

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

На правах рукописи

Коржнев Станислав Владимирович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ИНВЕСТОРА И ДОВЕРИТЕЛЬНОГО
УПРАВЛЯЮЩЕГО НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата экономических наук

Научный руководитель

Соловьев Владимир Игоревич,
доктор экономических наук, доцент

Москва – 2021

Диссертация представлена к публичному рассмотрению и защите в порядке, установленном ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» в соответствии с предоставленным правом самостоятельно присуждать учёные степени кандидата наук, учёные степени доктора наук согласно положениям пункта 3.1 статьи 4 Федерального закона от 23 августа 1996 г. № 127-ФЗ «О науке и государственной научно-технической политике».

Публичное рассмотрение и защита диссертации состоится 13 октября 2021 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Финансового университета Д 505.001.111 по адресу: Москва, Ленинградский проспект, д. 51, корп. 1, аудитория 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в диссертационном зале Библиотечно-информационного комплекса ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» по адресу: 125993, Москва, ГСП-3, Ленинградский проспект, д. 49, комн. 200 и на официальном сайте Финансового университета в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: www.fa.ru.

Персональный состав диссертационного совета:

председатель – Соловьев В.И., д.э.н., доцент;
заместитель председателя – Одинцов Б.Е., д.э.н., профессор;
учёный секретарь – Золотова Т.В., д.физ.-мат.н., доцент;

члены диссертационного совета:

Абдикеев Н.М., д.техн.н., профессор;
Афанасьев А.А., д.э.н., доцент;
Васильева Е.В., д.э.н., доцент;
Владова А.Ю., д. техн.н., доцент;
Гатауллин Т.М., д.э.н., профессор;
Коровин Д.И., д.э.н., доцент;
Росс Г.В., д.э.н., профессор;
Судаков В.А., д.техн.н., доцент;
Трегуб И.В., д.э.н., профессор.

Автореферат диссертации разослан 9 июля 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Финансового университета Д 505.001.111

Золотова Татьяна Валерьяновна

I Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Финансовые рынки существуют уже много веков, однако в научных работах они стали фигурировать только в конце XIX века. И сразу же исследователи разошлись во взглядах на природу финансовых рынков: появились академический и альтернативный подходы. Первой известной работой в рамках академического подхода является работа Л. Башелье 1900 г., в которой поведение рынков сопоставляется с броуновским движением. Основные положения альтернативного подхода впервые сформулировал Ч. Г. Доу в 1890-х годах. Они были сформулированы не в форме научной работы, а в виде серии статей в основанном Ч. Г. Доу The Wall Street Journal. С момента своего появления оба подхода существовали и развивались, игнорируя друг друга: академический подход культивировался в научной среде, а альтернативный – в среде биржевых трейдеров. Теоретическое обоснование академического подхода появилось в 1930-х годах. в виде гипотезы эффективного рынка (работу Л. Башелье заметили только в середине 1950-х гг.). Затем на ее основе появилась портфельная теория (Г. Марковиц), а затем и модель САРМ (У. Шарп) в 1950-60-х годах. В итоге методы академического подхода послужили основой для фундаментального анализа.

Альтернативные методы долго полностью игнорировались в научной среде, несмотря на их популярность среди участников биржевой торговли. Эти методы послужили основой для технического анализа. Теоретическое обоснование они получили намного позже – в 1970-1980-х годах с появлением теории фракталов и теории динамических систем, которые и обосновали технический анализ на теоретическом уровне. В рамках академического подхода теории, которая бы достаточно достоверно описывала поведение цен, создать так и не удалось. И это долгое время было весомым аргументом приверженцев технического анализа. В настоящий момент конфронтация между приверженцами различных подходов уменьшается, и появились даже переходные теории, имеющие элементы как одного подхода, так и другого (например, эконофизика, поведенческие финансы).

С начала 2000-х годов, когда дальше игнорировать технический анализ уже не получалось, в научной среде началась дискуссия по поводу эффективности

технического анализа. Эта дискуссия завершилась тем, что была доказана возможность получать доходность выше рыночной при помощи технического анализа в прошлом, однако со временем его прибыльность падает, поскольку рынки постепенно приближаются к эффективному состоянию, и в долгосрочной перспективе такая возможность должна сойти на нет. При этом стоит отметить, что к такому выводу исследователи пришли до кризиса 2008 года. Снижение рынков в 2008 году было таким стремительным, что согласно гипотезе эффективного рынка, такие события должны случаться не чаще чем 1 раз за 10 000 лет. В таких условиях методы технического анализа вновь продемонстрировали возможность обыграть рынок.

За долгое время практического использования технического анализа многие трейдеры делали известные благодаря своим результатам, и многие инвесторы хотели передать им средства в управление. Бывшие трейдеры, становясь управляющими, столкнулись с вопросом: какую нужно выбрать комиссию, чтобы и инвестор был доволен сотрудничеством, и доход самого управляющего был достойным. Подобной постановки вопроса ранее в работах не встречалось. Однако модель, которая позволила бы ответить на вопрос об оптимальном размере комиссии, будет полезна не только и не столько управляющим, сколько инвесторам, так как позволит получать информацию о качестве услуги по косвенным признакам. Без такой модели инвестор будет получать информацию о качестве услуги только по фактическим результатам работы, а это может дорого обойтись.

Рынок услуг доверительного управления активами имеет свои особенности, благодаря которым поведение экономических агентов нельзя свести к простому балансу кривых спроса и предложения. Во-первых, инвестор не может заблаговременно напрямую оценить качество услуги, оно выясняется лишь в процессе работы. Для данного рынка высокое качество услуги означает лучшее соотношение доходности и риска. Во-вторых, на данном рынке клиент не отдает деньги за услугу или товар, а наоборот, желает преумножить свой капитал в процессе работы. Потому если качество услуги выше, то инвестору выгодно платить высокую плату за качественную услугу, поскольку в этом случае и его собственная ожидаемая чистая прибыль будет выше. То есть здесь не работают стандартные

стратегии типа «подсечки» цены конкурента, так как это может быть воспринято как сигнал, что качество самой услуги в компании ниже, чем у конкурентов.

В существующих моделях отмечаются некоторые из этих особенностей рынка, но, тем не менее, модели, которая могла бы их полноценно объяснить, на данный момент построено не было. Между тем, существует потребность в такой модели, поскольку она могла бы не только объяснить нередко, на первый взгляд, нерациональное поведение агентов, но и интерпретировать это поведение как сигнал о качестве самой услуги, т.е. ответить на следующие вопросы:

- 1) Является ли цена косвенным сигналом о качестве услуги?
- 2) Какая форма оплаты более выгодна для инвестора, а какая — для управляющего?
- 3) Какую стратегию, агрессивную или консервативную, будет при прочих равных более охотно применять управляющий?
- 4) Какой вариант поведения по отношению к управляющему оптимален для инвестора?

Ответы на эти вопросы представляют интерес как для исследователей фондового рынка, так и для широкого круга инвесторов, а также напрямую не связанных с фондовым рынком людей. Фактически все работники во всех сферах экономики инвестируют часть своих доходов в фондовый рынок, например, через те же пенсионные накопления, поэтому возможность повышения эффективности таких инвестиций будет интересна практически всем.

Российский фондовый рынок пока еще недостаточно развит для того, чтобы утверждать, что на нем выживают исключительно наиболее эффективные агенты. Потому вопрос выбора наиболее качественной услуги по косвенным признакам тут даже более актуален, чем на развитых рынках капитала.

Степень разработанности темы исследования. Методологическую базу исследования составляют научные труды и публикации российских и зарубежных авторов. Теоретической основой исследования выступают работы таких исследователей, как Р. Вермерс, М. Бейкер, Дж. Уотчер, Л. Литов, К. Бэкс, А. Метрик, М. Кархарт, Р. Кэниель, Дж. Карпентер, А. Линч, Д. Мусто, А. Рид, Л. Чан, Х.-Л. Чен, Дж. Лаконишок, Н. Джегадиш, Б.Б. Рубцов, Я.М. Миркин, С.З. Мошенский, И.В. Трегуб, Т.М. Гатауллин и др. В своих работах они

исследовали зависимость качества управления активами инвестора от различных факторов.

Помимо этого, используются выводы исследований Д. Канемана и А. Тверски в области поведенческих финансов.

Используются также и работы таких ученых как Э. Элтон, М. Грубер, К. Блейк, Ч.-Х. Парк, С. Ирвин, И. Илмаз, А. Акая, С. В. Пастухов и многих других. Работы этих авторов посвящены различным аспектам эконометрического и статистического анализа данных фондового рынка, которые нашли отражение в данном исследовании.

Целью исследования является экономико-математическое моделирование поведения доверительного управляющего для определения оптимальных размеров взимаемых с инвестора комиссий в зависимости от наиболее существенных факторов.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих **задач**:

1) Выявить особенности поведения экономических агентов, которые присущи рынку услуг доверительного управления активами, на этой основе сформулировать и обосновать комплекс предпосылок как на качественном уровне, так и в форме математических отношений, отражающих такие особенности.

2) На основе комплекса принятых предпосылок разработать математическую модель взаимодействия инвестора и доверительного управляющего, взимающего комиссию в форме доли от активов и доли от прибыли, сформулировать и решить задачу управляющего по максимизации его доходов.

3) На основе анализа решения задач поведения доверительного управляющего, определить, как различные факторы влияют на оптимальный для управляющего размер комиссии.

4) Провести сравнение оптимальных размеров комиссий, вычисленных на основе моделей, с фактическими значениями размеров комиссий доверительного управляющего (на примере реального доверительного управляющего).

Объектом исследования выступает рынок услуг доверительного управления активами. **Предмет** исследования – взаимодействие инвестора и доверительного управляющего на рынке услуг доверительного управления активами.

Область исследования. Исследование соответствует п. 1.6 «Математический анализ и моделирование процессов в финансовом секторе экономики, развитие метода финансовой математики и актуарных расчетов» Паспорта научной специальности 08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки).

Информационную базу исследования составили результаты доверительного управления на российском фондовом рынке с 2003 по 2012 годы, труды отечественных и зарубежных специалистов, нормативно-правовые акты Российской Федерации, нормативные документы, опубликованные в периодической печати, а также в сети Интернет.

Методология и методы исследования. Методологическую основу исследования составляют труды российских и зарубежных авторов, посвященные анализу деятельности управляющих на фондовом рынке, как на российском, так и на зарубежных, а также работы, посвященные различным аспектам анализа данных фондового рынка.

В работе используются следующие методы: научная абстракция, математическое моделирование, эконометрический и статистический анализ

Научная новизна заключается в разработке и исследовании экономико-математических моделей, предназначенных для определения условий для долгосрочного сотрудничества инвестора и доверительного управляющего, а также сигналов, позволяющих инвестору выбрать управляющего с высокой средней доходностью, принимая во внимание более широкий, по сравнению с общеизвестным, спектр влияющих факторов. Разработанные модели могут служить базой для построения более широких моделей другими исследователями.

Положения, выносимые на защиту. В соответствии с поставленными задачами, были получены следующие научные результаты:

1) Разработана экономико-математическая модель поведения доверительного управляющего, взимающего комиссию в форме доли от активов, и доказано наличие ее решения для линейных функций спроса инвестора. В результате решения задачи оптимизации поведения доверительного управляющего выявлена обратная зависимость размера комиссии от доходности стратегии, прямая зависимость размера комиссии от ставки дисконтирования и

вероятности ухода инвестора при нулевой комиссии. В отличие от результатов, полученных в других работах, исследование модели дает аналитическое представление зависимости размера комиссии и доходности стратегии, которая ранее выявлялась, как правило, при помощи статистического анализа (С. 67-87).

2) В рамках принятых гипотез о поведении контрагентов разработана экономико-математическая модель поведения доверительного управляющего, взимающего комиссию в форме доли от прибыли, и доказано наличие ее решения для линейных функций спроса инвестора. В результате решения задачи оптимизации поведения подтверждены выводы спецификации с комиссией в форме доли от активов и установлена обратная зависимость размера комиссии от агрессивности стратегии управляющего (как зависимости оптимального размера комиссии от ожидаемой доходности стратегии) и от стабильности результатов стратегии управляющего (С. 87-104).

3) По данным о договорах доверительного управления компании «ФИНАМ» вычислены фактические и оптимальные значения комиссий для каждой из трех рассмотренных в работе стратегий поведения доверительного управляющего, а также эластичности оптимального размера комиссии по доходности стратегии, ставке дисконтирования и вероятности ухода инвестора при нулевой комиссии. Установлено, что фактические значения комиссий, взимаемых компанией «ФИНАМ», оказались в среднем на 1% выше оптимальных значений, полученных в результате исследования модели поведения доверительного управляющего. Это свидетельствует о возможности снижения оттока клиентов за счет оптимизации размера комиссии (С. 104-157).

Теоретическая значимость работы состоит в том, что, в отличие от результатов, полученных другими исследователями, выводы относительно зависимости уровня комиссии управляющего от различных факторов получены не в результате корреляционного или статистического анализа, а на основании анализа решения оптимизационной задачи управляющего в экономико-математической модели, описывающей поведение двух экономических агентов. Предложены спецификации модели как в общем виде, так и для двух вариантов предпосылок относительно вида функций спроса инвестора.

На основе предложенных моделей существует возможность проводить сценарный анализ различных ситуаций на рынке услуг доверительного управления.

Разработанные модели могут служить базой для постановки более широких, в том числе теоретико-игровых, задач анализа взаимодействия инвесторов и доверительных управляющих.

Практическая значимость работы состоит в том, что на основании моделирования и проведенных теоретических исследований сформулированы конкретные рекомендации для инвесторов:

1) Комиссия выше среднерыночного уровня является сигналом о невысоких ожиданиях управляющего относительно будущей доходности стратегии.

2) Локальные убытки, если они не превышают заявленные по стратегии максимальные риски, не свидетельствуют о низком уровне доходности стратегии управляющего.

3) Если управляющий предлагает выбрать агрессивную стратегию – то это может свидетельствовать о низком уровне доходности стратегии, так как при условии наличия высокой положительной средней доходности управляющий склонен предлагать более консервативную стратегию.

4) Если в процессе заключения договора управляющий не снижает размер комиссии даже, если сумма существенно выше минимального порога для данной услуги, то это свидетельствует о невысоких ожиданиях управляющего относительно будущей доходности стратегии.

5) Если после успешного для стратегии года управляющий повышает комиссию, то это сигнализирует о том, что полученный результат вероятнее всего случаен.

Помимо этого, модель может быть использована инвестиционными компаниями для расчета оптимального размера комиссии, а также для сценарного анализа в принятии решений. На основе разработанной модели можно моделировать кризисные ситуации, оценить отток средств инвесторов в случае получения убытков различного размера, и какую часть дохода при этом потеряет инвестиционная компания.

Степень достоверности, апробация и внедрение результатов исследования. Полученные в работе теоретические результаты были подтверждены эмпирической проверкой. Обоснованность выводов и результатов исследования подтверждается использованием адекватных математических, статистических и эконометрических методов анализа.

Результаты исследования были представлены: на ежегодных Немчиновских чтениях (Москва, МГУ имени Ломоносова, ЦЭМИ РАН, 8 апреля 2015 г.); на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, Экономический факультет МГУ имени Ломоносова, 13-17 апреля 2015 г.); на научном семинаре «Анализ инвестиционных проектов» (Москва, ИСА РАН, 27 ноября 2019 г.).

Результаты исследования были применены в деятельности Отдела Трейдинга и Инвестиционного Консультирования Управления Торговых Операций ПАО «Банк ВТБ 24». В частности, использовались выводы по оптимальному поведению управляющего, а также модель, позволяющая рассчитывать оптимальный размер комиссии в зависимости от множества факторов. Внедрение результатов диссертации позволило уменьшить процент клиентов, отказывающихся от тарифа «Персональный брокер» в первые месяцы работы, а также увеличить среднюю продолжительность использования услуги.

Апробация и внедрение результатов исследования подтверждены соответствующими документами.

Публикации. Основные результаты и положения диссертации изложены в 5 работах общим объемом 6,3 п.л. (весь объем авторский), опубликованных в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК при Минобрнауки России.

Структура и объем диссертации определяется поставленной целью, задачами и логикой исследования. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 116 наименований и 4 приложений. Текст диссертации изложен на 195 страницах, включает 51 таблицу и 21 рисунок.

II Основное содержание работы

1) Разработана экономико-математическая модель взаимодействия инвестора и доверительного управляющего, взимающего комиссию в форме доли от активов, и доказано наличие ее решения для линейных и нелинейных функций. На основании анализа решения модели установлен характер зависимости размера комиссии от доходности стратегии, ставки дисконтирования и вероятности ухода инвестора при нулевой комиссии.

В рассматриваемой ситуации присутствуют два субъекта инвестор и управляющий. Передавая деньги в управление, инвестор затем принимает решение о дальнейшем сотрудничестве с управляющим.

Предпосылки поведения инвестора:

1) Управляющий получает от инвестора денежные средства в управление. $G(f)$ – спрос инвестора на услуги управляющего, $G'(f) < 0$, $G(1) \leq 0$.

2) Распределение доходности стратегии управляющего инвестору не известно.

3) Для инвестора источником информации о распределении доходности стратегии управляющего служат только фактические результаты.

4) Ежегодно, инвестор решает, расторгнуть ли договор с управляющим или же продолжить работу, это решение носит вероятностный характер. Вероятность продолжения работы с управляющим обозначим как $P(r_j)$, где r_j – его доходность за последний год, $P'(r) > 0$.

Предпосылки поведения управляющего:

1) У каждого управляющего есть своя стратегия со своим законом распределения доходности, отличающимся от рыночного распределения.

2) Вся информация о распределении доходности собственной стратегии известна управляющему. Стратегия и ее распределение доходности остаются неизменными во времени.

3) Информация о вероятности ухода инвестора в зависимости от годовой доходности также известна управляющему.

4) Размер комиссии устанавливается управляющим. В первой спецификации модели комиссия взимается в виде доли от активов f ($0 < f < 1$). Во второй спецификации модели комиссия взимается в виде доли от прибыли h ($0 < h < 1$).

5) Условия договора между инвестором и управляющим остаются неизменными во времени.

6) Управляющий владеет информацией о функции $G(f)$.

7) Основная задача управляющего – получить максимальный доход. Это его целевая функция.

Функция $G(f)$ представляет собой спрос инвестора на услуги управляющего. В работе рассчитана модель как для линейной функции $G(f)$, так и для нелинейной (размер инвестиций, предоставляемых инвестором в зависимости от комиссии). Она представлена формулой (1) для первой спецификации модели и формулой (2) для второй спецификации

$$G(f) = S - kf, \quad (1)$$

$$G(h) = S - mh, \quad (2)$$

где f – размер комиссии в виде доли от активов;

h – размер комиссии в виде доли от прибыли;

S – средства, доверяемые инвестором управляющему при нулевой комиссии;

k и m – коэффициенты, отражающие, насколько упадет размер инвестиций при увеличении вознаграждения управляющего на 1 процентный пункт.

Вероятность расторжения инвестором договора также представим в линейном и нелинейном виде, при помощи разложения функции в ряд Тейлора вблизи точки максимума. В этом случае математическое ожидание вероятности того, что инвестор продолжит работу с управляющим, представлено формулой (3) для первой спецификации модели и формулой (4) для второй спецификации

$$P[(1+r_t)(1-f)-1] \cong 1 - P_A - pf, \quad (3)$$

$$P[P_0\bar{r}^+(1-h) + (1-P_0)\bar{r}^-] \cong 1 - P_A - nh, \quad (4)$$

где f – размер комиссии в виде доли от активов;

h – размер комиссии в виде доли от прибыли;

P_A – вероятность расторжения инвестором договора при отсутствии вознаграждения управляющего;

p и n – коэффициенты, отражающие, насколько увеличится вероятность расторжения инвестором договора при увеличении вознаграждения управляющего на 1 процентный пункт.

В рамках эмпирической проверки показано, что принятые предпосылки не противоречат эмпирическим данным.

В первой спецификации модели управляющий берет плату в виде процента от активов. Модель представлена в виде уравнений дохода инвестора (5), дохода управляющего (6), вероятности ухода инвестора (7) и задачи управляющего (8)

$$W_t = G(f) \left(\prod_{u=1}^t (1 + r_u) \right) (1 - f)^t, \quad (5)$$

$$y_t = W_{t-1} (1 + r_t) f, \quad (6)$$

$$fl_t = \begin{cases} P(fl_t = 0) = P\left(\frac{W_t}{W_{t-1}} - 1\right) = P[(1 + r_t)(1 - f) - 1] \\ P(fl_t = 1) = 1 - P\left(\frac{W_t}{W_{t-1}} - 1\right) = 1 - P[(1 + r_t)(1 - f) - 1] \end{cases}, \quad (7)$$

$$fl_t = 1 \rightarrow st = t,$$

$$\max_f E \left(\sum_{j=1}^{st} \frac{y_j}{(1 + i)^j} \right), \quad (8)$$

$$0 < f < 1,$$

где f – размер комиссии в виде доли от активов;

$G(f)$ – функция спроса инвестора на услуги управляющего в зависимости от размера комиссии f ;

r_j – доходность стратегии за год j ;

$P(r)$ – вероятность ухода инвестора при результате за год r ;

i – ставка дисконтирования;

t – текущий год;

W_t – стоимость активов инвестора по окончании года t ;

y_t – вознаграждение управляющего за год t ;

fl_t – техническая переменная, принимающая значения 0, если инвестор решает продолжить работу после года t , или 1, если инвестор решает расторгнуть договор;

st – техническая переменная, год, в котором инвестор решает прекратить сотрудничество.

Задача управляющего после преобразований представлена формулой (9)

$$\max_f \left(E \left(G(f) \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\prod_{l=2}^t P[(1+r_{l-1})(1-f)-1] \right) \left(\prod_{u=1}^t (1+r_u) \right) (1-f)^{t-1} f}{(1+i)^t} \right) \right) \right), \quad (9)$$

$$0 < f < 1$$

где f – размер комиссии в виде доли от активов;

$G(f)$ – функция спроса инвестора на услуги управляющего в зависимости от размера комиссии f ;

r_j – доходность стратегии за год j ;

$P(r)$ – вероятность ухода инвестора при результате за год r ;

i – ставка дисконтирования.

Для линейных функций с учетом формул (1) и (3) формулу задачи управляющего (8) можно представить формулой (10)

$$\max_f \left(\frac{Sf - kf^2}{\frac{i - \bar{r}}{1 + \bar{r}} + P_A + (p + 1 - P_A)f - pf^2} \right), \quad (10)$$

$$0 < f < 1$$

где f – размер комиссии в виде доли от активов;

$\bar{r}$ – средняя годовая доходность стратегии;

i – ставка дисконтирования;

S, k, P_A, p – коэффициенты из уравнений (1) и (3).

Определим эту функцию как $U(f)$. $U(0) = 0$. $U(0 + \varepsilon) > 0$, где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим поведение функции на промежутке $[0; 1)$. Для модели важен именно этот промежуток, потому что f – это доля от активов, $0 < f < 1$. В числителе формулы имеем квадратичную функцию с отрицательным знаком коэффициента при f^2 , а у такой функции есть локальный максимум на промежутке $[0; +\infty)$. Найдем корни уравнения $U'(f) = 0$. При этом отметим, что отрицательный корень уравнения не имеет экономического смысла, поскольку он бы означал, что управляющий платит инвестору. Кроме того, поскольку знак у коэффициента при

f^2 отрицательный, больший из корней будет максимумом. Исходя из этого, в качестве оптимального решения возьмем положительное значение f , оно представлено формулой (11)

$$f^* = \frac{\sqrt{\left(P_A + \frac{i - \bar{r}}{1 + \bar{r}}\right)^2 + \left(p\left(1 - \frac{S}{k}\right) + 1 - P_A\right) \frac{S}{k} \left(P_A + \frac{i - \bar{r}}{1 + \bar{r}}\right) - \left(P_A + \frac{i - \bar{r}}{1 + \bar{r}}\right)}{p\left(1 - \frac{S}{k}\right) + 1 - P_A}, \quad (11)$$

где f^* – оптимальный размер комиссии в виде доли от активов;

$\bar{r}$ – средняя годовая доходность стратегии;

i – ставка дисконтирования;

S, k, P_A, p – коэффициенты из уравнений (1) и (3).

Изучив влияние различных факторов на оптимальный размер комиссии, можно установить, что является причиной высокого или низкого оптимального значения. С этой целью найдены производные оптимального решения по различным факторам модели. Для первой спецификации (и в линейном, и в нелинейном случаях) модели получены следующие результаты:

$$f_{\bar{r}}^{*'}(\bar{r}) < 0, f_{P_A}^{*'}(P_A) > 0, f_p^{*'}(p) < 0, f_i^{*'}(i) > 0, f_S^{*'}(S) > 0, f_k^{*'}(k) < 0.$$

2) Разработана экономико-математическая модель взаимодействия инвестора и доверительного управляющего, взимающего комиссию в форме доли от прибыли, и доказано наличие ее решения для линейных функций. На основании анализа решения модели установлен характер зависимости размера комиссии от агрессивности стратегии управляющего и от стабильности результатов стратегии управляющего.

Во второй спецификации модели изменена предпосылка о форме комиссии управляющего: управляющий берет плату в форме процента от прибыли, а не от активов.

В данной спецификации заработок управляющего имеет вероятностную природу, иначе говоря, с некоторой долей вероятности управляющий может остаться без дохода. Исходя из этого, будем определять его доход в терминах математического ожидания. Тогда нашу модель можно представить в виде

уравнений дохода инвестора (12), дохода управляющего (13), вероятности ухода инвестора (14) и задачи управляющего (15)

$$E(W_t) = G(h)(1 + P_0 \bar{r}^+ (1 - h) + (1 - P_0) \bar{r}^-)^t, \quad (12)$$

$$E(y_t) = E(W_{t-1}) P_0 \bar{r}^+ h, \quad (13)$$

$$fl_t = \begin{cases} P(fl_t = 0) = P\left(\frac{W_t}{W_{t-1}} - 1\right) \\ P(fl_t = 1) = 1 - P\left(\frac{W_t}{W_{t-1}} - 1\right) \end{cases}, \quad (14)$$

$$fl_t = 1 \rightarrow st = t,$$

$$\max_h E\left(\sum_{j=1}^{st} \frac{y_j}{(1+i)^j}\right), \quad (15)$$

$$0 < h < 1,$$

где h – размер комиссии в виде доли от прибыли;

$G(h)$ – функция спроса инвестора на услуги управляющего в зависимости от размера комиссии h ;

r_j – доходность стратегии за год j ;

$P(r)$ – вероятность ухода инвестора при результате за год r ;

i – ставка дисконтирования;

t – текущий год;

W_t – стоимость активов инвестора по окончании года t ;

y_t – вознаграждение управляющего за год t ;

fl_t – техническая переменная, принимающая значения 0, если инвестор решает продолжить работу после года t , или 1, если инвестор решает расторгнуть договор;

st – техническая переменная, год, в котором инвестор решает прекратить сотрудничество.

Задача управляющего после преобразований представлена формулой (16)

$$\max_h \left(G(h) P_0 \bar{r}^+ \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\prod_{u=1}^t (1 + P_0 \bar{r}^+ (1 - h) + (1 - P_0) \bar{r}^-)^{u-1} h \cdot \prod_{l=2}^t (P[P_0 \bar{r}^+ (1 - h) + (1 - P_0) \bar{r}^- - 1])}{(1+i)^t} \right), \quad (16)$$

$$0 < h < 1,$$

где h – размер комиссии;

$G(h)$ – размер суммы, которую инвестор готов доверить при комиссии h ;
 $P(r)$ – вероятность того, что инвестор продолжит работу при результате за год r ;
 P_0 – вероятность завершения года с положительным результатом;
 $\bar{r}^+$ – математическое ожидание доходности стратегии при условии, что доходность больше 0;
 $\bar{r}^-$ – математическое ожидание доходности стратегии при условии, что доходность меньше 0;
 $\bar{r}$ – средняя годовая доходность стратегии;
 i – ставка дисконтирования.

Для линейных функций с учетом формул (2) и (4), формулу задачи управляющего (16) можно представить формулой (17)

$$\max_h \left(\frac{SP_0 \bar{r}^+ h - mP_0 \bar{r}^+ h^2}{1 + i - (1 + \bar{r})(1 - P_A) + h(n(1 + \bar{r}) + P_0 \bar{r}^+ (1 - P_A)) - P_0 \bar{r}^+ n h^2} \right), \quad (17)$$

$$0 < h < 1,$$

где h – размер комиссии;

$\bar{r}$ – средняя годовая доходность стратегии;

i – ставка дисконтирования;

S, m, P_A, n – коэффициенты из уравнений (2) и (4).

Обозначим эту функцию за $U(h)$. $U(0) = 0$. $U(0 + \varepsilon) > 0$, где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Как и в предыдущей спецификации модели в числителе формулы (17) имеем квадратичную функцию с отрицательным знаком коэффициента при h^2 а у такой функции есть локальный максимум на промежутке $[0; +\infty)$. Как и ранее, для модели важен именно этот промежуток, потому что $h < 0$ не имеет экономического смысла. Найдём корни уравнения $U'(h) = 0$. При этом отметим, что отрицательный корень уравнения не имеет экономического смысла. Исходя из этого, в качестве оптимального решения возьмём положительное значение h , оно представлено формулой (18)

$$h^* = \frac{\sqrt{m^2 + \frac{S(mn(1 + \bar{r}) + mP_0 \bar{r}^+ (1 - P_A) - SP_0 \bar{r}^+ n)}{1 + i - (1 + \bar{r})(1 - P_A)}} - m}{\frac{mn(1 + \bar{r}) + mP_0 \bar{r}^+ (1 - P_A) - SP_0 \bar{r}^+ n}{1 + i - (1 + \bar{r})(1 - P_A)}}, \quad (18)$$

где h^* – оптимальный размер комиссии;

$\bar{r}$ – средняя годовая доходность стратегии;

i – ставка дисконтирования;

S, m, P_A, n – коэффициенты из уравнений (2) и (4).

Влияние различных параметров на h^* и f^* исследовано далее.

Как и в предыдущем случае, найдены производные оптимального решения по различным факторам для второй спецификации модели. Подтверждены ранее полученные выводы, и получены два дополнительных: $h_{\bar{r}}^{*'}(\bar{r}) < 0$, $h_{P_A}^{*'}(P_A) > 0$, $h_n^{*'}(n) < 0$, $h_i^{*'}(i) > 0$, $h_S^{*'}(S) > 0$, $h_m^{*'}(m) < 0$, $h_{P_0}^{*'}(P_0) < 0$, $h_{\bar{r}^+}^{*'}(\bar{r}^+) < 0$.

$f_{\bar{r}}^{*'}(\bar{r}) < 0$ и $h_{\bar{r}}^{*'}(\bar{r}) < 0$. Зависимость между доходностью стратегии и оптимальным размером отрицательная. Если управляющий обладает стратегией с высокой средней доходностью, то он заинтересован в долгосрочной работе с инвестором. Выше комиссия, тем ниже доход управляющего в текущем периоде, но тем ниже и вероятность ухода инвестора. В итоге, для того, чтобы максимизировать ожидаемую продолжительность работы с инвестором, управляющий, обладающий достаточно доходной стратегией, готов работать и при низком размере комиссии, рассчитывая на будущие доходы.

$f_{P_A}^{*'}(P_A) > 0$ и $h_{P_A}^{*'}(P_A) > 0$. Чем более эмоционально инвестор реагирует на колебания стоимости своего счета, тем меньше вероятность длительного сотрудничества с управляющим, и, соответственно, тем выше оптимальный размер комиссии.

$f_p^{*'}(p) < 0$ и $h_n^{*'}(n) < 0$. Чем больше растет вероятность расторжения инвестором договора при увеличении вознаграждения управляющего, тем меньше оптимальная величина этой комиссии.

$f_i^{*'}(i) > 0$ и $h_i^{*'}(i) > 0$. При увеличении процентной ставки увеличивается и оптимальная величина вознаграждения управляющего.

$f_S^{*'}(S) > 0$ и $h_S^{*'}(S) > 0$. При увеличении размера средств, которые изначально инвестор готов передать в управление, у управляющего увеличивается соблазн получить доход в ближайших периодах при помощи высокой комиссии.

$f_k^*{}'(k) < 0$ и $h_m^*{}'(m) < 0$. Чем больше инвестор уменьшает инвестиции при росте вознаграждения управляющего, тем меньше оптимальный размер этого вознаграждения.

$h_{P_0}^*{}'(P_0) < 0$. Чем стабильней результаты стратегии, тем меньше оптимальный размер вознаграждения управляющего, поскольку увеличивается его ожидаемая выгода от долгосрочного сотрудничества с инвестором.

$h_{\bar{r}^+}^*{}'(\bar{r}^+) < 0$. Чем выше математическое ожидание прибыли стратегии при условии получения положительной доходности за год, тем меньше оптимальный размер вознаграждения управляющего, поскольку растет его заинтересованность в долгосрочном сотрудничестве с инвестором.

3) Эмпирическая проверка принятых предпосылок и полученных в ходе анализа модели выводов показала их соответствие реальным данным. По итогам проверки получены численные значения оптимального размера комиссии, а также его эластичности по доходности стратегии, ставке дисконтирования и вероятности ухода инвестора при нулевой комиссии.

Для проведения эмпирической проверки модели были использованы данные по результатам доверительного управления в рамках договоров, заключенных с компанией «ФИНАМ». Эти данные содержат информацию за промежуток с 2003 года по конец 2011 года. Подобную информацию не открывают для всеобщего изучения, так как сведения о доверительном управлении конфиденциальны. В целях проверки разработанной модели использованы данные по клиентам, работавших по трем стратегиям. Доходности, полученные клиентами, выбравшими одну и ту же стратегию, различаются, так как они начинали работу в разные даты, кто-то во время локального снижения, а кто-то на локальном пике. Данные содержат информацию о счетах 617 клиентов. Помимо этого, также использовались и данные российского фондового рынка (индекс МосБиржи) за тот же период.

Оценка $G(f)$ функции по эмпирическим данным в линейном случае представлена формулой (19)

$$\hat{G}(f) = 9,91 \cdot 10^6 - 1,18 \cdot 10^8 f. \quad (19)$$

Оценка функции распределения доходности стратегии осуществлена с точки зрения инвестора. Другими словами, функция оценена по доходностям, полученным инвесторами, а не по динамике модельного счета.

Распределение доходностей не симметрично. Его пик расположен около значения 15%. Правый хвост распределения стремится к нулю медленно. В противоположность этому, левый хвост стремится к нулю достаточно быстро. По результатам тестирования множества различных функций, наилучшим образом эмпирическим данным (исходя из эконометрических критериев) соответствуют функции, описываемые формулами (20), (21), (22)

$$F_1(r) = \begin{cases} 0,020625 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{r-0,15}{1,15}\right)^2\right)^5}{(0,25-r)^2 + 0,045}; & -1 \leq r \leq 0,15, \\ 1 - \frac{0,625}{e^{2r-0,3}}; & r \geq 0,15 \end{cases} \quad (20)$$

$$F_2(r) = \begin{cases} 0,022 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{r-0,15}{1,15}\right)^2\right)^6}{(0,2-r)^2 + 0,0525}; & -1 \leq r \leq 0,15, \\ 1 - \frac{0,6}{e^{2r-0,3}}; & r \geq 0,15 \end{cases} \quad (21)$$

$$F_3(r) = \begin{cases} 0,024 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{r-0,15}{1,15}\right)^2\right)^6}{(0,3-r)^2 + 0,0325}; & -1 \leq r \leq 0,15, \\ 1 - \frac{0,62}{1,1e^{2r-0,3}}; & r \geq 0,15 \end{cases} \quad (22)$$

Оценка функции $P(f)$ произведена в несколько этапов. В силу того, что данных для прямой оценки данной функции не хватает, необходимо сначала построить совместное распределение доходности стратегии и вероятности расторжения инвестором договора. А уже при помощи этого совместного распределения можно получить функцию зависимости вероятности расторжения инвестором договора от размера вознаграждения управляющего. По результатам сравнения ряда моделей при помощи ROC-кривых, наилучшим образом нашим эмпирическим данным соответствует функция, описываемая формулой (23)

$$P(r) = \begin{cases} 0,1 + 0,05 \times \left(-1 - \frac{2}{r - \frac{19}{60}} \right); r \leq 0,15 \\ 0,9 + 0,05 \times \left(1 - \frac{1}{4 \left(r - \frac{13}{120} \right)} \right); r > 0,15 \end{cases} . \quad (23)$$

Таким образом, есть возможность составить их совместные плотности распределения. Значение интеграла совместной функции плотности распределения от $-\infty$ до $+\infty$, будет вероятностью расторжения инвестором договора при отсутствии вознаграждения управляющего. Далее, поскольку вознаграждение управляющего отнимается от доходности стратегии, сдвигая влево функцию плотности распределения на величину вознаграждения управляющего, получаем распределение доходности с учетом комиссии.

По множеству точек, полученных этим способом, можно восстановить исходную функцию $P(f)$. Оценки функций $P(f)$ для трех стратегий представлены формулами (24), (25), (26)

$$\hat{P}_1(f) = 0,717 - 0,767 f \text{ для первой стратегии,} \quad (24)$$

$$\hat{P}_2(f) = 0,696 - 0,735 f \text{ для второй стратегии,} \quad (25)$$

$$\hat{P}_3(f) = 0,696 - 0,818 f \text{ для третьей стратегии.} \quad (26)$$

Важной предпосылкой во второй главе была предпосылка об отсутствии автокорреляции в распределении доходности стратегии. Годовых результатов стратегии недостаточно, так как наблюдаемый период составляет всего около 9 лет, но мы можем взять помесечные результаты, и построить для них автокорреляционную функцию (ACF) и частную автокорреляционную функцию (PACF). Построив данные функции, мы убедились, что ни одно из значений как ACF, так и PACF не отличается значимо от нуля ни на 1%, ни на 5%, ни даже на 10% уровнях значимости. Таким образом, автокорреляции в ряду доходностей стратегии не обнаружено. И мы можем утверждать, что наша предпосылка о независимости доходности в текущий период от предыдущих доходностей правомерна.

Также была проверена гипотеза об отсутствии влияния разницы доходности стратегии и рыночной доходности на вероятность ухода инвестора. В результате регрессии коэффициент при этой переменной получился статистически незначимым, и более того он даже оказался отрицательным, хотя предполагалась, что может быть положительная зависимость. В итоге показано, что гипотеза о том, что инвесторы не принимают во внимание динамику индекса при оценке результатов стратегии, соответствует эмпирическим данным.

В результате проверки предпосылки о том, что $(1 - P_A)(1 + \bar{r}) < 1 + i$, эта предпосылка оказалась верной для всех трех стратегий.

Потому мы можем утверждать, что все основные предпосылки подтверждаются эмпирическими данными.

По итогам всех расчетов получены оценки для параметра f , а также посчитаны фактические значения параметра f для каждой стратегии

$$\hat{f}_1 = 0,0355 ; f_{1\text{факт}} = 0,0462 ;$$

$$\hat{f}_2 = 0,0367 ; f_{2\text{факт}} = 0,0438 ;$$

$$\hat{f}_3 = 0,0368 ; f_{3\text{факт}} = 0,0447 .$$

Фактические значения f получились выше рассчитанных по модели. Однако стоит учесть ряд фактов. Во-первых, компания устанавливает одну комиссию для всех стратегий, и те из них, которые долго остаются представленными в продуктовой линейке, обладают более высокой средней доходностью, чем те, которые исключили из этой линейки. Во-вторых, с течением времени комиссия постепенно снижалась компанией, но у тех клиентов, которые начали работу ранее, в дальнейшем она не пересматривалась. За счет этого у первой стратегии средняя комиссия и получилась несколько выше, чем у второй и третьей. В-третьих, компания и сама признавала наличие проблемы с оттоком клиентов (что говорит о том, что выбранная комиссия не оптимальна), однако идти на снижение комиссии руководство не хотело, так как было категорически против снижения доходов в краткосрочной перспективе. В терминах модели, можно сказать, что ставка дисконтирования для руководства компании была существенно выше, чем ставка депозита в экономике.

Учитывая эти особенности политики компании, фактическая ставка и должна была получиться выше рассчитанной по модели, и так оно и получилось. Таким образом, можем утверждать, что эмпирические данные не противоречат теоретической модели.

Проведенные вычисления позволяют рассчитать эластичности размера комиссии f по некоторым параметрам модели, они приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Эластичности f по параметрам модели.

Параметр	Эластичность в линейной модели
$\bar{r}$	-0,67
i	0,73
P_A	1,02

Источник: расчеты автора.

III Заключение

В заключении обобщены основные результаты проведенного исследования и сформулированы основные выводы, а именно:

В работе принята и обоснована система предпосылок, и на ее основе разработана экономико-математическая модель, описывающая взаимодействие инвестора и доверительного управляющего. Хотя в модели мы находим оптимальное решение для управляющего, она больше интересна инвесторам, поскольку, изучая свойства данного оптимального решения, мы можем понять, какие сигналы подает управляющий относительно реальных показателей своей стратегии. Подобная конструкция типична для сигнальных моделей.

В ходе исследования данной модели были получены следующие практические выводы:

1) Чем выше средняя доходность стратегии, тем ниже будет оптимальный размер комиссии управляющего. Основная причина этого в том, что управляющий максимизирует свои доходы не в первом периоде, а за все время работы. Раз присутствует вероятность ухода инвестора, то, при наличии стратегии с высокой средней доходностью, управляющий стремится минимизировать эту вероятность и готов для этого уменьшить свое вознаграждение. То есть, небольшое значение комиссии в начальных периодах для успешного

управляющего компенсируется большими доходами в более поздних периодах за счет роста счета инвестора и минимизацией вероятности его ухода.

2) Чем более болезненно инвестор реагирует на временное снижение своего капитала, тем менее выгодные условия ему будет предлагать управляющий. Чем меньше допустимый уровень риска инвестора, тем больше вероятность достижения этого уровня. А значит, больше вероятность того, что инвестор расторгнет договор, даже если стратегия много лет стабильно показывает доходность выше рыночной. Потому одним из выводов данной модели выступает то, что инвесторы, более спокойно относящиеся к результатам инвестирования на начальном периоде, в итоге получают лучшие условия и результаты.

3) Чем более стабильна стратегия, тем больше у управляющего стимулов выстраивать долгосрочное сотрудничество с клиентом, и для минимизации вероятности ухода клиента в первые годы сотрудничества управляющий даже готов снижать свою комиссию.

4) Чем выше ожидаемая доходность стратегии при условии завершения года в плюсе, тем более заинтересован управляющий в долгосрочном сотрудничестве, и тем меньше его оптимальный размер комиссии. При наличии консервативной и агрессивной стратегии с одинаковой средней доходностью, управляющий склонен предлагать инвестору консервативную. Так происходит потому, что ожидание убытков у более консервативной стратегии будет меньше, а потому и вероятность ухода клиента в случае неудачного года намного меньше. То есть, вновь управляющему выгодней рассчитывать на долгосрочное сотрудничество, нежели рассчитывать на сиюминутную выгоду.

В работе проведена эмпирическая проверка предпосылок модели и ее выводов. Эмпирические данные подтвердили верность предпосылок, принятых в модели, а именно отсутствие влияния разницы доходности стратегии и рыночной доходности на вероятность ухода инвестора, отсутствие автокорреляции в доходностях стратегии. Также расчетное значение оптимального размера комиссии оказалось весьма близко к фактическому среднему размеру комиссии, который взимался с клиентов.

Все это позволяет говорить о том, что эмпирические данные не противоречат предпосылкам и выводам модели, а значит, ее выводы можно использовать на практике.

Исходя из полученных выводов, в работе сформулированы следующие практические рекомендации частным инвесторам:

1) Не работать с управляющими, берущими комиссию выше среднерыночного уровня.

2) Спокойно относиться к локальным убыткам, если они не превышают заявленные по стратегии максимальные риски.

3) Если управляющий сразу предлагает начать работу по агрессивной стратегии – это повод задуматься, так как при условии наличия высокой положительной средней доходности управляющий склонен предлагать более консервативную стратегию.

4) Если в процессе заключения договора управляющий не идет на снижение комиссии даже если сумма существенно выше минимального порога для данной услуги, то это сигнал о невысокой уверенности в будущем результате.

5) Если после успешного для стратегии года управляющий повышает комиссию, то это сигнал о том, что полученный результат вероятнее всего случаен.

Разработанная модель может быть интересна также и самим инвестиционным компаниям. Прежде всего, она позволяет рассчитать оптимальный размер комиссии для компании исходя из статистики по ее клиентам. Пожертвовав небольшой долей доходности в ближайших периодах, компания может существенно увеличить продолжительность сотрудничества с клиентом, что приведет в конечном итоге к росту доходов в долгосрочной перспективе.

Другая возможная область применения – сценарный анализ. На основе указанных моделей можно моделировать кризисные ситуации, оценить, какую часть средств заберут инвесторы в случае получения убытков различного уровня,

и какую часть дохода при этом потеряют инвестиционные компании, что позволит им оценить свои риски и подготовить алгоритм действий на этот случай.

IV Список работ, опубликованных по теме диссертации

*Публикации в рецензируемых научных изданиях,
определенных ВАК при Минобрнауки России:*

1. Коржнев, С.В. Означает ли более высокий размер комиссии более высокое качество услуги на рынке доверительного управления? / С.В. Коржнев // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – № 1. – С. 120-127. – ISSN 2618-9828.
2. Коржнев, С.В. Моделирование экономического взаимодействия инвестора и доверительного управляющего / С.В. Коржнев // Финансы и кредит. – 2014. – № 18 (594). – С. 50-60. – ISSN 2071-4688.
3. Коржнев, С.В. Есть ли зависимость между размером комиссии и качеством управления: эмпирическая проверка / С.В. Коржнев // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – № 4. – С. 96-101. – ISSN 2618-9828.
4. Коржнев, С.В. Изучение деятельности управляющих фондами в финансовой науке / С.В. Коржнев // Аудит и финансовый анализ. – 2017. – № 5-6. – С. 120-126. – ISSN 2618-9828.
5. Коржнев, С.В. Моделирование взаимодействия инвестора и доверительного управляющего с нелинейными функциями / С.В. Коржнев // Вестник университета. – 2020. – № 3. – С. 143-148. – ISSN 1816-4277.