

На правах рукописи



Бызов Виктор Александрович

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРБИТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ДОНАХЬЮ**

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Киров — 2021

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Пушкарев Игорь Александрович

Официальные оппоненты: **Карпов Дмитрий Валерьевич**, доктор физико-математических наук, ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, старший научный сотрудник лаборатории математической логики

Певзнер Игорь Михайлович, кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВО РГПУ им. А. И. Герцена, доцент кафедры алгебры

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита состоится «24» июня 2021 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета КФУ.01.04 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу 420008, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35 и на официальном сайте КФУ <https://kpfu.ru>.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
КФУ.01.04,
канд. физ.-мат. наук



Еникеев Арслан Ильясович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие специалисты отмечают, что современный математический аппарат плохо подходит для решения задач описания наноразмерных процессов^{1,2}. Используя классические приемы математического анализа, которые чаще всего встречаются в контексте классической физики, ученые, по существу, основываются на предположении о безграничной делимости вещества, в то время как на наноразмере данное утверждение вступает в противоречие с самой природой рассматриваемых процессов.

По мнению ряда исследователей, хорошие перспективы для описания процессов, происходящих на наноразмере, имеют модели, основанные на понятии клеточного автомата. Во-первых, модели этого класса изучаются довольно давно (например, самовоспроизводящиеся автоматы фон Неймана³). Во-вторых, процессы и результаты их функционирования во многом схожи с наноразмерными процессами и событиями.

Следует, однако, понимать, что клеточно-автоматные модели до сих пор являются лишь «обособленными иллюстрациями». Учёные сравнительно редко используют их в качестве моделей реальных процессов; и даже в этих случаях рассматриваются, как правило, только двумерные клеточно-автоматные модели. Их обычно исследуют на целочисленной решетке, в то время как наноразмерные процессы могут происходить в самых различных рамочных условиях. Кроме того, правила функционирования клеточных автоматов, которые аппроксимируют реальные наноразмерные процессы, довольно сложно вычислить. Поэтому маловероятно, что клеточные автоматы являются единственным адекватным (или даже полностью адекватным) рассматриваемой ситуации классом моделей.

В современной литературе комбинаторные динамические системы, как правило, либо относятся к задачам символической динамики, либо описываются конечными автоматами разных типов. Варианты, не относящиеся к этим двум классам моделей, встречаются крайне редко. В этом смысле работа, посвящённая исследованию существенно отличного примера комбинаторной динамической модели, представляется весьма актуальной.

В качестве такого объекта изучения автором было выбрано преобразование Донахью плоских деревьев⁴. Преобразование Донахью можно рассматривать как перестановку на множестве деревьев заданного размера. При этом, структура этой перестановки является весьма сложной⁵.

¹Еленин Г. Г. Нанотехнологии, наноматериалы, наноустройства // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2002. – № 2. – С. 32–56.

²Малинецкий Г. Г., Курдюмов С. П. Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 328 с.

³Эбеллинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции : Пер. с нем. – М. : «Наука», 2002. – 480 с.

⁴Donaghey R. Automorphisms on Catalan trees and bracketings // Journal of Combinatorial Theory, Series B. – 1980. – Vol. 29, no. 1. – P. 75–90.

⁵Callan D. A Bijection on Dyck Paths and its Cycle Structure // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2007. – Vol. 14, no. 1. – R28.

Важно заметить, что в научной литературе достаточно часто рассматриваются различные биекции между комбинаторными интерпретациями чисел Каталана (к которым, в частности, относятся плоские деревья). Накоплено большое количество результатов относительно возникающих при рассмотрении этих биекций пересчитываемых задач. Так, например, отметим работы В. Чена⁶ (W.Y.C. Chen), Э. Дойча⁷ (E. Deutsch), Д. Каллана⁸ (D. Callan), С. Элизальде⁹ (S. Elizalde). То есть имеется устойчивый интерес исследователей к решению задач рассматриваемой проблематики.

Рассматриваемый в работе контекст — не единственный, в котором продуктивно взаимодействуют понятия деревьев и динамических систем. Так, например, отметим работы Р. И. Григорчука¹⁰, В. В. Некрашевича¹¹, Т. В. Нагнибеды¹², в которых это происходит, правда, совсем иначе. В частности, деревья там служат способом организации иерархии, а не точками динамической системы.

Целью данной работы является исследование свойств орбит и фрагментов орбит преобразования Донахью и решение возникающих при этом пересчитываемых задач.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследование свойств ручных компонент преобразования Донахью. Под ручными компонентами здесь и далее будем понимать деревья и фрагменты деревьев, для которых результат преобразования Донахью можно вычислить значительно быстрее, чем при непосредственном моделировании.
2. Попытка упрощённой аппроксимации преобразования Донахью при помощи уровневых графов поворотов.
3. Исследование свойств деревьев с заданными длинами дуг и решение возникающих при этом пересчитываемых задач. Дугами будем называть фрагменты орбит преобразования Донахью, расположенные между деревьями определённого вида.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

⁶Chen W. Y. A general bijective algorithm for trees // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1990. – Vol. 87. – P. 9635–9639.

⁷Deutsch E. An involution on Dyck paths and its consequences // Discrete Mathematics. – 1999. – Vol. 204, no. 1–3. – P. 163–166.

⁸Callan D. Some bijections and identities for the Catalan and Fine numbers // Sem. Lothar. Combin. – 2004/06. – Vol. 53, B53e.

⁹Elizalde S., Deutsch E. A simple and unusual bijection for Dyck paths and its consequences // Annals of Combinatorics. – 2003. – Vol. 7, no. 3. – P. 281–297.

¹⁰Григорчук Р. И. Некоторые вопросы динамики групповых действий на корневых деревьях // Современные проблемы математики, Сборник статей. К 75-летию Института, Тр. МИАН. — 2011. — С. 64–175.

¹¹Nekrashevych V. Free subgroups in groups acting on rooted trees // Groups, Geometry, and Dynamics. — 2010. — Vol. 4. — P. 847–862.

¹²Nagnibeda T., Pérez A. Schreier graphs of spinal groups and associated dynamical systems // arXiv: Group Theory. — 2020. — P. 1–27.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Исследованная динамическая система, несмотря на конечность и обратимость, представляется достаточно трудным объектом для изучения, которое потребовало не только применения стандартных методов, но и разработки специальных подходов, применимых и в смежных задачах комбинаторной динамики.

Методология и методы исследования. В диссертации используются комбинаторные методы и методы асимптотического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

Конструктивные результаты:

1. построено семейство плоских деревьев, длины орбит преобразования Донахью для которых растут как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад в дереве;
2. построено новое семейство орбит преобразования Донахью длины 6, количество которых растёт как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад дерева;
3. построено семейство орбит преобразования длины 9, количество которых растёт как $\Theta(2^{\frac{n}{2}})$, где n — количество триад.

Результаты, полученные при исследовании графов поворотов:

1. вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества вершин в графах поворотов и примитивных графах поворотов;
2. вычислены производящие функции и получена явная формула для количества циклов заданной длины в графе поворотов первого уровня (без кратных рёбер). Вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества циклов длины 2 и 3 в графе поворотов второго уровня (без кратных рёбер).

Результаты, полученные при исследовании дуг преобразования:

1. вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества деревьев с заданными длинами нескольких первых дуг. Результаты аналогичного вида получены для примитивных деревьев;
2. сформулированы достаточные условия, при выполнении которых длины всех дуг дерева равны одному, двум. Эти условия позволяют от локальных (структурных) свойств деревьев перейти к глобальным свойствам (кратность длины орбиты на два, три).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на межрегиональной научно-практической конференции «Математическое моделирование и вычислительная математика» (г. Киров) в 2012 г.; на ежегодной всероссийской конференции «Общество, наука, инновации» (г. Киров) в 2012, 2014, 2016, 2017 гг.; на всероссийской научно-практической конференции «Математика и междисциплинарные исследования» (г. Пермь) в 2019 г.; на международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (г. Казань) в 2019 г.

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с научным руководителем И.А. Пушкаревым, причем вклад диссертанта был определяющим. Все результаты, представленные к защите, получены лично автором.

Публикации. По основным результатам исследования опубликовано 16 работ. Из них 4 статьи в журналах, рекомендованных ВАК ([1–4]), 9 статей в сборниках тезисов и трудах конференций докладов ([5–13]) и 3 статьи в журналах не из списка ВАК ([14–16]). Две статьи были переведены на английский язык и вышли в журнале, входящем в базу данных международного цитирования Scopus ([1, 2]). Также имеются 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ ([17–19]).

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и значимость представляемой работы.

В **первой главе** даны предварительные сведения по теме диссертации.

В **разделе 1.1** приводятся основные понятия и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения.

Преобразование Донахью действует на комбинаторных интерпретациях чисел Каталана. Определим его для плоских кубических деревьев с висячим корнем (далее будем использовать аббревиатуру ПКДВК).

Пусть α_0 — сын корня ПКДВК T , α_1 — правый сын α_0 , α_2 — правый сын α_1 и т. д., α_n — правый сын α_{n-1} и при этом — лист. Последовательность вершин $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ назовем *старшей правой цепью*. Все вершины старшей правой цепи, кроме α_n , являются, в свою очередь, корнями дочерних деревьев (сыном корня дочернего дерева, корнем которого является α_j , является левый сын этой вершины). Дерево с корнем α_i обозначим $T_i = T_i(\alpha_i)$, а данную ситуацию в целом запишем формулой

$$T = |T_0(\alpha_0), T_1(\alpha_1), \dots, T_{n-1}(\alpha_{n-1}), \alpha_n|, \quad (1)$$

которую назовем *правым разложением* дерева T .

Аналогично определяется *старшая левая цепь* и *левое разложение* дерева T :

$$T = \langle \beta_0, T_1(\beta_1), \dots, T_m(\beta_m) \rangle, \quad (2)$$

где β_0 — лист, β_m — сын корня.

Дадим рекурсивное определение преобразования Донахью. Будем использовать обозначение $\tau(T)$ для образа дерева T при преобразовании.

Определение 1.1.1.

1. Если T — тривиальное дерево, состоящее только из корня и сына корня, то $\tau(T) = T$.
2. Пусть T — ПКДВК, и для всех ПКДВК S с меньшим количеством вершин их образ $\tau(S)$ уже определен. Далее, пусть $T = |T_0(\alpha_0), T_1(\alpha_1), \dots, T_{n-1}(\alpha_{n-1}), \alpha_n|$ — правое разложение дерева T . Тогда образом T назовем дерево $\tau(T)$, левое разложение которого есть $\tau(T) = \langle \alpha_0, \tau(T_0)(\alpha_1), \dots, \tau(T_{n-1})(\alpha_n) \rangle$.

Рисунок 1 иллюстрирует действие преобразования Донахью на кубическом дереве.

Преобразование Донахью по сути является перестановкой на множестве ПКДВК (или других интерпретаций чисел Каталана). Циклы этой перестановки назовём *орбитами* преобразования Донахью.

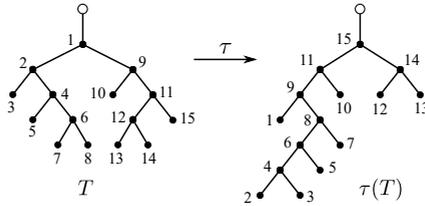


Рисунок 1 — Пример преобразования Донахью

Далее в разделе 1.1 даны ещё два эквивалентных определения преобразования Донахью. Второе определение опирается на понятия левой l и правой r биекций между плоскими кубическими и плоскими некубическими деревьями, третье определение выражает преобразование Донахью через композицию инволюций для ПКДВК и путей Дика.

Кроме обычного представления дерева можно рассмотреть также представление дерева в виде набора триад. Под триадой будем понимать вершину ПКДВК, не являющуюся листом и корнем, вместе с тремя половинками инцидентных ей рёбер. Преобразование Донахью в этом случае определяется аналогичным образом.

Также в разделе 1.1 определены правая и левая огибающие цепи деревьев и доказано вспомогательное утверждение, связанное с этими понятиями.

В **разделе 1.2** приведён краткий обзор существующих результатов по рассматриваемой тематике.

В **разделе 1.3** определены специальные классы деревьев: зигзаги и гребёнки. Деревья этих классов будут использованы в следующей главе в качестве «строительных блоков» для построения ручных компонент преобразования Донахью.

Вторая глава посвящена обсуждению ручных компонент преобразования Донахью. Под ручными компонентами понимаем деревья и фрагменты де-

ревьев, преобразование Донахью для которых можно вычислить быстрее, чем при непосредственном моделировании.

В разделе 2.1 рассматривается так называемый карусельный эффект для триад дерева. Триады дерева можно классифицировать по наличию левого и правого сыновей, наличию левого или правого предка. На основе этих признаков можно выделить 11 типов триад.

Теорема 2.1.1. Под действием преобразования Донахью триада кубического дерева сменяет типы строго по схеме, изображённой на рисунке 2.

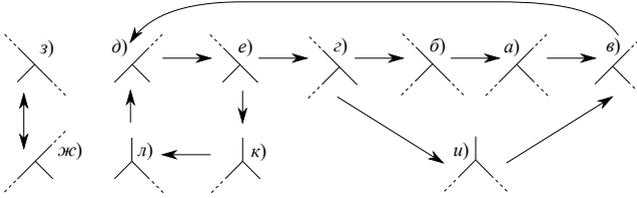


Рисунок 2 — Карусельный эффект для триад

В разделе 2.2 рассматривается карусельный эффект для внутренних ростков дерева.

Определение 2.2.1.

1. Пусть T — ПКДВК, e — правое ребро этого дерева, соединяющее вершину a с сыном b . Рассмотрим новое дерево $T(e)$, которое имеет следующие отличия от дерева T :
 - правым сыном вершины a является новая вершина c ;
 - правым сыном вершины c является вершина b ;
 - левым сыном вершины c становится новая вершина d , которая является листом.
2. Переход от дерева T к дереву $T(e)$ назовем *реализацией ростка*. Новое ребро, соединяющее вершины c и d , назовем *ростком*.
3. Аналогичным образом определяется операция разбиения левого ребра. При этом, будем считать, что для ребра, соединяющего висячий корень с сыном, операция разбиения не определена.

Рисунок 3 иллюстрирует приведенное определение.

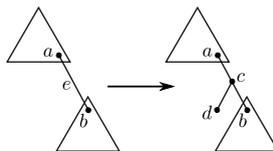


Рисунок 3 — Реализация ростка в дереве

Назовём росток, расположенный на ребре, идущем к листу, *внешним*, а росток, расположенный на ребре, ведущем к нелисту — *внутренним*. Внутренние ростки под воздействием преобразования Донахью сохраняются.

Определение 2.2.2. Плоское кубическое дерево, не содержащее реализованных внутренних ростков, назовём *примитивным* деревом.

В разделе 2.2 выделены 28 типов внутренних ростков, и описан соответствующий этой классификации карусельный эффект (т. е. правила изменения типа внутреннего ростка при преобразовании Донахью).

В **разделе 2.3** построено семейство деревьев, длины орбиты которых растут как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад в дереве. Деревья этого класса состоят из двух зигзагов, присоединённых к корневой триаде; в одном из зигзагов реализован внутренний росток. Представитель данного семейства изображён на рисунке 4.

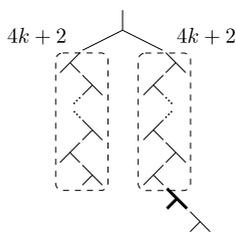


Рисунок 4 — Деревья, длины орбит которых растут как $\Theta(n^2)$

Более формально: справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.4. При $k \geq 2$ длина орбиты дерева, изображённого на рисунке 4, равна $288k^2 + 312k + 72$.

Раздел 2.3 посвящён рассмотрению семейств коротких орбит преобразования Донахью, количество которых возрастает достаточно быстро относительно размера деревьев.

Л. Шапиро обнаружил класс циклов длины 6, количество которых растёт как $\Theta(2^n)$, где n — количество листьев в деревьях. Будем называть семейства циклов такого вида *шапировскими*. В разделе 2.3 было построено нешапировское семейство циклов длины 6. Структура такого цикла проиллюстрирована на рисунке 5. Изображённые на рисунке деревья этого цикла состоят из зигзагов, выражения показывают количества триад в зигзагах. Параметры $k, l, m \in \mathbb{N}$. Количество таких циклов растёт как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад.

Также в разделе 2.3 было построено семейство циклов длины 9, количество которых растёт как $\Theta(2^{\frac{n}{2}})$, где n — количество триад. Типичный элемент этого семейства изображён на рисунке 6.

Третья глава посвящена решению перечислительных задач, связанных с графами поворотов.

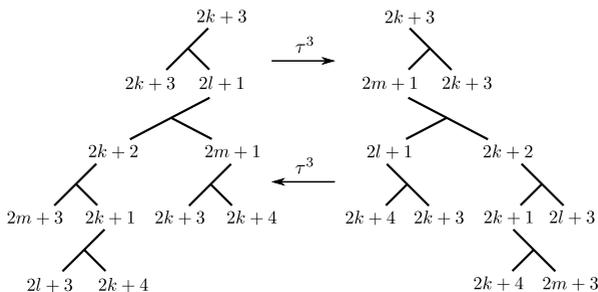


Рисунок 5 — Пример нешапировского цикла

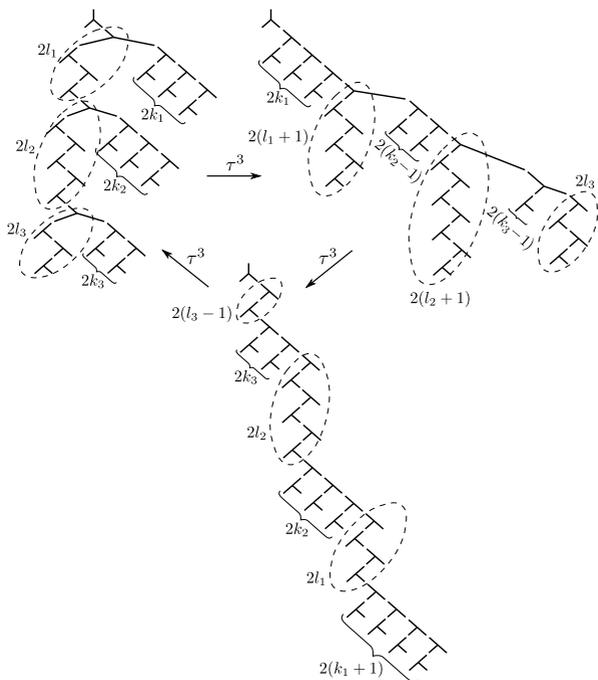


Рисунок 6 — Экспоненциальное семейство циклов длины 9

Определение 3.1.2. *Шаблон* k -го уровня для плоского некубического дерева (далее — ПДVK) с n некорневыми вершинами назовём некубическое дерево, удовлетворяющее следующим условиям:

1. высота дерева, то есть наибольшая длина пути от корня к листу, равна $k + 1$;
2. листья дерева, находящиеся на нижнем ярусе, помечены натуральными числами;
3. сумма меток и количества непомеченных некорневых вершин равна n .

Определение 3.1.4. Дерево T соответствует шаблону P , если T получается из P путём добавления на позиции листьев нижнего яруса поддеревьев, количество вершин в которых равно меткам этих листьев.

В качестве иллюстрации на рисунке 7 изображены шаблон и соответствующее ему некубическое дерево.

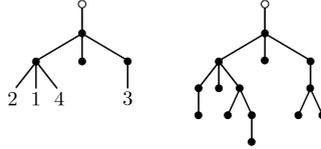


Рисунок 7 — Шаблон дерева

Определение 3.1.5. Некубические деревья T_1 и T_2 называются эквивалентными на уровне m , если они соответствуют одному шаблону уровня m .

Проведём факторизацию графа преобразования Донахью по данной эквивалентности, то есть «склеим» вершины, обладающие одним шаблоном.

Определение 3.1.6. Графом поворотов m -го уровня для деревьев с n некорневыми вершинами назовём ориентированный граф G_n^m , вершинами которого являются шаблоны m -го уровня для деревьев с n некорневыми вершинами, а рёбрам соответствуют кубические деревья. Ребро e идёт от вершины v_1 к v_2 , если образ дерева e при левой биекции $l(e)$ соответствует шаблону v_1 , а образ этого дерева при правой биекции $r(e)$ — шаблону v_2 .

В разделе 3.1 получены производящие функции для количества вершин v_n^m в графах поворотов G_n^m .

Теорема 3.1.2. Пусть $F_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^m x^n$. Тогда

1. $F_1(x) = \frac{x-x^2}{1-2x}$;
2. $F_m(x) = \frac{x}{1-F_{m-1}(x)}$ при $m \geq 2$.

Также была получена комбинаторная интерпретация подходящих дробей для разложения производящей функции чисел Каталана в цепную дробь. Здесь и далее $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ — число Каталана.

Предложение 3.1.3. Подходящие дроби для производящей функции $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$ равны производящим функциям $F_m(x)$ для количества вершин в графах поворотов.

В разделе 3.2 рассматривается задача нахождения производящих функций для количества вершин в примитивных графах поворотов. Под примитивным графом поворотов \widehat{G}_n^m понимаем граф, полученный из обычного графа поворотов G_n^m удалением всех рёбер, соответствующих непримитивным деревьям (изолированные вершины тоже удалены).

Для производящей функции количества вершин в графе \widehat{G}_n^m будем использовать обозначение $\widehat{F}_m(x)$.

Предложение 3.2.1.

$$\widehat{F}_1(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \quad (3)$$

Найти производящую функцию для чисел \widehat{v}_n^m при $m \geq 2$ позволяет следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. При $m \geq 2$ верно, что

$$\widehat{F}_m(x) = \frac{x(1 + x + x\widehat{H}_{m-1}(x))}{1 + x - \widehat{H}_{m-1}(x)}, \quad (4)$$

где

$$\widehat{H}_l(x) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i x^i \widehat{F}_{l-i}(x) + \frac{(-1)^l x^{l+1} + x^2}{1 + x} + \frac{(-1)^l x^{l+2}}{1 - x}. \quad (5)$$

В разделе 3.3 рассматривается задача перечисления циклов в графах поворотов.

Пусть G — орграф. Скажем, что $[G]$ — орграф, полученный из G заменой всех кратных рёбер одного направления на одинарные. Используем обозначение $c_m(n, s)$ для количества простых циклов длины s в графе $[G_n^m]$. Справедливы приведённые ниже утверждения.

Теорема 3.3.8. При $s \geq 2$

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} c_1(n, s)x^n = x^{s+1} \left(\frac{1 - x}{1 - 2x} \right)^{s-1}. \quad (6)$$

Теорема 3.3.12. Производящая функция $\sum_{n=3}^{\infty} c_2(n, 2)x^n$ равна

$$\frac{(1 - 4x + 3x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 + x^6 + 3x^7 - 5x^8 + 4x^9 - x^{10})x^3}{(1 - 3x + x^2)(1 - 2x)}. \quad (7)$$

Теорема 3.3.13.

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_2(n, 3)x^n = \frac{x^4}{(1 - 3x + x^2)^2(1 - 2x)^2} (1 - 10x + 42x^2 - 102x^3 + 175x^4 - 238x^5 + 236x^6 - 110x^7 - 102x^8 + 230x^9 - 151x^{10} + 36x^{11} + 16x^{12} - 12x^{13} + 2x^{14}). \quad (8)$$

В четвёртой главе рассматривается задача перечисления деревьев, у которых заданы длины нескольких первых дуг. В разделе 4.1 эта задача решается для множества всех деревьев с заданным числом триад.

Определение 4.1.1. Для дерева T с пустым левым поддеревом назовем *дугой* такую последовательность деревьев $T, \tau(T), \tau^2(T), \dots, \tau^k(T)$, что $\tau^k(T)$ обладает пустым правым поддеревом, и k — минимально возможное. Число k назовем *длиной дуги*.

Дерево с пустым правым поддеревом $\tau^k(T)$ при однократном преобразовании переходит в дерево $\tau^{k+1}(T)$ с пустым левым поддеревом. Дугу дерева $\tau^{k+1}(T)$ назовем второй дугой дерева T . Аналогично определяется третья дуга дерева, четвертая и т. д.

Рассмотрим деревья, состоящие из $n+1$ триады, левое поддерево которых пусто. Обозначим через $T(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ количество таких деревьев, длина первой дуги которых равна k_1 , второй — k_2 и т. д., длина s -ой дуги равна k_s .

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.1.1.

1. $T(n, k) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} C_{i_1-1} \cdot C_{i_2-1} \cdot \dots \cdot C_{i_k-1}$, где суммирование происходит по всем упорядоченным разложениям числа n в виде суммы k слагаемых;
2. $T(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1}$.

Теорема 4.1.3.

1. $T(n, 1, 1) = C_{n-2}$;
2. $T(n, 1, 2) = T(n, 2, 1) = C_{n-2} - 2^{n-3}$.

Теорема 4.1.4.

1. $T(n, 1, 1, 1) = \sum_{i=1}^{n-3} i \cdot T(n-i, 1, 1, 1) - \sum_{i=1}^{n-4} i \cdot C_{n-i-3} + C_{n-3}$ при $n \geq 5$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} T(n, 1, 1, 1)x^n = \frac{2x^4-2x^3-2x^2+x}{x^2-3x+1} + x^3 \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \right)$;
3. $T(n, 1, 1, 1) \sim C_{n-3}$.

В разделе 4.2 рассматривается задача перечисления примитивных деревьев, у которых заданы длины нескольких первых дуг.

Пусть количество триад в деревьях равно $n+1$, левые поддеревья пусты. Обозначим через $\widehat{T}(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ количество таких деревьев, которые являются примитивными, и длина первой дуги которых равна k_1 , второй — k_2 , и т. д., длина s -й дуги равна k_s .

Нам понадобится производящая функция для чисел Риордана r_n , она имеет следующий вид¹³:

¹³Bernhart F. R. Catalan, Motzkin, and Riordan numbers // Discrete Mathematics. – 1999. – Vol. 204, no. 1–3. – P. 73–112.

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \frac{1+x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x(1+x)}. \quad (9)$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.2.1.

1. $\sum_{n=k}^{\infty} \widehat{T}(n, k) x^n = x^k R^k(x);$
2. $\widehat{T}(n, k) \sim \frac{k 3^{n+\frac{1}{2}}}{2^{k+2} \sqrt{\pi n}^{\frac{3}{2}}}.$

Теорема 4.2.2.

1. $\widehat{T}(n, n-1) = 0$ при $n \geq 2;$
2. $\widehat{T}(n, n-2) = n-2$ при $n \geq 3;$
3. $\widehat{T}(n, n-3) = n-3$ при $n \geq 4.$

Теорема 4.2.4.

1. $\widehat{T}(n, 1, 1) = \widehat{T}(n-1, 3)$ при $n \geq 2;$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n, 1, 1) x^n = \frac{x(3+3x-\sqrt{1-2x-3x^2})}{2(1+x)^2};$
3. $\widehat{T}(n, 1, 1) \sim \frac{3^{n+\frac{1}{2}}}{32\sqrt{\pi n}^{\frac{3}{2}}}.$

Следствие 4.2.5. При $n \geq 1$ верно, что $\widehat{T}(n, 1) = \widehat{T}(n, 1, 1) + \widehat{T}(n+1, 1, 1).$

В разделе 4.3 сформулированы и доказаны утверждения, устанавливающие связь между локальными (структурными) свойствами деревьев и их глобальными свойствами (длинами дуг).

Под листовой триадой будем понимать триаду, не имеющую сыновей. Назовём свойство дерева, состоящее в том, что все его листовые триады являются левыми сыновьями, свойством *lleaves*; свойство, состоящее в том, что все листовые триады являются правыми сыновьями, — свойством *rleaves*. Если в дереве отсутствует триады типа x , то скажем, что оно обладает свойством *miss(x)* (здесь вместо x) может быть любой из 11 типов триад, см. раздел 2.1).

Теорема 4.3.1.

1. Если дерево с пустым левым поддеревом обладает свойствами *rleaves*, *miss(a)* и *miss(z)*, то длины всех его дуг равны одному.
2. Если дерево с пустым левым поддеревом обладает свойствами *lleaves* и *miss(a)*, то длины всех дуг этого дерева равны двум.

В приведённых ниже обозначениях будем считать, что учитываются только деревья с пустым левым поддеревом и n некорневыми триадами:

1. s_n — количество деревьев, удовлетворяющих свойствам *rleaves*, *miss(a)* и *miss(z)*;
2. \widehat{s}_n — количество примитивных деревьев, удовлетворяющих свойствам *rleaves*, *miss(a)* и *miss(z)*;
3. t_n — количество деревьев, удовлетворяющих свойствам *lleaves*, *miss(a)*;

4. \hat{t}_n — количество примитивных деревьев, удовлетворяющих свойствам *leaves, miss(a)*.

Сформулированные ниже утверждения показывают, что эффекты из теоремы 4.3.1 являются массовыми.

Теорема 4.3.2.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{(1-x)^2 - \sqrt{(1-x)(1-3x+3x^2-5x^3)}}{2x^2}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x^3}}{2x^2}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n = \frac{1-2x-x^2 - \sqrt{(1-3x)(1-x)^2(1+x)}}{2x^2}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{t}_n x^n = \frac{1-2x^2 - \sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$.

Следствие 4.3.3.

1. $s_n \sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{5}{2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} + 1} \right)^n$, где C — положительная константа;
2. $t_n \sim \frac{3^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}$;
3. $\hat{s}_n = \begin{cases} C \frac{n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$
4. $\hat{t}_n = \begin{cases} C \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем.

1. Построено семейство орбит преобразования Донахью, длины которых растут как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад в дереве.
2. Построено новое семейство орбит преобразования длины 6, количество которых растёт как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад в дереве.
3. Построено семейство орбит преобразования длины 9, количество которых растёт как $\Theta(2^{\frac{n}{2}})$, где n — количество триад.
4. Вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества вершин в графах поворотов и примитивных графах поворотов.
5. Вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества циклов заданной длины в графе поворотов первого уровня (без кратных рёбер). Вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества циклов длины 2 и 3 в графе поворотов второго уровня (без кратных рёбер).

6. Вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества деревьев с заданными длинами нескольких первых дуг. Результаты аналогичного вида получены для примитивных деревьев.
7. Обнаружены семейства деревьев, длины всех дуг которых равны одному, двум. Вычислены производящие функции и получены асимптотические оценки для количества деревьев в этих семействах.

В дальнейших исследованиях предполагается развить формальную алгебраическую теорию, включающую описание преобразования Донахью в терминах преобразований инцидентностей при представлении деревьев на основе разбиения на разные типы структурных элементов. Ожидается, что все описания окажутся сравнительно однотипными — в терминах симметрических инверсных полугрупп с итеративными замыканиями.

Автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Пушкареву И.А. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Пушкарев И. А., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: элементарный подход // Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова Российской академии наук. — 2013. — Т. 411. — С. 148–177. — Пер. на англ. яз.: Pushkarev I. A., Byzov V. A. Donaghey's Transformation: an Elementary Approach // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 196, no. 2. — P. 199–215.
2. *Пушкарев И. А., Бызов В. А.* Повороты первого уровня на множестве плоских деревьев // Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова Российской академии наук. — 2013. — Т. 411. — С. 178–190. — Пер. на англ. яз.: Pushkarev I. A., Byzov V. A. First-level rotations on the set of plane planted trees // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 196, no. 2. — P. 216–222.
3. *Пушкарев И. А., Бызов В. А.* Дуги преобразования Донахью и треугольник Каталана // Научно-технический вестник Поволжья. — 2015. — № 1. — С. 19–22.
4. *Пушкарев И., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: карусельные эффекты и ручные компоненты // Прикладная дискретная математика. — 2019. — № 44. — С. 12–33.

Тезисы и материалы конференций:

5. *Пушкарев И. А., Бызов В. А.* Перечисление экстремальных классов перестановок, родственных фрактальному повороту // Всероссийская ежегодная научно-техническая конференция «Общество, наука, инновации» (НТК-2012). — Вятский государственный университет. Киров, 2012. — С. 1433–1435.
6. *Пушкарев И. А., Бызов В. А.* О некоторых отображениях, связанных с фрактальным и простым поворотами плоских деревьев // Всероссийская ежегодная научно-техническая конференция «Общество, наука, инновации» (НТК-2012). — Вятский государственный университет. Киров, 2012. — С. 1436–1439.
7. *Бызов В. А.* Использование теоремы об окаймлении для получения оценки количества орбит преобразования Донахью // Межрегиональная научно-практическая конференция «Математическое моделирование и вычислительная математика». — Киров, 2012. — С. 37–40.
8. *Бызов В. А.* Повороты первого уровня на множестве плоских деревьев // Межрегиональная научно-практическая конференция «Математическое моделирование и вычислительная математика». — Киров, 2012. — С. 41–50.

9. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: циклы длины 6 // Общество, наука, инновации. (НПК – 2014): всероссийская ежегодная научно–практическая конференция. – Киров, 2014. – С. 1482–1485.
10. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Изменение типа внутреннего роста при преобразовании Донахью // ОБЩЕСТВО, НАУКА, ИННОВАЦИИ. (НПК – 2016): всероссийская ежегодная научно–практическая конференция. – Киров, 2016. – С. 2707–2711.
11. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Эмпирическое исследование дуг преобразования Донахью // ОБЩЕСТВО, НАУКА, ИННОВАЦИИ. (НПК – 2017): всероссийская ежегодная научно–практическая конференция. – Киров, 2017. – С. 539–546.
12. *Бызов В. А.* О задаче перечисления циклов в графах поворотов // Математика и междисциплинарные исследования - 2019: всероссийская научно–практическая конференция молодых ученых с международным участием. – Пермь, 2019. – С. 87–91.
13. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Алгебраическая структура для пересчетов инцидентностей триад плоского кубического дерева, соответствующих преобразованию Донахью // Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». – Казань, 2019. – С. 151–152.

Статьи в других изданиях:

14. *Бызов В. А.* Перечислительные задачи, связанные с преобразованием Донахью // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2019. – Т. 24, № 125. – С. 5–25.
15. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: основные гипотезы, карусельные эффекты и ручные компоненты // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2014. – Т. 16. – С. 106–111.
16. *Пушкарёв И. А., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: примитивно-индуктивный подход // Advanced Science. – 2017. – № 1. – URL: [http://advanced-science.ru/assets/mgr/docs/1\(2017\)/Физико-математические/pushkarev-byzov-k-pechati.pdf](http://advanced-science.ru/assets/mgr/docs/1(2017)/Физико-математические/pushkarev-byzov-k-pechati.pdf).

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

17. *Свид. 2013612109* Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Программа для эмпирического исследования свойств орбит преобразования Донахью на основе идеологии триад / В.А. Бызов; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «ВятГУ» (RU). – №2012661406; заявл. 21.12.2012; опублик. 14.02.2013, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

18. *Свид. 2015611150* Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Эмпирическое исследование свойств деревьев-зигзагов / В.А. Бызов, И.А. Пушкарёв; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «ВятГУ» (RU). – №2014662296; заявл. 01.12.2014; опубл. 26.01.2015, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.
19. *Свид. 2015611465* Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Построение графов поворотов первого уровня / В.А. Бызов, И.А. Пушкарёв; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «ВятГУ» (RU). – №2014662292; заявл. 01.12.2014; опубл. 29.01.2015, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.

Бызов Виктор Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРБИТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДОНАХЬЮ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____