

На правах рукописи



ГОЛЬЦОВ Юрий Александрович

**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ,
ИНДУЦИРОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫМИ
БИФУРКАЦИЯМИ, В ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и
обработка информации (технические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Белгород – 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова» на кафедре «Техническая кибернетика»

Научный руководитель: *Рубанов Василий Григорьевич*,
доктор технических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки РФ

Научный консультант: *Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич*,
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: *Павлов Алексей Николаевич*,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры физики открытых систем
института физики ФГБОУ ВО «Саратовский
национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского», г. Саратов
Асадуллаев Рустам Геннадьевич
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры
прикладной информатики и информационных
технологий института инженерных и цифровых
технологий ФГАОУ ВО «Белгородский
государственный национальный исследовательский
университет» (НИУ «БелГУ»), г. Белгород

Защита состоится 29 июня 2021 г. в 14-00 часов на заседании диссертационного совета БелГУ.05.02 ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»), а также на сайте организации (URL: <http://bsu.edu.ru>).

Автореферат разослан _____ 2021 г.



Учёный секретарь диссертационного совета

Н. П. Путивцева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Управление температурным полем нагревательных установок является одной из важных задач во многих технологических процессах, таких как производство строительных материалов, цветного стекла, выращивание кристаллов и других, поскольку даже незначительное отклонение от заданной температуры приводит к нарушению необходимых параметров технологического процесса и ухудшению качества получаемой продукции.

В современных промышленных установках преимущественно используются регуляторы температуры с тиристорными преобразователями электрической энергии с фазовым управлением. Как известно, ухудшение коэффициента мощности из-за искажения формы кривой потребляемого тока при больших мощностях нагрузки, является крупным недостатком таких систем.

Для устранения указанных недостатков в нагревательных установках большой мощности **в диссертационной работе** предлагается использовать систему, построенную на основе высокочастотного преобразователя с широтно-импульсной модуляцией.

В то же время обеспечение устойчивости рабочих режимов и требуемого качества управления в импульсных системах является сложной задачей, связанной с проблемой прогнозирования и подавления нерегулярных колебаний.

Поэтому системный анализ управляемых теплотехнических систем методами современной нелинейной динамики, позволяющий находить условия их безопасной и устойчивой работы с учетом изменения параметров технологической среды и внешних возмущений, является актуальной задачей.

Изучение нелинейных явлений в импульсных системах управления приводит к исследованию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [Филиппов А.Ф., 1960, 1963, 1985; Уткин В.И. 1981] (кусочно-гладких динамических систем). Фазовое пространство кусочно-гладких систем разделено некоторыми поверхностями с заданными условиями сшива траекторий на отдельные области, в каждой из которых движения описываются разными гладкими векторными полями [Фейгин М.И., 1970].

При изменении параметров возможны специфические нарушения топологической структуры фазового пространства, когда траектория периодического движения проходит через границу одной из поверхностей сшива. Это вызывает нарушение условий существования периодического решения [Фейгин М.И., 1970]. Такие топологические перестройки фазового пространства и получили название *C-бифуркаций* («C» от слова «сшивать») [Фейгин М.И., 1970, 1974, 1978, 1994, 1999]. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью обычно сводятся к кусочно-гладким отображениям, сшитым из отдельных гладких функций, области определения которых разделены многообразиями переключения («*switching manifolds*»). C-бифуркациям в таких отображениях отвечает так называемые «*border-collision*» (BC) бифуркации [Nusse H., Yorke J. 1992], когда при изменении параметров инвариантное множество, например, периодическая орбита дискретной системы сталкивается с одним из многообразий переключения. Термин «*border-collision*» не имеет официального перевода в русскоязычной литературе, поэтому используем его в оригинале («*border-collision*» или BC).

Как известно, *локальные бифуркации* определяются их локальными свойствами, такими, например, как матрица Якоби и ее собственные числа, вы-

численные в неподвижной точке или на траектории периодического режима. В результате таких бифуркаций неподвижная точка или цикл могут возникнуть/исчезнуть или потерять локальную устойчивость. Если же динамическая система кусочно-гладкая, то локальные бифуркации, наряду с классическими, включают и «border collision» бифуркации.

Нелокальные бифуркации относятся к глобальным характеристикам динамической системы. Они могут быть связаны, например, с касаниями или «контактами» в точках гомо-, гетероклинической траекторий, а затем и трансверсальными пересечениями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловых периодических орбит.

Степень разработанности темы. Для изучения бифуркационных явлений в импульсных системах управления температурным полем теплотехнических установок эффективным представляется использование системного анализа [Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.И.; Тарасенко Ф.П.; Jackson M.C.; Warfield J.N.] с привлечением методов теории негладких динамических систем.

Исследования нелинейных явлений в негладких динамических системах представляют одну из актуальных задач современной нелинейной динамики и стимулируются прикладными задачами механики, теории автоматического управления и современной силовой электроники, а также биологии, экономики и социальных наук. Термин «*border collision*» был введен Nusse H., Yorke J., [Nusse H., Yorke J. 1992, 1995] для кусочно-гладких отображений. Однако, следует заметить, что такие бифуркации впервые были исследованы Фейгиным М.И. еще в семидесятых годах задолго до появления работ Nusse H.Е. и Yorke J.A. и названы им «*C-бифуркациями*» [Фейгин М.И., 1970, 1974, 1978, 1994, 1999]. К числу первых работ, в которой был выполнен детальный бифуркационный анализ кусочно-гладкой системы с мультистабильной динамикой, следует отнести работу Баушева В.С. и др. [Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., 1992].

Значительный вклад в современную теорию кусочно-гладких динамических систем внесли Nordmark A.B. (Швеция); Banerjee S. (Индия); научная группа Бристольского университета Di Bernardo M., Hogan J. и др. (Англия); Zhsubaliyev Zh.T. (Жусубалиев Ж.Т., Россия) и Mosekilde E. (Дания); Tse C.K. (Гонконг); Gardini L. (Италия); Avrutin V. (Германия); El Aroudi A. (Испания); Olivar G. (Колумбия).

Основы математической теории нелокальных бифуркаций многомерных гладких динамических систем заложены и развиты в работах Newhouse S.E., Palis J., Takens F., Шильникова Л.П., Гаврилова Н.К., Гонченко С.В., Ильяшенко Ю.С., Тураева Д.В. и др. Теория бифуркаций необратимых двумерных гладких отображений развита Mira Ch., Gumowski I., Gardini L. и др.

Теория локальных (классических и ВС бифуркаций) и нелокальных бифуркаций в одномерных кусочно-гладких непрерывных отображениях, можно сказать, носит почти законченный характер [Avrutin V., L. Gardini L. и др.]. В отношении многомерных кусочно-гладких и одномерных разрывных отображений этого сказать нельзя. Нелокальные бифуркации двумерных, трехмерных кусочно-гладких отображений в настоящее время являются предметом активных исследований. К числу важных результатов, полученных за последние 10-15 лет, можно отнести ВС и нелокальные бифуркации замкнутой инвариантной кривой и связанные с ними разные формы мультистабильного поведения

[Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Banerjee S.], «dangerous bifurcations» [Avrutin V., Zhusubaliyev Zh.T., Banerjee S., Sushko I, Gardini L.], «center bifurcation» [Sushko I, Gardini L.], бифуркации скользящих режимов («sliding bifurcations») [Di Bernardo M., Hogan J. и др.].

Одна из актуальных прикладных задач нелинейной динамики — это исследование мультистабильности [Leonov G.A., Kuznetsov N.V.; Pisarchik A.; Feudel U.]. В настоящее время для мультистабильных систем создана теория скрытых аттракторов (hidden attractors) [Leonov G.A., Kuznetsov N.V.]. Как известно, глобальная устойчивость является редким свойством нелинейных систем [Leonov G.A., Kuznetsov N.V. и др.], поскольку из этого свойства вытекает, что существует единственный аттрактор, который притягивает все траектории фазового пространства. Часто в реальных системах при одних и тех же параметрах могут сосуществовать несколько аттракторов.

Особенность мультистабильных систем состоит в высокой чувствительности к внешним помехам. Даже сколь угодно малые случайные помехи или вариации параметров могут приводить к непрогнозируемым изменениям динамики, например, к взрывной хаотизации колебаний.

При вариации параметров наблюдаются глобальные перестройки фазового пространства, обусловленные образованием гомо- или гетероклинических структур, качественными изменениями границ бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов, приводящими к кризисам. В кусочно-гладких отображениях такие бифуркации могут быть связаны как с касанием, так и с «контактами» инвариантных многообразий седловой периодической орбиты в точках негрубой гомоклинической траектории.

В настоящее время для кусочно-гладких систем не существует математической теории нелокальных бифуркаций, пригодной для прикладных задач, аналогичной той, что создана сейчас для гладких обратимых отображений [Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. и др.] и необратимых отображений [Mira Ch., Gumowski I., Gardini L. и др.].

Основная проблемная ситуация состоит в том, что для изучения мультистабильности требуется найти специальные инвариантные множества, такие как репеллеры, седловые периодические орбиты вместе с их устойчивыми и неустойчивыми инвариантными многообразиями, играющие ключевую роль в глобальной динамике.

Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия нельзя найти ни аналитически, ни с помощью техники линеаризации. К настоящему времени разработано несколько численных методов расчета одно-, двумерных инвариантных множеств [Parker T.S., Chua L.O.; Osinga H.M., Krauskopf B. и др.; Fundinger D.; Li H., Fan Y. и др.; Goodman R.H., Wróbel J.K.]. В то же время для кусочно-гладких отображений размерности два и выше задача эта остается мало изученной и чрезвычайно сложной.

С другой стороны, использование методов нелинейной динамики в прикладных задачах связано и с обоснованием возможности сведения моделей высокой и даже бесконечномерной размерности, каковыми являются теплотехнические системы, к маломерным базовым (эталонным) моделям, описывающим общие свойства рассматриваемого класса объектов и допускающим детальный бифуркационный анализ. Следовательно, создание таких математических моделей яв-

ляется ключевым элементом прикладного системного анализа.

Поэтому разработка базовых математических моделей теплотехнических систем с импульсным управлением, численных методов анализа нелинейных явлений, индуцированных нелокальными бифуркациями, ответственными за мультистабильность и нерегулярную динамику, в целях определения областей пространства параметров, обеспечивающих устойчивые управляемые технологические режимы с заданными динамическими характеристиками, является актуальной задачей.

Диссертационная работа выполнена при реализации: НИР «Разработка микропроцессорной системы управления выращиванием и прецизионной обработкой монокристаллов сапфира», договор № А-4/15 от 14.04.2015 г.; НИР «Разработка и исследование САУ теплотехнологическими объектами высокой мощности в классе дискретных систем», договор № А-62/17 от 27.04.2017 г. в рамках программы стратегического развития БГТУ им. В.Г. Шухова на 2012-2016 и 2017-2021 годы, соответственно, а также договором 03/19 от 03.03.2019 г. в рамках соглашения № 075-11-2019-070 от 29.11.2019 (уникальный номер 07519SU2000000). Исследования поддержаны РФФИ, проект № 14-41-08009, р_офи_м «Синтез адаптивных и нечетких позиционных энергосберегающих систем автоматизации тепло-технологических объектов, машин и механизмов», 2014-2017 гг.

Цель и задачи исследования. Совершенствование анализа теплотехнических объектов с импульсным управлением на основе создания численных методов и алгоритмов моделирования нелинейных явлений, индуцированных нелокальными бифуркациями, обеспечивающих управляемые технологические режимы с заданными динамическими характеристиками, прогнозирование мультистабильности и подавление нерегулярных колебаний.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

1. Анализ состояния вопроса управления мощными теплоэнергетическими системами.
2. Разработка экспериментальной установки теплотехнической системы с широтно-импульсным автоматическим управлением.
3. Разработка математической модели теплотехнической системы с широтно-импульсным управлением, численных методов и алгоритмов бифуркационного анализа глобальной динамики
4. Бифуркационный анализ глобальной динамики и разработка рекомендаций к обеспечению управляемых технологических режимов с заданными динамическими характеристиками.

Объект исследований. Теплотехнические системы большой мощности с широтно-импульсным управлением.

Предмет исследований. Глобальные бифуркации в кусочно-гладких динамических системах.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту.

1. Предложена методика построения математических моделей теплотехнических систем с широтно-импульсным управлением, основу которой составляют:

- получение математической модели теплового объекта в форме трансцендентной передаточной функции на основе аналитического решения краевой за-

дачи теплопроводности;

- преобразование трансцендентной передаточной функции к дробно-рациональной высокого порядка в целях проверки адекватности модели, полученной по экспериментальной переходной характеристике объекта;
- параметрическая идентификация теплового объекта на основе экспериментальных данных с целью его описания дробно-рациональной передаточной функцией;
- получение базовой математической модели широтно-импульсной системы управления в форме дифференциального уравнения с разрывной правой частью и кусочно-гладкого непрерывного отображения, допускающих детальный численно-аналитический бифуркационный анализ.

2. Разработан целостный подход к системному анализу нелинейных явлений, индуцированных глобальными бифуркациями, который объединяет следующую группу алгоритмов:

- гибридный алгоритм численного поиска устойчивых/неустойчивых сосуществующих периодических орбит заданного периода и определения их локальной устойчивости, позволяющий исключить решение сложной краевой задачи для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и интегрирование уравнений в вариациях с разрывным решением;
- алгоритм расчета устойчивых/неустойчивых инвариантных многообразий, основанный на итерировании фундаментальной области вдоль устойчивого/неустойчивого подпространств собственных векторов матрицы монодромии. Основу алгоритма составляет оригинальный метод нахождения обратной функции, состоящий в сведении задачи к решению нелинейного уравнения первого порядка. Такой метод исключает необходимость решения систем нелинейных уравнений для определения обратной функции и преодоления сопутствующих при этом вычислительных проблем.
- алгоритм численного расчета границы области устойчивости, в котором решение задачи сводится к трансцендентному уравнению первого порядка независимо от размерности модели.

3. Выполнен анализ нелинейных явлений, индуцированных нелокальным бифуркациями, что позволило установить следующие закономерности мультистабильной динамики:

- при малых значениях напряжения питания система демонстрирует двухчастотные колебания, которым в фазовом пространстве отображения отвечают замкнутые инвариантные кривые, возникающие через бифуркацию Неймарка-Сакера или ВС бифуркацию, а также явление захвата частоты;
- выявлено, что с увеличением напряжения питания нагревательной установки динамика усложняется за счет появления областей мультистабильности. При этом число аттракторов, сосуществующих с устойчивой замкнутой инвариантной кривой, растет с увеличением напряжения питания. Границей бассейна притяжения инвариантной кривой является устойчивое многообразие одной из седловых периодических орбит, которая возникает в паре с устойчивой орбитой того же периода через ВС «fold» бифуркацию (аналог седло-узловой в гладких отображениях).

Методы исследования базируются на методах системного анализа, теории автоматического управления, методах нелинейной динамики, вычислительной

математики, теории устойчивости и бифуркаций.

Практическая ценность.

1. Результаты диссертации позволяют обеспечить технологические режимы теплотехнических систем большой мощности с заданными динамическими характеристиками и могут быть применены при проектировании широкого класса импульсных систем.

2. Разработан прототип программной реализации численного метода анализа глобальной динамики кусочно-гладких моделей, который может применяться для разработки и исследования систем автоматического управления с импульсной модуляцией.

Реализация и внедрение. На предприятии ООО «Техсапфир» (г. Белгород) и в ФГАОУ ВО Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ») (г. Белгород) проведены промышленные испытания и получены рекомендации к внедрению широтно-импульсной системы управления нагревательными установками высокой мощности, что подтверждается соответствующими актами. Научно-методические результаты, полученные в диссертации, используются в учебном процессе ФГБОУ ВО БГТУ им. В.Г. Шухова в рамках дисциплин «Моделирование систем и процессов», «Моделирование систем управления» и «Проектирование систем управления», а также при выполнении выпускных квалификационных работ.

Достоверность научных выводов и положений достигается использованием общепринятых допущений при построении математической модели, строгих методов бифуркационного анализа, тщательной проверкой результатов анализа глобальной динамики с данными, полученными с помощью «Search Circle (SC)» алгоритма, а также согласованностью с существующими теоретическими знаниями о глобальной динамике негладких систем.

Апробация результатов. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийской научной конференции по проблемам управления в технических системах (Санкт-Петербург, 2015); 30-й и 31-й международных научных конференциях «Математические методы в технике и технологиях» (Санкт-Петербург, 2017, 2018), 13-й, 14-й и 15-й международных научно-технических конференциях «Распознавание» (Курск, 2017, 2018, 2019); международных научно-практических конференциях «International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment» (Севастополь, 2017, 2018, 2019); VI и VII Среднерусском экономическом форуме СЭФ (Курск, 2017, 2018); ежегодных международных научно-технических конференциях БГТУ им. В.Г. Шухова и научно-технических семинарах кафедры техническая кибернетика БГТУ им. В.Г. Шухова (Белгород, 2015-2020).

Область исследований. Содержание диссертационной работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)»:

- Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 18 печатных ра-

бот, из них — 6 статей в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, 3 статьи в изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus, 2 патента РФ на изобретение и 3 свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. В работах, выполненных в соавторстве, лично автором в [1,3,16] решена краевая задача теплопроводности, выполнена идентификация объекта управления по экспериментальной переходной характеристике и сформирована модель в форме дробно-рациональной передаточной функции; в [2,10,11] разработана система управления теплотехнической установкой; в [4–9,12,13] выполнено моделирование и теоретический анализ результатов вычислительных экспериментов; в создании изобретений [14,15] авторы внесли равный вклад; в [17] реализован алгоритм в виде прикладной программы; в [18] разработан алгоритм расчета области устойчивости периодических режимов широтно-импульсных систем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, включающего 140 наименований и приложения, изложена на 108 страницах (без приложения), содержит 24 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследований, научная новизна и практическая ценность, приведены результаты реализации работы.

В первой главе проведен анализ состояния вопроса управления температурным полем теплоэнергетических систем на базе мощных нагревательных установок, предложена широтно-импульсная система управления температурным полем, позволяющая увеличить энергетическую эффективность. Результаты главы опубликованы в [2,10,11,14,15].

В общем случае нагревательная установка имеет следующие зоны: внутреннее печное пространство, заполненное воздухом или газом; электронагреватель, равномерно распределённый перед внутренним слоем футеровки, и внешний слой футеровки, обрамленный металлической защитой. Геометрическая форма печи – ограниченный цилиндр, сверху и снизу которого располагаются футеровки. Входной управляющей переменной является мощность, подводимая к нагревателю, а выходной переменной – тепловое состояние в точке измерения температуры.

Для выполнения технологического процесса необходимо обеспечить закон изменения температуры во внутреннем печном пространстве с определённой степенью наращивания и спада температуры. Так, например, при выращивании монокристаллов сапфира – это этапы предварительного нагрева шихты до стадии расплава, затравки, роста и вытягивания кристалла, остывания, а при производстве пеностекольных блоков – это нагрев шихты до стадии расплава, пенообразование, остывание. Каждый из этих этапов характеризуется определённым температурным режимом. В настоящее время температурные режимы в печном пространстве обеспечиваются системами автоматического управления с тиристорными преобразователями электрической энергии. Основной недостаток таких систем состоит в том, что существенно искажается форма кривой потребляемого тока из-за перекоса угла управления вентилями. Это ухудшает коэффи-

циент мощности и электромагнитную совместимость нагревательной установки. Одним из путей снижения гармонических искажений тока в питающей сети и повышения коэффициента мощности является использование систем на основе высокочастотных полупроводниковых преобразователей с широтно-импульсной модуляцией, реализованных на полностью управляемых силовых ключах. Для решения этой задачи разработана система управления, основанная на широтно-импульсной модуляции (ШИМ) первого рода (цифровой ШИМ). Новизна технического решения защищена патентами РФ на изобретения [14,15]. Проведены промышленные испытания, по результатам которых получены рекомендации к внедрению.

С другой стороны, реализация положительных свойств систем с импульсной модуляцией является сложной задачей. Это обусловлено проблемой прогнозирования мультистабильной динамики и подавления нерегулярных колебаний, индуцированных нелокальными бифуркациями, которые для импульсных систем остаются малоизученными. Следовательно, разработка и исследование базовой модели импульсной системы управления температурным полем нагревательных установок, удовлетворяющей требованиям системного анализа [Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.И.] и нелинейной динамики [Анищенко В.С.], составляют основную задачу представленной работы.

Вторая глава посвящена построению математической модели теплотехнической системы с широтно-импульсным управлением, что предполагает решение двух взаимосвязанных задач:

- *формирование математической модели объекта управления* – теплотехнической установки;
- *построение базовой математической модели широтно-импульсной системы управления теплотехническим объектом*, допускающей численно-аналитический бифуркационный анализ.

I. Для решения первой задачи разработана и изготовлена нагревательная установка, описанной в первой главе. Результаты главы опубликованы в [1,3,16]. Основным результатом главы содержится в [3]. Теплообменные процессы в зонах нагревателя и футеровок происходят преимущественно за счёт теплопроводности в силу твёрдости и непрозрачности материала. Во внутреннем воздушном пространстве печи, где находится материал, подвергающийся нагреву процесс передачи тепловой энергии обусловлен конвективной и кондуктивной составляющими. Теплообменные процессы в каждой из зон определяются уравнениями теплопроводности, представленными в цилиндрических координатах.

Аналитическое решение нестационарной краевой задачи теплопроводности для уравнений каждой из зон нагревательной установки при нулевых начальных условиях, когда объект находится в состоянии теплового равновесия с окружающей средой позволяет с помощью преобразования Лапласа получить математическую модель в форме трансцендентной передаточной функции $\bar{W}(s) = u_1(0, s)/q_v(s)$. Здесь $u_1(0, s)$ — температура в центре внутреннего пространства печи; $q_v(s)$ — объёмная плотность теплового потока от нагревателя [3].

Поскольку полученная модель содержит специальные функции, такие, например, как гиперболические функции и функции Бесселя, то возникают огромные вычислительные трудности при бифуркационном анализе.

В связи с этим передаточная функция $\overline{W}(s)$ приведена к дробно-рациональному виду 5-го порядка [3]. Для подтверждения правомерности такого подхода проведены эксперименты на нагревательной установке.

Во введении и в предыдущей главе мы отмечали, что основной задачей бифуркационного анализа является установление общих закономерностей сложной динамики конкретного класса систем с помощью так называемой базовой модели. В связи с этим создание базовой математической модели является важным элементом исследований. Решение такой задачи состоит в преодолении двух противоречивых моментов: модель должна быть максимально простой, допускающей детальный бифуркационный анализ и в то же время адекватной реальному объекту.

Для решения этой задачи нами предложен подход, состоящий в аппроксимации переходной характеристики объекта, отвечающей передаточной функции 5-го порядка, кривыми, соответствующими передаточным функциям 2-го порядка [3]. Идея подхода состоит в идентификации объекта управления по переходной характеристике, снятой экспериментально.

По экспериментальной кривой переходного процесса методом Орманса определена дробно-рациональная передаточная функция второго порядка [3]:

$$W(s) = \frac{327.8}{10240s^2 + 352s + 1} = \frac{\mathcal{K}}{T_1 T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1},$$

где T_1, T_2 — постоянные времени нагревателя и внутреннего печного пространства, соответственно; $\mathcal{K}$ — коэффициент передачи объекта. Установлено, что передаточная функция $W(s)$ достаточно хорошо описывает динамические свойства теплового объекта. Численные расчеты показывают, что среднее квадратическое отклонение от экспериментальной переходной характеристики составляет 2.4 %.

II. Мы теперь можем перейти к решению основной задачи главы — построению математической модели теплотехнической системы с импульсным управлением.

Математическая модель системы автоматического управления, непрерывная линейная часть которой представлена полученной передаточной функцией $W(s)$, описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \mathbf{b} \cdot K_F, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathcal{K} \cdot E_0}{T_1 T_2} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$K_F = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\xi)], \quad \xi = \alpha(V_{\text{ref}} - \beta x_1(k \cdot a_0)) - V_0(t/a_0 - \lfloor t/a_0 \rfloor), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $x_1 = T$; $x_2 = dT/dt$; T — температура печи в точке измерения; ξ , K_F — входной и выходной сигналы широтно-импульсного модулятора (ШИМ); V_{ref} — управляющий сигнал; E_0 — напряжение питания; a_0 — период модуляции; $\lfloor \cdot \rfloor$ — функция, выделяющая целую часть аргумента; β — коэффициент передачи датчика обратной связи; α — коэффициент усиления; V_0 — опорный сигнал модулятора.

Третья глава посвящена разработке вычислительных алгоритмов и программ моделирования нелинейных явлений. Результаты главы опубликованы в

[5,6,17]. Базовая математическая (1) в безразмерной форме имеет стандартный вид [Жусубалиев Ж.Т. и др., 2007, 2009, 2018]

$$\dot{x} = \lambda_1 (x - K_F); \quad \dot{y} = \lambda_2 (y - K_F), \quad K_F = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0; \\ 0, & \zeta < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\zeta = q + x(\lfloor \tau \rfloor) - \vartheta y(\lfloor \tau \rfloor) - \frac{P}{\alpha}(\tau - \lfloor \tau \rfloor), \quad \lfloor \tau \rfloor = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где безразмерные переменные и параметры для рассматриваемого объекта:

$$\tau = a_0/t, \quad \lambda_1 = -a_0/T_1, \quad \lambda_2 = -a_0/T_2, \quad \vartheta = \lambda_1/\lambda_2, \quad q = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\beta \cdot \mathcal{K} \cdot E_0 \cdot \lambda_2} V_{\text{ref}},$$

$$P = \frac{V_0}{V_{\text{ref}}} q, \quad T = \frac{\mathcal{K} \cdot E_0 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (x - \vartheta y), \quad dT/dt = \frac{\mathcal{K} \cdot E_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{a \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} (x - y).$$

Параметры модели: $T_1 T_2 = 10240 \text{ с}^2$; $T_1 + T_2 = 352 \text{ с}$; $\mathcal{K} = 328.7 \text{ C}^\circ/\text{В}$; $0.0 < a_0 \leq 10 \text{ с}$; $2 < E_0 < 24 \text{ В}$; $\beta = 0.01 \text{ В}/^\circ\text{C}$; $V_0 = 5 \text{ В}$; $V_{\text{ref}} = 5 \text{ В}$; $\alpha > 1.0$.

Динамическая система (2) была сведена к отображению $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вида [Жусубалиев Ж.Т. и др., 2007, 2009, 2018]:

$$F : (x, y) \mapsto F(x, y), \quad F(x, y) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x, y), & \vartheta y - x < q - q/\alpha, \\ F_{\mathcal{M}}(x, y), & q - q/\alpha \leq \vartheta y - x \leq q, \\ F_{\mathcal{R}}(x, y), & \vartheta y - x > q, \end{cases} \quad (3)$$

$$F_{\mathcal{L}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1}(x-1) + 1 \\ e^{\lambda_2}(y-1) + 1 \end{pmatrix}; \quad F_{\mathcal{R}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1}x \\ e^{\lambda_2}y \end{pmatrix};$$

$$F_{\mathcal{M}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1}(x-1) + e^{\lambda_1(1-z)} \\ e^{\lambda_2}(y-1) + e^{\lambda_2(1-z)} \end{pmatrix}, \quad q + x - \vartheta y - qz/\alpha = 0.$$

Каждая из функций $F_{\mathcal{L}}(x, y)$, $F_{\mathcal{M}}(x, y)$ и $F_{\mathcal{R}}(x, y)$ монотонна во всей своей области определения. Границу, разделяющую две области $F_{\mathcal{L}}(x, y)$, $F_{\mathcal{M}}(x, y)$ или $F_{\mathcal{M}}(x, y)$, $F_{\mathcal{R}}(x, y)$, называют «border», где производные первого порядка $F(x, y)$ по (x, y) не существуют.

Исследование мультистабильной динамики требует решения следующих взаимосвязанных задач. *Первая* – это поиск устойчивых и седловых периодических орбит, репеллеров. *Вторая* – исследование локальной устойчивости циклов. *Третья* – расчет устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловых циклов. Если для первых двух задач имеются эффективные решения (см., например, [Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., 2003]), то расчет устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий представляет собой чрезвычайно сложную задачу.

Инвариантные многообразия являются глобальными объектами в том смысле, что их можно найти только численно. В работе мы предлагаем целостный подход к решению этих трех задач и реализацию его в виде прикладной программы. Подход разработан совместно с проф. Жусубалиевым Ж.Т. и научным руководителем, проф. Рубановым В.Г. [6]. Остановимся подробнее на содержании нашего подхода.

А. Периодическому режиму с периодом модуляции отвечает неподвижная точка отображения (3): $F(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0$ (1-цикл). Циклы с периодом m являются неподвижными точками отображения $F^m(\mathbf{x}_0)$:

$$F^m(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0, F^k(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 \neq 0, k < m, F^k = \underbrace{F(F(\dots F(\mathbf{x}) \dots))}_{k \text{ раз}}. \quad (4)$$

Периодическая орбита с периодом m или m -цикл – это конечная последовательность различных точек $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = F(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_2 = F^2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{x}_m = F^m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Уравнение (4) решалось численно с помощью гибридного алгоритма [Жусубалиев Ж.Т. и др., 2007. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2007611309].

Заметим, что термин «гибридный» или «регуляризованный» введен специалистами вычислительной математики ¹, для алгоритмов, которые представляют собой комбинации надежных, но медленно сходящихся методов (глобально сходящихся) с недостаточно надежными, но быстро сходящимися методами (например, Ньютона-Рафсона). Такие алгоритмы обладают высокой надежностью и гарантированной сходимостью. ² В указанном выше алгоритме в качестве глобальной стратегии применяется процедура сканирования выбранной области фазового пространства с переменным шагом для локализации решений уравнения (4). Затем, каждое локализованное решение уточняется итерационным методом Ньютона-Рафсона с заданной точностью. Алгоритм опробован на большом числе прикладных задач.

В. Локальная устойчивость m -цикла определяется собственными числами ρ_1, ρ_2 матрицы монодромии $\Phi_m = DF(\mathbf{x}_{m-1}) \cdot DF(\mathbf{x}_{m-2}) \cdots DF(\mathbf{x}_1) \cdot DF(\mathbf{x}_0)$, где $DF(\mathbf{x})$ – матрица Якоби. Цикл с периодом m локально устойчив, когда $|\rho_i| < 1$, $i = 1, 2$.

С. Сейчас разработано несколько методов расчета устойчивых и неустойчивых инвариантных множеств [Parker T.S., Chua L.O.; Osinga H.M., Krauskopf B. и др.; Fundinger D.; Li H., Fan Y. и др.; Goodman R.H., Wróbel J.K.].

Стандартный подход состоит в итерации так называемой фундаментальной области (fundamental domain) (см., например, [Parker T.S., Chua L.O., 1989]), когда итерируется локальная область в окрестности седловой периодической орбиты вдоль устойчивого и неустойчивого подпространств собственных векторов матрицы Φ_m . Все эти методы работают одинаково, поскольку устойчивое многообразие вычисляется как неустойчивое многообразие обратной функции, полученной явно или численно, например, методом Ньютона.

Н. Osinga и др. предложили численный метод расчета устойчивых одномерных инвариантных многообразий двумерных отображений, не требующего определения обратной функции. Это так называемый «Search Circle (SC)» алгоритм [England J., Krauskopf B., Osinga H.M., 2003]. Такой подход особенно важен в тех случаях, когда нельзя получить отображение Пуанкаре аналитически для

¹см. например, Powell, M.J.D. A Hybrid Method for Nonlinear Equations/M.J.D. Powell//Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations. – 1970. – 7. Pp. 87–114.
Dennis, J.E. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations/J.E. Dennis, R.B. Schnabel//New Jersey: Prentice-Hall, Inc.– 1983. – P. 395.

²Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие/А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.

заданного векторного поля. Его можно использовать и в случае, когда отображение необратимое. Метод реализован в виде прикладной программы в пакете DsTool и в настоящее время является одним из эффективных в своем классе. Однако «Search Circle (SC)» алгоритм не может быть применен в многомерных системах.

Мы предлагаем другой численный метод, основу которого составляет оригинальный подход построения обратной функции. Для тестирования и исследования нашего метода мы использовали программу в пакете DsTool, где реализован «Search Circle (SC)» алгоритм. Описание нашего метода начнем с нескольких предварительных замечаний и определений.

• Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, записанное в эквивалентной форме $F : \mathbf{x}' \mapsto F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, где F – гладкая функция класса C^1 . Здесь $\mathbf{x}'$ называется образом точки $\mathbf{x}$ первого ранга. Любая точка $\mathbf{x}$, такая что $F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}' = 0$ называется прообразом $\mathbf{x}'$ ранга один. Образы и прообразы ранга- k обозначают $F^k(\mathbf{x})$ и $F^{-k}(\mathbf{x})$, соответственно, где $F^{-k}(\mathbf{x}) = \underbrace{F^{-1}(F^{-1}(\dots F^{-1}(\mathbf{x}) \dots))}_k$.

• **Определение.** Пусть n_- , n_0 и n_+ , $n_0 + n_- + n_+ = n$ – число мультипликаторов, лежащих внутри, на границе и вне единичного круга $\{\rho \in \mathbb{C}^1 : |\rho| = 1\}$, соответственно. Неподвижная точка (или цикл с периодом m) называется *гиперболической*, если $n_0 = 0$, т.е. если нет мультипликаторов, лежащих на границе единичного круга.

Подпространство собственных векторов матрицы Φ_m , для которых $|\rho| < 1$ называется устойчивым E^s и неустойчивым E^u для $|\rho| > 1$.

• Потребуем, чтобы F в (3) была дифференцируемой в гиперболической неподвижной точке $\mathbf{x}_0$. Это условие обеспечивает существование малой окрестности U точки $\mathbf{x}_0$, где F является диффеоморфизмом. Следовательно, теорема о локальном устойчивом многообразии [Yu. Kuznetsov, 2004] гарантирует существование в U локального устойчивого $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{x}_0) \subset U$ и неустойчивого $W_{\text{loc}}^u(\mathbf{x}_0) \subset U$ многообразий $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in U : F^k(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_0, k \rightarrow \infty\}$, $W_{\text{loc}}^u(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in U : F^{-k}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_0, k \rightarrow \infty\}$ размерности n_- и n_+ , соответственно, которые касаются в неподвижной точке $\mathbf{x}_0$ устойчивых и неустойчивых подпространств собственных векторов E^s и E^u матрицы Φ_m .

• Тогда глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия определяются как объединение обратных и прямых итераций $W_{\text{loc}}^s(\mathbf{x}_0)$ и $W_{\text{loc}}^u(\mathbf{x}_0)$:

$$W^s(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{-k}(W_{\text{loc}}^s(\mathbf{x}_0)); \quad W^u(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^k(W_{\text{loc}}^u(\mathbf{x}_0)). \quad (5)$$

Так как $F_{\mathcal{L}}$ и $F_{\mathcal{R}}$ – линейные функции, то $F_{\mathcal{L}}^{-1}$ и $F_{\mathcal{R}}^{-1}$ находятся без труда. Остается найти $F_{\mathcal{M}}^{-1}$. Основной наш результат формулируется в виде следующего утверждения.

Утверждение [6]. Пусть

$$F_{\mathcal{M}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1}(x-1) + e^{\lambda_1(1-z)} \\ e^{\lambda_2}(y-1) + e^{\lambda_2(1-z)} \end{pmatrix}, \quad q + x - \vartheta y - \frac{q}{\alpha} z = 0. \quad (6)$$

Тогда существует

$$F_{\mathcal{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} x' \cdot e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_1 z} + 1 \\ y' \cdot e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_2 z} + 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$q + 1 - \vartheta + x' \cdot e^{-\lambda_1} - \vartheta \cdot y' \cdot e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_1 z} + \vartheta \cdot e^{-\lambda_2 z} - q \cdot z / \alpha = 0, \quad (8)$$

такая, что $F_{\mathcal{M}}$ и $F_{\mathcal{M}}^{-1}$ взаимно обратные монотонные функции.

Доказательство приведено в [6] и поэтому опускаем.

Таким образом, для любой точки (x, y) области определения $F_{\mathcal{M}}$ обратная итерация выполняется в два шага: сначала по (x', y') вычисляется z , численно решив уравнение (8). Полученное z подставляется в (7) [6, 17].

Как показали исследования, такой подход для рассматриваемого класса моделей по эффективности эквивалентен «Search Circle (SC)» алгоритму. Однако, в отличие от «Search Circle (SC)» алгоритма, описанный метод легко обобщается на модели широко-импульсных систем произвольного порядка.

В четвёртой главе с использованием результатов третьей главы выполнен бифуркационный анализ нелинейных явлений. Как мы отмечали в первой главе, основная задача состоит в обеспечении устойчивого регулирования температурным полем нагревательной установки с частотой импульсной модуляции, при которой достигаются заданные показатели качества управления технологическим процессом. Результаты главы опубликованы в [4–9, 12, 13, 18].

Рассматриваемый класс импульсных систем демонстрирует двухчастотные колебания, возникающие через бифуркацию Неймарка-Сакера [Неймарк Ю.И., 1959; Sacker R.J., 1964] или «border-collision» [Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., 2002, 2003, 2006, 2008]. Такие колебания характеризуются двумя независимыми частотами. В фазовом пространстве отображения (3) двухчастотным колебаниям отвечает аттрактор в форме замкнутой инвариантной кривой. Характер движения на инвариантной кривой определяется числом вращения, которое представляет собой отношение частот. Когда оно иррационально, инвариантная кривая плотно заполняется траекториями и динамика квазипериодична. При рациональном числе вращения на замкнутой кривой лежит пара периодических орбит: устойчивая и седловая, а сама инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловой орбиты. При этом наблюдается так называемый захват частот, когда происходит синхронизация колебаний с двумя независимыми частотами в одно периодическое колебание с общим периодом. Причем отношение частот постоянно и рационально на интервале значений параметров.

I. Расчет границ области устойчивости. Для расчета области устойчивости рабочих режимов разработан специальный численный алгоритм [13, 18], основанный на методе уравнений периодов.

На рис. 1 изображена карта динамических режимов на плоскости параметров (α, E_0) , на которую нанесена граница бифуркации Неймарка-Сакера $\mathcal{L}_{\text{NS}}$, рассчитанная численно с помощью указанного алгоритма, где Π_i , $i = 1, 6, 7, 8$ — области устойчивости 1-, 6-, 7- и 8- циклов. Различие между границей $\mathcal{L}_{\text{NS}}$, рассчитанной с помощью описанного алгоритма, и границей, полученной прямым расчетом, как это видно из рис. 1, является естественным из-за того, что

на бифуркационной границе неподвижная точка становится негиперболической. В этом случае сходимости орбиты из некоторой начальной точки, не совпадающей с неподвижной точкой, к таким инвариантным множествам в условиях арифметики конечной точности («машинной» точности) при прямых расчетах не будет. Можно лишь добиться уменьшения указанной разницы за счет увеличения числа итераций, отводимого на переходный процесс.

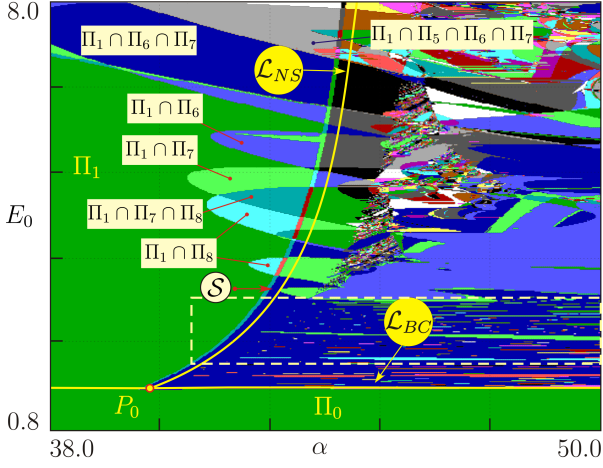


Рис. 1. Карта динамических режимов

Справа от линии $\mathcal{L}_{NS}$ и выше $\mathcal{L}_{BC}$ расположены области квазипериодичности и хаоса, где имеются многочисленные окна с периодической динамикой. В той части карты режимов, которая выделена пунктирным прямоугольником, окна периодичности отвечают резонансным языкам, имеющим структуру, отличную от классических языков Арнольда [Wei-Ming Y., Bai-Lin H., 1987; Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., 2002, 2006, 2008, 2011, 2015; Simpson D.J.W., 2008, 2009, 2016], где происходит захват частоты.

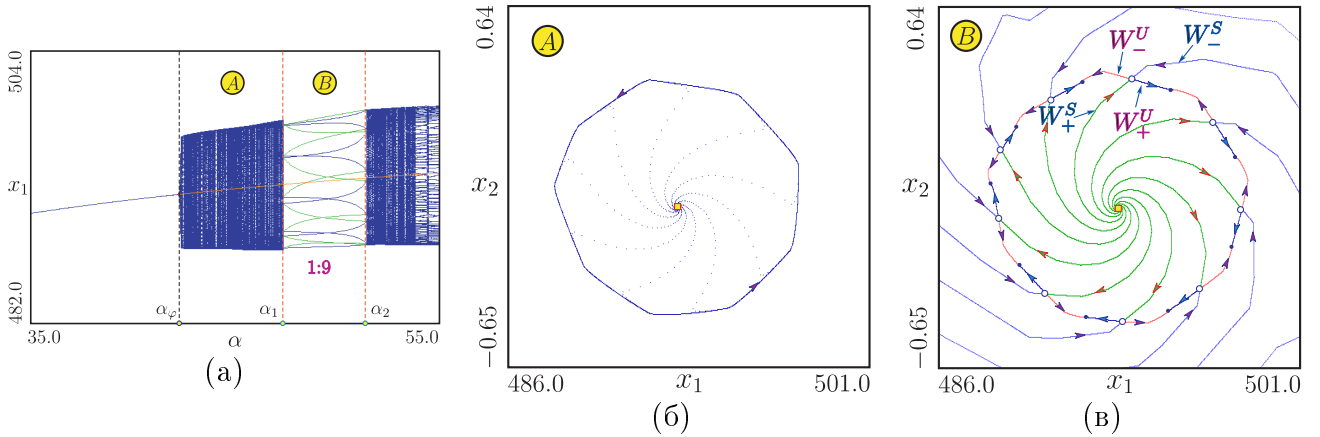


Рис. 2. (а) Бифуркационная диаграмма, где A - область квазипериодической динамики; B - область резонанса $1:9$. (б) Фазовый портрет в области A . (г) Фазовый портрет в области B

II. Захват частоты. На рис. 2 приведены бифуркационная диаграмма и фазовые портреты, иллюстрирующие рождение замкнутой инвариантной кривой через бифуркацию Неймарка-Сакера и явление захвата частоты. Для наглядности фазовые портреты приводятся в исходных переменных $x_1 = T$ и $x_2 = dT/dt$.

При увеличении α неподвижная точка теряет устойчивость при $\alpha = \alpha_\varphi$ и

мягко возникает замкнутая инвариантная кривая (рис. 2(а) и (б)). Далее в точке $\alpha = \alpha_1$ рождаются устойчивый и седловой 9-циклы через «border collision fold» бифуркацию. Это аналог седло-узловой бифуркации в гладких системах. Как результат, орбита на замкнутой инвариантной кривой становится периодической, а инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седлового 9-цикла. Это явление, как мы отмечали ранее, называется резонансом или захватом частоты. На рис. 2(в) изображен фазовый портрет отображения (3) при значениях параметров, лежащих внутри резонансного языка $1 : 9$. На этом рисунке черными точками обозначены устойчивого 9-цикл, а белыми — седловой 9-цикл. Через $W_{\pm}^U$ и $W_{\pm}^S$ обозначены соответственно неустойчивые и устойчивые многообразия седлового 9-цикла. При выходе из зоны резонанса $1 : 9$ через вторую точку α_2 «border-collision fold» бифуркации орбита на инвариантной кривой вновь становится квазипериодической.

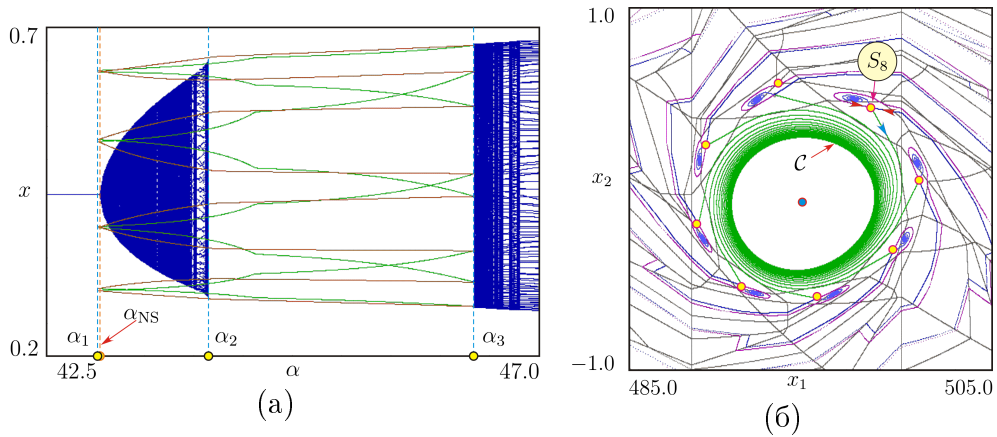


Рис. 3. (а) Бифуркационная диаграмма для сечения $\mathcal{S}$ на рис. 1. (б) Фазовый портрет в области сосуществования устойчивого 8-цикла и квазипериодического режима

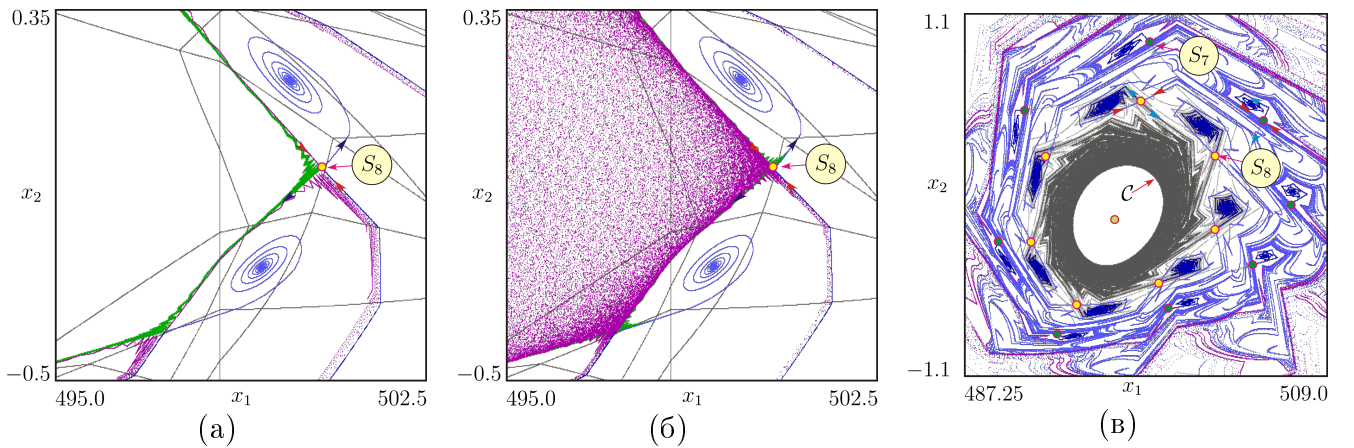


Рис. 4. (а),(б) Гомоклиническая бифуркация. (в) Фазовый портрет области мультистабильности

III. Мультистабильность. При больших значениях напряжения питания E_0 динамика усложняется за счет появления областей мультистабильности. Справа от границы $\mathcal{L}_{NS}$ динамика гораздо сложнее, исследование которой выходит за рамки представленной работы. В соответствии с целью работы мы акцентируем наше внимание на изучении мультистабильной динамики в Π_1 и окрестности $\mathcal{L}_{NS}$.

На рис. 1 через $\Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$ – это области существования устойчивых 5-, 6-, 7-, 8-циклов. Как можно видеть из этой диаграммы, области $\Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$ не только взаимно пересекаются, но и пересекаются с Π_1 . Рис. 3 и 4 иллюстрируют локальные и нелокальные бифуркации, наблюдаемые при увеличении коэффициента усиления регулятора вдоль сечения $\mathcal{S}$ на рис. 1.

В точке α_1 возникают устойчивый и седловой 8-циклы через «border-collision fold» бифуркацию, а в точке α_{NS} – замкнутая инвариантная кривая через бифуркацию Неймарка-Сакера. В области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_{NS}$ (рис. 3(а)) устойчивый 8-цикл сосуществует с устойчивой неподвижной точкой. На рис. 3(б) изображен фазовый портрет после бифуркации Неймарка-Сакера, где устойчивый 8-цикл сосуществует с замкнутой инвариантной кривой $\mathcal{C}$, отвечающей квазипериодическим колебаниям. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов является устойчивые инвариантные многообразия седлового 8-цикла. При дальнейшем увеличении α замкнутая инвариантная кривая разрушается и динамика становится хаотической. Как известно, разрушению инвариантной кривой всегда предшествуют резонансные явления. На рис. 3(а) в окрестности точки α_2 хорошо видны многочисленные окна с периодической динамикой, отвечающие резонансам на инвариантной кривой. Механизмы разрушения инвариантных кривых и переходы к хаосу исследовались многими авторами.

На рис. 4 приведены фазовые портреты, иллюстрирующие переход из области хаотической динамики через точку α_2 в область $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ резонансной динамики через гомоклиническую бифуркацию. Как можно видеть на рис. 3(б) и рис. 4, инвариантные многообразия $W_{\pm}^s, W_{\pm}^u$ – кусочно – гладкие множества, имеющие «изломы» в точках их пересечения с «borders». Однако, как на устойчивом $W_{\pm}^s$, так и на неустойчивом $W_{\pm}^u$ многообразиях существуют изломы, которые не являются точками пересечения с «borders». Такие точки – это образы и прообразы точек пересечения $W_{\pm}^s, W_{\pm}^u$ с «borders», соответственно. Вследствие этого «изломы» могут образовать точки гомоклинического «контакта» (аналог касания в гладких отображениях) с устойчивым многообразием. Рис. 4(а) иллюстрирует гомоклинический контакт, а рис. 4(б) – гомоклиническую структуру.

На рис. 4(в) приведен фазовый портрет в области мультистабильности $\Pi_1 \cap \Pi_7 \cap \Pi_8$ (справа от границы $\mathcal{L}_{NS}$, см. рис. 1), где устойчивая замкнутая инвариантная кривая $\mathcal{C}$ сосуществует с устойчивыми 7- и 8-циклами. Устойчивые 7- и 8-циклы возникают в паре седловыми циклами через BCB fold на границах Π_7 и Π_8 , соответственно. Как можно видеть из рис. 4(в), границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов является устойчивые многообразия седловых периодических орбит. На рис. 4(в) через S_7, S_8 обозначены седловые 7- и 8-периодические точки, соответственно.

Таким образом, выполненный анализ глобальной динамики позволил сформулировать следующие рекомендации по принятию решений управления технологическими режимами:

- Граница области устойчивости рабочего режима на плоскости управляющих параметров (α, E_0) имеет типичную для рассматриваемого класса систем структуру, а именно состоит из линий рождения замкнутой инвариантной кривой через классическую бифуркацию Неймарка-Сакера и «border collision» бифуркацию. С увеличением коэффициента усиления область устойчивости расширяется, однако при возрастании напряжения питания динамика усложняется

за счет появления областей с мультистабильной динамикой. Детектирование мультистабильности, исследование механизмов их возникновения и трансформаций сосуществующих режимов, приводящих к внезапной хаотизации колебаний, возможны только с привлечением системного анализа глобальной динамики.

- Для теплотехнических систем не удастся расширить область глобальной устойчивости рабочего режима в рамках фиксированной структуры корректирующего звена, например, изменением координат точки P_0 коразмерности два на плоскости управляющих параметров (см. рис. 1). Поэтому для того, чтобы обеспечить управляемые технологические режимы с заданными и прогнозируемыми динамическими характеристиками, необходимо классический подход к синтезу корректирующих звеньев обязательно дополнять бифуркационным анализом глобальной динамики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе решения задач диссертации получены следующие основные результаты:

1. Предложена методика построения базовых математических моделей теплотехнических систем с широтно-импульсным управлением в форме дифференциального уравнения с разрывной правой частью и кусочно-гладкого непрерывного отображения, допускающих детальный численно-аналитический бифуркационный анализ.

2. Разработан целостный подход к системному анализу нелинейных явлений, индуцированных глобальными бифуркациями, который объединяет следующую группу алгоритмов:

- гибридный алгоритм численного поиска устойчивых/неустойчивых сосуществующих периодических орбит заданного периода и определения их локальной устойчивости, позволяющий исключить решение сложной краевой задачи для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и интегрирование уравнений в вариациях с разрывным решением;

- алгоритм расчета устойчивых/неустойчивых инвариантных многообразий, основанный на итерировании фундаментальной области вдоль устойчивого/неустойчивого подпространств собственных векторов матрицы монодромии. Основу алгоритма составляет оригинальный метод нахождения обратной функции, состоящий в сведении задачи к решению нелинейного уравнения первого порядка. Такой метод исключает необходимость решения систем нелинейных уравнений для определения обратной функции и преодоления сопутствующих при этом вычислительных проблем.

- алгоритм численного расчета границы области устойчивости, в котором решение задачи сводится к трансцендентному уравнению первого порядка независимо от размерности модели.

3. Выполнен анализ нелинейных явлений, индуцированных нелокальным бифуркациями, что позволило установить следующие закономерности мультистабильной динамики:

- При малых значениях напряжения питания система демонстрирует двухчастотные колебания, которым в фазовом пространстве отображения отвечают замкнутые инвариантные кривые, возникающие через бифуркацию

Неймарка-Сакера или ВС бифуркацию, а также явление захвата частоты.

- С увеличением коэффициента усиления область устойчивости расширяется, однако при возрастании напряжения питания динамика усложняется за счет появления областей с мультистабильной динамикой. При этом границей бассейна притяжения инвариантной кривой является устойчивое многообразие одной из седловых периодических орбит, которая возникает в паре с устойчивой орбитой через ВС «fold» бифуркацию.

- Для того, чтобы обеспечить управляемые технологические режимы с заданными и прогнозируемыми динамическими характеристиками, необходимо классический подход к синтезу корректирующих звеньев (ПИ, ПИД звеньев) обязательно дополнять бифуркационным анализом глобальной динамики.

4. Оригинальность технических решений построения широтно-импульсных систем управления теплотехническими установками защищена патентами РФ на изобретения.

5. Предложенная методика построения математических моделей теплотехнических установок с широтно-импульсным управлением, а также численный метод исследования нелокальных бифуркаций реализованы в виде прикладных программ, которые прошли государственную регистрацию в Реестре программ для ЭВМ.

6. На предприятии ООО «Техсапфир» (г. Белгород) и в ФГАОУ ВО Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ») (г. Белгород) проведены промышленные испытания и получены рекомендации к внедрению широтно-импульсной системы управления нагревательными установками высокой мощности.

7. **Рекомендации.** Результаты диссертации рекомендуется использовать в проектных организациях при разработке управляемых теплотехнических систем в промышленности по производству строительных материалов, цветного стекла и монокристаллов синтетического сапфира.

8. **Перспективы дальнейшей разработки.** Дальнейшее развитие исследований связано с обобщением и приложением результатов работы в многомерных динамических системах, например, в импульсных системах с ПИ-, ПИД регуляторами, математические модели которых представляются трехмерными кусочно-гладкими отображениями. Исследование глобальной динамики в таких моделях требует расчета двумерных устойчивых инвариантных многообразий. Предложенный подход позволяет решать такие задачи.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК РФ

1. Кариков, Е. Б. Моделирование теплотехнологических объектов в классе дробно-иррациональных передаточных функций / Е. Б. Кариков, В. В. Мишунин, В. Г. Рубанов, **Ю. А. Гольцов** // Научные ведомости БелГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика. - 2012. - №13 (132). Выпуск 23/1. - С. 173–179.

2. Кижук, А. С. Микропроцессорная система автоматического управления тепловым режимом технологического процесса выращивания кристалла сапфира / А. С. Кижук, **Ю. А. Гольцов** // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. - 2014. - №11. - С. 42–49.

3. Гольцов, Ю. А. Управление температурным полем нагревательной установки в форме модели дробного порядка / **Ю. А. Гольцов**, А. С. Кижук, В. Г. Рубанов // СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2016. – № 2. – С. 38–44.
4. Гольцов, Ю. А. Нелинейные явления в широтно-импульсной системе управления теплотехническим объектом / **Ю. А. Гольцов**, А. С. Кижук, В. Г. Рубанов // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. – 2017. – № 9 – С. 188–192.
5. Жусубалиев, Ж. Т. Квазипериодичность в системе управления температурным полем нагревательной установки / Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, **Ю. А. Гольцов**, О. О. Яночкина, С. А. Поляков // Научные ведомости БелГУ. Серия Экономика. Информатика. – 2017. – № 23(272). Выпуск 44. – С. 113–122.
6. Жусубалиев, Ж.Т. К расчету инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений / Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, **Ю. А. Гольцов** // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2020. – № 24(3). – С. – 166–182.

Статьи в изданиях, индексируемых в базах Scopus и Web of Science

7. Gol'tsov Yu. A., Kizhuk A. S., Rubanov V. G. Nonlinear phenomena in a high-power heating unit with pulse modulated control// MATEC Web of Conferences, ICMTMTE 2017. – 2017. – V. 129. – 03031 (4 pages).
8. Gol'tsov Yu. A., Kizhuk A. S., Rubanov V. G. Chaotic dynamics of a pulse modulated control system for a heating unit// MATEC Web of Conferences. ICMTMTE 2018. – 2018. – V 224.– 02055 (6 pages).
9. Gol'tsov Yu. A., Kizhuk A.S., Rubanov V.G., Yanochkina O.O. Modeling of a high-power heating unit with pulse-width modulated control//IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering – 2020.–V.709.– 033098 (5 pages).

Материалы конференций

10. Гольцов, Ю. А. Устройство управления температурным полем нагревательной установки/ **Ю. А. Гольцов**, А. С. Кижук, В. Г. Рубанов// I Всероссийская научная конференция по проблемам управления в технических системах (ПУТС - 2015). Материалы конференции. Санкт-Петербург: СПб: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ». - 2015. – С.298 – 302.
11. Гольцов, Ю.А. Энергоэффективное нагревательное устройство высокой мощности / **Ю. А. Гольцов**, А. С. Кижук, В. Г. Рубанов // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. ММТТ–31. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. – 2018. – Т.8 – С. 91 – 94.
12. Гольцов, Ю.А. Нелинейные явления в широтно-импульсной системе управления мощным нагревательным устройством / **Ю. А. Гольцов**, А. С. Кижук, В. Г. Рубанов // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации. Распознавание – 2018. Сб. материалов XIV Междунар. науч.-техн. конф. Курск: Юго – Зап. гос. ун. – т. – 2018. – С. 226–229.
13. Жусубалиев Ж. Т. Алгоритм расчета границы рождения двухчастотных колебаний в дискретной модели импульсной системы управления / Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, **Ю. А. Гольцов**, Д. С. Кузьмина, О. О. Яночкина // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов,

обработки изображений и символьной информации. Распознавание - 2019. Сб. материалов XV Междунар. науч.-техн. конф. Курск: Юго – Зап. гос. ун. – т. – 2019. – С. 81–84.

Патенты РФ на изобретения

14. Пат. № 2604052 С1 РФ, МПК H05B 6/06 (2006.01). Устройство регулирования температуры индукционного электронагрева [Текст] / **Гольцов Ю. А.**, Кижук А. С., Рубанов В. Г.; заявитель и патентообладатель БГТУ им. В.Г. Шухова. – № 2015139918/07; заявл. 18.09.2015; опубл. 10.12.2016. Бюл. №34.

15. Пат. № 2612311 С1 РФ, МПК G05D 23/22. Устройство регулирования температуры электронагрева [Текст] / **Гольцов Ю. А.**, Жусубалиев Ж. Т., Кижук А. С., Коленченко В. В., Рубанов В. Г.; заявитель и патентообладатель БГТУ им. В.Г. Шухова. – № 2016113209; заявл. 06.04.2016; опубл. 06.03.2017. Бюл. №7.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

16. Свид. № 2017661593 РФ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчета температурного поля в многослойном объекте с линейными и нелинейными граничными условиями. / **Гольцов Ю. А.**, Гоков И. В., Кижук А. С., Рубанов В. Г.; заявитель и патентообладатель БГТУ им. В.Г. Шухова. - №2017618580; заявл. 24.08.2017; опубл. 17.10.2017. – 1 с.

17. Свид. № 2017661000 РФ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчета инвариантных многообразий седловых циклов двумерных обратимых кусочно-гладких отображений / Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., **Гольцов Ю. А.**, Яночкина О. О.; заявитель и патентообладатель БГТУ им. В.Г. Шухова. - №2017617817; заявл. 03.08.2017; опубл. 02.10.2017. – 1 с.

18. Свид. № 2019613325 РФ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчёта границы области устойчивости периодических режимов систем управления с широтно-импульсной модуляцией / **Гольцов Ю. А.**, Кузьмина Д. С., Рубанов В. Г., Яночкина О. О.; заявитель и патентообладатель БГТУ им. В.Г. Шухова. - № 2019611856; заявл. 26.02.2019; опубл. 16.03.2019. – 1 с.

Подписано в печать 2021. Формат **60 × 84**^{1/16}.

Усл. печ. л. 1,1. Тираж 100 экз. Заказ .

Белгородский государственный технологический
университет им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.