

На правах рукописи



Тумашкина Диана

**ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ, ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ
И ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ
СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Нежелская Людмила Алексеевна

Официальные оппоненты:

Воробейчиков Сергей Эрикович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор

Кориков Анатолий Михайлович, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра автоматизированных систем управления, профессор

Рожкова Светлана Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», отделение математики и информатики, профессор

Защита состоится 22.09.2021 г. в 10 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.05.01», созданного на базе Института прикладной математики и компьютерных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 212Б).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/591055e9-890b-4514-a1b8-e4b3aaab3090>

Автореферат разослан «___» июля 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук, доцент



Нежелская
Людмила Алексеевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время при описании и анализе реальных технических, физических, телекоммуникационных и других систем возникает необходимость применять математический аппарат теории массового обслуживания (ТМО) – теории очередей. В связи с быстрым развитием информационных технологий важнейшей сферой приложения ТМО является проектирование цифровых сетей интегрального обслуживания (ЦСИО), которые представляют собой технологии связи для одновременной цифровой передачи голоса, изображений, видео и других сетевых данных и услуг по цифровым каналам сети связи. Информационные потоки сообщений, функционирующие в ЦСИО, совершенствуются и вместе с тем усложняются. Как показывает практика, довольно часто параметры, определяющие поток событий, неизвестны либо случайно изменяются во времени. Поэтому адекватными математическими моделями данных потоков являются *дважды стохастические потоки событий*: моменты наступления событий потока являются случайными, интенсивность потока представляет собой случайный процесс. Таким образом, имеется двойная случайность, что и приводит к определению дважды стохастического потока событий.

Данные потоки событий широко применяются в качестве математических моделей входящих потоков в различных системах массового обслуживания (СМО). Фундаментальной задачей ТМО является нахождение вероятностных характеристик, определяющих функциональные возможности, принцип и эффективность функционирования СМО. Случайные потоки событий, в свою очередь, являются основным элементом СМО.

Впервые модель дважды стохастического потока была опубликована Д. Коксом в 1955 г., и далее Дж. Кингменом (1964 г.), где интенсивность потока является непрерывным случайным процессом. В работах Г.П. Башарина, В.А. Кокотушкина и В. А. Наумова, М. Ньютса (1979 г.) и Д. Лукантони (1991 г.) были рассмотрены дважды стохастические потоки с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом с конечным числом состояний. В этих работах были введены *MC-потоки* (Markov chain) и *versatile Markov point process*, или *MAP-потоки* (Markovian arrival process).

В зависимости от способа перехода сопровождающего случайного процесса из состояния в состояние дважды стохастические потоки событий можно разделить на следующие три типа: 1) синхронные потоки, переход из состояния в состояние в которых зависит непосредственно от момента наступления события; 2) асинхронные потоки, переход из состояния в состояние в которых не зависит от момента наступления события; 3) полусинхронные потоки, у которых для одного состояния справедливо определение первого типа, а для другого состояния – второго типа.

Математические модели дважды стохастических потоков событий разделяются на два класса: 1) потоки, у которых длительность интервала между

соседними событиями определяется одной случайной величиной; 2) потоки, у которых длительность интервала между соседними событиями определяется двумя случайными величинами – *потоки второго порядка*.

Основными задачами, которые возникают при исследовании дважды стохастических потоков событий, являются следующие: 1) задача оценивания состояний потока (задача фильтрации состояний потока событий); 2) задача оценивания параметров потока.

Рассматриваемые потоки событий изучаются как при их полной наблюдаемости, так и при частичной, т.е. функционирующие в условиях мертвого времени, когда наступившее событие порождает период *мертвого времени* или период ненаблюдаемости, в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения, иначе говоря, теряются. Тогда существенный интерес представляет оценивание периода ненаблюдаемости для оценки среднего числа потерянных событий в потоке. Аналитическое решение данной задачи позволяет на практике повысить эффективность функционирования системы обслуживания.

В данном случае мертвое время является искажающим фактором в модели потока событий, т.к. в период его длительности теряются события потока. Соответственно, чем больше период мертвого времени, тем больше событий, содержащих информацию, теряется.

Исследованием дважды стохастических потоков событий, а также СМО с входящими дважды стохастическими потоками занимались и занимаются ученые различных научных школ: А. Ф. Терпугов, А. М. Горцев, К. И. Лившиц, А. А. Назаров, Л. А. Нежелская, А. Н. Моисеев – в Национальном исследовательском Томском государственном университете; В. М. Вишневский, М. П. Фархадов – в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук; Г. А. Медведев, А. Н. Дудин, В. И. Клименок, Г. В. Царенков – в Белорусском государственном университете; Ю. В. Малинковский – в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины; Г. П. Башарин, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов – в Российском университете Дружбы народов; А. В. Зорин, М. А. Федоткин – в Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете имени Н. И. Лобачевского; Г. Ш. Цициашвили, Н. И. Головкин, В. В. Катрахов – в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук; В. В. Рыков – в Российском государственном университете нефти и газа им. И. М. Губкина; М. Ньютс, Д. Лукантони, А. Баник, У. Гупта – в США и другие ученые.

Таким образом, начиная с 1955 г. и по настоящее время, дважды стохастические потоки событий являются актуальным объектом математических исследований.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является аналитическое и численное изучение полусинхронного потока событий второго порядка.

В диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

- построение математической модели полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной и частичной наблюдаемости;
- разработка алгоритмов оптимального оценивания состояний потока при его полной и частичной наблюдаемости;
- оценивание параметров плотности распределения вероятностей длительности интервала между соседними событиями потока;
- оценивание длительности мертвого времени;
- установление качества оценивания состояний, параметров распределения и длительности мертвого времени путем постановки и проведения статистических экспериментов на построенной имитационной модели потока.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации:

- впервые предложена новая математическая модель дважды стохастического потока событий: полусинхронный поток событий второго порядка;
- впервые решена задача оптимального оценивания состояний потока в условиях его полной и частичной наблюдаемости;
- впервые решена задача оценивания параметров распределения вероятностей методом моментов;
- впервые решена задача оценивания длительности мертвого времени методом моментов в случае функционирования потока в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности.

Теоретическая и практическая значимость диссертации. Результаты исследования расширяют представления о классе дважды стохастических потоков событий, а вместе с тем расширяют класс математических моделей для описания входящих потоков в СМО. Аналитические результаты диссертационного исследования вносят вклад в теорию дважды стохастических потоков событий и могут быть использованы при решении прикладных задач сферы массового обслуживания, в частности, на этапе проектирования телекоммуникационных, компьютерных и вычислительных сетей связи.

Результаты диссертационной работы используются в учебном процессе Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета при проведении занятий по дисциплине «Имитационное моделирование» для студентов 4-го курса (бакалавриат), а также в лекционных курсах «Оценка состояний дважды стохастических потоков событий», «Оценка параметров дважды стохастических потоков событий» для студентов 2-го года обучения (магистратура).

Методология исследования. В работе применяются методы теории вероятностей и случайных процессов, теории массового обслуживания и марковских процессов, математической статистики, теории дифференциальных уравнений, а также методы имитационного моделирования с использованием языка программирования C# в среде Microsoft Visual Studio.

На защиту выносятся:

- математическая модель полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка в случаях его полной и частичной наблюдаемости (при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности);
- алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его полной наблюдаемости, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;
- алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его частичной наблюдаемости, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;
- алгоритм оценивания параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями потока методом моментов;
- алгоритм оценивания длительности непродлевающегося мертвого времени методом моментов;
- численные результаты экспериментов по установлению качества оценивания путем проведения статистических испытаний на разработанной имитационной модели потока.

Достоверность результатов исследования подтверждается корректным применением математического аппарата при получении формул и выражений, непосредственно используемых при решении задач оценивания, согласованностью полученных аналитических результатов с имеющимися формулами для дважды стохастического полусинхронного потока событий, являющегося частным случаем исследуемого полусинхронного потока событий второго порядка. Кроме того, достоверность результатов исследования подтверждается многочисленными статистическими экспериментами, проведенными с использованием имитационной модели рассматриваемого потока событий, разработанной и отлаженной на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013. Результаты статистических экспериментов согласуются с физическими представлениями об объекте исследования.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: IV Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 20–21 мая 2016 г.); V Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 19–20 мая 2017 г.); VI Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 24–26 мая 2018 г.); XII конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» ICAM 2018 (Алтай, 4–8 июня 2018 г.); XVII Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 10–15 сентября 2018 г.); VII Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 23–25 мая 2019 г.); XVIII Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные

технологии и математическое моделирование» (Саратов, 26–30 июня 2019 г.); XXII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (ДССН-2019)» (Москва, 23–27 сентября 2019 г.); XIII конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» ICAM 2020 (Томск, 07–09 сентября 2020 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, в том числе 3 статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (все статьи опубликованы в российском научном журнале, входящем в Web of Science), 3 статьи в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях, входящих в Web of Science и / или Scopus, 4 публикации в сборниках научных трудов, 5 публикаций в сборниках материалов международных научных конференций.

Личный вклад автора. Математическая модель объекта исследования, постановка решенных в диссертации задач сформулированы научным руководителем доктором физико-математических наук, доцентом Л. А. Нежелской. Полученные аналитические результаты, приведенные в работе и выносимые на защиту, принадлежат лично автору. Разработка имитационной модели рассматриваемого объекта, а также постановка статистических экспериментов на имитационной модели потока с целью получения численных результатов проведены лично автором. В совместных публикациях научному руководителю Л. А. Нежелской принадлежат математическое описание объекта исследования и постановки задач.

Соответствие паспорту специальности. Диссертация Д. Тумашкиной выполнена в соответствии с паспортом специальности 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации) (физико-математические науки) и включает в себя оригинальные результаты по следующим областям исследования: «Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации» (п. 1 паспорта специальности), «Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации» (п. 2 паспорта специальности), «Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации» (п. 4 паспорта специальности).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, трех приложений. Общий объем диссертации составляет 154 страницы; иллюстративный материал представлен 23 рисунками (из них 2 – в приложении Б) и 37 таблицами; список использованной литературы содержит 127 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерации теорем, лемм, утверждений, замечаний, формул и рисунков в автореферате и диссертационной работе совпадают.

Во **введении** к диссертации приводится актуальность, научная новизна и степень разработанности темы исследования, в том числе дается обзор работ других авторов по рассматриваемой тематике, формулируются цель и задачи исследования, приводится методология исследования, излагается теоретическая и практическая значимость работы, а также представляются результаты апробации полученных материалов исследования в виде докладов на научных конференциях.

В **первой главе** диссертации дается математическое описание и свойства полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка.

В *разделе 1.1* приводится математическая модель потока при его полной наблюдаемости. Сопровождающий случайный процесс потока $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 : имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в первом состоянии определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где случайная величина $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$, случайная величина $\xi^{(2)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – взаимно независимы.

В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_1 в S_2 либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ приняла минимальное значение. В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1 либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi^{(1)}$ или $\xi^{(2)}$ приняла минимальное значение. Здесь $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 .

Отметим, что $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым скрытым марковским процессом, наблюдаются только моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ наступления событий потока.

Далее обозначение $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ используется применительно как к случайным величинам, так и к их значениям, различие между которыми следует из контекста. Например, наблюдаемые (измеряемые) моменты наступления событий есть значения случайных величин – моментов наступления событий.

На рисунке 1 приводится пример одной из реализаций процесса $\lambda(t)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ – моменты наступления событий потока.

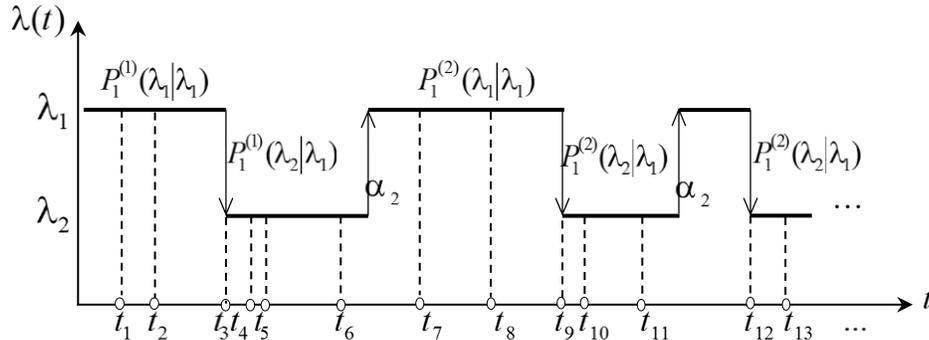


Рисунок 1 – Полусинхронный поток событий второго порядка

В разделе 1.2 дается математическое описание модели потока при его частичной наблюдаемости, т.е. в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени, которое формируется следующим образом. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению и не вызывают его продления. После окончания периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д.

На рисунке 2 приведен пример возникающей ситуации, где $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; периоды мертвого времени длительности T обозначены штриховкой; черными кружками обозначены события полусинхронного потока второго порядка, недоступные наблюдению.

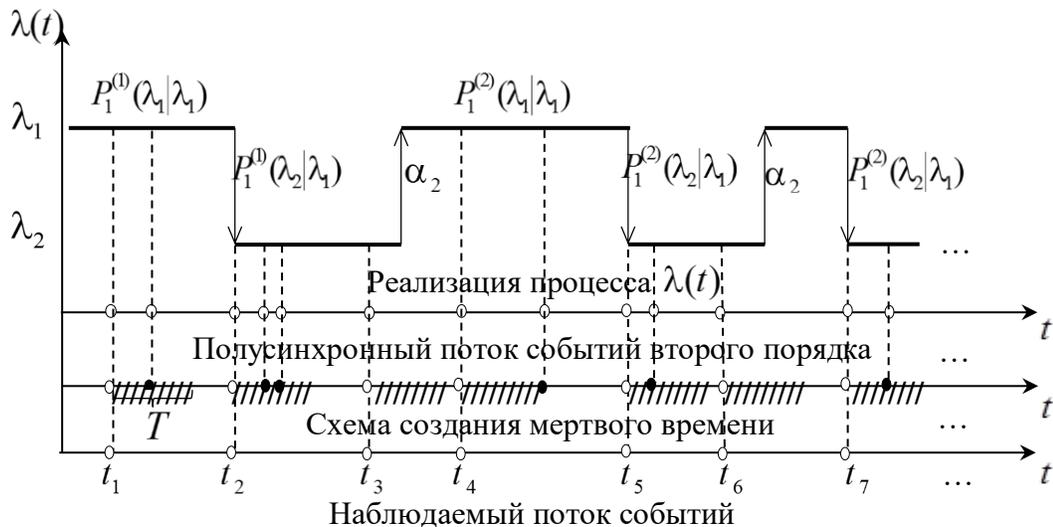


Рисунок 2 – Формирование наблюдаемого потока событий

В *разделе 1.3* доказываются основные свойства и характеристики потока в виде утверждений.

Утверждение 1.1. Процесс $\lambda(t)$ является марковским.

Утверждение 1.2. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную по моментам наступления событий t_1, t_2, \dots цепь Маркова.

В *разделе 1.4* приводятся матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$:

$$D_0 = \left\| \begin{array}{cc} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{array} \right\|,$$

$$D_1 = \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right\|.$$

Во **второй главе** разрабатывается алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка.

В *разделе 2.1* производится оценка состояний потока при его полной наблюдаемости. Требуется по наблюдениям t_1, t_2, \dots за потоком событий на временном интервале (t_0, t) оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений t . Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ необходимо получить выражения для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество событий потока, наступивших за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится по критерию максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, т.е. $w(\lambda_1 | t) \geq 0.5$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае – $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Для нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ получено рекуррентное соотношение вида

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}, \quad (1)$$

$$I(\lambda^{(m)}) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)}, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2. \end{cases}$$

Рассмотрим возможные случаи наступления событий на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$. Полагая в (1) $r_{m+1} = 1$ (на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ наступает событие потока), получим результат леммы 2.1.

Лемма 2.1. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1/t)$ в момент t_k , $k=1,2,\dots$, наступления события полусинхронного потока второго порядка определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + [\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2]w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k=1,2,\dots, \quad (2)$$

$$w(\lambda_2/t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1/t_k + 0).$$

Полагая в (1) $r_{m+1} = 0$ (на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ не наступает событие потока), получим результат леммы 2.2.

Лемма 2.2. На временных интервалах $(0, t_1)$ и (t_k, t_{k+1}) , $k=1,2,\dots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1/t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)w^2(\lambda_1 | t) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)w(\lambda_1 | t) + \alpha_2. \quad (3)$$

Лемма 2.2 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.1. На временных интервалах $(0, t_1)$ и (t_k, t_{k+1}) , $k=1,2,\dots$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1/t)$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (4)$$

где $w_1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1}$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k=0,1,\dots$; $w(\lambda_1/t_k + 0)$, $k=1,2,\dots$, задается формулой (2).

Лемма 2.3. Явный вид априорных финальных вероятностей π_1 и π_2 состояний процесса $\lambda(t)$ в полусинхронном потоке событий второго порядка определяется выражениями:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2}, \\ \pi_2 = \frac{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

На основании полученных формул (2), (4), (5) разработан алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка при его полной наблюдаемости.

В разделе 2.2 производится оценка состояний потока при его частичной наблюдаемости.

Момент вынесения решения t принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}) , $k=1,2,\dots$, между соседними событиями наблюдаемого потока, значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k=1,2,\dots$. Так как наблюдаемое в момент t_k событие

порождает период мертвого времени фиксированной длительности T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом наступления следующего события наблюдаемого потока t_{k+1} , т.е. интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: первый – полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Отметим, что на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток является недоступным наблюдению, а на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем. В настоящем разделе полагается, что значение T известно точно.

Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1/t)$ на полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$ описывается следующей теоремой.

Теорема 2.2. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1/t)$ на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется формулой

$$w(\lambda_1/t) = \pi_1 + [w(\lambda_1/t_k + 0) - \pi_1] e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2)(t - t_k)}, \quad (6)$$

где $t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1/t_k + 0)$ задается формулой (2), π_1 – формулой (5).

Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1/t)$ на интервалах $(t_k + T, t_{k+1})$ описывается формулой (4); при этом начальное условие для вероятности $w(\lambda_1/t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$.

На основании полученных формул разработан алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка при его частичной наблюдаемости.

В **третьей главе** выводятся явные формулы для оценивания параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости. В случае частичной наблюдаемости потока производится оценка длительности непродлевающегося мертвого времени.

Доказывается коррелированность потока путем нахождения совместной плотности вероятности длительностей смежных интервалов и выписываются условия рекуррентности потока для случаев полной и частичной наблюдаемости. Оценка параметров плотности вероятности и длительности мертвого времени как для коррелированного, так и для рекуррентного потоков производится методом моментов.

В *разделе 3.1* находится явный вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке для общего $(\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2)$ и особого $(\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2)$ случаев задания параметров потока.

Обозначим $p(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots$, – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в рассматриваемом потоке. Т.к. рассматривается стационарный режим функционирования потока, то $p(\tau_k) = p(\tau)$ для всех $k = 1, 2, \dots$,

$\tau \geq 0$. Тогда без ограничения общности момент наступления события потока t_k можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

В силу того, что процесс $\lambda(t)$ является марковским, и моменты времени t_k , $k=1, 2, \dots$, наступления событий образуют вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, плотность вероятности $p(\tau)$ определяется в виде

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (7)$$

где $\pi_i(0)$ – условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в i -м состоянии при условии, что в момент времени $\tau=0$ наступило событие потока, $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$; $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ – плотность вероятности того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока, и в момент времени τ значение процесса $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau=0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$.

Теорема 3.1. Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка имеет вид

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\ \gamma = \frac{\pi_1(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad (\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0, \quad (8)$$

где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$, $\pi_1(0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \alpha_2}{\lambda_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] + (\lambda_1 + \alpha_1) \alpha_2}$.

Теорема 3.2. Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид

$$p(\tau) = [(\lambda_1 + \alpha_1) - \pi_2(0) \alpha_2 (1 - (\lambda_1 + \alpha_1) \tau)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1) \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (9)$$

где $\pi_2(0) = \frac{(\lambda_1 + \alpha_1) [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2 - \lambda_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}$.

Методом моментов производится оценка параметров плотности распределения вероятностей в *общем случае* задания параметров потока.

Рассмотрим статистики $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Пусть имеется выборка

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p(\tau / z_1, z_2, \gamma)$. Пусть

$M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau / z_1, z_2, \gamma) d\tau = f_l(z_1, z_2, \gamma)$ – начальный теоретический момент l -го

порядка. Тогда, в соответствии с методом моментов, имеем $M(\tau^l) = C_l$, откуда получим систему из трех уравнений моментов

$$z_1 z_2 C_1 - z_2 \gamma - z_1 (1 - \gamma) = 0, \quad (z_1 + z_2) C_1 - \frac{1}{2} z_1 z_2 C_2 = 1, \quad (z_1 + z_2) C_2 - \frac{1}{3} z_1 z_2 C_3 = 2C_1. \quad (10)$$

Доказывается, что система из трех уравнений моментов является совместной.

Из системы (10) определяются оценки неизвестных параметров z_1, z_2, γ :

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \pm \sqrt{\left(\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \right)^2 + 4 \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}} \right), \quad (11)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{z}_1 (1 - C_1 \hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2}, \quad \hat{z}_2 \neq \hat{z}_1. \quad (12)$$

При этом должны выполняться неравенства

$$\frac{3C_1 C_2 - C_3}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} > 0, \quad \frac{2C_1^2 - C_2}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} > 0, \quad \left(\frac{3C_1 C_2 - C_3}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \right)^2 + \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} > 0.$$

В особом случае задания параметров потока оценка параметров плотности $p(\tau)$ производится аналогичным образом. Плотность (9) представим в следующем виде

$$p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)] e^{-z\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (13)$$

где $z = \lambda_1 + \alpha_1$, $a = \pi_2(0)\alpha_2$.

Пусть имеется выборка $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p(\tau/z, a)$. Пусть

$$M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau/z, a) d\tau = \varphi_l(z, a) - \text{начальный теоретический момент } l\text{-го порядка.}$$

Тогда, в соответствии с методом моментов, имеем $M(\tau^l) = C_l$, откуда получим систему из двух уравнений моментов

$$\frac{1}{z^2} [z + a] = C_1, \quad \frac{2}{z^3} [z + 2a] = C_2. \quad (14)$$

Полученная система (14) сводится к квадратному уравнению $C_2 z^2 - 4C_1 z + 2 = 0$, решая которое, находим

$$\hat{z}^{(1)} = \frac{1}{C_2} (2C_1 - \sqrt{4C_1^2 - 2C_2}), \quad \hat{z}^{(2)} = \frac{1}{C_2} (2C_1 + \sqrt{4C_1^2 - 2C_2}), \quad (15)$$

$$\hat{a}^{(1)} = C_1 (\hat{z}^{(1)})^2 - \hat{z}^{(1)}, \quad \hat{a}^{(2)} = C_1 (\hat{z}^{(2)})^2 - \hat{z}^{(2)}. \quad (16)$$

При этом должны выполняться условия

$$\hat{z}^{(1)} \hat{z}^{(2)} = \frac{2}{C_2} > 0, \quad \hat{z}^{(1)} + \hat{z}^{(2)} = \frac{4C_1}{C_2} > 0, \quad 4C_1^2 - 2C_2 \geq 0.$$

Выбор из пар $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$ и $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$ в качестве решения задачи осуществляется по правилу: если $\hat{a}^{(1)} > 0$, $\hat{a}^{(2)} > 0$, $\frac{C_2}{2} \leq C_1^2 < \frac{2C_2}{3}$, то обе пары равноправны и в

качестве оценки выбирается любая; если же справедливо $\hat{a}^{(1)} > 0$, $C_1^2 \geq \frac{2}{3}C_2$, то в качестве решения задачи оценивания выбирается единственная пара $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$.

В разделе 3.2 находится явный вид совместной плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями в потоке для общего и особого случаев задания параметров, выписываются условия рекуррентности потока и производится оценка параметров плотности для рекуррентного потока.

Поскольку рассматривается стационарный режим функционирования потока, то расположение двух смежных интервалов (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) между моментами наступления событий потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ может быть произвольным. Поэтому рассмотрим два соседних временных интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) , где $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$ соответственно; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Соответствующая при этом совместная плотность вероятности есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Последовательность моментов наступления событий t_1, t_2, \dots образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, поэтому для $p(\tau_1, \tau_2)$ справедливо

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2), \quad (17)$$

где смысл $\pi_i(0)$ и $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ определен в описании формулы (7).

Теорема 3.4. Полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ имеет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \gamma(1-\gamma) \left(1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1} \right) \times \quad (18)$$

$$\times \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha_2} \left[z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1} \right] \left[z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2} \right],$$

где $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, γ , z_1 , z_2 , $p(\tau_k)$ определены в (8) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Теорема 3.5. Полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) - \frac{\lambda_2 \pi_1(0) \pi_2(0) (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1))}{\lambda_1 + \alpha_1} \times \quad (19)$$

$$\times (\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) (1 - (\lambda_1 + \alpha_1) \tau_1) (1 - (\lambda_1 + \alpha_1) \tau_2) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_1 + \tau_2)},$$

где $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $\pi_1(0)$ определена в (8), $p(\tau_k)$ определены в (9) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Анализируя выражение (18) для *общего случая* задания параметров, замечаем, что совместная плотность факторизуется, т.е. $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$, если:

1. $[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1) = 1$, при этом из (8) получим $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, $\tau \geq 0$, где $\gamma = -\alpha_2 / [(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$, $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$;

2. $\lambda_2 = 0$, при этом $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, $\tau \geq 0$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$, $\gamma = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 / \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 / \lambda_1) - \alpha_2] / (\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2)$;

3. $\gamma = 0$, при этом $p(\tau) = z e^{-z \tau}$, $\tau \geq 0$, $z = \lambda_2 + \alpha_2 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$;

4. $1 - \gamma = 0$; анализируя выражение для γ в (8), находим $\pi_2(0) = 0$, откуда следует $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$; при этом $p(\tau) = (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1) \tau}$, $\tau \geq 0$.

Доказывается, что при выполнении одного из условий рекуррентности также факторизуется и n -мерная плотность $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ для любого $n > 2$.

Анализируя выражение (19) для *особого случая* задания параметров, заметим, что совместная плотность факторизуется, т.е. $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2)$, если:

1. $\lambda_2 = 0$, при этом $p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)] e^{-z\tau}$, $\tau \geq 0$, где $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $z = \alpha_2$;

2. $\pi_1(0) = 0$; учитывая выражение для $\pi_1(0)$, имеем $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0$, при этом $p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)] e^{-z\tau}$, $\tau \geq 0$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$, $a = \alpha_2$;

3. $\pi_2(0) = 0$; учитывая выражение для $\pi_2(0)$, имеем $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$, при этом $p(\tau) = z e^{-z\tau}$, $\tau \geq 0$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$.

Оценка параметров плотности распределения вероятностей для рекуррентного потока производится методом моментов.

Для *общего случая* задания параметров потока оценки параметров плотности имеют вид (11), (12), где z_1 , z_2 , γ принимают значения, соответствующие выписанным условиям рекуррентности 1 и 2.

Замечание 3.3. Оценки параметров z_1 , z_2 , γ для общего случая являются состоятельными, т.к. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, $k = 1, \dots, n$, – взаимно независимые случайные величины, начальные теоретические моменты существуют и система уравнений моментов имеет единственное решение.

В *особом случае* задания параметров потока оценки параметров плотности имеют вид (15), (16), где параметры z , a принимают значения, соответствующие выписанным условиям рекуррентности 1 и 2.

В *разделе 3.3* производится оценивание длительности мертвого времени в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка, а также приводятся явные формулы для нахождения среднего числа потерянных событий потока в единицу времени.

Обозначим $p_T(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots$, – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. В силу того, что

рассматривается стационарный режим функционирования потока, $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ для всех $k=1, 2, \dots$, $\tau \geq 0$.

Поскольку процесс $\lambda(t)$ обладает марковским свойством, то плотность вероятности $p_T(\tau)$ определяется в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau-T), \tau \geq T, \end{cases} \quad (20)$$

где $q_{ij}(T)$ – переходная вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в момент времени $\tau=0$ в состояние S_j в момент $\tau=T$, $i, j=1, 2$; $\pi_i(0/T)$ – условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в состоянии S_i , $i=1, 2$, при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности T ; смысл $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ определен в описании формулы (7).

Теорема 3.7. Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T, \end{cases} \quad (21)$$

$$\gamma(T) = \pi_1 [(z_1 - z_2 - a)/(z_1 - z_2)] \left[1 + a(z_1 - \lambda_2)/(z_1 z_2 e^{(a_2+a)T} - \lambda_2(z_1 - a)) \right],$$

где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a)$, $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$.

Теорема 3.8. Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T) (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, \tau \geq T, \\ \pi_2(T) = \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / ((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(a_2+a)T} - \lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1 - a)) \right], \end{cases} \quad (22)$$

где $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$; коэффициент a определен в (21).

Оценка длительности мертвого времени производится методом моментов.

Рассмотрим статистику $C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Пусть имеется выборка $\tau_1, \tau_2,$

..., τ_n из распределения $p_T(\tau)$; $M(\tau^l) = \int_T^\infty \tau^l p_T(\tau) d\tau$ – начальный теоретический

момент первого порядка. Тогда, в соответствии с методом моментов, имеем

$M_T(\boldsymbol{\tau}) = C$, откуда для случая $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ получим уравнение относительно неизвестного параметра T :

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C. \quad (23)$$

Утверждение 3.1. Уравнение моментов (23) имеет единственное решение.

В свою очередь, для случая $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ уравнение моментов, с учетом (22), примет следующий вид

$$T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T)/(\lambda_1 + \alpha_1)^2 = C. \quad (24)$$

Утверждение 3.2. Уравнение моментов (24) имеет единственное решение.

Уравнения (23), (24) решаются относительно T только численно.

На основе полученных выражений $p(\tau)$ и $p_T(\tau)$ найдены явные формулы для определения среднего числа потерянных событий в исходном потоке в единицу времени для *общего случая* задания параметров

$$\begin{aligned} \Delta = \Lambda - \Lambda_T = & \left\{ \pi_2(z_1 - \lambda_2)(\pi_1(z_1 - \lambda_2) - \alpha_2) \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] + T(z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) \left(z_1 z_2 \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a) \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ T(z_1 z_2 \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] - (\alpha_2 + a) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

и для *особого случая* задания параметров

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{-\alpha_2^2 \pi_2^2 \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] + T(z \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) \left(z^2 \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a) \right)}{T \left(z^2 \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a) \right) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) \left[1 - e^{(\alpha_2 + a)T} \right] - (\alpha_2 + a)}. \quad (26)$$

В *разделе 3.4* находится явный вид совместной плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями в потоке при непродлеваемом мертвом времени, выписываются условия рекуррентности потока и производится оценка длительности мертвого времени в рекуррентном потоке. Кроме того, выводятся явные формулы для нахождения вероятностных характеристик потока.

В силу стационарного режима функционирования потока расположение двух смежных интервалов (t_k, t_{k+1}) и (t_{k+1}, t_{k+2}) , $k = 1, 2, \dots$, на временной оси произвольно. Тогда без ограничения общности $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$ можно рассматривать как моменты наступления соседних событий в наблюдаемом потоке. При этом совместную плотность вероятности длительностей любых смежных интервалов обозначим $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления соседних событий в наблюдаемом потоке, где T – значение длительности мертвого времени, $t^{(l)}$ – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом наступления очередного события наблюдаемого потока, $t^{(l)} > 0$, $l = 1, 2$.

В силу того, что последовательность моментов наступления событий t_1, t_2, \dots образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ определится в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ 0, & 0 \leq \tau_2 < T, \tau_1 \geq 0, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{cases} \quad (27)$$

где смысл $q_{ij}(T)$, $\pi_i(0/T)$ определен в описании формулы (20), а смысл $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ – в описании формулы (7).

Теорема 3.9. Полусинхронный поток событий второго порядка при наличии мертвого времени является коррелированным и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \gamma(T)(1 - \gamma(T))(1 - a/z_1)(\lambda_2/z_2) \times \\ &\times \left[z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)} \right] \left[z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)} \right] e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{aligned} \quad (28)$$

где вероятности $p_T(\tau_k)$ для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$, $\gamma(T)$, a , z_1 , z_2 определены в (21).

Теорема 3.10. Полусинхронный поток событий второго порядка при наличии мертвого времени является коррелированным и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) - \lambda_2(\alpha_2/z)^2(z - a)\pi_2^2(T) \times \\ &\times [1 - z(\tau_1 - T)][1 - z(\tau_2 - T)] e^{-z(\tau_1 + \tau_2 - 2T)} e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{aligned} \quad (29)$$

где $z = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$; $p_T(\tau_k)$ для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$, $\pi_2(T)$ определены в (22); коэффициент a определен в (21).

Для *общего случая* $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ задания параметров потока из (28) следует, что совместная плотность факторизуется, т.е. $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, если:

1. $a/z_1 = 1$, откуда следует $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0$; тогда $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$,

$\gamma(T) = -\frac{\pi_1 z_2}{z_1 - z_2} \left(1 + \frac{z_1 - \lambda_2}{z_2 e^{(z_1 + \alpha_2)T}} \right)$, $\pi_1 = \alpha_2 / (z_1 + \alpha_2)$, a определена в (21);

2. $\lambda_2 = 0$, тогда $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$, $\gamma(T) = \frac{\pi_1(z_1 - \alpha_2 - a)}{z_1 - \alpha_2} \left(1 + \frac{a}{\alpha_2 e^{(\alpha_2 + a)T}} \right)$, $\pi_1 = \alpha_2 / (a + \alpha_2)$;

3. $\gamma(T) = 0$, тогда плотность $p_T(\tau) = z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$, определяет простейший поток с параметром $\lambda_2 + \alpha_2$;

4. $1-\gamma(T)=0$, тогда плотность $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}$, $\tau \geq T$, $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, определяет простейший поток с параметром $\lambda_1 + \alpha_1$.

Для *особого случая* $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ задания параметров потока из (29) аналогичным образом находим, что совместная плотность факторизуется, т.е. $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, если:

1. $z - a = 0$, откуда следует $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0$; тогда $p_T(\tau) = [z - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))] e^{-z(\tau-T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$,

$\pi_2(T) = \pi_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) e^{(\alpha_2 + a)T}} \right)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$, a определена в (21);

2. $\lambda_2 = 0$, тогда $p_T(\tau) = z [1 - \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))] e^{-z(\tau-T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1 = \alpha_2$, $\pi_2(T) = \pi_2 \left(1 + \frac{a}{z e^{(\alpha_2 + a)T}} \right)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$, a определена в (21);

3. $\pi_2(T) = 0$, тогда плотность $p_T(\tau) = z e^{-z(\tau-T)}$, $\tau \geq T$, $z = \lambda_1 + \alpha_1$, определяет простейший поток с параметром $\lambda_1 + \alpha_1$.

Оценка длительности мертвого времени для рекуррентного потока производится методом моментов.

В *общем случае* задания параметров потока уравнение моментов относительно неизвестного параметра T примет вид (23), где z_1, z_2 принимают значения, соответствующие выписанным условиям рекуррентности 1 и 2.

Утверждение 3.3. Уравнение моментов (23) для условий рекуррентности 1 и 2 имеет единственное решение.

Уравнение моментов для *особого случая* задания параметров потока запишется в виде (24), где $\pi_2(T) = \pi_2 \left(1 + \alpha_2 / (z e^{(\alpha_2 + a)T}) \right)$ для условия рекуррентности 1; $\pi_2(T) = \pi_2 \left(1 + a / (\alpha_2 e^{(\alpha_2 + a)T}) \right)$ для условия 2.

Утверждение 3.4. Уравнение моментов (24) для условий рекуррентности 1 и 2 имеет единственное решение.

Уравнения моментов (23) и (24) относительно неизвестного параметра T для рекуррентного потока решаются только с привлечением численных методов.

Замечание 3.5. Оценка параметра T (длительность мертвого времени) как для общего случая задания параметров потока $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$, так и для особого случая $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ является состоятельной, т.к. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ – взаимно независимые случайные величины, начальный теоретический момент существует, и уравнение моментов имеет единственное решение.

На основе полученных выражений раздела 3 найдены явные формулы для вероятностных характеристик потока.

Для *общего случая* задания параметров потока при $T=0$ ковариация и коэффициент корреляции имеют вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2,$$

$$r_{\tau_1, \tau_2} = \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 \left\{ -\gamma^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma(1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2)) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}.$$

В *особом случае* задания параметров потока ковариация и коэффициент корреляции при $T=0$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(0) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(0) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

При $T \neq 0$ ковариация и коэффициент корреляции для *общего случая* задания параметров имеют вид

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2+a)T}, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2+a)T} \times \\ &\quad \times \left\{ -\gamma(T)^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma(T)(1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2)) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

для *особого случая* задания параметров потока

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2+a)T} / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2+a)T} / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(T) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(T) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В **четвертой главе** приводятся результаты имитационного моделирования полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной либо частичной наблюдаемости.

Проверка работоспособности и адекватности разработанной имитационной модели проведена в *разделе 4.1*.

В *разделе 4.2* приводятся статистические эксперименты, поставленные для установления качества оценивания состояний потока. Вычисляются выборочное

среднее полной вероятности ошибочного решения \hat{P}_{ou} и выборочная дисперсия \hat{D} .

Приведем результаты одного из статистических экспериментов, где рассматривается зависимость \hat{P}_{ou} , \hat{D} от значения длительности мертвого времени $T=0, 1, \dots, 6$ ед. времени. Результаты эксперимента приведены в таблицах 1–3 при времени моделирования $T_m=100$ ед. времени, количестве реализаций потока $N=100$, параметрах $\lambda_2=1$, $\alpha_1=4$, $\alpha_2=1$ и вероятностях $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1)=P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1)=0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1)=P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1)=0,6$. При этом в каждой из последующих таблиц настоящего эксперимента значение разности $\lambda_1-\lambda_2$ увеличивается на 50% по сравнению с предыдущей.

Таблица 1 – Результаты статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 3$ ($\lambda_1 = 4$)

T	0	1	2	3	4	5	6
\hat{P}_{ou}	0,1581	0,2373	0,2599	0,2761	0,2880	0,2946	0,2989
\hat{D}	0,0018	0,0026	0,0030	0,0035	0,0039	0,0041	0,0044

Таблица 2 – Результаты статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 4,5$ ($\lambda_1 = 5,5$)

T	0	1	2	3	4	5	6
\hat{P}_{ou}	0,1301	0,1915	0,2223	0,2463	0,2585	0,2676	0,2697
\hat{D}	0,0015	0,0022	0,0027	0,0033	0,0037	0,0041	0,0042

Таблица 3 – Результаты статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 6,75$ ($\lambda_1 = 7,75$)

T	0	1	2	3	4	5	6
\hat{P}_{ou}	0,0929	0,1554	0,1901	0,2157	0,2284	0,2391	0,2412
\hat{D}	0,0010	0,0019	0,0022	0,0029	0,0030	0,0035	0,0038

Анализ численных результатов показывает уменьшение значения оценки \hat{P}_{ou} с увеличением значения разности $\lambda_1 - \lambda_2$ при фиксированном значении T , что является естественным в силу лучшей различимости состояний потока. Стоит отметить, что чем больше значение длительности мертвого времени T , тем меньше темп улучшения качества оценивания при увеличении значения $\lambda_1 - \lambda_2$. При этом при фиксированных параметрах потока с ростом T качество оценивания ухудшается в силу того, что происходит увеличение потерь информации о потоке.

Результаты численных экспериментов демонстрируют достаточно приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения с малым значением выборочной дисперсии оценки.

В разделе 4.3 приводятся статистические эксперименты с целью установления качества оценок параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями потока. Вычисляются выборочные

средние $\hat{M}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{(k)}$, оценки смещения $\delta(\theta) = |\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$ и выборочные вариации $\hat{V}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N (\hat{\theta}^{(k)} - \theta)^2$, где $\theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}$, $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$ (общий случай) либо $\theta \in \{z, a\}$, $\hat{\theta} \in \{\hat{z}, \hat{a}\}$ (особый случай).

Приведем результаты одного из статистических экспериментов для *особого случая* задания параметров потока, где рассматривается зависимость $\hat{M}(\hat{\theta})$, $\delta(\theta)$ от

значений времени моделирования T_m при фиксированных $N=100$, вероятностях $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,65$, $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,35$, параметрах потока $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1,5$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 3$. Результаты эксперимента отражены на рисунке 3, где эволюция $\hat{M}(\hat{\theta})$ показана пунктирной линией, а поведение истинного значения параметра – сплошной.

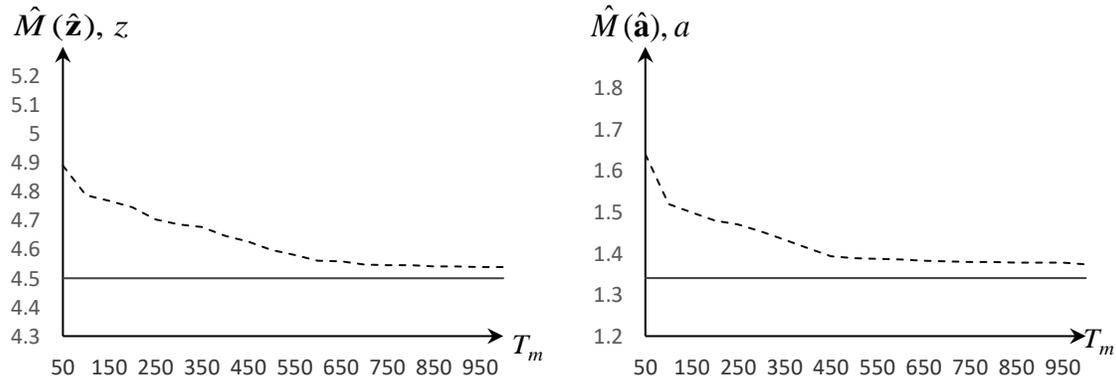


Рисунок 3 – Зависимость $\hat{M}(\hat{z}), z$ (слева) и $\hat{M}(\hat{a}), a$ (справа) от значений T_m

Анализ численных результатов показывает, что оценка смещения $\delta(\theta)$, $\theta \in \{z, a\}$, уменьшается с увеличением T_m , что является вполне естественным. Другими словами, качество оценивания параметров плотности тем лучше (в смысле уменьшения смещения оценок), чем больше время моделирования T_m .

Приведем результаты статистического эксперимента для *общего случая* задания параметров потока при выполнении условия рекуррентности 1. Нетрудно показать, что в данном случае имеем $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 1$, следовательно, $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0$. При $T_m = 700$ ед. времени, $N = 100$, параметрах потока $\lambda_2 = 0,8$, $\alpha_2 = 1$ устанавливается зависимость $\hat{M}(\hat{\theta})$, $\hat{V}(\hat{\theta})$ от значений $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1 = 4, 6, 8, 10, 12$, при этом положим $\lambda_1 = \alpha_1$. Результаты эксперимента приведены в таблицах 4–6.

Таблица 4 – Результаты статистического эксперимента по оценке z_1

z_1	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	4,3279	6,1566	8,0599	10,0345	11,9817
$\hat{V}(\hat{z}_1)$	0,1156	0,0254	0,0041	0,0020	0,0007

Таблица 5 – Результаты статистического эксперимента по оценке z_2

z_1	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{z}_2)$	2,1543	2,0167	1,9552	1,8959	1,8463
$\hat{V}(\hat{z}_2)$	0,1347	0,0593	0,0382	0,0066	0,0021
z_2	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8

Таблица 6 – Результаты статистического эксперимента по оценке γ

z_1	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	-0,7388	-0,3967	-0,2133	-0,1570	-0,1142
$\hat{V}(\hat{\gamma})$	0,0999	0,0278	0,0035	0,0022	0,0006
γ	-0,4545	-0,2380	-0,1612	-0,1219	-0,0980

Анализ численных результатов, приведенных в таблицах 4–6, показывает, что с увеличением параметра z_1 , значение $\hat{V}(\hat{\theta})$ уменьшается, так как условия различимости состояний процесса $\lambda(t)$ улучшаются.

В разделе 4.4 приводится ряд экспериментов по оцениванию длительности мертвого времени в рассматриваемом потоке путем численного решения методом Ньютона уравнений моментов, полученных в разделах 3.3 и 3.4. Вычисляются

выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N \hat{T}_s$, выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N (\hat{T}_s - T)^2$ и оценка смещения $\delta(T) = |\hat{M}(\hat{T}) - T|$.

Приведем результаты статистического эксперимента для *особого случая* задания параметров потока при $T = 1; 1,5; 2$; изучается зависимость $\hat{M}(\hat{T})$, $\delta(T)$ от значения времени моделирования $T_m = 50, 100, \dots, 1000$ ед. времени с шагом 50 при фиксированных значениях $N = 300$, $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,65$, $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,35$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1,5$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 3$. Результаты эксперимента продемонстрированы в таблице 7.

Таблица 7 – Результаты статистического эксперимента

	T_m	50	100	150	...	700	750	...	950	1000
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,7310	0,8001	0,8298	...	0,9943	0,9939	...	0,9942	0,9943
	$\delta(T)$	0,2690	0,1999	0,1702	...	0,0057	0,0061	...	0,0058	0,0057
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1875	1,2224	1,2208	...	1,4625	1,4626	...	1,4621	1,4624
	$\delta(T)$	0,3125	0,2776	0,2792	...	0,0375	0,0374	...	0,0379	0,0376
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,6618	1,6891	1,7455	...	1,9312	1,9312	...	1,9315	1,9313
	$\delta(T)$	0,3382	0,3109	0,2545	...	0,0688	0,0688	...	0,0685	0,0687

Анализируя полученные численные результаты, можно заключить: найденная оценка длительности мертвого времени T является смещенной, впрочем величина оценки смещения относительно исходного значения остается достаточно приемлемой; оценка ведет себя стабильнее с увеличением времени моделирования T_m , что естественно в силу увеличения доступной информации при равных T ; также отметим общую тенденцию уменьшения смещения с ростом T_m ; оценка улучшается (в смысле уменьшения смещения) с уменьшением периода мертвого времени T , что является естественным в силу меньшей потери событий (информации). Отметим установление стационарного режима для $T_m \geq 700$.

В заключении подробно описываются основные результаты диссертационной работы и хода исследования, а также отмечаются возможные перспективы развития.

В приложении А дается описание концепта и процесса имитационного моделирования, приводится использование метода обратных функций для имитации полусинхронного потока событий второго порядка.

В приложении Б приводится общая блок-схема имитационного моделирования потока и ее описание.

В приложении В представлен акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка при непродлеваемом мертвом времени /

Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 46. – С. 73–82. – DOI: 10.17223/19988605/46/9. – 0,84 / 0,42 а.л.

Web of Science: Nezhelskaya L. A. Optimal state estimation of semi-synchronous events flow of the second order under conditions of unextendable dead time / L. A. Nezhelskaya, **D. A. Tumashkina** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. – 2019. – № 46. – P. 73–82.

2. Нежелская Л. А. Оценивание методом моментов длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 52. – С. 73–82. – DOI: 10.17223/19988605/52/9. – 0,70 / 0,35 а.л.

Web of Science: Nezhelskaya L. A. Estimation of the unextendable dead time duration in semi-synchronous events flow of the second order by the method of moments / L. A. Nezhelskaya, **D. A. Tumashkina** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. – 2020. – № 52. – P. 73–82.

3. Нежелская Л. А. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий второго порядка методом моментов / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 53. – С. 82–92. – DOI: 10.17223/19988605/53/8. – 0,80 / 0,40 а.л.

Web of Science: Nezhelskaya L. A. Estimation of the unextendable dead time duration in recurrent semisynchronous events flow of the second order by the method of moments / L. A. Nezhelskaya, **D. A. Tumashkina** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. – 2020. – № 53. – P. 82–92.

Публикации в сборниках материалов конференций, представленных в зарубежных научных изданиях, входящих в Web of Science и / или в Scopus:

4. Nezhelskaya L. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability / L. Nezhelskaya, **D. Tumashkina** // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912 : 17th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2018 and 12th Workshop on Retrial Queues and Related Topics, WRQ 2018. Tomsk, Russian Federation, September 10–15, 2018. – P. 93–105. – DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_8. – 0,72 / 0,36 а.л. (*Scopus*).

5. Nezhelskaya L. Estimation of the Probability Density Parameters of the Interval Duration between Events in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order by the Method of Moments / L. Nezhelskaya, **D. Tumashkina** // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109 : 8th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2019. Saratov, Russian Federation, June 26–30, 2019. – P. 60–72. – 0,67 / 0,34 а.л. (*Scopus*).

6. Nezhelskaya L. Method of Moments for the Estimation of the Probability Density Parameters in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order / L. Nezhelskaya, **D. Tumashkina** // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1141 : 22nd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN). Moscow, Russia, September 23–27, 2019. – P. 338–351. – DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4_27. – 0,82 / 0,41 а.л. (*Web of Science*).

Публикации в прочих научных изданиях:

7. Нежелская Л. А. Имитационная модель полусинхронного потока второго порядка / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2016. – Т. 299 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Международной молодежной научной конференции. – С. 109–114. – 0,23 / 0,11 а.л.

8. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2017. – Т. 301 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы V Международной молодежной научной конференции. – С. 97–105. – 0,39 / 0,19 а.л.

9. Нежелская Л. А. Апостериорные вероятности состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы Двенадцатой конференции с международным участием. Алтайский край, пос. Катунь, 04–08 июня 2018 года – Томск, 2018. – С. 125–126. – 0,11 / 0,06 а.л.

10. Нежелская Л. А. Статистические эксперименты на имитационной модели полусинхронного потока второго порядка в условиях его неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2018. – Т. 302 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VI Международной молодежной научной конференции. – С. 149–156. – 0,48 / 0,24 а.л.

11. Нежелская Л. А. Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной

конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 10–15 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 119–124. – 0,27 / 0,14 а.л.

12. Нежелская Л. А. Оценка параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями в рекуррентном полусинхронном потоке второго порядка методом моментов / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – Ч. 2. – С. 364–369. – 0,23 / 0,11 а.л.

13. Nezhelskaya L. Investigation of the Estimates of the Probability Density Parameters in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order / L. Nezhelskaya, **D. Tumashkina** // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019) (DCCN-2019) : материалы XXII Международной научной конференции. Москва, 23–27 сентября 2019 г. – Москва, 2019 г. – С. 124–131. – 0,43 / 0,21 а.л.

14. Нежелская Л. А. Оценивание методом моментов параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями рекуррентного полусинхронного потока второго порядка в особом случае / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2019. – Т. 303 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Международной молодежной научной конференции. – С. 14–23. – 0,56 / 0,28 а.л.

15. Нежелская Л. А. Плотность вероятности значений длительности интервала между событиями полусинхронного потока второго порядка в условиях неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, **Д. А. Тумашкина** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур (ISAM-2020) : материалы Тринадцатой Международной конференции. Томск, 07–09 сентября 2020 г. – Томск, 2020. – С. 95–96. – 0,11 / 0,05 а.л.

