и теоретической физики», а также зарубежные журналы

категории Q1 («Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation», «Applied Mathematics and Computation», «International Journal of Heat and Mass Transfer», «Mathematics and Mechanics of Solids», «Eur. Phys. J. Plus», «Acta Mechanica»).

Об актуальности темы свидетельствует также то, что все представленные в диссертации результаты были получены при выполнении проектов, поддержанных грантами РФФИ и РФ, а именно: проект РФФИ № 20-11-20141 «Эволюционные задачи механики»; проект РФФИ 20-01-00071 А «Длинные нелинейные волны, разрывы и их структура в упругих и упругопластических средах»; проект РФФИ 18-29-10020 «Динамика течения жидкости по податливым упругим трубам: приложение к биологическим системам»; проект РФФИ 17-01-00180. «Динамика и устойчивость течений со спонтанно излучающими ударными волнами»; проект РФФИ 16-11-10195 «Устойчивость фильтрационных течений»; проект РФФИ 16-19-00188 «Математические модели и методы обеспечения комплексной промышленной безопасности при транспортировке углеводородов трубопроводным транспортом»; проект РФФИ 14-01-00466 А. «Динамика и устойчивость течений с поверхностями раздела»; проект РФФИ 14-03-00420 А. «Модель и метод расчета состава химически неравновесной смеси продуктов горения и взрыва для ускорения многомерных газодинамических расчетов реагирующих потоков»; проект РФФИ 13-01-12047 офи-м. «Создание математического обеспечения и алгоритмов для расчета многомасштабных динамических процессов в природных системах».

Целью данной работы является развитие методов построения разрывных решений уравнений механики сплошных сред, основанное на изучении структуры разрывов и их устойчивости применительно к гиперболической модели, дополненной членами, учитывающими мелкомасштабные процессы дисперсии и диссипации, и модели, описывающей распространение фронтов фазового перехода в пористой среде; разработка эффективных вычислительных методов для исследования свойств, структуры, линейной и глобальной устойчивости решений; реализация этих методов в виде пакетов прикладных программ для высокопроизводительных вычислительных систем.

В соответствии с общей целью исследования были поставлены и реализованы следующие основные **задачи**.

- Систематически исследовать условия существования, свойства, структуру,

линейную и глобальную устойчивость решений в виде бегущих волн, представляющих собой структуру классических и особых разрывов, для обобщенного уравнения Кортевега де Вриза - Бюргерса (КдВБ), разработать численный метод и пакет программ для исследования линейной и глобальной устойчивости.

- Для обобщенного уравнения Хопфа при условии, что дополненное уравнение соответствует обобщенному уравнению КдВБ, построить гиперболическую модель и автомодельные решения задачи о распаде произвольного разрыва, состоящие из последовательностей допустимых разрывов и неопрокидывающихся простых волн.

- Изучить линейную устойчивость структур особых разрывов, представляющих собой слабонелинейные квазипоперечные бегущие волны в упругой слабоанизотропной среде. Определить допустимые разрывы, необходимые для построения гиперболической модели. Для исследования устойчивости использовать метод функции Эванса в терминах внешней алгебры, получить необходимые уравнения, разработать численный алгоритм их решения и реализовать этот алгоритм в виде программного кода.

- Разработать метод и численный алгоритм, позволяющий рассчитывать эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области с поверхностями фазового перехода, а также описывать взаимодействие границ и развитых нелинейных структур. Реализовать этот метод в программном коде применительно к высокопроизводительным вычислительным системам.

- Систематически исследовать глобальную устойчивость стационарных решений для вертикальных течений с плоским фронтом испарения в горизонтально протяженном слое малопроницаемой пористой среды, в том числе по отношению к локализованным конечным возмущениям верхней или нижней границы низкопроницаемого слоя.

- Рассмотреть возможность существования, динамику и устойчивость фронта фазового перехода, распространяющегося в пористой среде в виде бегущей волны.

- Получить аналитическое решение задачи о движении плоской поверхности фазового перехода. Для движущегося плоского фронта фазового перехода получить дисперсионное соотношение, выполнить детальный анализ эволюции бесконечно малых гармонических возмущений и найти все сценарии этой эво-

люции.

- Исследовать устойчивость пузыря воздуха в слое водонасыщенной пористой среды с постоянным градиентом давления.
- Исследовать свойства решений включая устойчивость для вертикальных течений, содержащих поверхности фазового перехода, в горизонтально протяженной двумерной области пористой среды с изменяющимся капиллярным давлением.
- Аналитически и численно исследовать возможность топологических изменений и фрагментации двухфазного потока в ячейке Хеле-Шоу, трещинах и пористых средах под влиянием градиента капиллярного давления.

Методы исследования.

В работе использовались методы механики сплошных сред и теории упругости, методы теории гидродинамической устойчивости, аналитические и численные методы решения краевых задач, спектральная теория несамосопряженных операторов, методы численного анализа динамических систем высокого порядка, непосредственное численное решение уравнений в частных производных. Для исследования устойчивости решений применялся метод нормальных мод, метод функции Эванса с использованием внешней алгебры, слабонелинейное приближение и вычислительный эксперимент. Для численного моделирования задач с подвижными границами фазовых переходов использовался метод граничного элемента с потенциалами простого и двойного слоя, с неравномерным разбиением границы, адаптирующемся к движению поверхностей, на которых происходит фазовый переход, а также контактных поверхностей. Программная реализация выполнена на языке C++ с использованием SIMD и MPI.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Аналитические решения для структур особых разрывов в случае, если особых разрывов больше одного, позволившие получить дополнительные соотношения на особых разрывах, исследовать условия возникновения и свойства структур этих разрывов.
2. Разработанные методы и численные алгоритмы исследования линейной и глобальной устойчивости решений в виде бегущих волн, представляющих структуры разрывов, реализованные в виде пакета прикладных программ.
3. Результаты систематического исследования устойчивости решений в виде

бегущей волны для обобщенного уравнения КдВБ. Установлено, что решение в виде бегущей волны, соответствующее особому разрыву и удовлетворяющее обобщенному уравнению КдВБ, линейно устойчиво только для разрыва, скорость распространения которого минимальна. Линейно устойчивые особые разрывы устойчивы по отношению к конечным локализованным возмущениям, а особые разрывы с линейно неустойчивой структурой обладают так называемой распадной неустойчивостью. Для этих разрывов переход из начального в конечное состояние может быть осуществлен с помощью последовательности из простых волн и устойчивых разрывов, обязательно включающих в себя линейно устойчивый особый разрыв.

4. Гиперболическая модель для обобщенного уравнения Хопфа в случае, если дополненным уравнением является обобщенное уравнение КдВБ. Допустимыми разрывами в модели считаются разрывы со стационарной или нестационарной устойчивой структурой. Введение требования устойчивости структуры в понятие допустимости разрывов привело к существенному сокращению множества допустимых разрывов и ликвидировало неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва, обнаруженную в предыдущих исследованиях.

5. Автомодельные решения задачи о распаде произвольного разрыва для обобщенного уравнения Хопфа. Эти решения состоят из последовательностей допустимых разрывов и неопрокидывающихся простых волн.

6. Результаты численно-аналитического исследования устойчивости структур особых разрывов, представляющих собой слабонелинейные квазипоперечные бегущие волны в упругой слабоанизотропной среде. Исследование устойчивости показало, что устойчивыми являются два особых разрыва с наименьшими скоростями. Установлено, что остальные особые разрывы линейно неустойчивы.

7. Численный метод, позволяющий рассчитывать эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области с поверхностями фазового перехода в пористой среде, реализованный в пакете прикладных программ для высокопроизводительных вычислительных систем.

8. Результаты математического моделирования эволюции конечного возмущения плоской стационарной поверхности фазового перехода в горизонтально протяженном слое малопроницаемой среды в случае, если существуют два

стационарных решения. Установлено, что если решение линейно устойчиво, то потеря устойчивости возможна для конечных возмущений с амплитудой, превосходящей некоторое пороговое значение. В слабонелинейном приближении найдено аналитическое выражение для порогового значения амплитуды локализованного возмущения, которое приводит к катастрофической перестройке решения.

9. Результаты математического моделирования динамики фронта фазового перехода, распространяющегося в пористой среде в виде бегущей волны. Показано, что существует минимальная скорость распространения устойчивых бегущих волн. Получена приближенная аналитическая оценка для скорости такой волны (аттрактора). В зависимости от возмущения такие решения эволюционируют либо в нестационарное состояние, приводящее к катастрофической перестройке решения, либо в устойчивый фронт постоянной формы, распространяющийся с постоянной скоростью, который в этом случае служит аттрактором.

10. Результаты математического моделирования устойчивости движущегося плоского фронта фазового перехода. Получено аналитическое решение задачи о движении плоской поверхности фазового перехода. Изучены условия дестабилизации плоской поверхности вертикально движущегося фронта бесконечно малыми гармоническими возмущениями. Получено дисперсионное соотношение. Найдена зависимость амплитуды возмущения от времени и координаты движущегося фронта фазового перехода.

11. Результаты математического моделирования устойчивости стационарных фронтов фазового перехода по отношению к локализованным конечным возмущениям верхней или нижней границы низкопроницаемого слоя. Получена аналитическая оценка порогового значения амплитуды возмущения, приводящего к исчезновению стационарного решения.

12. Результаты математического моделирования деформации пузыря воздуха в горизонтально протяженном слое водонасыщенной пористой среды с постоянным градиентом давления; показано, что эта деформация сопровождается неустойчивостью по отношению к конечным возмущениям, которая может приводить как к дроблению пузыря, так и его объединению с другими пузырями.

13. Результаты математического моделирования, в том числе аналитического

исследования вертикальных течений в горизонтально протяженной двумерной области пористой среды с изменяющимся капиллярным давлением при наличии фронта фазового перехода. Установлено, что как в смачиваемой, так и в несмачиваемой среде могут существовать более двух стационарных решений для плоской поверхности фазового перехода. Получены аналитические решения для таких стационарных течений, необходимое условие их существования и дисперсионные соотношения для исследования линейной устойчивости. Показано, что в смачиваемой среде в присутствии капиллярных сил дестабилизация плоской поверхности фазового перехода может происходить как при бесконечном волновом числе, так и при нулевом волновом числе, при этом коротковолновая неустойчивость может иметь место даже в том случае, если положение равновесия единственно.

14. Результаты численного и аналитического исследования возможных топологических изменений и фрагментации двухфазного потока в ячейке Хеле-Шоу и пористых средах под влиянием градиента капиллярного давления. Согласно вычислительным экспериментам и полученным аналитическим решениям водонасыщенная область, которая находится внутри слоя с переменным градиентом капиллярного давления, может трансформироваться в две подобласти и распадаться на две непересекающиеся части. В этом случае топология потока и его свойства существенно изменяются.

Научная новизна:

Все представленные в диссертации и содержащиеся в работах автора результаты являлись новыми в момент их опубликования.

- Впервые получены аналитические решения для структур особых разрывов в случае, когда особых разрывов больше одного, и исследованы свойства этих решений.
- Исследована линейная устойчивость особых и классических разрывов, стационарные структуры которых описываются обобщенным уравнением КдВБ. Показано, что устойчив только один особый разрыв, скорость распространения которого минимальна.
- Обнаружено, что все особые разрывы с линейно неустойчивой структурой обладают распадной неустойчивостью. При этом классические разрывы с линейно неустойчивой структурой могут замещаться нестационарными решениями, периодически зависящими от времени.

- Построены автомоделные решения задачи о распаде произвольного разрыва для обобщенного уравнения Хопфа для различных начальных данных. Устранена неединственность решения задачи о распаде произвольного разрыва, обнаруженная в предыдущих исследованиях.
- Впервые исследована устойчивость структур особых разрывов, представляющих собой слабонелинейные квазипоперечные бегущие волны в упругой слабоанизотропной среде. Установлено, что устойчивыми являются только два особых разрыва, распространяющиеся с наименьшими скоростями.
- Предложен оригинальный численно-аналитический метод, позволяющий рассчитывать эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области с поверхностями фазового перехода.
- Впервые исследована устойчивость плоской стационарной поверхности фазового перехода в горизонтально протяженном слое малопроницаемой пористой среды по отношению к конечным локализованным возмущениям. В слабонелинейном приближении найдено аналитическое выражение для порогового значения амплитуды локализованного возмущения, которое приводит к катастрофической перестройке решения.
- Исследована устойчивость решения для фронта фазового перехода, распространяющегося в пористой среде в виде бегущей волны. Показано, что существует минимальная скорость распространения устойчивых бегущих волн. Получена приближенная аналитическая оценка для скорости такой волны, которая является аттрактором для большой области начальных условий.
- Получено аналитическое решение задачи о движении плоской поверхности фазового перехода. Получено дисперсионное соотношение и определены условия дестабилизации плоской поверхности вертикально движущегося фронта бесконечно малыми гармоническими возмущениями.
- Впервые исследована устойчивость стационарных фронтов фазового перехода по отношению к локализованным конечным возмущениям верхней или нижней границы низкопроницаемого слоя. Получена аналитическая оценка порогового значения амплитуды возмущения, приводящего к исчезновению стационарного решения.
- Численно исследована задача о деформации пузыря воздуха в горизонтальнопротяженном слое водонасыщенной пористой среды с постоянным градиентом давления. Обнаружено, что в рамках используемой модели неустойчи-

вость пузыря в слое фильтрующейся жидкости может приводить как к дроблению пузыря, так и его объединению с другими пузырями.

- Впервые обнаружено, что для используемой модели в смачиваемой среде в присутствии капиллярных сил может существовать более одного стационарного решения. Исследована устойчивость решений, соответствующих различным ветвям бифуркационной диаграммы с двумя точками поворота.
- Обнаружены возможные топологические изменения и фрагментации двухфазного потока в ячейке Хеле-Шоу, трещинах и пористых средах под влиянием градиента капиллярного давления.

Практическая значимость заключается в том, что полученные результаты, включая постановку задачи, численные методы, аналитические и численные решения, подходы к исследованию устойчивости, будут способствовать развитию фундаментальной составляющей, как математического моделирования, так и механики сплошной среды. Представленные результаты создают математическую основу для построения гиперболических моделей, численных методов решения для гиперболических моделей, поиска аналитических решений и интерпретации результатов численного решения задач о распространении нелинейных волн. Исследование устойчивости течений в пористых средах при наличии фазовых переходов имеет научное и практическое значение, поскольку от решения этого вопроса зависит возможность реализации различных процессов при нефтедобыче, функционировании геотермальных систем, процессов засоления почв и грунтов и т.д. Полученные аналитические решения для структур разрывов и течений с фазовыми переходами в пористых средах могут служить необходимой составляющей верификации численных методов и программных комплексов.

По результатам диссертационных исследований под руководством автора разработаны программные комплексы для высокопроизводительных вычислительных систем, которые использовались при выполнении трех проектов, поддержанных грантами РНФ, шести проектов, поддержанных грантами РФФИ, а также при работе в рамках договоров с государственными отраслевыми научными институтами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгого и апробированного математического аппарата, найденными аналитическими решениями, допускающими непосредственную проверку, сравне-

нием результатов численных расчетов с аналитическими решениями и сопоставлением с результатами, полученными ранее другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях. Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (2-я – Якутск, 2013); НАУЧНАЯ СЕССИЯ НИЯУ МИФИ-2014 (Москва, 2014); International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems (ICDERS; 25-й – Лидс); НАУЧНАЯ СЕССИЯ НИЯУ МИФИ-2015 (Москва, 2015); VII Международная научная школа молодых ученых «Вихри и волны в сложных средах» (г. Москва, 2016); Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. (ИПРИМ РАН, Москва, 2016); XXXI Международная конференция "Уравнения состояния вещества" (EOS ELBRUS) (пос. Эльбрус, 2016); XXXII Международной конференции "Взаимодействие интенсивных потоков энергии с веществом" (IEFM ELBRUS) (пос. Эльбрус, 2017); 6-я международная конференция «Проблемы математической физики и математическое моделирование» (Москва, 2017); VIII Международная научная школа молодых ученых «Вихри и волны в сложных средах» (г. Москва, 2017); 11-я Всероссийская школа-семинар "Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем" – АФМ-2017 (Москва, 2017); VII International conference "Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling" (Москва, 2018); XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 2018); Всероссийская конференция. "Физика взрыва: теория, эксперимент, приложения". (Новосибирск, 2018); Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. (ИПРИМ РАН, Москва, 2019); 10-я Международная конференция - школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (ИПМех РАН, Москва, 2019); XVII International Scientific Conference and School of Young Scholars "Physical and chemical processes in atomic systems" (Москва, 2019); VI Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии - ЛАПЛАЗ-2020» (Москва, 2020); 11-я Международная научная школа молодых ученых «Вихри и волны в слож-

ных средах» (г. Москва, 2020); 14-я Всероссийская школа-семинар «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем» — АФМ-2020 (Москва, 2020); IX международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2020 г.); IV Международная конференция «Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления» (Сочи, 2020).

Личный вклад. Результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором лично или при его непосредственном участии. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит автору.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–23]. Все эти публикации проиндексированы в системах Web of Science и Scopus и включают 23 работы, в том числе 13 статей в ведущих журналах РАН, 8 статей в иностранных журналах категории Q1.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность за внимание к работе, поддержку и ценные советы академику А.Г. Куликовскому. Автор признателен профессору, д.ф.-м.н. Губину С.А. (НИЯУ МИФИ) за многолетнюю и всестороннюю поддержку. Автор благодарит своих соавторов д.ф.-м.н. Чугайнову А.П., д.ф.-м.н., профессора Ильичева А.Т. (МИАН им. В.А. Стеклова) и д.ф.-м.н., профессора Цыпкина Г.Г. (ИПМех им. А.Ю. Ишлинского), у которых многому научился, за их интеллектуальное обаяние и удовольствие от совместной работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 360 страниц машинописного текста, 209 рисунков. Список цитируемой литературы содержит 230 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, отображены основные положения, выносимые на защиту, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В главе 1 аналитически и численно изучены стационарные структуры разрывов обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза Бюргерса для случая, когда нелинейность задана таким образом, что возможно существование более чем одного особого разрыва.

§ 1.1 носит вводный характер. В нем описана математическая модель, использованная для изучения решений, включающих в себя особые разрывы. В этой математической модели используется обобщенное уравнение Хопфа

$$\partial v / \partial t + \partial \varphi(v) / \partial x = 0, \quad (1)$$

интегральная форма которого $\int v dx - \varphi(v) dt = 0$ имеет обобщенные решения в виде ударных волн. Математическая модель для изучения структуры особых разрывов и ударных волн гиперболического уравнения (1) включает в себя обобщенное (в смысле нелинейности) уравнение КдВБ, которое содержит члены, описывающие мелкомасштабные процессы дисперсии и диссипации

$$\partial v / \partial t + \partial \varphi(v) / \partial x = \mu \partial^2 v / \partial x^2 - m \partial^3 v / \partial x^3. \quad (2)$$

Здесь m и μ – положительные коэффициенты дисперсии и диссипации. Для случая $\mu \neq 0$ в переменных $t \rightarrow t \sqrt{m}$, $x \rightarrow x \sqrt{m}$, $\gamma = \sqrt{m}/\mu$, $\varphi(v) = f(v - v_r)$, $v = u + v_r$. уравнение (2) имеет вид

$$\partial u / \partial t + \partial f(u) / \partial x + \partial^3 u / \partial x^3 = \gamma^{-1} \partial^2 u / \partial x^2. \quad (3)$$

Решению в виде бегущей волны, скорость которой равна W , соответствует задача

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - Wt, \quad d^2 u / d\xi^2 - \gamma^{-1} du / d\xi = Wu - f(u), \quad (4)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = u_l, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_r.$$

О решении задачи (4) часто говорят, как о стационарной (в переменных t и ξ) структуре разрыва с состоянием перед фронтом u_r , за фронтом u_l и скоростью W . Эти параметры связаны соотношением $W = (\varphi(u_l) - \varphi(u_r)) / (u_l - u_r)$.

Особым применительно к уравнениям (1) и (3) считается разрыв, для которого существует структура (т.е. решение задачи (4)), но не выполняется

условие априорной эволюционности, в данном случае эквивалентное условию Лакса $f'(u_r) < W < f'(u_l)$. Гетероклиническая кривая для структуры такого разрыва в фазовом пространстве $u, du/d\xi$ соединяет две седловые точки покоя, соответствующие состояниям при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Если функция потока $f(u)$ имеет хотя бы две точки перегиба, то количество особых разрывов увеличивается при возрастании параметра γ (Куликовский (1984)). При этом множество всех разрывов, для которых существует решение в виде бегущей волны, состоит из особых и классических (априорно эволюционных разрывов).

В § 1.2 получено аналитическое решение задачи (4) для кусочно-линейной функции $f(u)$. График этой функции показан на рисунке 1.

Графики аналитических решений приведены на рисунке 2 при $\gamma \approx 2.006$ для особого разрыва (линия 2, $W_0 \approx -0.17$) и классических разрывов (линия 1, $W = -0.1707$ и линия 3, $W = -0.172$) при близких значениях скорости.

Аналитическая форма решения позволила провести детальное исследование стационарных структур особых разрывов. Доказаны необходимые леммы и утверждения о свойствах решения, из которых следует, что при увеличении параметра дисперсии все особые разрывы, за исключением первого, возникают парами.

При заданном коэффициенте диссипации существует минимальное значение коэффициента дисперсии, при котором возникает особый разрыв. Доказано, что, если существуют особые разрывы, то эффективная ширина структуры классических разрывов может быть сколь угодно большой при заданных значениях диссипации и дисперсии. Неограниченный рост эффективной ширины структуры классических разрывов имеет место, если скорость классического разрыва приближается к скорости особого разрыва.

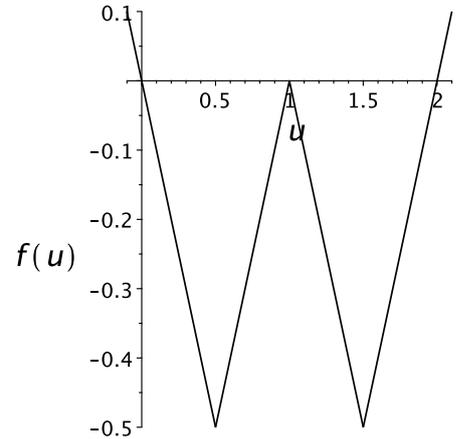


Рисунок 1 – $f(u)$.

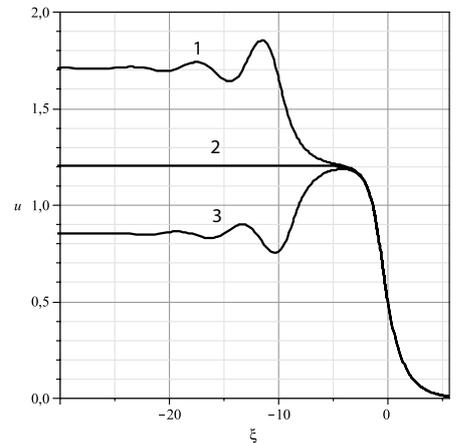


Рисунок 2 – Структуры разрывов.

В § 1.3 выполнен анализ решений в виде бегущей волны для функции потока $f(u)$, заданной соотношением

$$f(u) = (u - 1)^4 - (u - 1)^2, \quad (5)$$

для которой вопросы существования и устойчивости стационарных структур изучались ранее в (Куликовский, Чугайнова (2008)), Чугайнова (дисс. д-ра физ.-мат. наук, 2007)). Как показано в (Куликовский (1984)), с увеличением γ значения u_l , для которых существует структура разрыва (u_r фиксировано и равно нулю), формируют множество, состоящее из полуинтервала, интервалов, бесконечного (несобственного) интервала и отдельных точек. Структура этого множества имеет вид, представленный на рисунке 3, и при дальнейшем увеличении γ не изменяется, за исключением того, что увеличивается количество интервалов и выделенных точек. Части графика функции $f(u)$, выделенные на рисунке 3 утолщенной линией, включают в себя полуинтервал AB_0 , интервалы B_1B_2 , B_3B_4 , D_0D_1 , D_2D_3 и бесконечный интервал справа от точки D_4 , а также точки C_i , ($i = 0, \dots, 4$), относящиеся к особым разрывам. Приведенный на рисунке 3 результат получен путем численного решения задачи (4), (5) для параметров $u_r = 0$, $m = 1.3$, $\mu = 0.05$ ($\gamma \approx 22.8$).

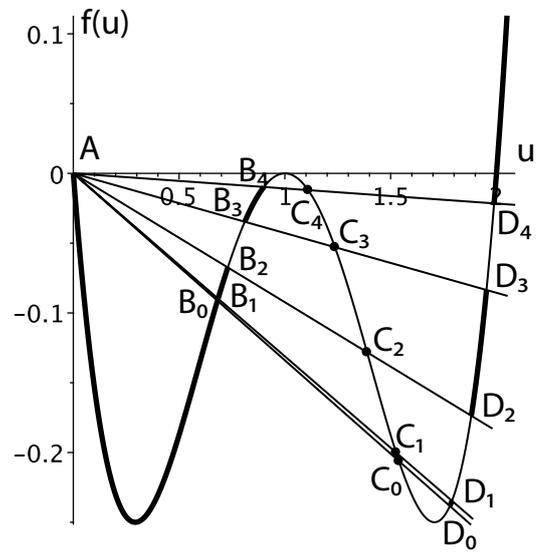


Рисунок 3 – Функция $f(u)$ с выделенными точками, для которых существует структура разрыва при $\gamma \approx 22.8$.

Пример зависимости $u(\xi)$ и фазовая диаграмма для второго особого разрыва $A \rightarrow C_1$ приведены на рисунке 4 (линия 2). Там же показаны структуры априорно эволюционных разрывов, имеющих скорости, близкие к скорости особого разрыва.

Графики зависимостей $u_l(\gamma)$ для точек B_i , C_i , D_i показаны на рисунке 5. Утолщенными линиями выделены границы, областей с различными типами конечной точки фазовой траектории. Точка покоя является узлом в области N , седловой точке соответствует область S , а фокусу – область F . В этих областях заштрихованы подобласти, для которых существуют решения в виде

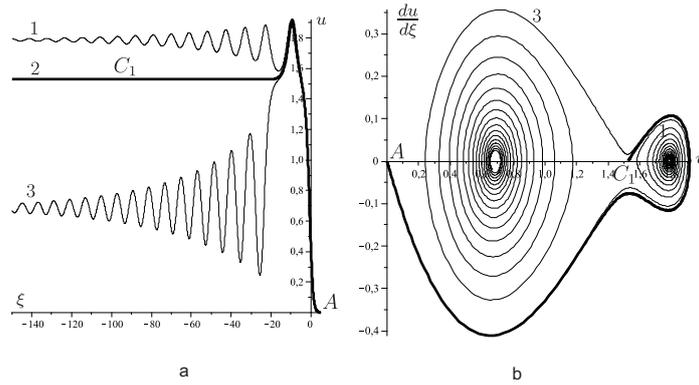


Рисунок 4 – а – профиль $u(\xi)$ и б – фазовая кривая для решений задачи (4) с близкими значениями скорости волны при $\gamma \approx 22.8$. 1 – $u_l \approx 1.787$, 2 – $A \rightarrow C_1$, 3 – $u_l \approx 0.684$.

бегущей волны. В случае особого разрыва конечная точка фазовой траектории для бегущей волны лежит на одной из линий C_i . Точка покоя типа узел может существовать только для классических разрывов, скорость которых меньше скорости первого особого разрыва.

Если скорость классического разрыва больше скорости первого особого разрыва, то точка покоя является фокусом. Установлено, что минимальное значение коэффициента дисперсии, при котором для заданного коэффициента диссипации возникает особый разрыв, определяется видом функции потока. Это пороговое значение может быть как нулем, так и отличаться от нуля.

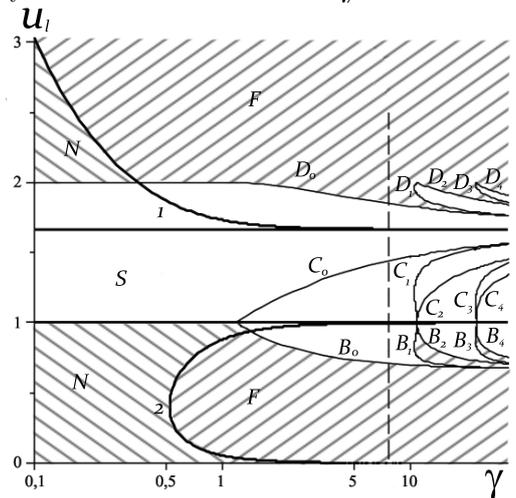


Рисунок 5 – Тип конечной точки фазовой траектории для заданных γ, u_l .

Глава 2 посвящена исследованию линейной устойчивости бегущих волн, возникающих как решение задачи о структуре разрыва. Исследование устойчивости выполнено с помощью функции Эванса.

В § 2.1 формализм построения функции Эванса разработан для исследования линейной устойчивости структур разрывов для обобщенного уравнения КдВБ в случае, если коэффициент диссипации зависит от переменных x и t . При исследовании линейной устойчивости выполняется линеаризация базовых уравнений модели на фоне решения для бегущей волны. Предполагается, что собственная функция, являющаяся ограниченным решением полученного неоднородного линейного дифференциального уравнения в частных произ-

водных, экспоненциально зависит от времени. Показатель экспоненты пропорционален спектральному параметру. Неустойчивый спектр возникшей таким образом спектральной задачи ищется при помощи функции Эванса $D(\lambda)$ – функции, зависящей только от спектрального параметра и аналитической в правой комплексной полуплоскости. Эта функция построена при помощи решений возникающей спектральной задачи со специальной асимптотикой на бесконечности, и нули этой функции в правой комплексной полуплоскости совпадают с неустойчивыми собственными значениями. Факт существования (или отсутствия) нуля функции Эванса устанавливается при помощи принципа аргумента: число нулей равно числу оборотов вокруг начала координат образа мнимой оси комплексной плоскости спектрального параметра при действии отображения, отвечающего функции Эванса. Написан программный код на C++ для расчета значения функции Эванса при заданном λ и поиска нулей функции Эванса, которые обычно являются комплексными.

В § 2.2 математический аппарат и программный комплекс, описанные в § 2.1, использованы для исследования линейной устойчивости решений в виде бегущей волны, соответствующей классическому разрыву. Нелинейность задается функцией вида (5). Установлено, что появление особого разрыва среди возможных решений, имеющих вид бегущей волны, является необходимым условием того, что среди структур неособых разрывов появляются неустойчивые. Показано, что при $\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_s$, где $\gamma_s \approx 7.89$, все решения задачи (4) обладают линейной устойчивостью. Этим решениям соответствуют на рисунке 5 заштрихованные подобласти, расположенные слева от вертикальной штриховой линии ($\gamma \approx 7.89$).

Отметим, что скорость особого разрыва, который, как будет показано ниже, имеет важное значение при построении решения задачи Римана, зависит от параметра γ . Эта скорость не может быть найдена из гиперболического уравнения (1) без привлечения уравнения (2).

При увеличении коэффициента дисперсии некоторые структуры классических разрывов становятся неустойчивыми. Например, при $\gamma = 10$ есть только один особый разрыв, но существуют неустойчивые структуры (см. рисунок 6). На рисунке 6 участки, выделенные утолщенной линией, соответствуют классическим разрывам, обладающим структурой, а маркерами выделены

точки, для которых решение устойчиво (кружки) или неустойчиво (крестики). Части графика функции $f(u)$ на рисунке 6 от точки A до точки B_0 и левее точки M (при $u_l \geq 2.24$) соответствуют устойчивым решениям. В интервале изменения u_l от точки D_0 до точки P структуры классических разрывов также линейно устойчивы, но при $1.86 \leq u_l \leq 2.21$ (между точками P и M) имеет место линейная неустойчивость. Все обнаруженные неустойчивые структуры классических разрывов имеют структуру седло-фокус. Все исследованные классические разрывы со структурой седло-узел устойчивы.

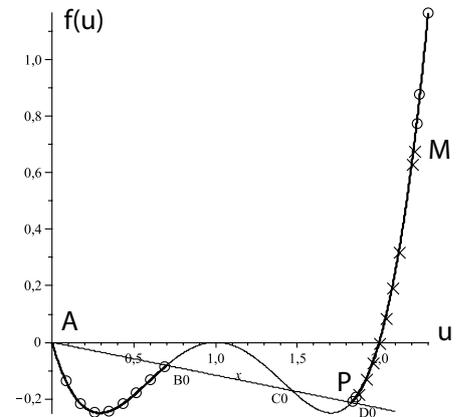


Рисунок 6 – $f(u)$.

Численным расчетом показано, что при переходе к устойчивости собственные значения пересекают мнимую ось, не обращаясь в ноль. При этом в области неустойчивости собственные значения могут быть как комплексными числами с положительной действительной частью, так и действительными числами.

§ 2.3 посвящен анализу линейной устойчивости особых разрывов. Показано, что устойчив только один особый разрыв, скорость распространения которого минимальна.

Особые разрывы со скоростью большей, чем у особого разрыва $A \rightarrow C_0$, обладают немонотонной структурой и линейно неустойчивы. Например, профиль бегущей волны, соответствующей четвертому особому разрыву при $\gamma_3 \approx 22.8$ (точка C_3 на рисунке 3), показан на рисунке 7 а. Образ мнимой оси, полученный при $\lambda \in \{-i1000, i1000\}$ с помощью отображения $D(\cdot)$, представлен на рисунке 7 б. Из рисунка 7 б видно, что образ мнимой оси проходит через ноль и три раза оборачивается вокруг начала координат, что свидетельствует о существовании трех корней уравнения $D(\lambda) = 0$.

Таким образом, в случае неединственности решений автомодельных задач из тех решений, которые включают в себя особый разрыв, заведомо возможно только то решение, которое содержит особый разрыв, распространяющийся с минимальной скоростью.

Исследованные разрывы с линейно неустойчивой структурой можно разделить на две группы. К первой группе относятся разрывы, которые обладают

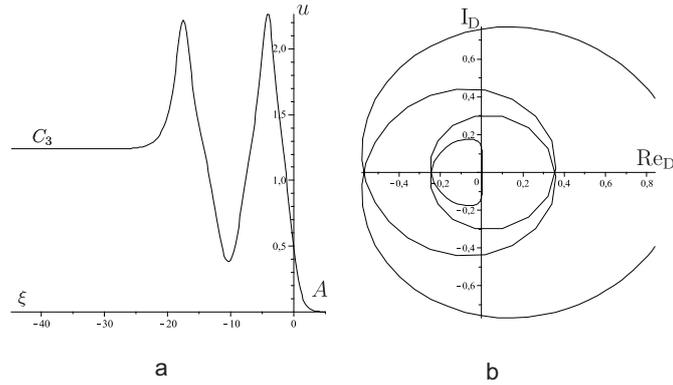


Рисунок 7 – Особый разрыв, соответствующий точке C_3 на рисунке 3 (а).

Образ мнимой оси, полученный действием отображения $D(\cdot)$. (б).

так называемой распадной неустойчивостью. Для этих разрывов переход из начального в конечное состояние может быть осуществлен с помощью последовательности из простых волн и устойчивых разрывов, обязательно включающих в себя первый особый разрыв. Этой группе разрывов соответствует отрезок кривой между точками B_0 и D_0 на рисунке 3. Следует ожидать, что эволюция неустойчивых разрывов первой группы будет происходить путем распада на устойчивые разрывы и простые волны. Для второй группы разрывов такой вариант эволюции отсутствует. К этой группе относятся все неустойчивые разрывы, которым соответствуют конечные состояния, расположенные правее точки D_0 на рисунке 3. Кроме того, существуют конечные состояния, переход в которые нельзя осуществить с помощью простых волн и разрывов, имеющих устойчивую структуру. Таким состояниям соответствуют, например, точки, расположенные между D_1 и D_2 , а также D_3 и D_4 на рисунке 3. Это означает, что задачу о распаде разрыва в общем случае нельзя решить, используя только разрывы со стационарной устойчивой структурой.

Отсутствие стационарной структуры или ее линейная неустойчивость не исключают возможности существования структуры, которая периодически зависит от времени (см. Куликовский, Чугайнова (2010)). Такие структуры рассматриваются в следующей главе.

В главе 3 построено решение задачи о распаде произвольного разрыва для обобщенного уравнения Хопфа. В результате проведенных исследований изменено понятие допустимости разрывов. Из множества разрывов, которые прежде считались допустимыми, исключены разрывы со стационарными неустойчивыми структурами и добавлены разрывы с устойчивыми периодическими по времени структурами (их устойчивость и периодичность проверялась

прямым численным счетом). Построенное в работе решение задачи о распаде произвольного разрыва единственно при любых значениях параметров.

В § 3.1 сформулирована задача о распаде произвольного разрыва для обобщенного уравнения Хопфа. Задача о распаде разрыва есть задача определения обобщенного решения, удовлетворяющего интегральной форме обобщенного уравнения Хопфа и кусочно-постоянным начальным условиям. Задачу о распаде произвольного разрыва применительно к рассматриваемому гиперболическому уравнению (1) можно (Рождественский, Яненко (1974)), сформулировать как задачу определения при $t > 0$ решения уравнения

$$\oint v dx - \varphi(v) dt = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющего кусочно-постоянным начальным условиям

$$v(x,0) = \begin{cases} v_l, & \text{при } x < 0 \\ v_r, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

При этом найденное решение $v(x,t)$ должно быть пределом решений усложненного уравнения (2), которое содержит члены, описывающие мелкомасштабные процессы дисперсии и диссипации. Такое решение должно удовлетворять начальным данным

$$v(x,0) = \begin{cases} v_l, & \text{при } x < 0 \\ v_0(x), & \text{при } 0 \leq x \leq b \\ v_r, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (8)$$

Ширина сглаженной ступеньки, заданной соотношением (8), в начальный момент равна b . Если $b \rightarrow 0$, то функция (8) сходится к разрывной функции (7). При больших значениях t асимптотическое поведение решения задачи (2), (8) не зависит от величины b .

В § 3.2 представлен численный метод решения обобщенного уравнения КдВБ. Описаны три разностные схемы для численного решения этого уравнения, и проведен анализ сходимости и точности решений, полученных с использованием этих разностных схем.

В § 3.3 численно исследована устойчивость особых разрывов по отношению к конечным локализованным возмущениям структуры разрыва. Вы-

полненные расчеты показывают, что особые разрывы с линейно неустойчивой структурой обладают так называемой распадной неустойчивостью. Детали и характерное время распада на последовательность из простых волн и устойчивых разрывов существенно зависят от вида возмущения, но качественные особенности процесса не изменяются.

§ 3.4 посвящен исследованию случая, если для заданного начального и конечного состояний не существует стационарной структуры разрыва. Такому состоянию может соответствовать нестационарный разрыв, который устойчив как нестационарное решение. Временной и пространственный масштаб колебаний в структуре таких разрывов связан с шириной структуры, поэтому возмущения, зависящие от времени, не выходят сколь-нибудь значительно за пределы структуры. Нестационарная структура может иметь место не только в тех случаях, когда имеется неустойчивая стационарная структура, но также и тогда, когда стационарная структура не существует. В асимптотике зависимость решения от времени является периодической.

Границы неустойчивости решений по отношению к конечным возмущениям соответствуют границам, полученным в результате исследования линейной устойчивости решений. Например, в § 2.2 показано, что если $\gamma = 10$, то переход к линейной неустойчивости происходит при $u_P = 1.86$. Введем величину $u_{max}(t)$, которая равна максимальному значению $u(x,t)$ в момент времени t . График зависимости $u_{max}(t)$ от t приведен на рисунке 8 для двух значений u_l , одно из которых больше, а другое меньше, чем u_P , а именно: 1.85 и 1.87. При $u_l = 1.85$ величина $u_{max}(t)$ асимптотически стремится к постоянной величине, соответствующей максимуму для стационарного профиля (линия 1), а при $u_l = 1.87$ зависимость $u_{max}(t)$ от времени близка к периодической (линия 2).

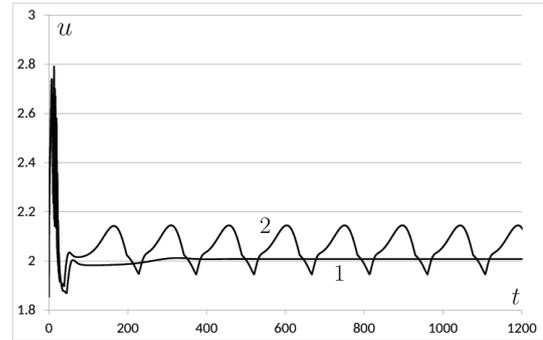


Рисунок 8 — $u_{max}(t)$. $\gamma = 10$, 1 — $u_l = 1.85$, 2 — $u_l = 1.87$.

Решения, полученные численно, не разрушались со временем, что свидетельствует об их устойчивости. В § 2.2 установлено, что переход к линейной неустойчивости происходит при мнимых значениях λ в результате мягкой бифуркации Андронова-Хопфа. Эти значения определяют величину периода

пульсаций нестационарной структуры вблизи порога неустойчивости, но только вблизи него.

Таким образом неустойчивые стационарные структуры при $u_l > u_{D_0}$ заменяются устойчивыми нестационарными осциллирующими структурами, а при $u_l > u_{D_0}$ там, где стационарные структуры вообще не существуют, нестационарные периодические структуры также уникально существуют и устойчивы.

В § 3.5 построена гиперболическая модель для обобщенного уравнения Хопфа (1). Согласно (Рождественский, Яненко (1978)) при больших значениях t решение задачи (2), (8) можно разделить на области, где диссипативный и дисперсионный члены малы и решение с большой степенью точности удовлетворяет гиперболическому уравнению (1), и на узкие зоны, которые соответствуют структурам разрывов и могут быть эффективно описаны подвижными поверхностями разрыва. Таким образом, необходимо, чтобы в решении задачи (1), (6) появлялись только те разрывы, которым в решении задачи (2), (8) соответствуют узкие зоны ударных переходов.

Следуя (Куликовкий, Свешникова, Чугайнова (2010)), «будем называть гиперболической моделью гиперболическую систему уравнений для описания непрерывных решений и определение множества разрывов, которые могут использоваться при построении решений. Эти разрывы будем называть допустимыми».

Выполненный анализ устойчивости решений для обобщенного уравнения КдВБ показывает, что в число допустимых разрывов для гиперболической модели, которая соответствует этому уравнению на больших масштабах, следует включать следующие разрывы:

1. особый разрыв, распространяющийся с наименьшей скоростью,
2. все классические разрывы, у которых скорость и параметр состояния за разрывом (при фиксированном состоянии перед разрывом) меньше, чем у особого разрыва,
3. все классические разрывы, которые нельзя заменить последовательностью волн, включающей в себя неопрокидывающиеся простые волны и разрывы из двух перечисленных выше пунктов.

Указанный способ построения гиперболической модели позволяет включить в нее все линейно устойчивые разрывы, структура которых является

бегущей волной, а также все классические разрывы, которым соответствует устойчивая нестационарная структура.

При построении гиперболической модели параметры дисперсии и диссипации необходимо знать только для вычисления минимальной скорости особого разрыва при заданных начальных параметрах перед разрывом.

Сформулированная гиперболическая модель позволяет решить задачу о распаде разрыва единственным образом.

О п р е д е л е н и е. Допустимым разрывом называется разрыв с устойчивой стационарной или нестационарной структурой.

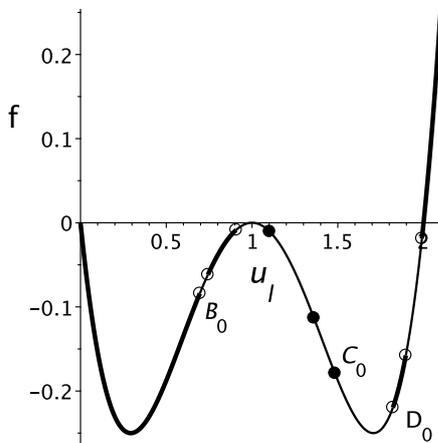


Рисунок 9 – $f(u_l)$

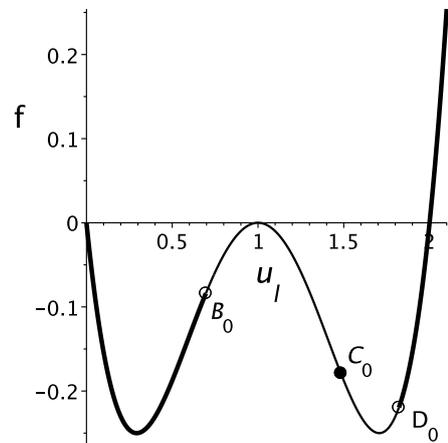


Рисунок 10 – $f(u_l)$

На рисунке 9 жирными линиями и маркерами в виде круга выделены значения u_l , для которых существуют решения в виде бегущей волны. Маркерами в виде окружности показаны значения u_l , для которых структур не существует, но им соответствует такое же значение скорости волны, как и особому разрыву. На рисунке 10 жирными линиями и маркерами в виде круга выделены значения u_l , для которых разрывы в гиперболической модели являются допустимыми. Маркером в виде окружности показаны значения u_l , для которых разрыв не является допустимым, но им соответствует такое же значение скорости волны, как и допустимому особому разрыву.

Проиллюстрируем сделанное определение для случая, если $\gamma = 11.31$. Выделим сначала множество допустимых разрывов со стационарной структурой, состояние перед которыми $u_r = 0$. На рисунке 9 показано множество разрывов, имеющих стационарную структуру при $\gamma = 11.31$, а на рисунке 10 – множество допустимых разрывов. Это множество включает в себя линейно устойчивые разрывы со стационарной структурой, в том числе один особый

разрыв (см. рисунок 11, рисунок 12). Кроме того, допустимыми являются все разрывы, для которых $u_l > u_{D_0}$. Эти разрывы являются допустимыми независимо от того, существует ли для них решение в виде бегущей волны и устойчиво ли это решение. Если устойчивой стационарной структуры нет, то расчеты показывают, что в асимптотике для таких разрывов существует периодически зависящая от времени структура с невозрастающей эффективной шириной. Для любого значения скорости $W > \varphi'(v_r)$ существует допустимый разрыв и только один (см. рисунок 10).

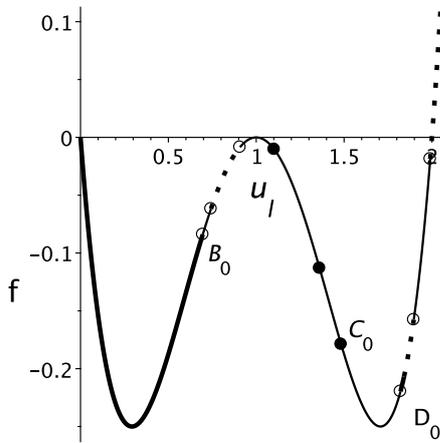


Рисунок 11 – $f(u_l)$.

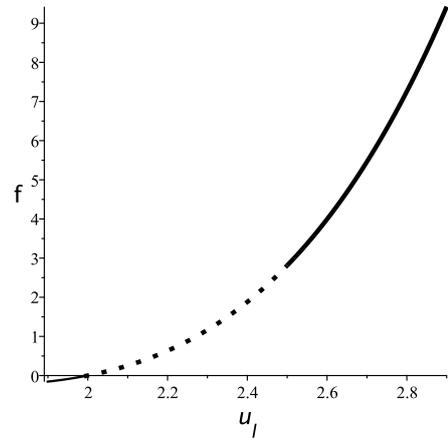


Рисунок 12 – $f(u_l)$.

На рисунке 11 жирными линиями и маркерами в виде круга выделены значения u_l , для которых существуют линейно устойчивые решения в виде бегущей волны. Маркерами в виде окружности показаны значения u_l , для которых структур не существует, но им соответствует такое же значение скорости волны, как и особому разрыву. Пунктирной линией показаны значения u_l , для которых решения в виде бегущей волны линейно неустойчивы. На рисунке 12 показано множество разрывов со стационарной структурой. Обозначения как на рисунке 11.

Описан алгоритм построения решения задачи о распаде разрыва с использованием только допустимых разрывов и простых волн.

В главе 4 исследована линейная устойчивость особых разрывов, обнаруженных ранее в работах Куликовского А.Г. и Чугайновой А.П. для уравнений математической модели, описывающей слабнолинейные квазипоперечные волны в упругой слабоанизотропной среде. Во введении к главе 4 приведена система уравнений, описывающая движение среды при распространении двух квазипоперечных волн, которые двигаются в одном направлении и взаи-

модействуют между собой, полученная в работе (Куликовский (1986)):

$$\partial u_\alpha / \partial t + \partial (\partial R(u_1, u_2) / \partial u_\alpha) / \partial x = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (9)$$

$$R(u_1, u_2) = f(u_1^2 + u_2^2)/2 + g(u_2^2 - u_1^2)/2 - \kappa(u_1^2 + u_2^2)^2/4. \quad (10)$$

Здесь x – лагранжева координата частицы, t – время. Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – компоненты сдвиговой деформации среды, $u_1 = \partial w_y / \partial x$, $u_2 = \partial w_z / \partial x$, w_y и w_z – перемещения частицы среды вдоль осей y и z , соответственно. Упругий потенциал слабоанизотропной среды $R(u_1, u_2)$ задается выражением (10), где g – параметр анизотропии, который предполагается малым, κ – постоянная с размерностью скорости, которая характеризует нелинейные эффекты, f – характеристическая скорость при $g = 0$, $\kappa = 0$. Предполагается, что константы g и κ имеют одинаковые знаки.

Выражение для $R(u_1, u_2)$ получено в предположении, что деформация является малой, что позволяет записать внутреннюю энергию в виде разложения до членов четвертой степени по деформациям u_1 и u_2 .

Системе уравнений (9) можно поставить в соответствие законы сохранения для u_1 и u_2 , которые имеют разрывные решения в виде бегущих волн. Значения функций u_1 и u_2 за и перед разрывом, распространяющимся в координатах Лагранжа со скоростью $W = dx/dt$ удовлетворяют соотношениям:

$$[\partial R / \partial u_\alpha] - W[u_\alpha] = 0, \quad (11)$$

Здесь квадратные скобки, как и в предыдущих главах, используются для обозначения скачка значений функций, стоящих в скобках. Будем рассматривать возможные состояния за волной, распространяющейся с постоянной скоростью W по среде с фиксированными параметрами перед разрывом u_1^r и u_2^r . Состояние за разрывом будем по-прежнему обозначать индексом l .

Приведенные выше результаты опубликованы в (Куликовский, Чугайнова (2008)), следуя этой работе, будем рассматривать только случай, когда $\kappa \neq 0$, $u_r \neq 0$ и $u_l \neq 0$. Там же процессы, происходящие в узкой зоне ударного перехода и определяющие структуру разрыва, предложено учитывать введением в уравнения (9) диссипативных и дисперсионных членов. Такая система имеет

вид

$$\begin{aligned}\partial u_1/\partial t + \partial (\partial R(u_1, u_2)/\partial u_1) / \partial x &= \mu \partial^2 u_1 / \partial x^2 + m \partial^2 u_2 / \partial x^2, \\ \partial u_2/\partial t + \partial (\partial R(u_1, u_2)/\partial u_2) / \partial x &= -m \partial^2 u_1 / \partial x^2 + \mu \partial^2 u_2 / \partial x^2.\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь m и μ – положительные коэффициенты при диссипативных и дисперсионных членах, соответственно, которые записаны в виде, предложенном в (Бахвалов, Эглит (2000)) для частного случая композиционной среды, имеющей периодическую структуру.

В § 4.1 получены уравнения, необходимые для исследования линейной устойчивости структуры особых разрывов. В линейном приближении найдена система уравнений, описывающих эволюцию возмущений решений для структуры разрыва. Наличие больше чем одной моды в асимптотике собственных функций делает невозможным использование функции Эванса непосредственно для полученной системы уравнений, поэтому использован метод внешних форм. Применение метода внешних форм увеличило число дифференциальных уравнений с двух до шести. Решения этой системы дифференциальных уравнений получены с использованием численных методов. Оригинальный программный код написан на языке C++ с использованием параллельного программирования (Open MPI) и является частью комплекса программ для анализа устойчивости решений методом функции Эванса или близких к этому подходу методологически.

В § 4.2 показано, что устойчивыми являются только два особых разрыва, которые распространяются с наименьшими скоростями и имеют наиболее простую структуру. Исследование проведено для положительного и отрицательного значения параметра нелинейности, так как в этих двух случаях поведение ударных волн в рамках данной модели существенно различно. Для исследованной системы уравнений признание двух линейно устойчивых особых разрывов допустимыми не приводит к возникновению неединственности задачи о распаде разрыва.

На рисунке 13 и рисунке 16 $dZ/d\xi = -\mu \left[(du_1/d\xi)^2 + (du_2/d\xi)^2 \right]$.

Глава 5 посвящена численному методу решения уравнений, описывающих эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области с поверхностями фазового перехода.

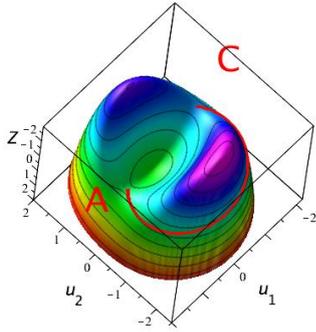


Рисунок 13 – $Z(u_1, u_2)$.

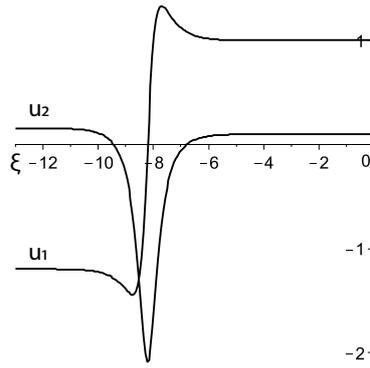


Рисунок 14 – $u(\xi)$.

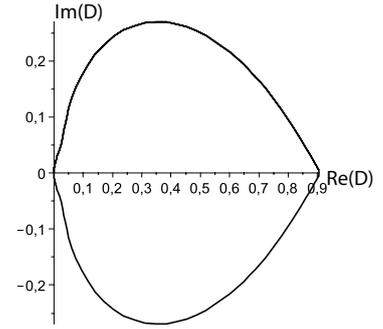


Рисунок 15 – D .

$W = 4.504$. На рисунке 13 и рисунке 14 – стационарная структура устойчивого особого разрыва. На рисунке 15 – функция Эванса при мнимых значениях λ .

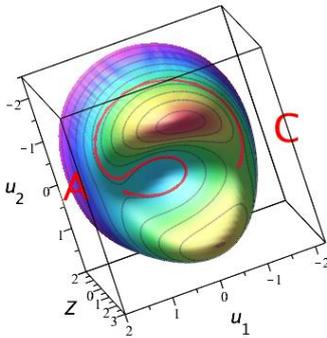


Рисунок 16 – $Z(u_1, u_2)$.

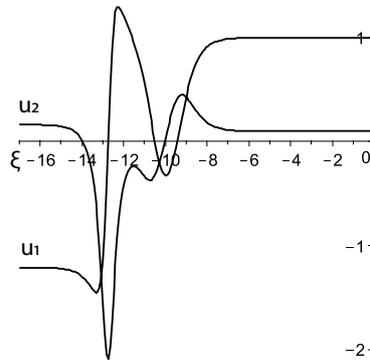


Рисунок 17 – $u(\xi)$.

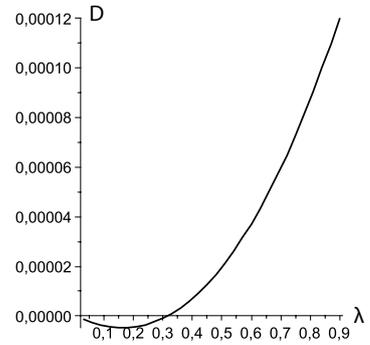


Рисунок 18 – D .

$W = 4.555$. На рисунке 16 и рисунке 17 – стационарная структура неустойчивого особого разрыва. На рисунке 18 – функция Эванса при действительных значениях λ .

В § 5.1 представлена математическая модель течений с фазовыми переходами в пористой среде. Предполагается, что внутри области, насыщенной жидкостью, могут существовать подобласти, содержащие газ (пузыри), а внутри области содержащей газ – подобласти, насыщенные жидкостью (капли). Движение жидкости описывается уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости и законом Дарси с учетом силы тяжести, а изменение концентрации паров жидкости – уравнением диффузии (вторым законом Фика). Поверхность фазового перехода предполагается бесконечно тонкой. Нормальная компонента скорости поверхности фазового перехода определяется из уравнения, полученного из закона сохранения массы. Приведены граничные условия

на границе расчетной области и поверхности фазового перехода. Дано обоснование изотермического приближения для газа.

Если пористость и проницаемость среды одинаковы во всех точках, а жидкость имеет постоянный состав, то давление в области, занятой жидкостью, удовлетворяет уравнению Лапласа.

В области, которая насыщена паровоздушной смесью, давление газа постоянно, поэтому влиянием фильтрации газа в этой области на движение фронта фазового перехода можно пренебречь. На поверхности испарения давление испытывает скачок, равный капиллярному давлению.

Влажность в газе, прилегающем к фронту испарения, считается равной влажности насыщенного пара.

Поток массы жидкости через фронт равен потоку паров жидкости по другую сторону фронта, что позволяет записать уравнение для нормальной составляющей локальной скорости фронта.

Основные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \Omega_f : \quad \Delta P = 0; \quad (x,y,z) \in S : \quad P = P_a + P_c; \\ (x,y,z) \in \Omega_d : \quad \partial \nu / \partial t = D \Delta \nu; \quad (x,y,z) \in S : \quad \nu = \nu_*; \end{aligned} \quad (13)$$

$$V_n = -\frac{k}{m \mu_w} [\text{grad}(P - \rho_w g z)]_n + D \frac{\rho_a}{\rho_w} [\text{grad } \nu]_n.$$

Здесь Ω_f – область насыщенная жидкостью, Ω_d – область насыщенная смесью воздуха с парами воды, m – пористость, k – проницаемость, μ_w – вязкость воды, g – ускорение свободного падения, ρ_w – плотность воды, ρ_a – плотность воздуха, ν – влажность, P – давление в жидкости, P_a – давление в газе, P_c – капиллярное давление, D – коэффициент диффузии, S – граница между областями Ω_f и Ω_d , V_n – нормальная скорость этой границы.

В § 5.2 описан метод решения уравнения Лапласа в области Ω_f , насыщенной водой. Подход к расчету течений с поверхностью фазового перехода при наличии фильтрации и диффузии в данной работе основан на численно-аналитическом методе граничных элементов. Предполагается, что область Ω_f имеет границу, состоящую из нескольких замкнутых кривых, как показано на рисунке 19. Для всех внутренних границ L_1, \dots, L_m используется потенциал простого слоя, а для границы L_0 – двойного слоя. Каждая граница L_n области Ω аппроксимируется ломаной линией. Каждому граничному элемен-

ту ставится в соответствие источник потенциала простого или двойного слоя. Источник характеризуется параметром (плотностью интенсивности) σ_j^n , который изменяется от края панели до ее середины по линейному закону. При этом имеет место непрерывное распределение интенсивности источников потенциала σ вдоль ломаной линии Γ_n . Значения σ_j^n определяются из системы линейных уравнений, аппроксимирующих граничные условия, которые зависят от решаемой задачи. Давление газа на границе L_0 предполагается известным, а на границах с «пузырями» оно зависит от давления внутри пузыря. Для предложенного метода разработаны необходимые алгоритмы применительно к высокопроизводительным вычислительным системам и написан программный код на языке C++ с использованием технологии Open MPI.

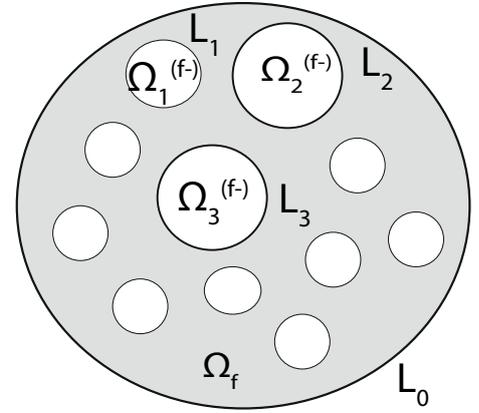


Рисунок 19 – Расчетная область Ω_f , содержащая пузыри. L_0^f – внешняя граница, L_1^f и L_2^f – внутренние границы.

В § 5.3 представлен метод расчета движения поверхности фазового перехода. Расчет эволюции поверхности фазового перехода при известной скорости граничных элементов, из которых составлена эта поверхность, осуществляется в предположении, что на каждом временном шаге τ на первом промежуточном этапе алгоритма граничный элемент двигается поступательно с известной постоянной нормальной скоростью V_n^* . На этом этапе вычисляются новые значения координат концов граничного элемента. Если граничные элементы с номерами j и $j + 1$ пересекаются, то точка пересечения становится их новой общей границей, в противном случае новые координаты общей граничной точки вычисляются как среднее арифметическое соответствующих координат краевых точек этих элементов, полученных на промежуточном этапе.

§ 5.4 содержит результаты верификации разработанного численного метода. Первый тестовый расчет выполнен для проверки возможности с хорошей точностью вычислять нормальную скорость границы сильно деформированной водонасыщенной области при сильно неоднородном поле давления с помощью используемого численного метода. Сравнение результатов численного расчета с предложенным там же аналитическим решением показало хорошую точность и надежность численного метода и программного ком-

плекса. Второй тестовый расчет выполнен для задачи с подвижной границей. Рассматривается задача для области Ω_f , которая представляет собой кольцо. Давление воздуха на внешней границе кольца постоянно. На внутренней границе кольца давление зависит от давления газа в полости. Сила тяжести не учитывается, а капиллярное давление предполагается постоянным. Представлено аналитическое решение задачи о деформации кольцеобразной водонасыщенной области, которое использовано для верификации численного метода. Показано, что результаты численного расчета воспроизводят аналитическое решение с хорошей точностью, а предложенный метод позволяет надежно обнаружить неустойчивость решения по отношению к конечным возмущениям и рассчитать эволюцию этих возмущений.

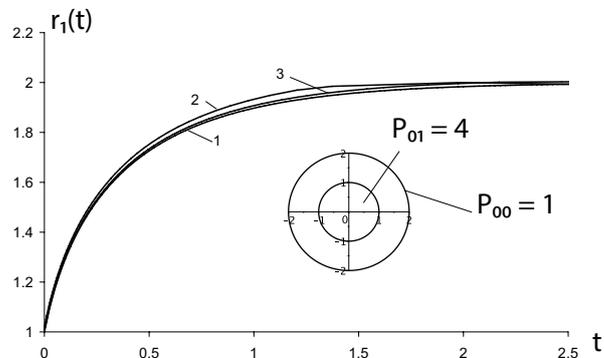


Рисунок 20 – Зависимость внутреннего радиуса кольца от времени. 1 - аналитическое решение, 2 - расчет с 20 элементами, 3 - с 80 элементами.

В § 5.5 получены условия применимости стационарного уравнения диффузии для расчета скорости поверхности фазового перехода и доказано их выполнение для рассматриваемых задач. В этом случае уравнение для расчета поля влажности является уравнением Лапласа $\Delta \nu = 0$. Сравнением аналитических и численных решений, полученных с использованием нестационарного и стационарного уравнений диффузии, доказана применимость квазистационарного метода к исследуемым задачам. Использование стационарного уравнения для описания процесса диффузии при расчете движения фронта испарения позволяет применить описанный в § 5.2 метод граничного элемента к этому процессу.

Глава 6 посвящена изучению динамики и устойчивости фильтрационных течений, включающих в себя разрывы, а именно: поверхности фазового перехода в пористой среде с постоянными параметрами.

В § 6.1 численно исследовано поведение конечного возмущения плоской стационарной поверхности фазового перехода в горизонтально протяженном слое малопроницаемой среды в случае, когда существуют два стационарных решения для такой поверхности.

Рассмотрена эволюция конечных локализованных возмущений каждой из двух стационарных поверхностей. Изучены нелинейные эффекты развития конечных локализованных возмущений. Показано, что если решение линейно устойчиво, то потеря устойчивости существует только для конечных возмущений с амплитудой, превосходящей некоторое пороговое значение. Это пороговое значение увеличивается с уменьшением длины волны и должно быть больше расстояния между вертикальными координатами плоских стационарных решений.

В § 6.2 получены достаточные условия того, что локализованные возмущения приведут или не приведут к катастрофической перестройке спектрально устойчивого стационарного решения. Найдено приближенное аналитическое выражение для порогового значения амплитуды локализованного возмущения, которое приводит к катастрофической перестройке решения. Для этого в слабонелинейном приближении получено уравнение для эволюции фронта фазового перехода. Это амплитудное уравнение сведено к форме уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП). Полученное приближенное уравнение предсказывает существование стационарных решений в основной задаче. Такими решениями являются два решения для плоского фронта, одно солитоноподобное решение и семейство периодических решений, описываемых эллиптическими функциями. Линейно устойчивым является только одно из решений для плоского фронта. Любое конечное начальное возмущение спектрально устойчивого решения либо асимптотически затухает, либо приводит к катастрофической пе-

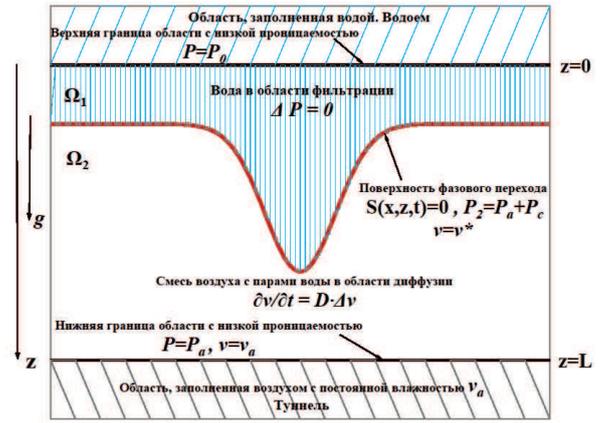


Рисунок 21 – Схема течения.

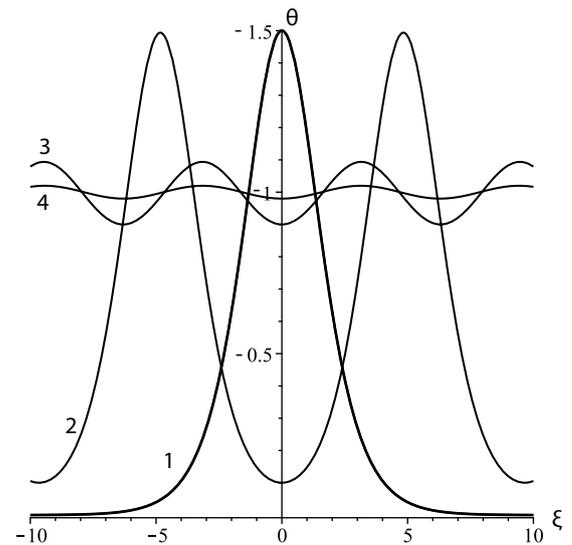


Рисунок 22 – Ограниченные неустойчивые решения. 1 - солитоноподобное, 2, 3, 4 - периодические. Решение $\vartheta = 0$ - устойчиво.

рестройке течения, а именно: образованию пальца и прорыву воздуха к верхней границе малопроницаемого слоя пористой среды. Найденные приближенные стационарные решения могут с хорошей точностью использоваться для предсказания того, по какому сценарию пойдет развитие возмущения. Если начальное положение фронта фазового перехода находится между спектрально устойчивым решением и любым из стационарных решений, то оно затухает. Если начальное положение фронта находится выше хотя бы одного спектрально неустойчивого стационарного решения, то происходит катастрофическая перестройка решения. Результаты численного решения полной задачи подтверждают, что полученные приближенные стационарные решения с хорошей точностью предсказывают поведение возмущения в окрестности точки поворота бифуркационной диаграммы. Предложена модификация формул, описывающих приближенное стационарное солитоноподобное решение в случае, когда амплитуда возмущения сравнима с высотой малопроницаемого слоя пористой среды, в котором находится фронт фазового перехода.

§ 6.3 посвящен исследованию устойчивости и динамики фронта фазового перехода, распространяющегося в пористой среде в виде бегущей волны. Получено, что для случая, когда плоские поверхности стационарных фазовых переходов расположены близко, динамика системы приближенно описывается уравнением КПП. Распространяющиеся с постоянной скоростью поверхности фазового перехода появляются в динамике системы как асимптотика форм локализованных возмущений неустойчивой плоской поверхности испарения воды и вызваны длинноволновой неустойчивостью вертикальных течений в несмачиваемых пористых средах. Показано, что существует минимальная скорость распространения устойчивых бегущих волн. Бегущие волны, распространяющиеся с меньшей скоростью, являются неустойчивыми. В зависимости от возмущения такие решения эволюционируют либо в нестационарное состояние, приводящее к катастрофической перестройке решения, либо в устойчивый фронт постоянной формы, распространяющийся с постоянной скоростью, который в этом случае служит ат-

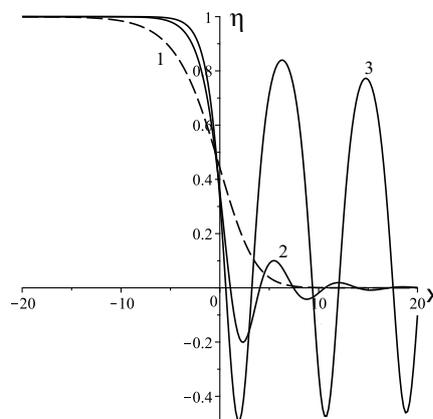


Рисунок 23 – Профили бегущей волны. 1- $W = 2$, 2- $W = 0.5$, 3 - $W = 0.01$.

трактором. Получена приближенная аналитическая оценка для скорости такой волны (аттрактора).

В § 6.4 исследована устойчивость и динамика движущегося плоского фронта фазового перехода. Получено аналитическое решение задачи о движении плоской поверхности фазового перехода. Изучены условия дестабилизации плоской поверхности вертикально движущегося фронта бесконечно малыми гармоническими возмущениями. Получено дисперсионное соотношение. Найдена зависимость амплитуды возмущения от времени и координаты движущегося фронта фазового перехода. Выполнен анализ эволюции бесконечно малых гармонических возмущений и найдены все сценарии этой эволюции. Численным моделированием изучена эволюция локализованных конечных возмущений движущегося фронта. Показано, что такие возмущения в основном развиваются в соответствии со сценариями эволюции бесконечно малой гармоника. При этом разная скорость изменения амплитуды возмущений, направленных вверх и вниз, а также увеличение «эффективной» длины возмущения являются нелинейными эффектами.

В § 6.5 исследована устойчивость стационарных фронтов фазового перехода по отношению к локализованным конечным возмущениям верхней или нижней границы низкопроницаемого слоя. Получена аналитическая оценка порогового значения амплитуды возмущения, приводящего к исчезновению стационарного решения. Показано, что если стационарное течение с плоской поверхностью раздела фаз существует и устойчиво по отношению к бесконечно малым гармоническим возмущениям поверхности, то локализованное возмущение верхней или нижней границы низкопроницаемого слоя приводит к исчезновению стационарного решения только в том случае, если это возмущение направлено вверх и имеет конечную амплитуду. Такая катастрофическая перестройка течения возможна только в случае несмачиваемой пористой среды. Пороговое значение амплитуды, при превышении которого стационарное тече-

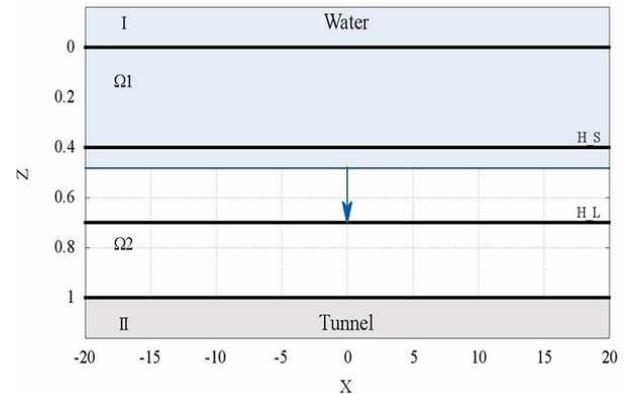


Рисунок 24 – Плоский фронт фазового переход движется от неустойчивого стационарного положения H_S к устойчивому H_L .

ние перестает существовать, зависит от эффективной ширины направленного вверх локализованного возмущения. Это пороговое значение уменьшается с увеличением эффективной ширины и асимптотически приближается к величине, соответствующей бесконечно большой эффективной ширине локализованного возмущения. Найдено приближенное аналитическое выражение для этой величины при возмущении как верхней, так и нижней границы. Примеры для конкретных значений физических параметров системы изучены с помощью численного моделирования и демонстрируют исчезновение устойчивых стационарных решений, если абсолютная величина амплитуды возмущения выше критической.

В § 6.6 численный метод, который разработан в главе 5 и позволяет рассчитывать эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области, содержащей пузыри воздуха, использован, чтобы исследовать неустойчивость решения по отношению к конечным возмущениям и рассчитать эволюцию этих возмущений. Возможности метода продемонстрированы путем анализа задачи о деформации пузыря воздуха в горизонтально протяженном слое водонасыщенной пористой среды с постоянным градиентом давления. Обнаружено, что неустойчивость по отношению к конечным возмущениям приводит к дроблению пузыря. Анализ результатов численного решения показывает, что хотя все круглые пузыри движутся с одинаковой скоростью, однако, вследствие роста возмущений, на той части границы пузыря, где воздух вдвигается в жидкость, эта часть границы движется быстрее, поэтому расположенные рядом пузыри способны объединяться. Таким образом, обнаружено, что в рамках используемой модели неустойчивость пузыря в слое фильтрующейся жидкости может приводить как к дроблению пузыря, так и к его объединению с другими пузырями.

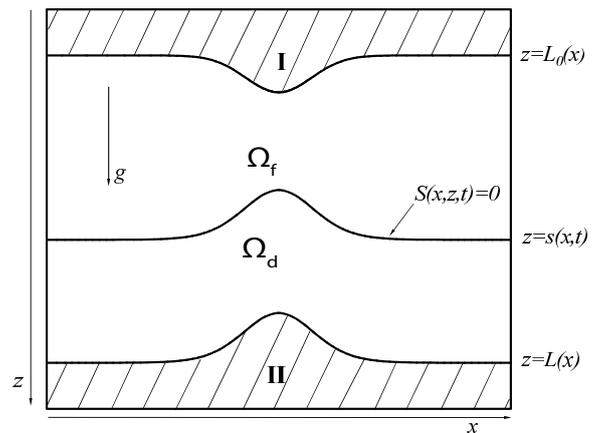


Рисунок 25 – Геометрия задачи: I - область заполненная водой (водоем), Ω_1 - вода в низкопроницаемом слое, Ω_2 - влажный воздух в низкопроницаемом слое, II - подземное сооружение с постоянной влажностью воздуха.

Глава 7 посвящена исследованию фильтрационных течений с поверхностями фазового перехода в пористой среде с изменяющимся капиллярным давлением.

В § 7.1 изучаются вертикальные течения в горизонтально протяженной двумерной области пористой среды с изменяющимся капиллярным давлением при наличии фронта фазового перехода. Получено, что необходимым условием существования нескольких положений равновесия (бифуркаций) в смачиваемой среде является наличие слоя, в котором капиллярное давление уменьшается (возрастает по абсолютной величине) с глубиной. Построен пример, когда в смачиваемой среде существуют три положения равновесия. Исследована устойчивость плоской поверхности фазового перехода по отношению к бесконечно малым возмущениям и получено дисперсионное соотношение. Показано, что в смачиваемой среде в присутствии капиллярных сил дестабилизация плоской поверхности фазового перехода может происходить как при бесконечном волновом числе, так и при нулевом волновом числе, при этом коротковолновая неустойчивость может иметь место даже в том случае, если положение равновесия единственно. Для случая, когда среда состоит из двух слоев, различающихся капиллярным давлением, построена бифуркационная диаграмма, имеющая две точки поворота, и определена устойчивость решений, соответствующих различным ветвям бифуркационной диаграммы.

В § 7.2 исследованы возможные топологические изменения и фрагментации двухфазного потока в ячейке Хеле-Шоу, трещинах и пористых сред под влиянием градиента капиллярного давления. Был рассмотрен палец, который развивается в результате неустойчивости и эволюционирует как область, насыщенная водой, которая окружена влажным воздухом. Деформация границы

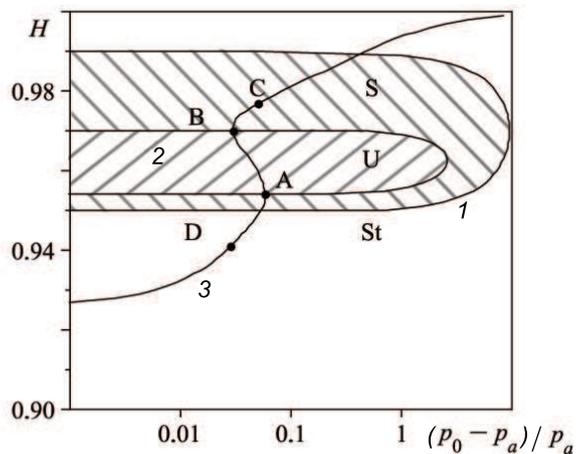


Рисунок 26 – Пример бифуркационной диаграммы (стационарные положения фронта в зависимости от давления на верхней границе); 1 – граница области устойчивости St, 2 – граница области коротковолновой неустойчивости S.

раздела вода-воздух вызвана переменным градиентом капиллярного давления, который может возникать при изменении химических свойств минеральных частиц. Чтобы изучить эту деформацию, были использованы две простые геометрические формы - прямоугольные и круглые области, насыщенные водой. Для асимптотического случая найдены аналитические решения, которые описывают деформацию тонкого прямоугольного пальца. Вычислительные эксперименты и аналитические решения показали, что если водонасыщенная область находится внутри слоя с переменным градиентом капиллярного давления, то она может трансформироваться в две подобласти, соединенных тонким каналом. При отсутствии испарения канал не исчезает, но его ширина со временем стремится к нулю. При любой конечной скорости испарения такая водонасыщенная область распадается на две непересекающиеся части. В этом случае топология потока и его свойства существенно изменяются. Численные эксперименты показали, что способность водонасыщенных областей расщепляться или сливаться универсальна и слабо зависит от исходной формы.

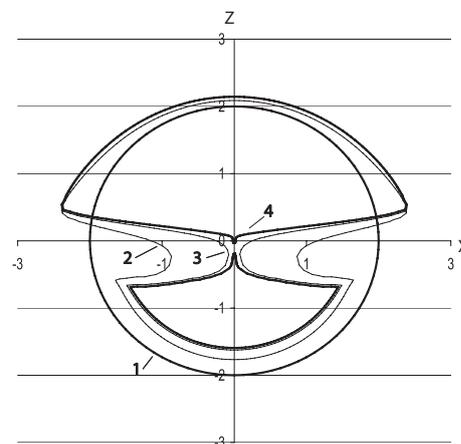


Рисунок 27 –

Фрагментация круглой водонасыщенной области.

В заключении приведены основные результаты работы. Выполнен цикл работ, посвященный развитию методов построения разрывных решений уравнений механики сплошных сред, основанных на изучении структуры разрывов и их устойчивости применительно к гиперболической модели, дополненной членами, учитывающими мелкомасштабные процессы дисперсии и диссипации, и модели, описывающей распространение фронтов фазового перехода в пористой среде; разработан эффективный вычислительный метод для исследования свойств, структуры линейной и глобальной устойчивости решений, реализованный в виде пакета прикладных программ для высокопроизводительных вычислительных систем.

1. Построена гиперболическая модель для обобщенного уравнения Хопфа в случае, если дополненное уравнение содержит члены с дисперсией и диссипацией и является обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргерса. Выполненный анализ устойчивости решений для обобщенного уравнения КдВБ

показывает, что в число допустимых разрывов для гиперболической модели, которая соответствует этому уравнению на больших масштабах, следует включать следующие разрывы:

- особый разрыв, распространяющийся с наименьшей скоростью,
- все классические разрывы, у которых скорость и параметр состояния меньше, чем у особого разрыва,
- все классические разрывы, которые нельзя заменить последовательностью волн, включающей в себя неопрокидывающиеся простые волны и разрывы из двух перечисленных выше пунктов .

Указанный способ построения гиперболической модели позволяет включить в нее все линейно устойчивые разрывы, структура которых является бегущей волной, а также все классические разрывы, которым соответствует устойчивая нестационарная структура. Последние из перечисленных разрывов могут иметь линейно неустойчивую структуру в виде бегущей волны или не иметь такой структуры. При построении гиперболической модели параметры дисперсии и диссипации необходимо знать только для вычисления минимальной скорости особого разрыва при заданных начальных параметрах перед разрывом. Сформулированная гиперболическая модель позволяет решить задачу о распаде разрыва для обобщенного уравнения Хопфа единственным образом. Описана процедура построения такого решения.

2. Построение гиперболической модели стало результатом систематического исследования свойств, условий существования, структуры, линейной и глобальной устойчивости решений в виде бегущих волн, представляющих собой структуру классических и особых разрывов для обобщенного уравнения КдВБ. Для такого исследования были получены аналитические решения, адаптированы численно-аналитические подходы к анализу линейной устойчивости на основе метода функции Эванса с использованием внешних форм, разработаны численные методы решения для изучения глобальной устойчивости решений.

3. Для численно-аналитического исследования устойчивости решений и прямого численного моделирования разработан пакет прикладных программ применительно к высокопроизводительным вычислительным системам на языке C++ с использованием технологии параллельного программирования Open MPI.

4. С помощью разработанного пакета прикладных программ исследована устойчивость особых разрывов, возникающих в модели распространения слабонелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропной упругой среде при наличии дисперсии и диссипации. В модель, сформулированную ранее в работах других авторов, входят два нелинейных гиперболических уравнения типа обобщенного уравнения Хопфа. Мелкомасштабные процессы, определяющие структуру разрывов, описываются уравнениями, дополненными диссипативными и дисперсионными членами. Показано, что устойчивыми являются только два особых разрыва, которые распространяются с наименьшими скоростями. Выполненное исследование устойчивости особых разрывов позволило в данном случае окончательно сформулировать гиперболическую модель, т.е. указать все допустимые разрывы.

5. В квазистационарном приближении для уравнения диффузии сформулирована и обоснована модель фильтрационного течения с поверхностью фазового перехода (испарения) в пористой среде в предположении, что такая поверхность является бесконечно тонкой, т.е. разрывом. Методом нормальных мод исследована линейная устойчивость плоских поверхностей фазового перехода.

6. Для решения задач в рамках сформулированной модели предложен оригинальный численный метод, позволяющий детально и надежно рассчитывать эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области, содержащей пузыри воздуха. При численном решении уравнения Лапласа для внешней границы используется метод граничного элемента с источниками потенциала простого слоя для границ пузырей и потенциала двойного слоя для внешней границы области пористой среды.

7. Создан комплекс программ, в котором применительно к высокопроизводительным вычислительным системам на языке программирования C++ с использованием технологии Open MPI реализован предложенный метод расчета течений с поверхностями фазового перехода. С помощью этого пакета были выполнены вычислительные эксперименты и получены результаты, приведенные в последующих пунктах.

8. В рамках сформулированной модели с использованием разработанного программного комплекса численно исследована устойчивость плоской линейно устойчивой стационарной поверхности фазового перехода в горизонтально

протяженном слое малопроницаемой пористой среды по отношению к конечным локализованным возмущениям и показано, что существует пороговое значение амплитуды локализованного возмущения, которое приводит к катастрофической перестройке решения. В слабонелинейном приближении получена аналитическая оценка этой амплитуды. Исследована устойчивость стационарных фронтов фазового перехода по отношению к локализованным конечным возмущениям верхней или нижней границы низкопроницаемого слоя. Получена аналитическая оценка порогового значения амплитуды возмущения, приводящего к исчезновению стационарного решения. Показано, что фронт фазового перехода может распространяться в горизонтальном направлении в виде бегущей волны. Исследована устойчивость такого решения и получена аналитическая оценка для скорости волны,

9. Аналитически решена задача о вертикальном течении, которое сопровождается движением плоской поверхности фазового перехода в пористой среде. В линейном приближении найдены условия, при которых происходит дестабилизация такого фронта фазового перехода.

10. Численно исследована устойчивость пузыря в горизонтально протяженном слое водонасыщенной пористой среды с постоянным градиентом давления. Установлено, что поверхность пузыря неустойчива по отношению к конечным возмущениям и может приводить как к дроблению пузыря, так и его объединению с другими пузырями.

11. Получено аналитическое решение для вертикальных течений в пористой среде с изменяющимся капиллярным давлением. Впервые показано, что в смачиваемой среде могут существовать три и более стационарных положения поверхности фазового перехода. Методом нормальных мод исследована устойчивость этих стационарных решений.

12. В результате численного и аналитического исследования получено, что под влиянием градиента капиллярного давления могут происходить топологические изменения и фрагментации двухфазного потока в ячейке Хеле-Шоу и пористых средах. Согласно вычислительным экспериментам и полученным аналитическим решениям водонасыщенная область, которая находится внутри слоя с переменным градиентом капиллярного давления, может трансформироваться в две подобласти и распадаться на две непересекающиеся части. В этом случае топология потока и его свойства существенно изменяются.

Основные публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

1. *Il'ichev A.T., Shargatov V.A.* Dynamics of water evaporation fronts // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2013. — Vol. 53, no. 9. — P. 1350–1370.
2. *Chugainova A.P., Shargatov V.A.* Stability of nonstationary solutions of the generalized KdV-Burgers equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2015. — Vol. 55, no. 2. — P. 251–263.
3. *Il'ichev A.T., Chugainova A.P., Shargatov V.A.* Spectral stability of special discontinuities // *Doklady Mathematics*. — 2015. — Vol. 91, no. 3. — P. 347–351.
4. *Губин С.А., Кривошеев А.В., Шаргатов В.А.* О существовании стационарного фронта испарения воды в горизонтально-протяженной низкопроницаемой области // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2015. — № 2. — С. 70–80.
5. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2015. — Vol. 83. — P. 552–561.
6. *Chugainova A.P., Shargatov V.A.* Stability of discontinuity structures described by a generalized KdV–Burgers equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 56, no. 2. — P. 263–277.
7. *Куликовский А. Г., Чугайнова А. П., Шаргатов В. А.* Единственность автомодельных решений задачи о распаде произвольного разрыва уравнения Хопфа со сложной нелинейностью // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2016. — Т. 56, № 7. — С. 1363–1370.
8. *Shargatov V. A.* Instability of a liquid-vapor phase transition front in inhomogeneous wettable porous media // *Fluid Dynamics*. — 2017. — Vol. 52, no. 1. — P. 146–157.
9. *Chugainova A.P., Il'ichev A.T., Kulikovskii A.G., Shargatov V.A.* Problem of arbitrary discontinuity disintegration for the generalized Hopf equation: Selec-

- tion conditions for a unique solution // *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*. — 2017. — Vol. 82, no. 3. — P. 496–525.
10. *Shargatov V. A.* Dynamics and Stability of Air Bubbles in a Porous Medium // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2018. — Vol. 58, no. 7. — P. 1172–1187.
 11. *Shargatov V.A., Chugainova A.P., Gorkunov S.V., Sumskoi S.I.* Flow Structure behind a Shock Wave in a Channel with Periodically Arranged Obstacles // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. — 2018. — Vol. 300, no. 1. — P. 206–218.
 12. *Tsyarkin G. G., Shargatov V. A.* Influence of capillary pressure gradient on connectivity of flow through a porous medium // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2018. — Vol. 127. — P. 1053–1063.
 13. *Shargatov V. A., Tsyarkin G. G., Bogdanova Yu A.* Filtration-Flow Fragmentation in Medium with Capillary-Pressure Gradient // *Doklady Physics*. — 2018. — Vol. 63, no. 5. — P. 199–202.
 14. *Shargatov V. A., Gorkunov S. V., Il'ichev A. T.* Dynamics of front-like water evaporation phase transition interfaces // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2019. — Vol. 67. — P. 223–236.
 15. *Chugainova A. P., Shargatov V. A.* Analytical description of the structure of special discontinuities described by a generalized KdV–Burgers equation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2019. — Vol. 66. — P. 129–146.
 16. *Chugainova A. P., Il'ichev A. T., Shargatov V. A.* Stability of shock wave structures in nonlinear elastic media // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 2019. — Vol. 24, no. 11. — P. 3456–3471.
 17. *Chugainova A. P., Shargatov V. A.* Study of nonstationary solutions of a generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation // *AIP Conf. Proc.* — 2019. — Vol. 2164, no. 050002. — P. 1–8.

18. *Shargatov V. A., Gorkunov S. V., Il'ichev A. T.* Stability of finite perturbations of the phase transition interface for one problem of water evaporation in a porous medium // *Applied Mathematics and Computation*. — 2020. — Vol. 378. — P. 125208–125224.
19. *Горкунов С.В., Ильичев А.Т., Шаргатов В.А.* Критическая эволюция конечных возмущений поверхности испарения воды в пористых средах // *Изв. РАН. МЖГ*. — 2020. — № 3. — С. 61–69.
20. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T.* Dynamics of Perturbations under Diffusion in a Porous Medium. // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2020. — Vol. 310. — P. 291–303.
21. *Chugainova A.P., Shargatov V.A.* Traveling waves and undercompressive shocks in solutions of the generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation with a time-dependent dissipation coefficient distribution. // *Eur. Phys. J. Plus*. — 2020. — Vol. 135. — P. 1–18.
22. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Fu Y.* Characterization and dynamical stability of fully nonlinear strain solitary waves in a fluid-filled hyperelastic membrane tube. // *Acta Mech.* — 2020. — Vol. 231. — P. 4095–4110.
23. *Куликовский А.Г., Ильичев А.Т., Чугайнова А.П., Шаргатов В.А.* Об устойчивости структуры нейтрально устойчивой ударной волны в газе и о спонтанном излучении возмущений. // *ЖЭТФ*. — 2020. — Т. 158, № 3. — С. 544–560.