

На правах рукописи



Шелопут Татьяна Олеговна

**Исследование и решение обратных задач в  
проблемах моделирования  
гидрофизических полей в акваториях с  
жидкими границами**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.*

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор

**Агошков Валерий Иванович**

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 16 июня 2021 года в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.05.13.18.018 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9, МФТИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»  
<https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>.

Работа представлена 5 марта 2021 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

## Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованию и численному решению некоторых обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений, возникающих при моделировании гидротермодинамики в акваториях с жидкими границами. Под жидкими (открытыми) границами акватории в данной работе подразумеваются границы типа “вода-вода”, отделяющие рассматриваемую акваторию от других водных областей. В основе данной работы лежит общая методология исследования и решения обратных задач и задач оптимального управления, изложенная в работе В.И. Агошкова, которая, в свою очередь, базируется на результатах работ А.Н. Тихонова, Ж.-Л. Лионса, М.М. Лаврентьева и других авторов.

**Актуальность темы исследования.** В настоящее время одним из активно развивающихся направлений науки и технологий является математическое моделирование и создание систем мониторинга и прогнозирования отдельных акваторий (морей, заливов, открытых акваторий океанов) и прибрежных территорий. Актуальность данной тематики обоснована необходимостью оценки последствий антропогенных воздействий на морские территории, решения задач морской навигации, прогноза погоды, моделирования и оценки последствий штормов и течений, вызванных ураганами, и т.п. Не менее актуальной темой является прогнозирование изменений характера циркуляции и климатических изменений для выбранной акватории. Для корректного воспроизведения физических явлений в отдельных акваториях требуются мелкие масштабы пространственных сеток (1-2 км) и учет специфики рассматриваемой зоны. Для решения таких задач создаются региональные модели.

Разработчики региональных моделей гидротермодинамики открытых акваторий неизбежно сталкиваются с проблемой постановки граничных условий на жидких границах. От способа задания граничных условий на открытых границах напрямую зависит полученный результат как при долгосрочных расчетах, так и в задачах оперативного прогноза. Идеальные граничные условия на открытых границах позволяют волнам и потокам, которые генерируются внутри моделируемой

области, свободно проникать через жидкую границу; также открытые границы должны быть проницаемы для волн и потоков, приходящих извне. Одна из трудностей в постановке таких условий связана с тем, что математические модели, описывающие гидрофизические процессы в морях и океанах, сложны и нелинейны. Другая трудность – отсутствие точной информации о внешних («приходящих») потоках энергии и массы. Неудачное задание граничных условий на открытых границах приводит к искажению результатов моделирования, несоответствию полученных результатов с наблюдаемыми полями течений, температуры и т.д. При долгосрочных (климатических) расчетах адекватное задание граничных условий на жидких границах является особенно важной задачей.

**Степень разработанности темы исследования.** Существуют различные приближения, которые можно применить для задания граничных условий на жидких границах. В некоторых региональных моделях на открытых границах ставятся условия излучения. Еще одним распространенным приемом является использование осредненных данных о потоках через открытую границу. Иногда возможно провести предварительный расчет по всей акватории Мирового океана на грубой сетке и использовать полученные данные в качестве граничных условий на жидкой границе. Развитием данной идеи является метод вложенных сеток – с обратной связью, с неполной обратной связью и без обратной связи. Каждый из перечисленных способов имеет свои преимущества, недостатки и сферу применения – проблема учета жидких границ в моделях в настоящее время не считается решенной и остается актуальной.

В настоящей работе используется подход, базирующийся на теории обратных задач и вариационной ассимиляции данных. В рамках данного подхода функции в граничных условиях на жидких границах, характеризующие влияние Мирового океана на рассматриваемую область, считаются неизвестными. В работе рассмотрены некоторые обратные задачи о восстановлении таких «граничных функций» с использованием имеющихся данных о гидротермодинамических параметрах («данных наблюдений»).

**Основной целью работы** является постановка и исследование

некоторых обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений, возникающих при моделировании гидротермодинамики в открытых акваториях, сравнение и оценка эффективности различных подходов к решению обратных задач, реализация алгоритмов в численной модели гидротермодинамики открытой морской акватории.

**Научная новизна.** В работе подробно рассмотрен подход к учету жидких границ при математическом моделировании гидротермодинамики открытых акваторий, основанный на методе вариационной ассимиляции данных. Проведено теоретическое исследование задачи вариационной ассимиляции данных о температуре. Впервые сформулирована и исследована обратная задача о восстановлении неизвестной функции в граничных условиях на жидких границах для задачи, основанной на линеаризованной системе уравнений мелкой воды, с привлечением данных о баротропных скоростях. Предложен итерационный алгоритм решения этой задачи. В эксперименте с данными, в которые был внесен искусственный «гауссов» шум, данный алгоритм показал лучшее соответствие с точным решением, чем метод, основанный на ассимиляции данных об уровне. Впервые сформулирована и исследована обратная задача о восстановлении граничных функций на внешних и внутренних жидких границах для модели гидродинамики открытой акватории, основанной на линеаризованной системе уравнений мелкой воды. Предложен итерационный алгоритм решения задачи, который может быть интерпретирован как совместное применение методов вариационной ассимиляции данных и разделения области, а также дающий возможность независимого решения в подобластях прямой и сопряженной задач.

**Теоретическая ценность работы.** В работе сформулированы обобщенные и операторные постановки обратных задач, проведено теоретическое исследование задач, получены условия их однозначной и плотной разрешимости. Предложены итерационные алгоритмы решения задач и сформулированы достаточные условия их сходимости. Полученные теоретические результаты сформулированы в виде теорем.

**Практическая ценность работы.** В работе проведен анализ эффективности предложенных алгоритмов, определены сферы возможного практического применения того или иного алгоритма. Алгорит-

мы вариационной ассимиляции данных о температуре (солености) и об уровне на жидкой границе реализованы в модели гидротермодинамики Балтийского моря. Алгоритм вариационной ассимиляции данных о температуре также реализован в качестве подключаемого блока в информационно-вычислительной системе ассимиляции данных «ИВМ РАН-Балтийское море».

**В работе были использованы следующие методы и подходы:** методы теории сопряженных уравнений; методы вариационной ассимиляции данных наблюдений; теория обратных и некорректно поставленных задач; методы вычислительной математики для численного решения начально-краевых задач; методы разделения области; современные инструменты для численной реализации алгоритмов и разработки комплексов программ; современные инструменты для обработки, интерполяции и визуализации данных.

**Положения, выносимые на защиту.** Основной результат: проведено теоретическое исследование и разработаны алгоритмы решения обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений, позволяющие учитывать жидкие границы при моделировании гидротермодинамики в открытых акваториях для моделей, основанных на методе расщепления. В частности:

- проведено теоретическое исследование и разработан алгоритм решения задачи вариационной ассимиляции данных о температуре на жидкой границе, разработанный алгоритм внедрен в численную модель гидротермодинамики Балтийского моря и включен в ИВС «ИВМ РАН-Балтийское море»;
- сформулирована и исследована обратная задача о восстановлении неизвестной функции в граничных условиях на жидких границах для задачи, основанной на линеаризованной системе уравнений мелкой воды, разработан новый алгоритм ее решения и проведен ряд численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность алгоритма;
- разработан и обоснован алгоритм совместного применения методов вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой гра-

нице и разделения области, дающий возможность независимого решения в подобластях прямой и сопряженной задач;

- разработан программный комплекс по решению задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений за уровнем на жидкой границе для численной модели гидротермодинамики Балтийского моря.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных теоретических результатов обосновывается строгостью и последовательностью рассуждений и подтверждается результатами численных экспериментов. Достоверность результатов численных экспериментов подтверждается использованием известных численных методов и проведенным сравнением с данными измерений и результатами референтных расчетов.

Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались: *на научных семинарах* ИВМ РАН, ИВМиМГ СО РАН, МФТИ; *на международных конференциях*: «ApplMath20» (2020), «YIC 2019» (2019), «7th IEEE/OES Baltic Symposium» (2018), «ESA Baltic from space workshop» (2017), «СПММОИ и ПВ - 2017», «EGU General Assembly 2017», «IV International Conference “Modern Information Technologies in Earth Sciences”» (2016), «Марчуковские научные чтения 2020», на 9-ой и 10-ой международных школах-семинарах «Спутниковые методы и системы исследования Земли» (2018, 2019); *на всероссийских конференциях*: XIX и XX Всероссийских конференциях молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (2018, 2019), 15-ой, 16-ой и 18-ой Всероссийских открытых конференциях “Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса”» (2017, 2018, 2020), 59-ой, 60-й и 61-ой Всероссийской научной конференции МФТИ (2016-2018), научной конференции «Ломоносовские чтения» (2017), научной конференции «Тихоновские чтения» (2017), XVII Всероссийской Конференции-школе молодых исследователей “Современные проблемы математического моделирования” (2017), VIII Всероссийской конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (2016).

Результаты работы были отмечены почетным дипломом на XIX Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям в 2018 году.

**Публикации.** По результатам работы опубликованы 11 статей [1–11], среди которых статьи [1–8] опубликованы в журналах, индексирующихся в Web of Science, SCOPUS, [2–7, 9] – в журналах, входящих в список ВАК. Также по результатам диссертации было опубликовано 14 работ в сборниках трудов конференций и тезисов докладов [12–25], получено «Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ» [26]. Некоторые результаты диссертации были включены в монографию [27].

**Личный вклад автора.** Теоретическое исследование задач и формулировка алгоритмов их решения осуществлены автором лично под научным руководством Агошкова В. И. Реализация алгоритмов численного решения задач, в том числе применительно к акватории Балтийского моря, дальнейшее исследование и сравнение методов, а также постановка и исследование задачи о восстановлении граничной функции по данным о баротропных скоростях проведены автором лично. Постановка и численное решение задачи о совместном применении метода разделения области и вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой границе осуществлены совместно с Лёзиной Н. Р.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертационной работы составляет 128 страниц, включая 40 рисунков, 3 таблицы и список литературы из 101 наименования.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументированы научная новизна исследований и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** проводится обзор информационных источников по проблеме математического моделирования гидротермодинамики открытых акваторий (*раздел 1.1*), а также формулируется класс обрат-



ных задач, возникающих при моделировании гидрофизических полей в акваториях (морях и океанах) с жидкими границами (*раздел 1.2*). В качестве модели гидротермодинамики открытой акватории рассматривается модель, основанная на системе уравнений, записанных в приближении Буссинеска и гидростатики. Система уравнений дополняется начальными и граничными условиями; для записи граничных условий граница  $\Gamma$  области  $D$  (открытой акватории) представляется как объединение четырех непересекающихся частей  $\Omega$ ,  $\Gamma_{w,op}$ ,  $\Gamma_{w,c}$ ,  $\Gamma_H$ , где  $\Omega$  – “невозмущенная поверхность океана”,  $\Gamma_{w,op}$  – жидкая вертикальная боковая граница,  $\Gamma_{w,c}$  – твердая часть вертикальной боковой границы,  $\Gamma_H$  – дно океана. Граничные условия на жидкой границе  $\Gamma_{w,op}$  записываются с использованием дополнительных неизвестных функций. Для аппроксимации модели по времени используется метод расщепления, для этого весь интервал времени  $(0, \bar{t})$  разделяется на подынтервалы  $(t_{j-1}, t_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . На каждом подынтервале решение полной системы уравнений заменяется решением подзадач (шагов метода расщепления):

**Шаг 1.** Задача конвекции-диффузии для температуры ( $T$ ).

**Шаг 2.** Задача конвекции-диффузии для солёности ( $S$ ).

**Шаг 3.** Задача о нахождении вектора горизонтальной скорости  $\vec{u}$  и функции уровня моря  $\xi$ .

Полученная таким образом полудискретная модель является приближением к изначальной версии модели.

В работе предполагается, что на некоторой части  $\Gamma_{o,T}$  границы  $\Gamma = \partial D$  и в какой-то промежуток времени из  $(0, \bar{t})$  имеются данные наблюдений за температурой  $T_{obs}$ . Характеристическая функция множества точек, на котором имеются наблюдения  $T_{obs}$ , обозначается  $\chi_T$ . Аналогично вводится характеристическая функция  $\chi_{\xi, \partial\Omega}$  – для наблюдений за уровнем  $\xi_{obs}$  на  $\partial\Omega \times (0, \bar{t})$ .

Рассматриваются следующие уравнения замыкания:

$$\chi_T T = \chi_T T_{obs}, \text{ на } \Gamma \times (0, \bar{t}), \quad (1)$$

$$\chi_{\xi, \partial\Omega} \xi = \chi_{\xi, \partial\Omega} \xi_{obs} \text{ на } \partial\Omega \times (0, \bar{t}). \quad (2)$$

Формулируется *обратная задача*: найти  $\vec{u}$ ,  $\xi$ ,  $T$ ,  $S$  и дополнительные

неизвестные функции в граничных условиях на жидкой границе, такие, что выполняются уравнения полудискретной модели и уравнения замыкания (1), (2). Для решения такой обратной задачи в работе используется вариационный подход – задача переформулируется как задача минимизации функционала, в котором условия (1), (2) рассматриваются в смысле наименьших квадратов. Таким образом, сформулированную задачу можно также рассматривать как *задачу вариационной ассимиляции данных наблюдений*.

Использование метода расщепления позволяет рассматривать задачу вариационной ассимиляции данных не для исходной нелинейной системы уравнений гидротермодинамики, а пошагово. Так, например, ассимиляция данных о температуре производится на Шаге 1 метода расщепления, ассимиляция уровня – на Шаге 3 метода расщепления.

**Во второй главе** исследуется и решается задача вариационной ассимиляции данных о температуре, соответствующая Шагу 1 метода расщепления. В *разделе 2.1* формулируется обратная задача о восстановлении неизвестной функции в граничном условии на жидкой границе с использованием данных наблюдений, заданных на границе области. Задача конвекции-диффузии для температуры с Шага 1 метода расщепления имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t + \vec{U} \cdot \mathbf{Grad}T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \mathbf{Grad}T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial N_T} + \gamma_T(T - T_a) = m_{w,op}d_T + Q_T \text{ на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \\ T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $f_T$ ,  $\gamma_T$ ,  $T_a$ ,  $Q_T$  – заданные функции;  $\vec{U}$  – трехмерный вектор скорости;  $\partial T / \partial N_T \equiv \vec{N} \cdot \hat{a}_T \cdot \mathbf{Grad}T$ , где  $\vec{N}$  – внешняя нормаль к  $\Gamma$ ;  $T_{j-1} = T|_{t=t_{j-1}}$ ;  $\gamma_T \equiv 0$ ,  $T_a \equiv 0$  на  $\Gamma \setminus \Omega \forall t \in (t_{j-1}, t_j)$ ;  $U_n^{(-)} \equiv (|\vec{U} \cdot \vec{N}| - \vec{U} \cdot \vec{N})/2$ ;  $U_n^{(-)} = 0$ ,  $d_T \equiv 0$  на  $(\Gamma \setminus \Gamma_{w,op}) \times (t_{j-1}, t_j)$ ;  $m_{w,op}$  – характеристическая функция  $\Gamma_{w,op}$ . Формулируется следующая обратная задача: найти температуру  $T$  и дополнительную неизвестную функцию  $d_T$ , такие, что выполнены уравнения системы (3) и условие замыкания (1).

В *разделе 2.1* была сформулирована обобщенная и операторная постановка задачи (3), а также операторная постановка обратной за-

дачи. Для введения и исследования свойств операторов были использованы результаты работ Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса. В *разделе 2.2* была доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $\Gamma_{o,T} \equiv \Gamma_{w,op}$ ,
- 2)  $(\Gamma_{w,op} \setminus \Gamma_{o,T} \neq \emptyset) \cap (\Gamma_{o,T} \setminus \Gamma_{w,op} \neq \emptyset)$ .

Тогда исследуемая обратная задача однозначно и плотно разрешима.

Для приближенного решения обратной задачи формулируется однопараметрический класс вариационных задач следующего вида:

$$\frac{\alpha}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} m_{w,op} (d_T - d_T^{(0)})^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Gamma} \chi_T (T - T_{obs})^2 d\Gamma dt \rightarrow \inf_{d_T},$$

где  $d_T \in L_2(\Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j))$ ,  $T = T(d_T)$  является обобщенным решением задачи (3),  $\alpha \geq 0$  – параметр регуляризации,  $d_T^{(0)}$  – заданная функция (например,  $d_T^{(0)} = 0$ , либо  $d_T^{(0)}$  – некоторое приближение к искомой функции  $d_T$ ). В *разделе 2.3* формулируется итерационный алгоритм решения задачи минимизации (метод градиентного спуска), который состоит в решении прямой задачи (3), сопряженной задачи и нахождении нового приближения к функции  $d_T$ :

$$d_T^{k+1} = d_T^k - \tau_k m_{w,op} \left( \alpha (d_T^k - d_T^{(0)}) + T^{k,*} \right),$$

где  $\tau_k$  – подходящий итерационный параметр,  $T^{k,*}$  – решение сопряженной задачи. Также в *разделе 2.3* доказывается теорема о сходимости функций  $d_T^k(\alpha)$  и  $T^k(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , основным результатом которой можно коротко сформулировать следующим образом:

**Теорема 2.** При выполнении условий теоремы 1 и  $T_{obs}$  – произвольном элементе из  $L_2(\Gamma_{o,T} \times (t_{j-1}, t_j))$  исследуемая обратная задача имеет единственное квазирешение  $d_T^\dagger$ ,  $T^\dagger$ , и при этом  $\exists \tilde{\tau} > 0$ , такой что при  $\tau_k = \tau = const > 0$ ,  $\tau < \tilde{\tau}$  выполняется:

$$1) \quad \|d_T^k(\alpha) - d_T^\dagger\|_{L_2(\Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j))} + \|T^k(\alpha) - T^\dagger\|_{L_2((t_{j-1}, t_j); W_2^1(D))} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \|T^k(\alpha) - T_{obs}\|_{L_2(\Gamma_{o,T} \times (t_{j-1}, t_j))} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

В разделе 2.4 приводятся результаты численных экспериментов. Для иллюстрации теоретических результатов была проведена первая серия экспериментов на тестовых функциях и на данных, близких к реальным, таким образом, утверждения, сформулированные в разделе 2.3 были экспериментально подтверждены. Для оценки эффективности предложенного алгоритма была проведена вторая серия экспериментов: алгоритм был внедрен в численную модель гидротермодинамики Балтийского моря, разработанную в ИВМ РАН на базе INMOM (Institute of Numerical Mathematics Ocean Model), и использовался в расчетах на каждом втором временном слое модели на Шаг 1 метода расщепления, описанного в первой главе диссертации. Были проведены расчеты гидротермодинамики Балтийского моря на временной интервал с 1.04.2007 по 30.04.2007 с включением и без включения процедуры ассимиляции. В качестве данных наблюдений были использованы данные реанализа по модели HIROMB (High-Resolution Operational Model for the Baltic) версии 3.0, предоставляемые Шведским институтом гидрологии и метеорологии (SMHI).

В диссертации для сравнения на рисунках представлены распределения температуры по глубине на жидкой границе по данным реанализа и по результатам расчета с использованием и без использования ассимиляции. Из рисунков можно сделать вывод, что алгоритм ассимиляции работает корректно, т.е. приближает температуру на жидкой границе к данным наблюдений.

На Рисунке 1 для сравнения представлены распределения температуры по глубине на 27.04.2007 на широте 57,4°: данные реанализа по модели HIROMB (Рисунок 1 (а)), результаты расчета без использования ассимиляции (Рисунок 1 (б)), с использованием ассимиляции (Рисунок 1 (в)). По рисункам видно, что алгоритм ассимиляции приближает результаты расчета к данным реанализа не только на жидкой границе, где производится ассимиляция, но и на других вертикальных разрезах. Тем не менее, построение распределений температуры

на разрезах, отстоящих от жидкой границы дальше, чем представленный на Рисунке 1, показало, что предложенный алгоритм ассимиляции практически не оказывает влияния на распределение температуры по глубине южнее  $56^\circ$  северной широты.

На Рисунке 2 (а) представлен модуль разницы между температурой поверхности моря по результатам расчетов без ассимиляции и результатом интерполяции на сетку модели данных наблюдений со спутников для 12.04.2007, а на Рисунке 2 (б) – модуль разницы между температурой поверхности моря по результатам расчетов с ассимиляцией и данными наблюдений для того же дня. Как видно из рисунков,

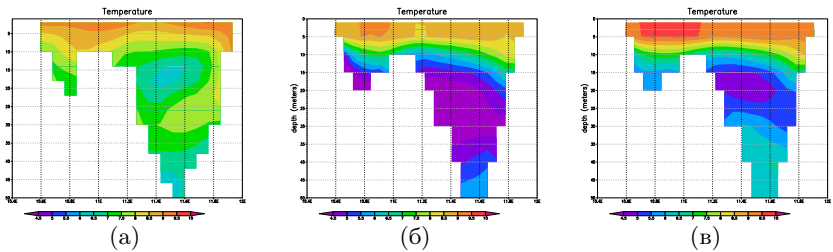


Рис. 1. Профиль температуры на 27.04.2007 на широте  $57,4^\circ$ : (а) данные наблюдений (реанализ); (б) расчет без ассимиляции; (в) расчет с ассимиляцией

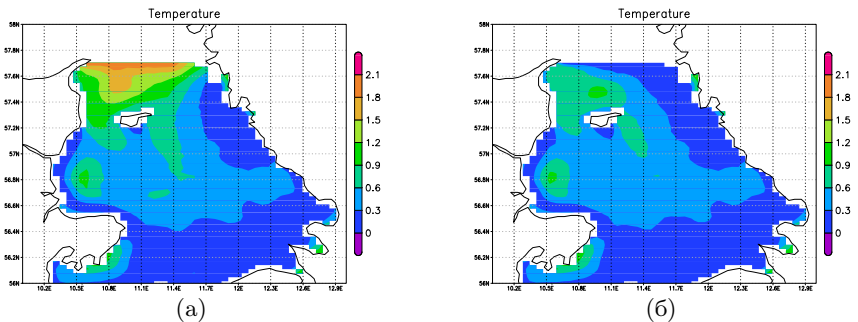


Рис. 2. Модуль разности между температурой поверхности моря по результатам расчетов и данными наблюдений на 12.04.2007 года: (а) между расчетом без ассимиляции и данными; (б) между расчетом с ассимиляцией и данными

алгоритм ассимиляции температуры на жидкой границе влияет на температуру поверхности моря вблизи жидкой границы и приближает результат моделирования к данным наблюдений со спутников. Тот же результат подтверждается и рядом других рисунков, представленных в диссертации.

В *разделе 2.5* приводятся результаты численного эксперимента по использованию описанного выше метода для учета потока соленой воды через открытую границу в модели гидротермодинамики Балтийского моря, совместно с алгоритмом ассимиляции данных об уровне (см. *раздел 3.1*) и температуре на открытой границе. Решение задачи ассимиляции данных о солености проводится аналогично решению задачи ассимиляции данных о температуре. Учет граничных условий на открытых границах для солености в Балтийском море особенно важен, поскольку соленость Балтийского моря во многом определяется поступлением высокосолёных североморских вод. Приведены результаты численного эксперимента по моделированию большого балтийского залива (ББЗ), произошедшего в декабре 2014 года. На Рисунке 3 для сравнения приведены распределения солености по глубине в проливе Fermer Belt (разрез по долготе  $11,4^\circ$ ). На Рисунке 3 (а) представлено распределение до ББЗ; результаты по расчетам различных типов примерно одинаковы и соленость не превышает 13 ‰. На Рисунке 3 (в)

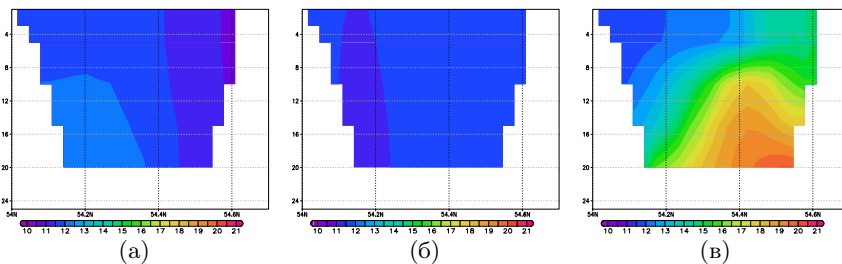


Рис. 3. Значения солености (‰) в проливе Fermer Belt на долготе  $11,4^\circ$ : (а) на 25.11.2014, до ББЗ; (б) на 28.12.2014 (во время ББЗ), расчет с использованием “nudging”-метода; (в) на 28.12.2014 (во время ББЗ), результат расчета с использованием вариационной ассимиляции.

приведено распределение по результатам расчета с использованием алгоритма вариационной ассимиляции. Из рисунка видно, что соленость в придонном слое значительно выросла, что и наблюдалось во время ББЗ. В расчете с использованием “nudging”-метода (Рисунок 3 (б)) повышение солености в придонном слое не воспроизводится. В работе представлены и другие иллюстрации, показывающие, что разработанный алгоритм целесообразно использовать моделирования данного природного явления. Проведено сравнение результатов моделирования с представленными в других работах.

В разделе 2.6 формулируются выводы по Главе 2. Результаты второй главы опубликованы в работах [2-4, 11].

В третьей главе рассматриваются различные подходы к решению задачи восстановления граничных функций на жидкой границе для задачи, основанной на линеаризованной системе уравнений мелкой воды. Линеаризованная система уравнений мелкой воды рассматривается в полудискретном виде: для этого используется неявная схема аппроксимации задачи по времени. Данная система, рассматриваемая на интервале времени  $(t_{j-1}, t_j)$ , имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\vec{U}}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{U} - g \cdot \mathbf{grad} \xi = \tilde{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\Delta t} - \mathbf{div} (H \vec{U}) = \tilde{f}_3 \text{ в } \Omega, \\ H \vec{U} \cdot \vec{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ ,  $\ell$  – параметр Кориолиса,  $g$  – ускорение свободного падения,  $H$  – глубина водоема,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ ,  $d_s$  – дополнительная неизвестная функция. В данной главе используются также следующие обозначения:

$$\xi \equiv \xi|_{t=t_j}; \quad \vec{U} \equiv \underline{U}|_{t=t_j} - \text{баротропные скорости, } \underline{U} = \frac{1}{H} \int_0^H \vec{u} dz,$$

$$\tilde{f} = \vec{f}_j + \left( \underline{U}|_{t=t_{j-1}} \right) / \Delta t, \quad \tilde{f}_3 = \left( \xi|_{t=t_{j-1}} \right) / \Delta t, \quad \vec{f}_j - \text{заданная функция.}$$

Задача (4) является одной из подзадач, решаемых на Шаге 3 метода расщепления, причем найденные в данной задаче уровень  $\xi$  и баротропная составляющая скорости  $\underline{U}$  являются приближением к компонентам точного решения на интервале времени  $(t_{j-1}, t_j)$ , поэтому, если имеются данные наблюдений за уровнем либо баротропными скоростями, их ассимиляцию следует проводить именно в этой подзадаче.

В разделе 3.1 приводятся результаты численного решения задачи вариационной ассимиляции данных об уровне. Рассматривается задача об отыскании  $d_s$ ,  $\xi$ ,  $\vec{U}$ , удовлетворяющих системе (4) и уравнению замыкания (2). Теоретическое исследование данной задачи было проведено в работе Агошкова В.И. (2005). В диссертации формулируется алгоритм численного решения задачи, адаптированный для реализации в модели гидротермодинамики открытой акватории, основанной на методе расщепления. В разделе приводятся результаты применения алгоритма к решению задачи моделирования гидротермодинамики Балтийского моря, а также рассматривается вопрос о доступности данных наблюдений. Для ассимиляции были использованы данные спутниковой альтиметрии и наблюдений за уровнем моря на уровнемерных постах.

В работе для сравнения были проведены расчеты на 28 дней (с 1.03.2017 по 28.03.2017) следующих типов: расчет без использования ассимиляции с граничным условием “непротекания” на жидкой границе (Расчет I); расчет с использованием ассимиляции 1-2 раза в сутки, только на тех интервалах времени, на которых имелись данные как со спутников, так и с уровнемерных постов (Расчет II); расчет с использованием ассимиляции (1 раз в час) данных, полученных, в том числе, путем линейной интерполяции данных наблюдений только с уровнемерных постов (Расчет III). Для снижения влияния некачественных данных на результат были построены и введены в функционал ковариационные матрицы ошибок данных наблюдений. Для проверки эффективности алгоритма было проведено сравнение временных рядов уровня по данным измерений с уровнемерных постов и по результатам расчетов с ассимиляцией и без нее. Временные ряды в пункте Grenø (Дания) представлены на Рисунке 4. Как видно из рисунка, ассимиляция данных с уровнемерных постов (Расчет III) значительно влияет



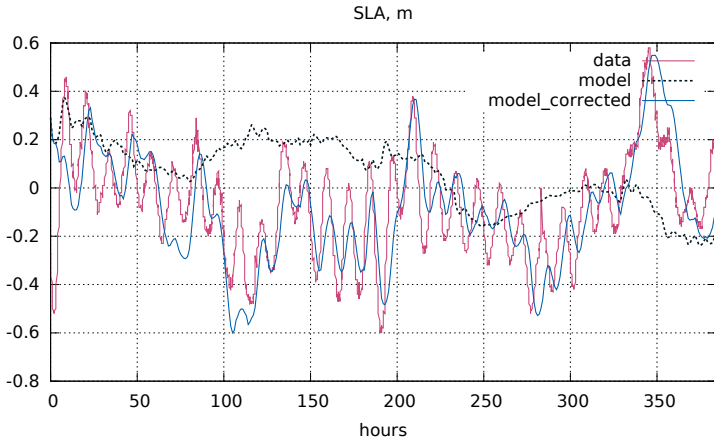


Рис. 4. Уровень моря среднесуточный (м) от времени (ч) в пункте Greno: данные измерений (фиолетовая линия), расчет с ассимиляцией (голубая линия) (Расчет III), модель без ассимиляции (черный пунктир) (Расчет I)

на результат расчета и приближает его к данным наблюдений. Тот же результат подтверждается и другими рисунками, представленными в диссертации. Также в *разделе 3.1* приводятся результаты тестового численного эксперимента для области простой формы для случая, когда данные наблюдений заданы не на жидкой границе. Экспериментально показано, что в данном случае алгоритм неэффективен.

В *разделе 3.2* формулируется и исследуется обратная задача о восстановлении неизвестной граничной функции  $d_s$  в (4) по данным о баротропных скоростях на жидкой границе, предлагается и обосновывается алгоритм ее решения. Формулируется операторная постановка обратной задачи. Для введения и исследования свойств операторов используются результаты работ Ж.-Л. Лионса, Р. Темама. Доказывается теорема об однозначной и плотной разрешимости задачи. Для приближенного решения обратной задачи формулируется однопараметриче-

ский класс вариационных задач следующего вида:

$$\frac{1}{2}\alpha \int_{\Gamma_{op}} g\sqrt{gH} \left( d_s^2 + \beta \left( \frac{\partial d_s}{\partial s} \right)^2 \right) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{op}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H\vec{U} \cdot \vec{n} - I_{obs})^2 d\Gamma \rightarrow \inf_{d_s}, \quad (5)$$

где  $I_{obs} = H\vec{U}_{obs} \cdot \vec{n}$  рассчитывается по данным наблюдений  $\vec{U}_{obs}$ ,  $s$  – длина дуги  $\Gamma_{op} \equiv \Gamma_{w,op} \cap \partial\Omega$ ,  $\beta = const \geq 0$ , причем вариант записи с  $\beta > 0$  может быть использован в случае, когда данные наблюдений содержат высокочастотный шум (в таком случае  $d_s$  принадлежит более узкому пространству функций). Для решения задачи (5) формулируется итерационный алгоритм, каждая итерация которого состоит в решении прямой задачи, сопряженной задачи и нахождении нового приближения к функции  $d_s$ .

Была осуществлена проверка эффективности работы итерационного алгоритма в численных экспериментах для прямоугольной области с гладкими и «зашумленными» данными наблюдений, а также проведено сравнение алгоритма с предложенным в работах В.И. Агошко-ва<sup>1</sup>, Е.В. Дементьевой и др.<sup>2</sup>. По проведенным численным экспериментам можно сделать следующие выводы. Ассимиляция данных эффективно приближает результаты моделирования к данным наблюдений, кроме того, учет граничных условий на жидких границах значительно уменьшает расхождение результатов моделирования с референтным расчетом по сравнению с расхождением результатов моделирования без учета открытых границ. Если данные наблюдений – гладкие функции, метод, рассмотренный в диссертации, и метод, рассмотренный в других работах, сходятся с одинаковой скоростью. В эксперименте с «зашумленными» данными метод, рассмотренный в диссертации, показал лучшее соответствие с точным решением, чем метод, предложенный в работе Е.В. Дементьевой и соавторов. Недостатком предложенного в диссертации метода является то, что данные наблюдений

<sup>1</sup> Agoshkov V.I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // RJNAMM. – 2005. – Vol. 20, no. 1. – P. 1-18.

<sup>2</sup> Дементьева Е.В., Карпова Е.Д., Шайдулов В.В. Восстановление граничной функции по данным наблюдений для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Vol. 16, no. 1. – P. 10-20.

за функцией уровня, которые используются в упомянутых работах, более доступны, чем  $I_{obs}$ .

В разделе 3.3 формулируется и исследуется обратная задача о восстановлении граничных функций на внешних и внутренних жидких границах для модели гидродинамики открытой акватории, основанной на линеаризованной системе уравнений мелкой воды. Под внешней жидкой границей ( $\Gamma_{op}$ ) подразумевается граница, отделяющая рассматриваемую акваторию от Мирового океана. Под внутренней жидкой границей ( $\Gamma_{in}$ ) подразумевается граница, которая делит область  $\Omega$  на две подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  при использовании метода разделения области. На внутренней жидкой границе записываются следующие условия сшивки:

$$\xi^{(1)} = \xi^{(2)} \text{ на } \Gamma_{in}, \quad (6)$$

$$HU_n^{(1)} = -HU_n^{(2)} = \sqrt{gH}v \text{ на } \Gamma_{in}, \quad (7)$$

где  $U_n^{(i)} = \vec{U}^{(i)} \cdot \vec{n}_i$ ,  $i = 1, 2$ , а индекс  $i$  обозначает номер подобласти. Обратная задача формулируется следующим образом: найти  $\xi^{(i)}$ ,  $\vec{U}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , а также дополнительные неизвестные  $v$ ,  $d_s$ , такие, что в каждой подобласти выполнено (4), а также выполнено условие (7) и условия замыкания (2), (6). Задачи (4) в каждой подобласти формулируются в виде операторных уравнений вида:

$$L_1\xi^{(1)} = f_1 + B_{op}d_s + B_1v, \quad (8)$$

$$L_2\xi^{(2)} = f_2 - B_2v. \quad (9)$$

Условия замыкания также формулируются в операторном виде. Для определения и исследования свойств операторов была использована вариационная теория граничных задач Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса.

Полученная система операторных уравнений записывается в виде одного уравнения. Для этого функции  $\xi^{(i)}$  выражаются из уравнений (8), (9) и подставляются в условия замыкания. Получается операторное уравнение вида:

$$A \begin{bmatrix} d_s \\ v \end{bmatrix} = \varphi,$$

для которого применимы многие результаты общей теории операторных уравнений. При дальнейшем рассмотрении задачи используется та же методология, что и во второй главе диссертации.

В работе проведено теоретическое исследование обратной задачи, в том числе доказана однозначная и плотная разрешимость, а также сформулирован итерационный алгоритм ее решения, который состоит из следующих этапов:

**Этап 1.** Пусть найдено  $d_s^k, v^k$ . Решаются прямые подзадачи в каждой подобласти  $\Omega_i, i = 1, 2$  (решение этих задач можно осуществлять параллельно).

**Этап 2.** Решаются сопряженные подзадачи в каждой подобласти  $\Omega_i, i = 1, 2$  (решение этих задач можно осуществлять параллельно).

**Этап 3.** Вычисляется следующее приближение к функциям  $d_s^{k+1}, v^{k+1}$ .

Данный алгоритм может рассматриваться как совместное применение методов вариационной ассимиляции данных и разделения области. Алгоритм подразумевает возможность независимого решения в подобластях как прямых, так и сопряженных задач, поэтому может также рассматриваться как параллельный алгоритм вариационной ассимиляции данных. Для иллюстрации теоретических выводов приведены результаты численного эксперимента для модельной задачи. Постановка и численное решение задачи осуществлены совместно с Лёзиной Н.Р., исследование задачи и формулировка алгоритма ее решения проведены автором диссертации лично с использованием результатов работ Агошкова В.И.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 5, 6, 10, 12].

Автором диссертации разработан программный комплекс по решению задачи вариационной ассимиляции данных о температуре на жидкой границе, который внедрен в качестве подключаемого модуля в численную модель гидротермодинамики Балтийского моря. Также программный комплекс включен в информационно-вычислительную систему (ИВС) «ИВМ РАН-Балтийское море» [27], что позволяет получить лучшее соответствие вычисляемых в ИВС профилей температуры по глубине и наблюдаемых профилей вблизи открытых границ акватории Балтийского моря. Также автором разработан веб-интер-

фейс ИВС для проведения расчетов на удаленном сервере через сайт <http://adeq.inm.ras.ru/>. В четвертой главе диссертации приводится описание разработанного программного комплекса.

В разделе 4.1 приводится описание программного комплекса по решению задачи вариационной ассимиляции данных о температуре на жидкой границе как составной части модели, а также приводится описание ИВС, перечисляются структурные элементы ИВС и их функции. В разделе 4.2 описываются возможности веб-интерфейса ИВС.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [8, 27]. Получено свидетельство о регистрации ИВС [26].

В **Заключении** перечисляются основные результаты работы.

## Список публикаций

1. Agoshkov V. I., Lezina N. R., Sheloput T. O. Domain decomposition method for the variational assimilation of the sea level in a model of open water areas hydrodynamics // Journal of Marine Science and Engineering. — 2019. — Vol. 7, no. 6. — P. 195.
2. Agoshkov V. I., Sheloput T. O. The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with ‘liquid’ boundaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 32, no. 3. — P. 147–164.
3. Agoshkov V. I., Sheloput T. O. The study and numerical solution of the problem of heat and salinity transfer assuming ‘liquid’ boundaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 31, no. 2. — P. 71–80.
4. Агошков В. И., Залесный В. Б., Шелопут Т. О. Вариационная ассимиляция данных в задачах моделирования гидрофизических полей в открытых акваториях // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2020. — Т. 56, № 3. — С. 1–16.
5. Агошков В. И., Лёзина Н. Р., Шелопут Т. О. Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче гидродинамики открытой акватории // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 11. — С. 1915–1932.

6. Шелопут Т. О. Численное решение задачи вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой (открытой) границе в модели гидротермодинамики Балтийского моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2018. — Т. 15, № 7. — С. 15–23.
7. Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря / В. И. Агошков, В. П. Шутяев, Е. И. Пармузин и др. // Морской гидрофизический журнал. — 2019. — Т. 35, № 6. — С. 585–599.
8. Informational Computational System “INM RAS–Baltic Sea” in the problem of operational forecasting of the marine environment state and assessment of risks of oil pollution / V. I. Agoshkov, N. A. Aseev, N. B. Zakharova et al. // 2018 IEEE/OES Baltic International Symposium (BALTIC) / IEEE. — 2018. — P. 1–9.
9. Агошков В. И., Гребенников Д. С., Шелопут Т. О. Исследование и численное решение одной обратной задачи моделирования циркуляции в акваториях с «жидкими» границами // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 2. — С. 3–15.
10. Шелопут Т. О., Лёзина Н. Р. Совместная реализация методов ассимиляции данных на «жидкой» границе и разделения области в акватории Балтийского моря // Вестник Тверского государственного университета, Серия: География и геоэкология. — 2018. — № 3. — С. 168–179.
11. Agoshkov V. I., Sheloput T. O. Variational assimilation of temperature for the model of hydrodynamics of the Baltic Sea: the solution of the open boundary problem // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2018. — no. 1. — P. 1–8.
12. Лёзина Н. Р., Шелопут Т. О. Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче ассимиляции данных наблюдений за уровнем моря // Фундаментальные и прикладные аспекты геологии, геофизики и геоэкологии с использованием современных технологий. Материалы V Международной научно-практической конференции. Часть 2. — Майкоп : Изд-во «ИП Кучеренко В.О.», 2019. — С. 11–20.
13. Sheloput T. O., Lezina N. R. On the implementation of the domain

- decomposition method in the problem of variational data assimilation in the modelling of the hydrothermodynamics of open water areas // Book of abstracts, 5th ECCOMAS Young Investigators Conference YIC 2019. — Kraków : AKNET-PRess, 2019. — P. 392–393.
14. Sheloput T. O., Agoshkov V. I. Variational data assimilation for limited-area models: solution of the open boundary control problem and its application for the Gulf of Finland // Geophysical Research Abstracts, EGU General Assimblы 2017. — Vol. 19. — 2017. — P. 765.
  15. Lezina N. R., Sheloput T. O. Application of the domain decomposition method in the variational data assimilation problem: description of two approaches // ApplMath20 (book of abstracts). — Brijuni, 2020. — P. 39.
  16. Sheloput T. O., Agoshkov V. I. Variational data assimilation in problems of modeling water areas with liquid boundaries // Proceedings of the IV International Conference “ITES-2016”. — Vladivostok : Dalnauka, 2016. — P. 94–95.
  17. Variational data assimilation system “INM RAS–Baltic sea” / E. I. Parmuzin, V. I. Agoshkov, N. A. Aseev et al. // Proceedings of the IV International Conference “ITES-2016”. — Vladivostok : Dalnauka, 2016. — P. 93–94.
  18. Шелопут Т. О. Исследование и решение обратных задач в проблемах моделирования гидрофизических полей в акваториях с открытыми границами // Марчуковские научные чтения 2020: Тезисы Междунар. конф., посв. 95-летию со дня рождения акад. Г. И. Марчука Новосибирск, 19-23 октября 2020 г. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2020. — С. 138.
  19. Шелопут Т. О., Лёзина Н. Р. Восстановление граничной функции по данным о баротропных скоростях для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Тезисы XX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. — Новосибирск : ИВТ СО РАН, 2019. — С. 49–50.
  20. Лёзина Н. Р., Шелопут Т. О. Исследование и решение задачи о восстановлении граничных функций на «внешних и внутренних жидких» границах в задаче о распространении тепла // Тезисы XIX

- Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. — Новосибирск : ИВТ СО РАН, 2018. — С. 30.
21. Шелопут Т. О. Вариационная ассимиляция данных об уровне в модели гидротермодинамики Балтийского моря, основанной на методе расщепления // Тезисы XIX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. — Новосибирск : ИВТ СО РАН, 2018. — С. 50.
  22. Шелопут Т. О. Вариационная ассимиляция данных спутниковой альтиметрии в проблеме моделирования акваторий с «жидкими» границами // Сборник тезисов докладов Шестнадцатой Всероссийской открытой конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». — М. : ИКИ РАН, 2018. — С. 69.
  23. Шелопут Т. О. Алгоритм вариационной ассимиляции данных о солености для учета граничных условий на открытых границах и его реализация в модели гидротермодинамики Балтийского моря // Сборник тезисов докладов Восемнадцатой Всероссийской открытой конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». — М. : ИКИ РАН, 2020. — С. XVIII.A.421.
  24. Агошков В. И., Шелопут Т. О. Ассимиляция данных о температуре в сигма-модели Балтийского моря для восстановления граничных функций на открытых границах акватории // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения-2017». — М. : ООО «МАКС Пресс», 2017. — С. 101–102.
  25. Шелопут Т. О. Задача вариационной ассимиляции данных об уровне на «жидкой» (открытой) границе в модели гидротермодинамики Балтийского моря // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. — М. : МФТИ, 2018. — С. 168–169.
  26. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017617552 от 6 июля 2017 г. «Информационно-вычислительная система вариационной ассимиляции данных «ИВМ РАН - Балтийское море»» / В. И. Агошков, М. В. Ассовский, Е. И. Пармузин и др. — 2017.



27. Информационно-вычислительная система «ИВМ РАН-Балтийское море»: монография / В. И. Агошков, Н. А. Асеев, Н. Б. Захарова и др. — М. : ИВМ РАН, 2016. — 139 с.