

На правах рукописи

Холодов Ярослав Александрович



РАЗРАБОТКА СЕТЕВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
НА ГРАФАХ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Иннополис – 2021

Работа выполнена в АНО ВО "Университет Иннополис"

Научный консультант: Член-корреспондент РАН, профессор, д.ф.-м.н., Петров Игорь Борисович, заведующий кафедрой вычислительной физики МФТИ (НИУ)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

Защита состоится 12 июля 2021 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета ФПМИ.05.13.18.017, по адресу: 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9., МФТИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):

<https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>

Работа представлена 10 марта 2021 г. в Аттестационную комиссию Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

В различных приложениях возникают задачи, описываемые уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). В качестве примера можно указать глобальные модели дыхательной и кровеносной систем человека, интенсивного уличного движения в мегаполисе, динамики стержневых конструкций и каркасных сооружений, переходных процессов в электроэнергетических системах, интенсивных информационных потоков в компьютерных и телекоммуникационных сетях, распространения мелкодисперсных примесей в вентиляционных сетях и др.

Сетевые вычислительные модели (уравнения в частных производных) на графах используют различные численные методы и оригинальные математические алгоритмы, в том числе алгоритм построения систем уравнений в узлах графа. Особенность этих алгоритмов заключается в том, что они должны обеспечивать непрерывную связь моделируемых величин вдоль всего графа, путем задания корректных краевых условий для всех его ветвей входящих и выходящих в каждый из его узлов.

Проблема задания корректных краевых условий при численном моделировании гиперболических систем уравнений возникла довольно давно, практически одновременно с появлением первых ЭВМ и численных методов. С тех пор много что изменилось: на порядки выросло быстродействие вычислительных систем, появились весьма сложные и высокоточные методы численного расчета и вычислительные пакеты их использующие, но проблема корректного задания краевых условий никуда не ушла. И дело здесь не в том, что её в принципе невозможно решить, а в том, что каждый раз её приходится решать снова, как только возникает новая постановка задачи или усложняется использованная ранее.

Именно эта проблема является первостепенной в данной работе. Принципиальная новизна заключается в том, что её приходится решать на всем многосвязном графа. В типичный узел которого входит и выходит несколько ветвей, вдоль каждой из которых используется своя одномерная система уравнений. При этом сам узел, как правило, имеет сложную структуру со своей собственной двумерной или трехмерной системой уравнений, заданной внутри него. Поэтому задача корректного сопряжения граничных условий для одномерных и многомерных систем уравнений внутри и снаружи узла выходит на первый план.

Задача корректного сопряжения краевых условий для систем уравнений различной размерности весьма интересна и перспективна для вычислительной науки. В первую очередь потому, что понижение размерности моделируемой задачи приводит к уменьшению вычислительных операций и упрощению численных алгоритмов, используемых при её решении. Это, в свою очередь, повышает их надежность. Не стоит надеяться, что повышение производительности ЭВМ автоматически решит эти проблемы, поскольку вместе с ростом коли-

чества операций, производимых в единицу времени, возрастает и сложность решаемых задач.

Хорошей аналогией для сравнения здесь может быть использование адаптивных иерархических сеток в численном моделировании. Это научное направление давно и плодотворно развивается, и рост производительности ЭВМ не уменьшает его актуальности.

С этой точки зрения использование разной размерности задачи в различных частях одной области интегрирования, по своей сути близко к идее использования адаптивных сеток и является в некотором смысле её продолжением. Для ее реализации необходимо научиться корректно решать задачу сопряжения краевых условий для систем уравнений различной размерности. Именно этой цели и посвящена настоящая работа.

Цели и задачи диссертационной работы

Разработать вычислительную модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях).

Для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа разработать алгоритм построения монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.

С использованием разработанной вычислительной модели в рамках общего подхода решить четыре различные по своей физической постановке сетевые задачи:

- моделирование дорожного движения (трафика) в городских транспортных сетях;
- моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях;
- моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях зданий и сооружений.
- моделирование глобальных электроэнергетических сетей.

Провести вычислительные эксперименты по решению четырех указанных задач на основе разработанных программных комплексов.

Научная новизна работы

Построена оригинальная вычислительная модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях). В качестве исследуемых приложений для применения данной модели были выбраны четыре различные по своей физической постановке задачи.

Первая - моделирование дорожного движения (трафика) в городской транспортной сети. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, в котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного под-

хода оригинальная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках городских транспортных сетей, а также может быть использована для выбора оптимальной стратегии организации движения трафика в городе.

Вторая - моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. Предложены новые концептуальная и математическая модели сети. Проведено численное моделирование в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>].

Третья - моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Была разработана вычислительная математическая модель распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях с использованием уравнений газовой динамики путем численного сопряжения областей разной размерности. Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности является ключевым элементом разработанной модели, поскольку его использование уменьшает математическую сложность и одновременно повышает её вычислительную эффективность. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение газодинамических параметров в трубопроводной сети и решать задачи динамического управления вентиляцией.

Четвертая – моделирование глобальных электроэнергетических сетей. Была разработана оригинальная вычислительная модель для численного моделирования электродинамики глобальных (межрегиональных) электроэнергетических сетей заданной топологии, для исследования экстремальных ситуаций в этих сетях, для проектирования и оптимизации их работы и др. Тестирование предложенной модели, реализованной в виде программного комплекса, показало её пригодность для решения вышеперечисленных задач.

Для численного решения нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, используемых в разработанной вычислительной модели, был реализован оригинальный алгоритм построения монотонных (при произвольном виде искомого решения) схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.

Теоретическая и практическая значимость работы

В настоящей работе построена вычислительная модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях). В качестве практических приложений были выбраны четыре различные по физической постановке задачи, решаемые в рамках общего подхода сетевых вычислительных моделей.

Первая — это моделирование движения трафика в городской транспортной сети. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках транспортной сети Москвы на значи-

тельных временных интервалах, а также может быть использована для выбора оптимальной стратегии организации дорожного движения в городе.

Вторая — моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях. Проведено численное моделирование сложных конфигураций компьютерных сетей в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2. Полученные результаты показали, что в сравнении с пакетной моделью NS-2, разработанная нами потоковая модель демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия. Позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP – сетей передачи данных.

Третья — моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Были выполнены расчеты нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты. В частности, был проведен расчет проветривания тупиковой выработки вентилятором местного проветривания. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение концентрации примесей метана в шахтенной сети выработок и решать задачи динамического управления вентиляцией.

Четвертая – моделирование глобальных электроэнергетических сетей. Были сделаны расчеты экстремальных ситуаций, возникающих в глобальных (межрегиональных) электроэнергетических сетях заданной топологии. Выполнение расчетов показали возможности разработанной модели по решению задач, описывающих негармонические процессы, происходящих в электроэнергетических сетях, а также для определения факторов, характеризующих эти процессы.

Методология и методы исследования

В диссертации в качестве основного метода исследования нелинейных волновых процессов на графах использовался вычислительный эксперимент на базе численных методов, разработанных для нелинейных уравнений и систем гиперболического типа. При разработке численных методов использовался универсальный робастный алгоритм построения монотонных (при произвольном виде искомого решения) схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов. В качестве математической модели использовалась оригинальная вычислительная модель, основанная на решении краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах. Для программной реализации использовался язык программирования C.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Разработана оригинальная вычислительная модель решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа на графах (сетях, деревьях).
2. Для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа разработан универсальный робастный алгоритм построения монотон-

ных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов.

3. С использованием разработанной вычислительной модели в рамках предлагаемого подхода получено численное решение четырех различных по своей физической постановке сетевых задач:
 - 3.1 Моделирование дорожного движения (трафика) в городских транспортных сетях;
 - 3.2 Моделирование интенсивных потоков данных в компьютерных сетях;
 - 3.3 Моделирование распространения газовых примесей в вентиляционных сетях зданий и сооружений.
 - 3.4 Моделирование глобальных электроэнергетических сетей.
4. Проведены сложные вычислительные эксперименты по решению четырех указанных задач на основе разработанных программных комплексов.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов диссертации и выносимых на защиту положений обеспечивается следующим. При разработке математических моделей и методов автор применяет обоснованные теоретические выводы и строгий математический аппарат. Выполнен ряд верификационных расчётов, произведено сравнение с экспериментом.

Разработанные в диссертационной работе методы исследования нелинейных волновых процессов на графах проходили тщательную верификацию на каждом этапе их разработки. Верификация проводилась путем сопоставления результатов расчетов с известными аналитическими и эталонными решениями тестовых задач, с расчетами других авторов, а также с экспериментальными данными.

Апробация работы

Результаты работы представлены в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК РФ и в том числе международные системы научного цитирования WOS и Scopus, а также доложены на 37 международных и российских научных конференциях. Получено 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Публикации автора по теме работы

По теме диссертации опубликована 31 работа [1-31] в печатных изданиях, рекомендованных ВАК для опубликования научных результатов докторских диссертаций, включая в том числе 17 журнальных публикаций, входящих в реферативные базы Scopus и Web of Science.

Автор выражает искреннюю благодарность всем соавторам и коллегам за сотрудничество.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Объем составляет 270 машинописных страниц, текст содержит 107 рисунков и 3 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1.

В первой главе сформулирован общий математический подход к моделированию задач, описываемых уравнениями в частных производных на графах (сетях, деревьях). Для исследования данных проблем была построена обобщенная вычислительная математическая модель решения соответствующих краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Пусть на каждом ребре k направленного графа (сети, дерева) необходимо найти решение одномерной системы уравнений гиперболического типа

$$v_t + Av_{x_k} = f_k, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x_k \leq X_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.1)$$

Здесь $v = \{v_1, \dots, v_I\}$ вектор искомых параметров, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, I$, матрица, которая может быть разной на каждой из ветвей, I - размерность системы уравнений (1.1), K - число ветвей (ребер) графа. Эта система может быть линейной или нелинейной, дивергентной или нет, иметь ненулевую правую часть f_k и т.д., что не принципиально для последующего изложения.

Из предположения о гиперболичности (1.1) следует, что матрица A имеет только действительные собственные значения (возможно и кратные) $\lambda = \{\lambda_i\}$, $i = 1, \dots, I$. Они определяются как корни уравнения

$$P_I(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda E) = 0 \quad (1.2)$$

(E - единичная матрица) и существует базис

$$\Omega = \{\omega_i\}, \quad \text{Det} \Omega \neq 0 \quad (1.3)$$

из левых собственных векторов ω_i , $i = 1, \dots, I$ (являющихся строками матрицы Ω), для каждого λ_i с точностью до длины определяемых из однородных систем линейных уравнений

$$\omega_i(A - \lambda_i E) = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.4)$$

Тогда $A \equiv \Omega^{-1} \Lambda \Omega$, (где Ω^{-1} обратная к Ω матрица) и систему (1.1) можно привести к эквивалентному виду

$$\Omega v_t + \Omega A v_{x_k} = \Omega v_t + \Lambda \Omega v_{x_k} = 0 \quad (1.5)$$

(взяв I соответствующих линейных комбинаций исходных уравнений (1.1)).

Каждое из условий совместности (1.5)

$$\omega_i^T \frac{dv}{dt_i} = \omega_i^T \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, I \quad (1.6)$$

является по сути обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль i -й характеристики системы (1.1).

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.7)$$

Такая характеристическая форма уравнений (1.1) (или ее модификации с использованием инвариантов Римана, если удастся найти соответствующее точное решение (1.6)), часто используется для построения эффективных разностных схем для решения (1.1). В граничных точках она необходима для замыкания краевых условий.

Как известно, корректная постановка задачи для (1.1) заключается в задании начальных условий

$$v(0, x_k) = v^0(x_k), \quad k = 1, \dots, K \quad (1.8)$$

и граничных условий при $x_k = 0$ и $x_k = X_k$ в узлах графа $l = 1, \dots, L, L + 1, \dots, L + L^\circ, L + L^\circ + 1, \dots, L + L^\circ + L^\bullet$. Здесь L число внутренних узлов графа (с которыми связано более одной ветви), L° - число узлов - входов графа (из которых исходит только одна ветвь графа), $L^\bullet$ - число узлов - выходов графа (в которые входит только одна ветвь графа).

На свободных концах ветвей (ребер) графа (в узлах $l = L + 1, \dots, L + L^\circ$ - входах графа, для которых $x_k = 0$ и в узлах $l = L + L^\circ + 1, \dots, L + L^\circ + L^\bullet$ - выходах графа для которых $x_k = X_k$) постановка краевых условий ничем не отличается от обычной постановки краевых условий одномерной гиперболической системы, а именно, в каждый момент времени число граничных условий (r_k° - для входов, $r_k^\bullet$ - для выходов) должно быть равно числу уходящих за область интегрирования характеристик (1.7) и вместе с условиями совместности (1.6) вдоль идущих внутрь области интегрирования характеристик. В каждый момент времени они должны составлять линейно-независимую дифференциально-алгебраическую систему. Например, для входов:

$$\varphi_{ki}^\circ(t, v(t, 0)) = 0, \quad i = 1, \dots, r_k^\circ \quad (1.9)$$

для выходов:

$$\varphi_{ki}^\bullet(t, v(t, X_k)) = 0, \quad i = I - r_k^\bullet + 1, \dots, I. \quad (1.10)$$

Тогда при расчете таких граничных точек можно использовать r_k° граничных условий (1.9) или $r_k^\bullet$ условий (1.10) вместе с $I - r_k^\circ$ (для $i = r_k^\circ + 1, \dots, I$) или $I - r_k^\bullet$ (для $i = 1, \dots, I - r_k^\bullet$) условий совместности (1.6). Матрицы:

$$\Omega^\circ = \begin{pmatrix} \omega_1^\circ \\ \vdots \\ \omega_{r_k^\circ}^\circ \\ \omega_{r_k^\circ+1}^\circ \\ \vdots \\ \omega_I^\circ \end{pmatrix}, \quad \Omega^\bullet = \begin{pmatrix} \omega_1^\bullet \\ \vdots \\ \omega_{I-r_k^\bullet}^\bullet \\ \omega_{I-r_k^\bullet+1}^\bullet \\ \vdots \\ \omega_I^\bullet \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

(соответственно для входов и выходов) должны быть неособенными: $\text{Det} \Omega^\circ \neq 0$, $\text{Det} \Omega^\bullet \neq 0$. Здесь ω_i - левые собственные векторы матрицы A из (1.4), векторы ω_i° , $\omega_i^\bullet$ получаем, дифференцируя (1.9) и (1.10):

$$\frac{d\varphi_{ki}^\circ}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial t} + \sum_{j=1}^I \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial v_j} \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial t} + \omega_i^\circ \frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^\circ = \left\{ \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial v_I} \right\},$$

$$\frac{d\varphi_{ki}^\circ}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial t} + \sum_{j=1}^I \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial v_j} \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial t} + \omega_i^\bullet \frac{dv}{dt} = 0, \quad \omega_i^\bullet = \left\{ \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{ki}^\circ}{\partial v_I} \right\}.$$

В точках ветвления графа $l = 1, \dots, L$, обозначая через M число входящих в узел l и выходящих из него ветвей, а через $m = k_1, \dots, k_M$ их номера, будем считать искомыми величинами (помимо значений векторов $v_{l1}, \dots, v_{lM}$ в окончаниях входящих в узел l и выходящих из него ветвей) также вектор $w_l(t) = \{w_{l1}, \dots, w_{lJ_l}\}$ с размерностью J_l , для определения которых имеется некоторое количество дифференциальных или алгебраических уравнений, например

$$\psi_{lr}(t, w_l, v_{l1}, \dots, v_{lM}) = 0, \quad r = 1, \dots, r_l. \quad (1.12)$$

Для расчета таких узлов графа, помимо граничных условий (1.12), необходимо использовать условия совместности (1.6), выбирая их аналогично (1.9)-(1.10).

Если в некоторый момент времени t число положительных собственных чисел $\lambda_i(t, 0)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке выходящей из этого узла ветви m° равно $r_{lm^\circ}^\circ$, а число отрицательных собственных чисел $\lambda_i(t, X_m)$ матрицы A в прилегающей к узлу l точке входящей в этот узел ветви $m^\bullet$ равно $r_{lm^\bullet}^\bullet$, то необходимо выполнения условия:

$$r_l = IM + J_l - \sum_{m^\circ} r_{lm^\circ}^\circ - \sum_{m^\bullet} r_{lm^\bullet}^\bullet. \quad (1.13)$$

Кроме того, для обеспечения линейной независимости используемых уравнений (1.12), (1.6) необходимо, чтобы

$$Det \tilde{\Omega} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \omega_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{am} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{bm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{aM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{bM} & 0 \\ \tilde{\omega}_{l11} & \dots & \tilde{\omega}_{l1m} & \dots & \tilde{\omega}_{l1M} & \tilde{\omega}_{l1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\omega}_{lr1} & \dots & \tilde{\omega}_{lrIm} & \dots & \tilde{\omega}_{lrIM} & \tilde{\omega}_{lrI} \end{array} \right\} \neq 0, \quad (1.14)$$

$\tilde{\omega}_{lr} = \left\{ \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial w_{l1}}, \dots, \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial w_{lJ_l}} \right\}$, $\tilde{\omega}_{lrm} = \left\{ \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial v_{lm1}}, \dots, \frac{\partial \psi_{lr}}{\partial v_{lmI}} \right\}$ и $\omega_{am}, \dots, \omega_{bm}$ – собственные векторы матрицы A , для каждой из ветвей $m = 1, \dots, M$, соответствующие условиям совместности (1.6) узла l . Для выходящей из узла ветви с номером m° : $a = 1$, $b = r_{lm^\circ}^\circ$, для входящей в узел ветви с номером $m^\bullet$: $a = I - r_{lm^\bullet}^\bullet + 1$, $b = I$. В соответствии с (1.13) размерность матрицы $\tilde{\Omega}$ должна быть равна $IM + J_l = r_l + \sum_{m^\circ} r_{lm^\circ}^\circ + \sum_{m^\bullet} r_{lm^\bullet}^\bullet$.

Глава 2.

Во второй главе на основе характеристического критерия монотонности разработан универсальный алгоритм построения монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации на основе их анализа в пространстве неопределённых коэффициентов. Приводятся результаты тестирования построенных разностных схем высокого порядка аппроксимации для нелинейных систем уравнений гиперболического типа в различных модельных постановках.

Для системы уравнений (1.1), все возможное семейство разностных схем с использованием диагонального разложения матрицы $A \equiv \Omega^{-1} \Lambda \Omega$ и равномерной разностной сетки: $t^n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_m = m\Delta x$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, с пространственным шагом Δx и временным шагом Δt , можно представить в следующем общем виде:

$$v_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \Omega^{-1} A_{\mu}^{\nu} \Omega v_{m+\mu}^{n+\nu} \quad (2.1)$$

где $A_{\mu}^{\nu} = \text{diag}\{\alpha_{i,\mu}^{\nu}(\sigma_i)\}$ – диагональные матрицы ($\sum_{\mu, \nu} A_{\mu}^{\nu} = E$), на главной диагонали которых находятся схемные коэффициенты: $\alpha_{i,\mu}^{\nu}(\sigma_i)$, $\sigma_i = \lambda_i \Delta t / \Delta x$, $i = 1, 2, \dots, I$.

Вид разностной схемы (2.1) определяется заданием схемных коэффициентов, выбор которых является определяющим для получения требуемых свойств схемы (2.1), более подробно алгоритм выбора схемных коэффициентов $\alpha_{i,\mu}^{\nu}(\sigma_i)$ изложен в тексте диссертации.

Для замыкания разностной системы уравнений (2.1) в граничных точках, необходимо численно интегрировать условия совместности: $\left\{ \omega_i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ вдоль идущих из области интегрирования на границу характеристик.

В случае наличия вектора правой части в системе уравнений (1.1):

$$v_t + A v_x = f(v, t, x), \quad (2.2)$$

учет его влияния на решение (2.2) может быть реализован посредством численного интегрирования: $\int_0^{\Delta t} f(v_m, x_m, t^n) dt$ в (2.2), при этом выбор точности метода можно соотнести с точностью разностной схемы (2.1):

$$\begin{cases} \tilde{v}_m = \sum_{\mu, \nu} \Omega^{-1} A_{\mu}^{\nu} \Omega v_{m+\mu}^{n+\nu}, \\ v_m^{n+1} = \tilde{v}_m + \int_0^{\Delta t} f(\tilde{v}_m, x_m, t^n) dt. \end{cases} \quad (2.3)$$

В точках ветвления графа для вектора искомых величин $w(t) = \{w_1, \dots, w_J\}$ с размерностью J , для определения которых, например, может использоваться трехмерная система гиперболических уравнений в частных про-

ИЗВОДНЫХ:

$$w_t + A_1 w_{x_1} + A_2 w_{x_2} + A_3 w_{x_3} = f(w, t, x_k), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x_k \leq X_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Расщепление по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 можно выполнить простым образом. Для этого многомерная нелинейная система уравнений гиперболического типа в левой части (2.4) представляется в виде суммы трех одномерных операторов (заключены в скобки):

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_1 \left(w_t + \frac{A_1}{\gamma_1} w_{x_1} \right) + \gamma_2 \left(w_t + \frac{A_2}{\gamma_2} w_{x_2} \right) + \gamma_3 \left(w_t + \frac{A_3}{\gamma_3} w_{x_3} \right) = \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_k \right) f(w, t, x_k), \\ & 0 < \gamma_k < 1, \quad \sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1. \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

Каждое из слагаемых в скобках системы (2.5):

$$w_t + \frac{A_k}{\gamma_k} w_{x_k} = f(w, t, x_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

является одномерной системой уравнений в векторной форме вида (2.2), поэтому при численном решении любой из систем уравнений в (2.6) мы можем использовать любую из разностных схем (2.3).

Стандартный алгоритм расчета многомерных систем типа (2.5) на каждом временном шаге, состоит либо в последовательном решении одномерных уравнений при $\gamma_k \equiv 1$, при этом общий шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия $\max_{i,k} \left| \frac{\tau \lambda_{i,k}}{h_k} \right| < 1$, $i = 1, \dots, I$, $k = 1, 2, 3$, либо в их параллельном решении с нахождением свободных параметров γ_k , $k = 1, 2, 3$ и временного шага Δt из следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \gamma_k = 1, \quad \lambda^k = \max_j \{ |\lambda_j^k| \}, \quad j = 1, \dots, J \\ & \frac{\Delta t \lambda^1}{\gamma_1 \Delta x_1} = \frac{\Delta t \lambda^2}{\gamma_2 \Delta x_2} = \frac{\Delta t \lambda^3}{\gamma_3 \Delta x_3} = \sigma \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Окончательные значения вектора w_m^{n+1} на следующем временном слое $n + 1$ в каждой рассчитываемой точке получаем следующим образом:

$$w_m^{n+1} = \sum_{k=1}^3 \gamma_k w_{m,k}^{n+1}.$$

Для проверки работоспособности предложенного подхода в многомерном нелинейном случае воспользуемся гиперболической системой уравнений трехмерной газовой динамики, со следующими начальными условиями при $t = 0$:

$$V_0 = \begin{cases} V_{out} = \{ \rho_{out}, u_0, v_0, w_0, \varepsilon_{out} \}^T, & 0 \leq \{x, y, z\} < 0.4 \text{ \& } 0.6 < \{x, y, z\} \leq 1 \\ V_{in} = \{ \rho_{in}, u_0, v_0, w_0, \varepsilon_{in} \}^T, & 0.4 \leq \{x, y, z\} \leq 0.6 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Граничные условия были периодические. Шаги по координатным осям заданы равномерными: $h = \frac{1}{(M-1)}$, $M = 101$ – число сеточных узлов на каждой координатной оси, шаг Δt на каждом временном слое $t^n = \text{const}$ выбирался из условия (2.7). В (2.8) начальные значения плотности и внутренней энергии выбирались таким образом, чтобы образовались контактные разрывы в виде прямоугольного параллелепипеда,двигающейся со скоростью $\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}$.

Этого можно достичь, если будет выполняться простое начальное условие: $\rho_{out}\varepsilon_{out} = \rho_{in}\varepsilon_{in}$. Периодические граничные условия обеспечивают возвращение возмущения назад в расчетную область после того, как оно выходит через её границы. Форма начального распределения плотности и внутренней энергии должна сохраняться при движении возмущения в области интегрирования, что позволяет сравнивать с ним полученное численное решение.

В расчетах, представленных на Рис. 2.1, задавались следующие начальные значения переменных: $V_{out} = \{\rho_{out} = 2, u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 1, \varepsilon_{out} = 2\}^T$, $V_{in} = \{\rho_{in} = 0.5, u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 1, \varepsilon_{in} = 8\}^T$. Расчеты проводились до момента времени $T \approx 8$, число сеточных узлов на осях $\{x, y, z\}$: $M = 101$, число Куранта $\sigma = 0.5$, общее число шагов численного интегрирования по времени $N = 5000$.

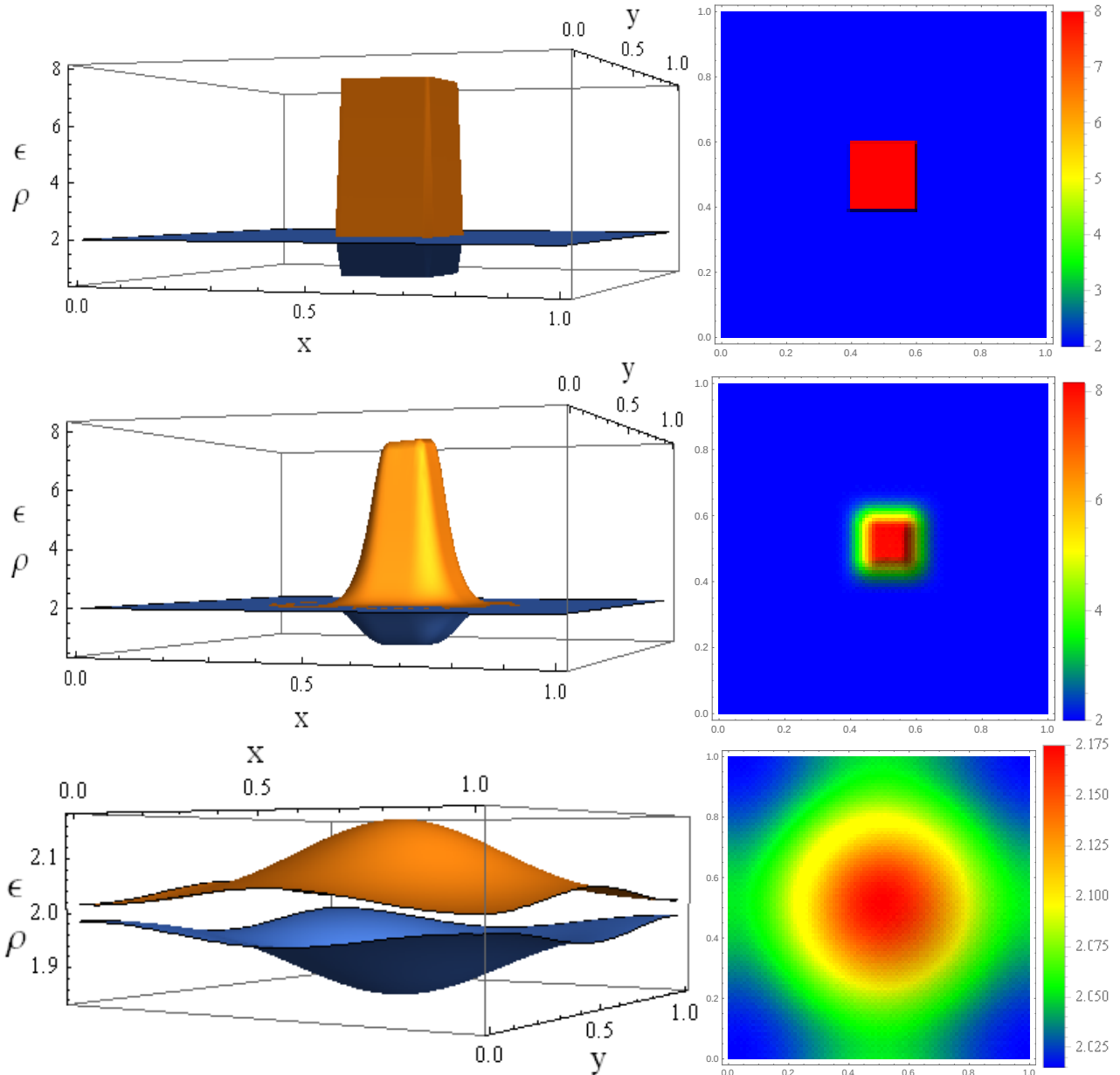


Рис. 2.1. Расчет движения контактных разрывов в виде прямоугольного параллелепипеда,двигающегося по диагонали области интегрирования $0 \leq \{x, y, z\} \leq 1$ со скоростью: $\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} = \sqrt{3}$. Слева показано распределения внутренней энергии (сверху) и плотности (снизу), справа только внутренней энергии. Верху показано исходное распределение в начальный момент времени $t = 0$. Посередине показаны результаты расчетов по монотонной комбинации схем 2-3 порядка аппроксимации. Внизу показаны результаты расчетов по монотонной схеме Годунова.

При проведении представленных численных расчетов были использованы различные технологии распараллеливания вычислительной программы. При этом вычисления проводились как на центральных процессорах, так и на графических ускорителях. Проведено сравнение производительности различных технологий многопоточных параллельных вычислений. В процессе тестирования использовались следующие высокопроизводительные вычислительные архитектуры: NVIDIA CUDA – архитектура, позволяющая производить на графическом сопроцессоре (GPU) вычисления общего назначения, при этом GPU

фактически выступает в роли мощного сопроцессора; OpenCL – стандарт разработки приложений для гетерогенных систем; OpenMP – набор директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с единой памятью.

Были получены зависимости скорости счета от размера и формы сетки (см. Таблицу 2.1). За точку отсчета была взята скорость расчета по технологии OpenMP с одной нитью, что равносильно последовательно исполняемой версии.

Из приведенных результатов тестовых расчетов следует, что применять видеокарты для решения данной задачи имеет смысл при сетках с большим числом ячеек. Также можно заметить, что скорость расчета зависит не только от размера сетки, но и от способа разбиения расчетной области на ячейки (при одинаковом полном числе ячеек).

Важным результатом является сравнение скорости работы OpenMP и OpenCL на одном и том же центральном процессоре. OpenCL на всех тестах показал более высокую производительность, причем в некоторых случаях — более чем 16-кратное ускорение. Объясняется это использованием более полного набора команд процессора. Реализация OpenCL использует расширенный набор команд SSE3, в то время как OpenMP компилируется под набор команд 80386.

Таблица 2.1. Относительное ускорение в зависимости от архитектуры

Размер сетки, ячеек	Относительное ускорение							
	CUDA	OpenCL	CUDA	OpenCL	CUDA	OpenCL	OpenCL	OpenMP
	GTX480	GTX480	C2050	C2050	C1060	C1060	CPU	CPU
Двухмерные сетки								
625	1,42	1,23	1,08	1,02	0,66	0,59	32,71	8,00
1250	1,90	1,67	1,49	1,35	0,95	0,85	29,44	8,00
2500	2,16	1,97	1,76	1,59	1,12	1,01	22,79	8,00
5000	3,81	3,41	3,05	2,73	1,93	1,72	19,05	8,00
10000	5,62	4,98	4,48	3,98	2,85	2,55	15,02	8,00
20000	9,43	8,37	7,44	6,65	4,70	4,23	13,13	8,00
40000	20,71	18,81	15,97	14,44	10,03	9,07	13,48	8,00
80000	37,99	33,92	28,27	25,55	15,28	13,22	12,65	8,00
160000	63,14	58,84	47,47	43,96	20,85	16,38	14,35	8,00
320000	74,94	68,88	54,53	50,10	21,39	16,83	13,50	8,00
640000	69,94	64,99	49,45	46,09	20,62	16,78	12,17	8,00
1280000	79,83	72,27	54,59	49,61	21,88	17,32	11,59	8,00
2560000	77,12	70,11	51,78	47,38	20,41	16,93	11,01	8,00
Трехмерные сетки								
15625	12,51	10,95	10,10	8,76	5,36	4,96	19,83	8,00
120000	46,77	41,30	36,07	31,91	12,18	10,19	10,06	8,00
125000	70,18	62,51	53,34	48,79	21,39	13,94	14,36	8,00
240000	63,75	55,96	45,92	40,36	16,97	12,85	10,72	8,00
480000	67,34	59,78	49,77	43,95	17,19	13,15	9,64	8,00
1000000	72,21	63,80	51,22	45,06	16,77	13,00	9,04	8,00
1000000	74,06	65,62	51,70	45,31	18,19	14,67	9,75	8,00
2000000	73,84	65,27	52,07	45,92	17,29	13,30	8,99	8,00
4000000	74,22	65,51	52,32	46,03	17,17	13,26	8,83	8,00

Глава 3.

В третьей главе исследовалась задача моделирования движения трафика в городской транспортной сети. При решении данной задачи использовался макроскопический подход, при котором транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная в рамках предложенного подхода оригинальная макроскопическая модель второго порядка хорошо воспроизводит реальную ситуацию на различных участках городских транспортных сетей, а также может быть использована для выбора оптимальной стратегии организации движения трафика в городе.

В современных макроскопических моделях второго порядка транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений в различных постановках, в которых по-разному учитывается зависимость интенсивности или скорости потока от его плотности. В диссертационной работе была получена новая макроскопическая модель второго порядка для плотности и скорости транспортного потока:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = f_0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} f_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $\rho(t, x)$ - обозначает число АТС (*автотранспортных средств*) на единицу длины дороги в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Аналогично, $v(t, x)$ - скорость АТС в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x , $Q = \rho v$ - интенсивность потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Если у нас есть въезжающие или съезжающие с дороги или полосы машины, то правая часть f_0 первого уравнения в (3.1) будет представлять собой количество машин прибывающих (знак плюс) или убывающих (знак минус) в единицу времени. И глядя на правую часть второго уравнения в (3.1) мы видим, как учитывается этот вклад в изменение скорости транспортного потока.

Было показано, что полученная математическая модель обеспечивает анизотропию транспортного потока на решениях системы уравнений (3.1), поскольку для её собственных значений $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ на всем диапазоне значений плотности транспортного потока выполняется условие: $\lambda_{1,2} \leq v(\rho)$.

Число граничных условий на въездах-выездах автодороги зависит от знака собственных чисел системы (3.1): $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Поскольку $\lambda_1 = v$ всегда ≥ 0 нам необходимо учитывать знак второго собственного значения $\lambda_2 = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$. Поэтому на въезде их количество либо равно двум при положительном $\lambda_2 > 0$ либо одному при $\lambda_2 \leq 0$. На выездах – наоборот: ноль при $\lambda_2 > 0$

или также одно при $\lambda_2 \leq 0$. В соответствии с этим, на въездах-выездах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени - значения интенсивности потока автомобилей $Q(t)$ и величина скорости потока $v(t)$. Помимо граничных условий, для системы (3.1) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (3.2)$$

Принципиальное отличие предложенной нами модели (3.1) от известных ранее макроскопических моделей второго порядка заключается в том, что в нашей модели не обязательно требуется построение и использование фундаментальной диаграммы в виде зависимости $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ или желаемой (равновесной) скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$, которая в других моделях обычно входит в выражение относительной скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ в уравнение изменения импульса.

Для получения эмпирической зависимости $V(\rho)$ необходимы статистические данные наблюдений значений плотности и скорости трафика за длительный момент времени с детекторов транспорта, которые не всегда доступны. Вместо производной эмпирической функции $V(\rho)$ мы аппроксимируем значение относительной скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$, используя данные наблюдений для плотности и скорости трафика в текущий момент времени с детекторов транспорта, установленных на заданном участке дороги:

$$c(\rho) = \frac{\rho_{in} + \rho_{out}}{2} \left(\frac{v_{out} - v_{in}}{\rho_{out} - \rho_{in}} \right). \quad (3.3)$$

В (3.3) ρ_{in}, v_{in} и ρ_{out}, v_{out} измеренные значения плотностей и скоростей транспортного потока в текущий момент времени на въезде и выезде заданного участка дороги. Если в один из моментов времени окажется, что $\rho_{out} = \rho_{in}$, мы можем использовать значение относительной скорости распространения возмущений в предыдущий момент времени, чтобы избежать деления на ноль в (3.3).

Автомобильное движение на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации в отличие от системы уравнений (3.1), в силу использования двух направлений движения, следует рассматривать в двумерной постановке с двумя компонентами скорости: v_x и v_y .

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_y}{\partial x} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

В (3.4) v_x и v_y теперь уже компоненты скорости транспортного потока в

рассчитываемой точке на перекрестке в направлении осей x и y . Правые части в системе (3.4) берем нулевыми поскольку считаем, что все АТС, въезжающие на перекресток, должны с него выехать в силу выполнения закона сохранения потока. Систему уравнений (3.4) можно переписать в упрощённом виде с учетом того, что $Q_x = \rho v_x$ и $Q_y = \rho v_y$ есть компоненты интенсивности транспортного потока по двум направлениям движения и $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$, поскольку водители, как правило, не меняют полосу движения при пересечении перекрестка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x + c_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_y + c_y) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Прежде чем перейти к построению модели расчета движения транспорта для перекрестка произвольной конфигурации, рассмотрим в качестве примера сектор перекрёстка, представленный на Рис. 3.1.

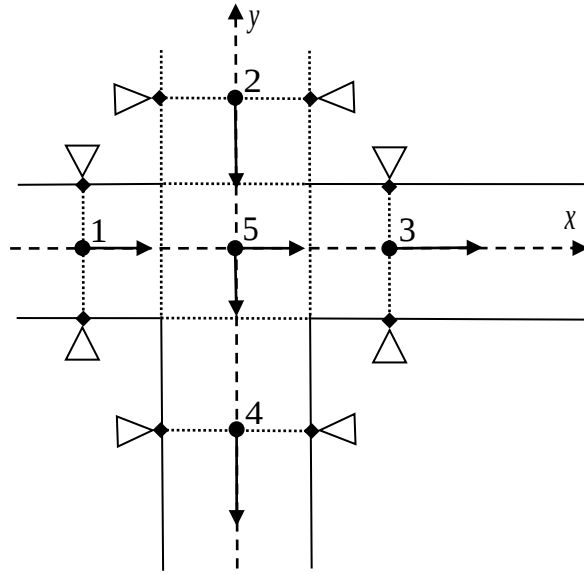


Рис. 3.1. Пример одного из составных элементов регулируемого перекрестка – сектора. Разрешенные направления движения показаны стрелками, 1-5 номера узлов расчетной сетки, треугольниками показано возможное расположение детекторов транспорта.

Вначале для наглядности, ограничимся двумя светофорными фазами, а именно, когда для одной дороги, например, идущей вдоль оси x на Рис. 3.1, горит зеленый свет, а для другой, идущей вдоль оси y , горит красный и наоборот. Считаем, что значения скоростей и интенсивностей транспортных потоков на въездах и выездах сектора в точках (1,2,3,4) в любой момент времени нам известны из показаний датчиков, обозначенных на Рис. 3.1 треугольниками. Пропорции АТС, поворачивающих внутри сектора, легко определяются из показаний датчиков: направо $\alpha_{1,4} = Q_4/Q_1$; налево $\alpha_{2,3} = Q_3/Q_2$.

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (3.5), решаемой в секторе перекрестка, с учетом разрешенных направлений движения транспорта в секторе. Будем использовать следующие обозначения: Δt — шаг численного интегрирования по времени, Δx и Δy — пространственные размеры сектора. Учтем также перераспределения транспортных потоков внутри сектора, вызванных поворотами водителей при движении на перекрестке. Сделаем это при помощи известных нам коэффициентов $\alpha_{1,4}$ и $\alpha_{2,3}$, при этом надо не забывать, что потоки сохраняют свой знак и закон сохранения потока должен по-прежнему выполняться внутри заданного сектора. В соответствии с этими правилами, на ребро 5,4 переносим часть потока $\alpha_{1,4}Q_{1,5}$, повернувшего с ребра 1,5 направо, и забираем часть потока $\alpha_{2,3}Q_{2,5}$, повернувшего с ребра 2,5 налево, в результате получаем значение потока: $Q_{5,4} + \alpha_{1,4}Q_{1,5} - \alpha_{2,3}Q_{2,5}$. То же самое делаем на ребре 5,3. Значения скоростей $v_{5,4}$ и $v_{5,3}$ на границах сектора оставляем прежними. Полученные значения потоков подставляем в разностную аппроксимацию (3.5):

$$\begin{cases} \frac{\rho_5^{n+1} - \rho_5^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{5,3}^n + \alpha_{2,3}Q_{2,5}^n - \alpha_{1,4}Q_{1,5}^n) - Q_{1,5}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{5,4}^n + \alpha_{1,4}Q_{1,5}^n - \alpha_{2,3}Q_{2,5}^n) - Q_{2,5}^n}{\Delta y} = 0 \\ \frac{v_{x,5}^{n+1} - v_{x,5}^n}{\Delta t} + \left(v_{x,5}^n + \rho_5^n \frac{v_3^n - v_1^n}{\rho_3^n - \rho_1^n} \right) \frac{v_{5,3}^n - v_{1,5}^n}{\Delta x} = 0 \\ \frac{v_{y,5}^{n+1} - v_{y,5}^n}{\Delta t} + \left(v_{y,5}^n + \rho_5^n \frac{v_4^n - v_2^n}{\rho_4^n - \rho_2^n} \right) \frac{v_{5,4}^n - v_{2,5}^n}{\Delta y} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Осталось теперь только определить, как будут вычисляться промежуточные значения переменных $v_{i,j}^n$, $Q_{i,j}^n$, которые находятся на границах сектора между точками: 1,5; 2,5; 5,3 и 5,4. Начнем их вычисление с очевидных оценок, а именно, если у нас горит красный сигнал светофора для дороги, идущей вдоль оси y , то значения $v_{2,5}^n$, $Q_{2,5}^n$ будут равны нулю. Если светофор красный для дороги, идущей вдоль оси x , то равны нулю будут значения $v_{1,5}^n$, $Q_{1,5}^n$.

Для того чтобы вычислить значения $v_{i,j}^n$, $Q_{i,j}^n$ на границах сектора не перекрытых красным сигналом светофора мы воспользуемся интерполяционными выражениями для $v_{m+1/2}^n$ и $Q_{m+1/2}^n = \rho_{m+1/2}^n v_{m+1/2}^n$ сеточно-характеристического метода первого порядка аппроксимации:

$$\begin{cases} \rho_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(\rho_m^n + \rho_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \text{sign} \left(\frac{Q_m^n - Q_{m+1}^n}{\rho_m^n - \rho_{m+1}^n} \right) (\rho_m^n - \rho_{m+1}^n) \\ v_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(v_m^n + v_{m+1}^n) + \frac{1}{2} \text{sign} \left(\frac{v_m^n + v_{m+1}^n}{2} + \frac{\rho_m^n + \rho_{m+1}^n}{2} \frac{v_m^n - v_{m+1}^n}{\rho_m^n - \rho_{m+1}^n} \right) (v_m^n - v_{m+1}^n) \end{cases}$$

Эту же разностную аппроксимацию уравнений (3.6) можно одновременно применить ко всем секторам перекрестка, с учетом разрешенных направлений движения транспорта в секторе. Стоит отдельно отметить, что значения переменных на границах между сектором перекрестка и примыкающими к нему до-

рогами следует использовать в разностной аппроксимации системы уравнений (3.1) в точках (1,2,3,4), примыкающих к перекрестку дорог. Эти точки являются граничными и значения переменных в них, найденные нами, представляют собой граничные условия для системы уравнений (3.1), которые обеспечивают нам связь моделируемых величин на всем графе транспортной сети.

Для того, чтобы оценить качество работы разработанной модели не на отдельных дорогах и перекрестках, а на едином участке транспортной сети, было выполнено моделирование трафика в округе Монтгомери, США (см. Рис. 3.4). Моделируемый участок транспортной сети включает в себя шесть перекрестков, показанных на рисунке, для которых известны данные с транспортных детекторов.



Рис. 3.4. Исследуемый участок транспортной сети в округе Монтгомери, США, включающий в себя шесть перекрестков для которых известны данные с транспортных детекторов.

Данная дорожная сеть была создана в открытом программном пакете SUMO NetEdit [<http://sumo.sourceforge.net>]. Для проведения сравнительного моделирования был выбрано 20.11.2017, поскольку в этот день все детекторы были исправны. В качестве входных значений мы задавали данные об интенсивности транспортных потоков на въездах в транспортную сеть в зависимости от времени, а затем запускался расчет. Для сравнения полученных результатов также проводилось аналогичное моделирование с использованием микромодели, реализованной в программном пакете SUMO.

Прежде всего, необходимо было убедиться в том, что никакие АТС не были потеряны при расчетах внутри транспортной сети. Для этого сравнивалось количество всех автомобилей на выездах из данной сети в зависимости от времени. На Рис. 3.5 показаны результаты данного расчета, как для микромодели, так и для тестируемой макромодел, которые немного отличаются от реальных данных. С учетом того факта, что реальные данные суммарно на въезде и на выезде тоже немного отличаются друг от друга (шум и неточность датчиков), небольшие отклонения вполне допустимы. В случае значительных отклонений (до 30-40 АТС в 5 минутный временной интервал) недостаток автомобилей при моделировании – может быть обусловлен не учётом АТС, выезжающих или въезжающих с боковых дорог, где отсутствуют данные с детекторов. В целом результаты численного моделирования соответствуют реальным данным.

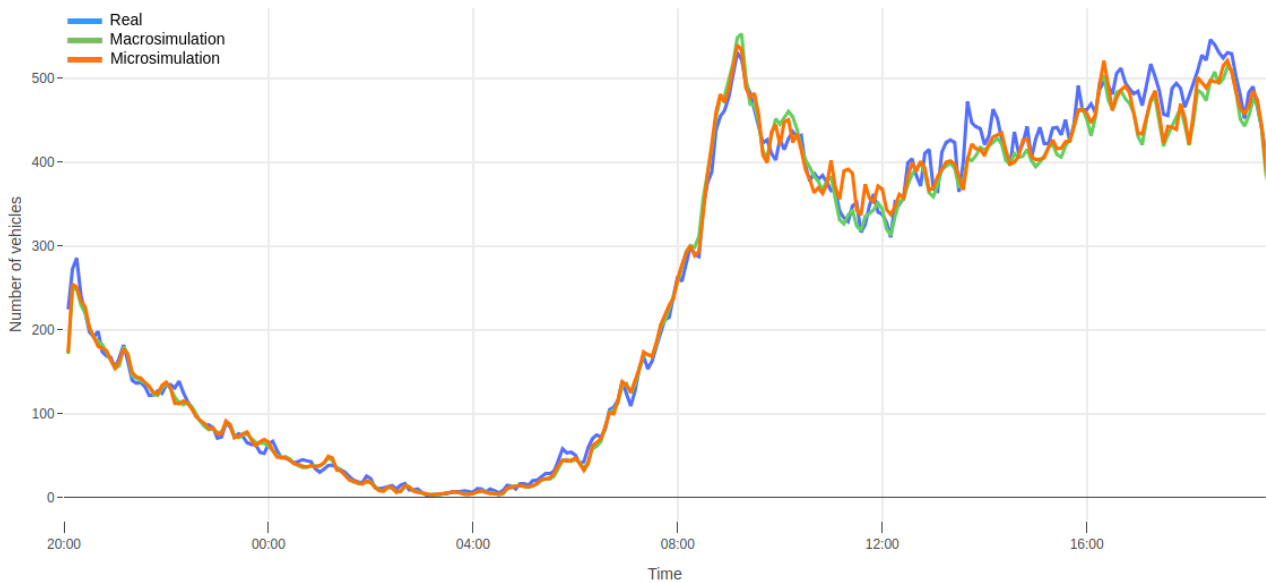


Рис. 3.5. Сравнение количества АТС, измеренного на всех выездах из транспортной сети в зависимости от времени (синий цвет). Показаны результаты моделирования, как для микро-модели, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit (красный цвет), так для тестируемой макромоделю (зеленый цвет).

Для глобальной оценки точности расчётов мы сравнили количество АТС по всем учитываемым дорогам для всех средних по временным интервалам абсолютных отклонений микро и макромоделю. Для микромоделю, реализованной в программном пакете SUMO NetEdit, мы получили абсолютное отклонение в 34.88 АТС, а для тестируемой макромоделю в 33.47. Это показывает, что тестируемая макромоделю показывает весьма правдоподобные результаты на всех дорогах моделируемой транспортной сети (их 8) со средним абсолютным отклонением порядка 15% за сутки. Это неплохой результат с учетом того, что мгновенная ошибка измерений транспортного детектора может достигать до 20%.

Рассмотрим теперь, как работает в самом простом случае алгоритм управления дорожным движением на отдельной дороге. Для этого достаточно посмотреть на модельную фундаментальную диаграмму представленную на Рис. 3.6. На ней хорошо видно, что одному значению интенсивности $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика № 1 и № 2 с разными скоростями и плотностями транспортного потока $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое значение является предпочтительным в силу того, что его скорость выше $v_1 > v_2$, а плотность $\rho_1 < \rho_2$ ниже второго. В простейшем случае задача адаптивного управления сводится к тому, чтобы удерживать транспортный поток в докритическом состоянии с плотностью меньше критической $\rho < \rho_{crt}$ (точка перегиба на фундаментальной диаграмме) и не позволять ему уйти в заторное состояние. Для отдельной дороги эта задача решается аналитически, для всей городской транспортной сети она может вообще не иметь решения или оно будет не единственным.

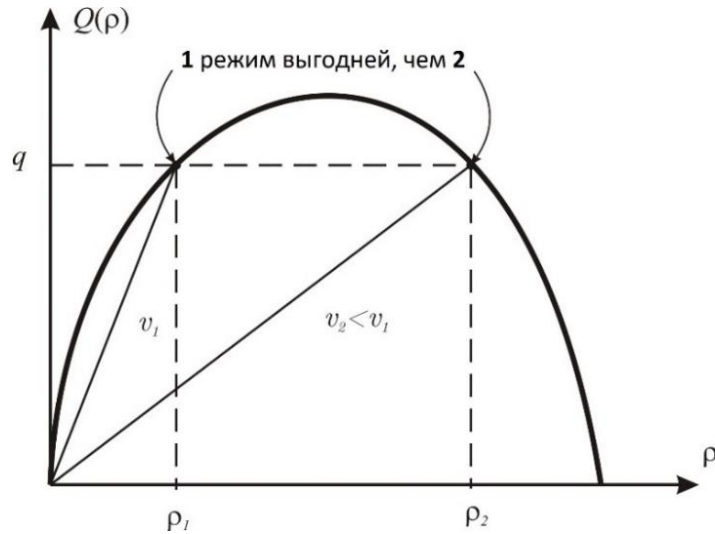


Рис. 3.6. Модельная фундаментальная диаграмма, в которой одному значению интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ соответствуют два различных состояния трафика 1 и 2 с разными скоростями и плотностями: $Q(\rho) = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. При этом первое является предпочтительным в силу того, что его скорость выше $v_1 > v_2$, а плотность $\rho_1 < \rho_2$ ниже второго.

Начнем с алгоритма решения для отдельной дороги. Воспользуемся разработанной нами макроскопической моделью транспортного потока (3.1). Нам нужно контролировать значение плотности транспортного потока так, чтобы оно не превышало критическое $\rho < \rho_{crt}$. Соответственно нам нужно использовать первое уравнение в системе (3.1) для решения этой задачи.

Сформулируем задачу Коши для этого уравнения, считая дорогу бесконечной (что справедливо в случае использования прозрачных граничных условий или кольцевой формы дороги) и задавая в правой части изменение плотности в местах въезда и выезда с дороги с координатами $x = x_k$ в виде локальных источников или стоков транспортного потока $f_0(x_k, t)$:

$$\begin{cases} \rho_t + Q_\rho \rho_x = f_0(x, t) = \sum_k f_0(x_k, t), \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

Аналитическое решение задачи (3.7) известно и имеет следующий вид: $\rho(x, t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau$. Его вид означает, что плотность транспортного потока сохраняется вдоль характеристики $\xi = x - Q_\rho t$ и меняется только в точках въезда или выезда с дороги на величину $\int_0^t f_0(x_k, \tau) d\tau$, которая берется с положительным знаком в случае въезда и с отрицательным в случае выезда. Таким образом, зная решение (3.7) мы можем контролировать плотность транспортного потока на дороге, перекрывая его в точках въезда x_k на заданные интервалы времени τ_k так, чтобы в любой момент времени в каждой точке дороги плотность потока не превышала критическое значение: $\rho(x, t) = \rho_0(x - Q_\rho t) + \sum_k \tau_k f_k(x_k) < \rho_{crt}$.

В итоге алгоритм адаптивного управления въездами работает следующим образом:

- делается текущий краткосрочный прогноз на время $\Delta t = \min_k \frac{x_{k+1} - x_k}{2|Q_p(\rho_{k+1/2})|}$, поскольку, в течение этого времени мы можем исключить взаимное влияние транспортных потоков, поступающих с соседних въездов;
- если прогноз показывает, что в какой-либо из точек дороги плотность транспортного потока начинает превышать или приближаться к критической $\rho_k(\Delta t) \geq \rho_{crt}$, то мы, опуская характеристику из этой точки дороги на текущий временной слой, определяем ближайший въезд с номером k , вызвавший затор и с помощью светофорного регулирования уменьшаем плотность въезжающих АТС на нем на значение $f_{0,k}\Delta t = \rho_k(\Delta t) - \rho_{crt}$.

На практике невозможно непрерывным образом регулировать количество въезжающих АТС, поэтому для ограничения въезда используется изменение соотношения t_{on} разрешающей (зелёной) и t_{off} запрещающей (красной) фаз светофора, с постоянным периодом $T = t_{on} + t_{off} = const$, установленного на данном въезде, с учётом заданной минимальной длительности зелёной фазы t_{min} : $\frac{t_{min}}{t_{on} + t_{off}} \leq \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = \frac{t_{on}}{T} \leq 1$. Нам нужно определить, насколько уменьшить зелёную фазу горения светофора t_{on} на k -ом въезде чтобы понизить плотность транспортного потока ниже критического уровня. Мы полагаем, что значение $f_{0,k}(x_k, t)$ не меняется за время Δt . Следовательно, за это время плотность транспортного потока через въезд с номером k увеличилась на величину равную $\frac{t_{on}}{T} f_{0,k}\Delta t$ и нам необходимо ее уменьшить на $\rho_k(\Delta t) - \rho_{crt}$. В итоге получаем соотношение для длительностей горения старой t_{on} и новой $\tilde{t}_{on}$ зелёных фаз светофора: $\frac{\tilde{t}_{on}}{T} f_{0,k}\Delta t = \frac{t_{on}}{T} f_{0,k}\Delta t - (\rho_k(\Delta t) - \rho_{crt})$, откуда следует, что $t_{min} \leq \tilde{t}_{on} = \left(t_{on} - \frac{(\rho_k(\Delta t) - \rho_{crt})T}{f_{0,k}\Delta t} \right) \leq T$.

Для проверки работы алгоритма адаптивного светофорного регулирования АТС на автомобильной многополосной дороге был поставлен вычислительный эксперимент на суточных данных внешнего кольца МКАД за сутки, 3 февраля 2012 года. Всего при расчетах учитывалось 36 крупных развязок на МКАД. Данные об интенсивности въездных и выездных потоков АТС на развязках была получена от детекторов транспорта системы «Navigator» ЦОДД г. Москвы.

Для оценки возможного эффекта влияния на дорожное движение адаптивного светофорного регулирования на въездах МКАД были проведены расчеты развития дорожной ситуации в стандартном режиме – без регулирования, а также с тремя различными режимами адаптивного регулирования с максимальной длительностью запрещающей фазы t_{off} : 10, 20 и 30 секунд для 60-секундного полного цикла $T = t_{on} + t_{off}$. При красном сигнале светофора АТС, прибывая на въезды МКАД, образовывали очереди, которые затем разгружались на зелёной фазе светофорного регулирования.

На Рис. 3.7 представлены полученные в результате численного моделирования пространственно-временные диаграммы для плотности и скорости транс-

портного потока, как при отсутствии ограничений на въезд автомобилей на МКАД — ситуация с отсутствующей или нефункционирующей системой адаптивного управления (вверху слева), так и для ситуации, когда система адаптивного управления работала на всех 36 въездах с длительностью запрещающей (красной) фазы регулирования не превышающей 10 (вверху справа), 20 (внизу слева) и 30 (внизу справа) секунд. По оси абсцисс отмечены километры в соответствии с их нумерацией на внешнем кольце МКАД.

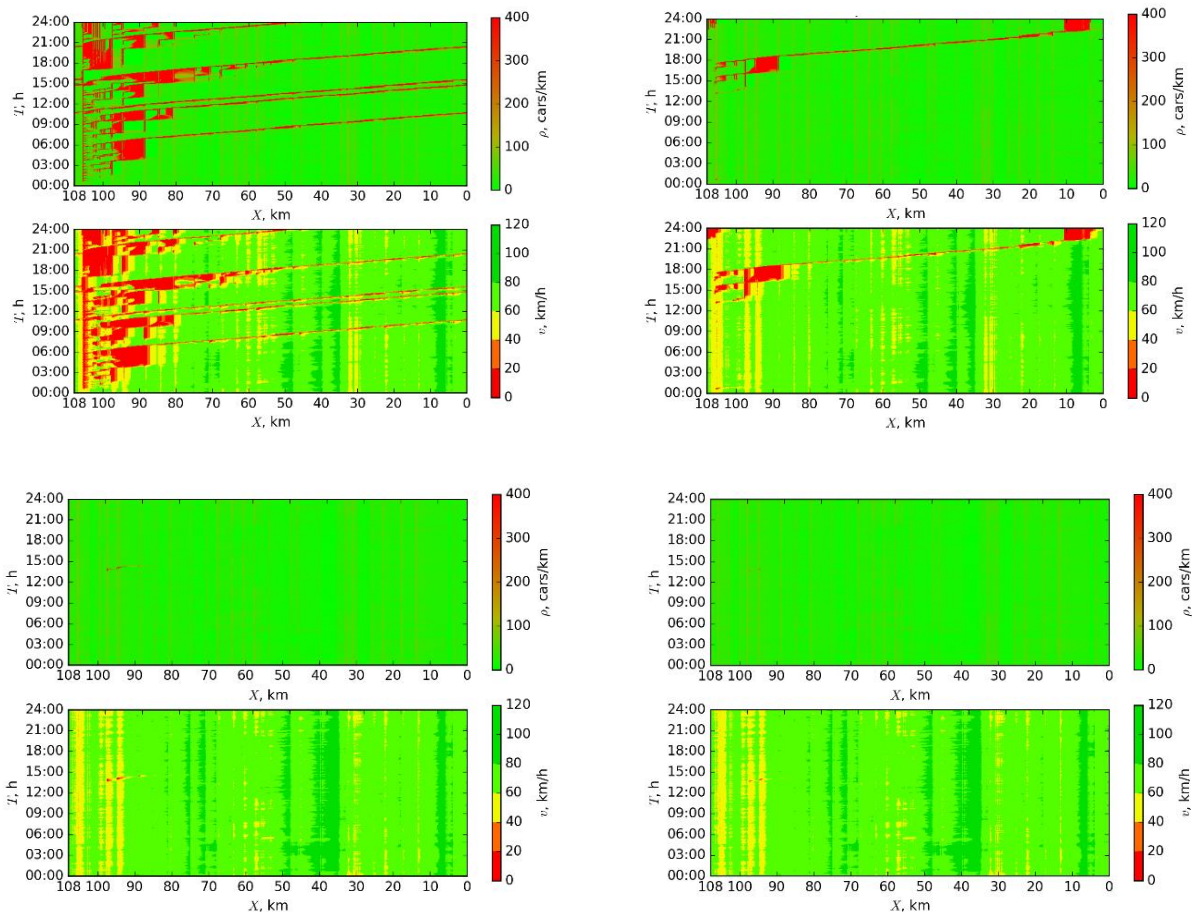


Рис. 3.7. Пространственно-временные диаграммы плотности АТС/км и средней скорости км/ч транспортного потока на МКАД за суточный период по результатам моделирования. Вверху слева: без светофорного регулирования. Вверху справа: с использованием адаптивного светофорного управления, при ограничении длительности красной фазы до 10 секунд на цикл. Внизу слева: при ограничении длительности красной фазы до 20 секунд на цикл. Внизу справа: до 30 секунд на цикл.

В отсутствие адаптивного светофорного регулирования въездов на МКАД образуются достаточно заметные заторы в районе 85-105 км. Использование слабого регулирования (красная фаза до 10 секунд) не позволяет избежать возникновения пробок, но ускоряет их рассасывание. При этом незначительно увеличивая очереди на въездах до примерно 19 АТС. Увеличение длительности запрещающего сигнала до 20 секунд практически убирает заторы на МКАД, при увеличении очередей на въездах до 37 АТС максимум. Дальнейшее увеличение длительности запрещающей фазы приводит к полному исчезновению пробок на

МКАД, однако ценой этого является заметное увеличение очередей на въездах вплоть до 50 АТС.

Глава 4.

В четвертой главе решалась задача моделирования интенсивных потоков данных в компьютерных сетях. В этой задаче потоки данных различных соединений в пакетной сети передачи данных моделировались в виде несмешивающихся потоков сплошной среды. В ходе решения были разработаны новые концептуальная и математическая модели сети. Проведено численное моделирование в сравнении с системой имитационного моделирования сети NS-2 [<http://www.isi.edu/nsnam/ns>]. Полученные результаты показали, что в сравнении с известной пакетной моделью NS-2, разработанная нами потоковая модель, за счет использования потоков данных вместо пакетов демонстрирует значительную экономию вычислительных ресурсов, обеспечивая при этом хорошую степень подобия как пиковых, так и усредненных характеристик. Позволяет моделировать поведение сложных глобально распределенных IP – сетей передачи данных.

В настоящее время для моделирования сетей передачи данных применяются средства, использующие различные подходы. Наиболее детальный анализ для относительно небольшого количества элементов сети обеспечивают дискретно-событийные модели пакетного уровня. В таких моделях отслеживается поведение каждого пакета данных в моделируемой сети. Пакетный подход обеспечивает хорошее соответствие моделей поведению реальных сетей. К наиболее популярным средствам пакетного моделирования с открытыми исходными кодами можно отнести NS-2. Доступны также промышленные средства дискретно-событийного моделирования.

В настоящей работе разработана потоковая модель, исключая рассмотрение отдельных пакетов, но различающая данные различных сессий как потоки несмешивающихся компонентов сплошной среды. Сеть передачи данных (см. Рис. 4.1) рассматривается как набор узлов, соединённых каналами связи. Функциональная специализация позволяет выделить два типа узлов. Узлы типа *A* перенаправляют потоки данных, создаваемые и/или терминируемые узлами другого типа *B*. Топология сети позволяет предложить представление сети в виде направленного графа. Каждая вершина типа *Pa*, соотнесённая с узлом типа *A*, реализует правила маршрутизации. Каждая вершина типа *Pb*, соотнесённая с узлом типа *B*, реализует оконечные сетевые протоколы. Каждое ребро графа соотносится с очередью и следующим за ней однонаправленным сетевым каналом.

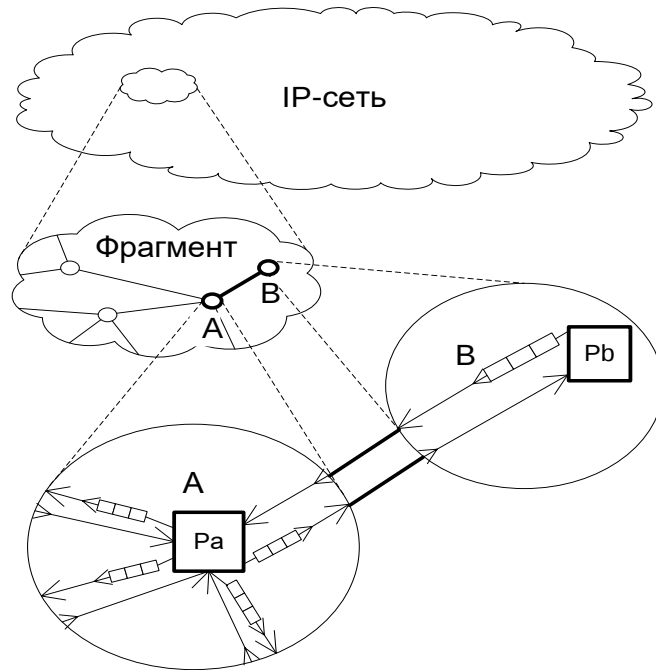


Рис. 4.1. Концептуальная модель IP-сети: A, B – узлы IP-сети, соединённые двунаправленным каналом; A – узел - маршрутизатор с вершиной типа Pa и выходными очередями $\square\square$; B – конечный узел с вершиной типа Pb .

Необходимость передать через сеть данные от одной вершины типа Pb к другой вершине такого же типа создаёт один или более потоков данных. Каждый такой поток данных назовём сессией и будем рассматривать как перенос некоторого модельного «вещества» или «жидкости», специфичной для данной сессии.

В своём движении модельная жидкость последовательно минует все очереди на пути своей сессии. Часть её может быть утрачена при сбросе части данных в результате активного управления очередями в IP-сетях. Размер пакетов моделируемой IP-сети соотносится с плотностью вещества ρ (количеством бит в пакете), а темп продвижения этих пакетов в очереди со скоростью вещества u (количеством пакетов, проходящих в единицу времени).

Факты потери данных некоторой сессии и особенно моменты этих потерь в значительной мере могут определять последующее поведение протоколов данной сессии. Поскольку потоковая модель не отслеживает движение каждого пакета в отдельности, чтобы обеспечить модель, например, протокола TCP необходимой информацией, предлагается сопровождать движение по сети модельной жидкости сопутствующим сохранением информации о потерях этой жидкости. Последняя характеризуется своей плотностью распределения вдоль очереди - d . Утрата модельного вещества в результате управления определённой очередью отражается плотностью распределения этой утраты вдоль очереди - ψ .

Введённые переменные могут быть соотнесены с дискретным наполнением очереди q пакетами различных сессий следующим образом. Предположим,

что единичный интервал $[x^q, x^q + 1]$ очереди взаимно однозначно соответствует пакету сессии s . Тогда $\int_{x^q}^{x^q+1} \rho_s^q dx = \rho_s$ есть количество бит в этом пакете, $\int_{x^q}^{x^q+1} d_s^q dx$ - количество пакетов сессии s , потеря которых должна быть учтена после приёма данного пакета, а $\int_{x^q}^{x^q+1} \psi_s^q dx$ - вероятность сброса данного пакета.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы собрать и построить полную вычислительную модель, состоящую из модельных элементов. Модель протокола ТСП также предполагает определенные соотношения для размера ТСП окна и скоростей входящего и исходящего потоков для различных режимов работы протокола.

Основу потоковой модели составляют уравнения переноса условных веществ и информации о потере этого вещества:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s^q + \frac{\partial}{\partial x^q} (\rho_s^q u^q) = -\rho_s^q u^q \psi_s^q, \\ \frac{\partial}{\partial t} d_s^q + \frac{\partial}{\partial x^q} (d_s^q u^q) = u^q \psi_s^q. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $q \in \{q = 1, \dots, Q\}$ – индекс очереди в совокупности всех очередей модели, а $s \in \{s = 1, \dots, S\}$ – индекс сессии в совокупности всех сессий модели. Пространственная координата x^q , имеет смысл положения пакета в очереди, измеренного в единицах пакетов от головы очереди, примыкающей к исходящему. Скорость движения вещества $u^q = \frac{c^q}{\rho^q} + \sum_s \int_{x^q}^{X^q} \psi_s^q dx^q$, $u^q \geq 0$, считается одинаковой для всех сессий, проходящих через очередь q , для которой C^q – номинальная пропускная способность интерфейса на выходе очереди q , $\rho^q = \sum_s \rho_s^q|_{x^q=X^q}$, X^q – длина очереди q , измеренная в единицах пакетов. В предлагаемой модели скорость изменения длины очереди представляется в виде производной:

$$\frac{dX^q}{dt} = \sum_s u_s^q - u_0^q, \quad X^q \geq 0, \quad (4.2)$$

где $u_0^q = u^q|_{x^q=0}$, а u_s^q – скорость продвижения данных сессии s , поступающей на вход очереди q .

Сходным образом определяются граничные условия для уравнений (4.1) на входной границе $x^q = 0$: $\rho_s^q|_{x^q=0} = \rho_{s,0}^q$, $d_s^q|_{x^q=0} = d_{s,0}^q$. Здесь $\rho_{s,0}^q$ и $d_{s,0}^q$ относятся к сессии s , поступающей на вход очереди q . На выходной границе $x^q = X^q$ граничные условия не требуются, а значения $\rho_s^q(t, X^q)$, $d_s^q(t, X^q)$ однозначно определяются из уравнений (4.1) благодаря условию (4.2).

В данной работе в качестве политики активного управления очередью (AQM – active queue management) был выбран алгоритм случайного раннего

обнаружения (RED – Random Early Detection), при этом сброс происходит из хвоста очереди

$$\sum_s \int_{X^{q-1}}^{X^q} \psi_s^q dx^q = \begin{cases} 0, & \xi \geq P^q(t), \\ 1, & \xi < P^q(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь ξ – случайная величина с равномерным распределением на отрезке $[0;1]$, а $P^q(t)$ – вероятность сброса пакета, которая в терминах RED AQM определяется следующим образом

$$P^q(t) = \begin{cases} 0, & D^q(t)\tilde{P}^q(t) < 1, \\ \min \left[1, \frac{\tilde{P}^q(t)}{2 - D^q(t)\tilde{P}^q(t)} \right], & 1 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t) \leq 2, \\ 1, & 2 \leq D^q(t)\tilde{P}^q(t), \end{cases} \quad (4.4)$$

$$D^q(t) = \int_{t_{drop}^q}^t u^q(\tau) d\tau.$$

Здесь t_{drop}^q – момент последнего сброса данных в очереди q , а $\tilde{P}^q(t)$ зависит от $\tilde{X}^q(t)$ – ожидаемой (прогнозируемой) длины очереди:

$$\tilde{P}^q(t) = \begin{cases} 0, & \tilde{X}^q < X_{min}^q, \\ \frac{\tilde{X}^q - X_{min}^q}{X_{max}^q - X_{min}^q} P_{max}^q, & X_{min}^q \leq \tilde{X}^q \leq X_{max}^q, \\ 1, & \tilde{X}^q > X_{max}^q, \end{cases} \quad (4.5)$$

в (4.5) $X_{min}^q, X_{max}^q, P_{max}^q$ – постоянные параметры RED AQM.

$$\frac{d\tilde{X}^q}{dt} = \frac{\ln \alpha^q}{\delta^q} (\tilde{X}^q(t) - X^q(t)). \quad (4.6)$$

Последнее уравнение заменяет собой дискретное выражение для скользящего среднего: $\tilde{X}^q(t + \delta^q) = (1 - \alpha^q)\tilde{X}^q(t) + \alpha^q X^q(t)$. Безразмерный постоянный параметр $\alpha^q \in [1,10]$ определяет степень зависимости ожидаемой длины очереди от кратковременных колебаний длины реальной очереди. Параметр δ^q равен интервалу времени между замерами реальной длины очереди.

Здесь мы пренебрегаем задержками и потерями в каналах связи в сравнении с задержками и потерями в очередях, предшествующих этим каналам. Для представления одной сессии в терминах протокола TCP потребуются две моделирующие сессии: одна – прямая, передающая данные от источника к получателю, и другая – возвратная, возвращающая подтверждающие квитанции от получателя к источнику.

Для исследования протокола TCP ограничимся случаем, когда друг другу попарно взаимно-однозначно соответствуют источник, получатель, прямая и возвратная сессии. Постулируется, что каждой сессии соответствует один и только один вход графа, а также один и только один выход графа.

Поведение компьютерной сети моделировалось с использованием версии NewReno протокола TCP [<http://www.ietf.org/rfc/rfc2582.txt>], с переменным размером окна – последовательности пакетов, которые могут быть отправлены без получения подтверждающей квитанции. В данной версии TCP размер окна увеличивается до тех пор, пока не произойдет потеря пакетов в сессии. Соответственно протокол TCP-Reno имеет несколько режимов изменения размера окна: избегания перегрузки, быстрого восстановления и медленного старта

$$u_s = \begin{cases} u_s (1 + 1/W_s), & \text{"Congestion avoidance"}, \\ \tilde{W}_s / \tau_s, & \text{"Fast Recovery"}, \\ W_s / \tau_s, & \text{"Slow Start"}. \end{cases} \quad (4.7)$$

В (4.7) W_s – текущий размер окна данной сессии, $\tilde{W}_s$ – пороговый размер окна данной сессии, τ_s – задержка распространения данных и квитанций в данной сессии. Увеличение размера окна данной сессии W_s определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dW_s}{dt} = \begin{cases} u_s / W_s, & \text{"Congestion avoidance"}, \\ u_s / \tilde{W}_s, & \text{"Fast Recovery"}, \\ u_s, & \text{"Slow Start"}. \end{cases} \quad (4.8)$$

После инициализации данных выполняется численное моделирование сети во времени с определённым шагом.

Для сравнения интегрального поведения модельной компьютерной сети в целом, по гистограммам усреднённой производительности и усреднённого времени оборота соединений, рассмотрен случай относительно сложной кольцевой конфигурация сети (Рис 4.2). Всего в рассматриваемом случае моделировалось 1280 сессий, при этом имело место одна загруженная очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистрали – 20 Мбит/с; хорды подсети – 5 Мбит/с; размер пакетов – 8 Кбит/пакет. Трафик намеренно был организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистрали в соседнюю подсеть, а вторая половина по хорде подсети. Соответствующие усредненные результаты производительности сети и задержки в зависимости от сессии показаны на (Рис. 4.3) и (Рис 4.4) в сравнении с пакетной моделью, реализованной в NS-2. Усреднение результатов выполнялось за период времени в 200 сек.

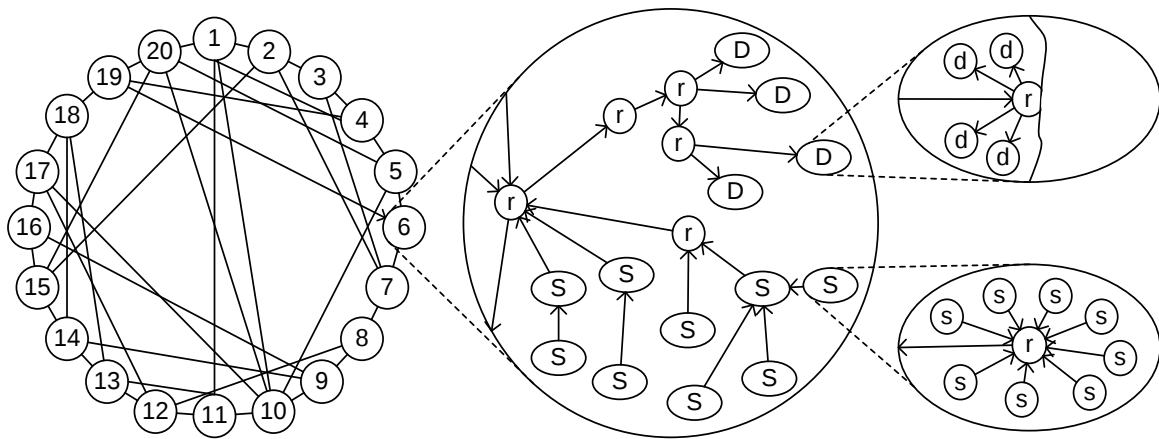


Рис. 4.2. Сложная кольцевая конфигурация сети, моделировалось 1280 сессий, при этом имело место одна загруженная очередь на пути каждой сессии. Использовались следующие характеристики сети: пропускная способность магистральной – 20 Мбит/с; хорды подсети – 5 Мбит/с; размер пакетов – 8 Кбит/пакет. Трафик организован так, чтобы половина пакетов отправлялась по магистральной в соседнюю подсеть, а вторая половина по хорде подсети. Обозначения: *r* – узел маршрутизатор; *s* – узел отправитель; *d* – узел получатель.

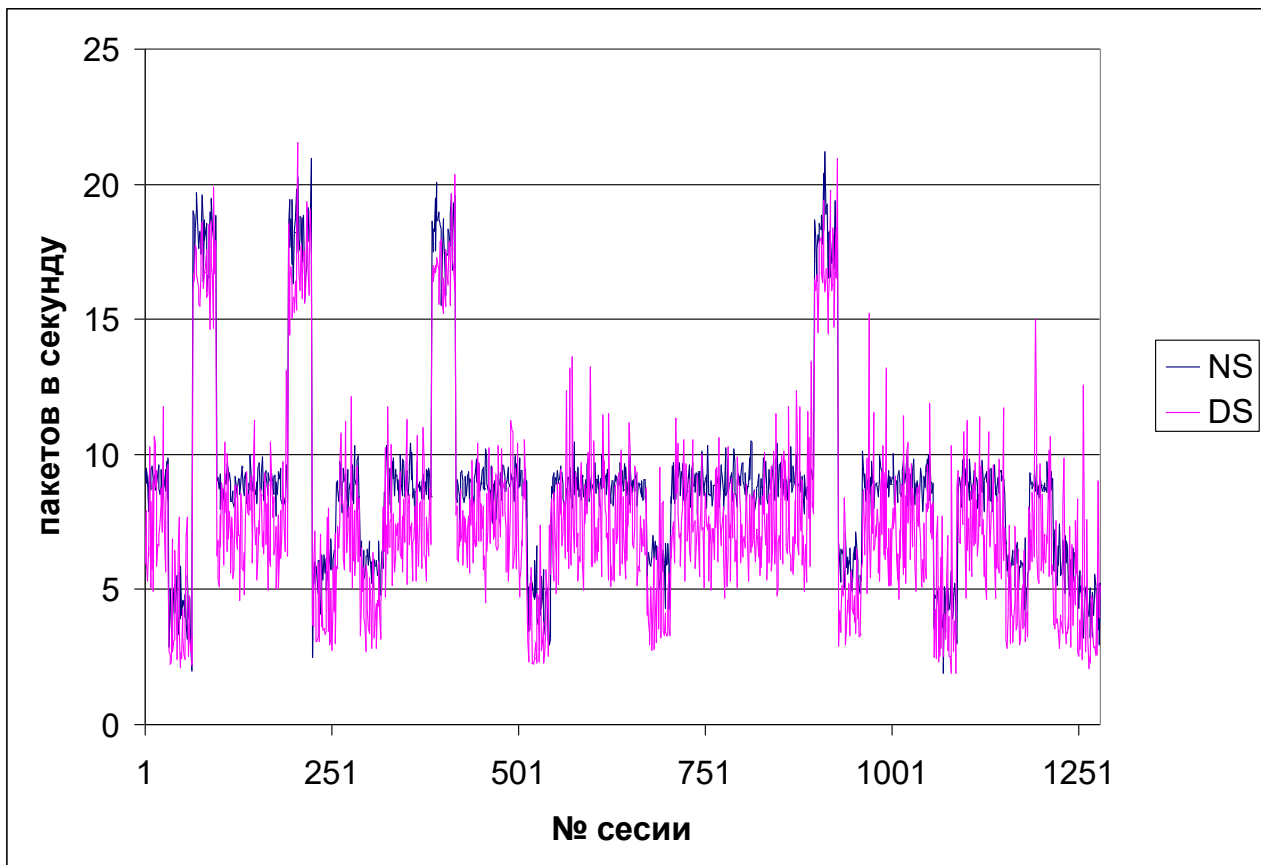


Рис. 4.3. Усредненные результаты производительности сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурации сети (Рис. 4.2): синяя линия – пакетная модель NS-2; красная линия – потоковая модель.

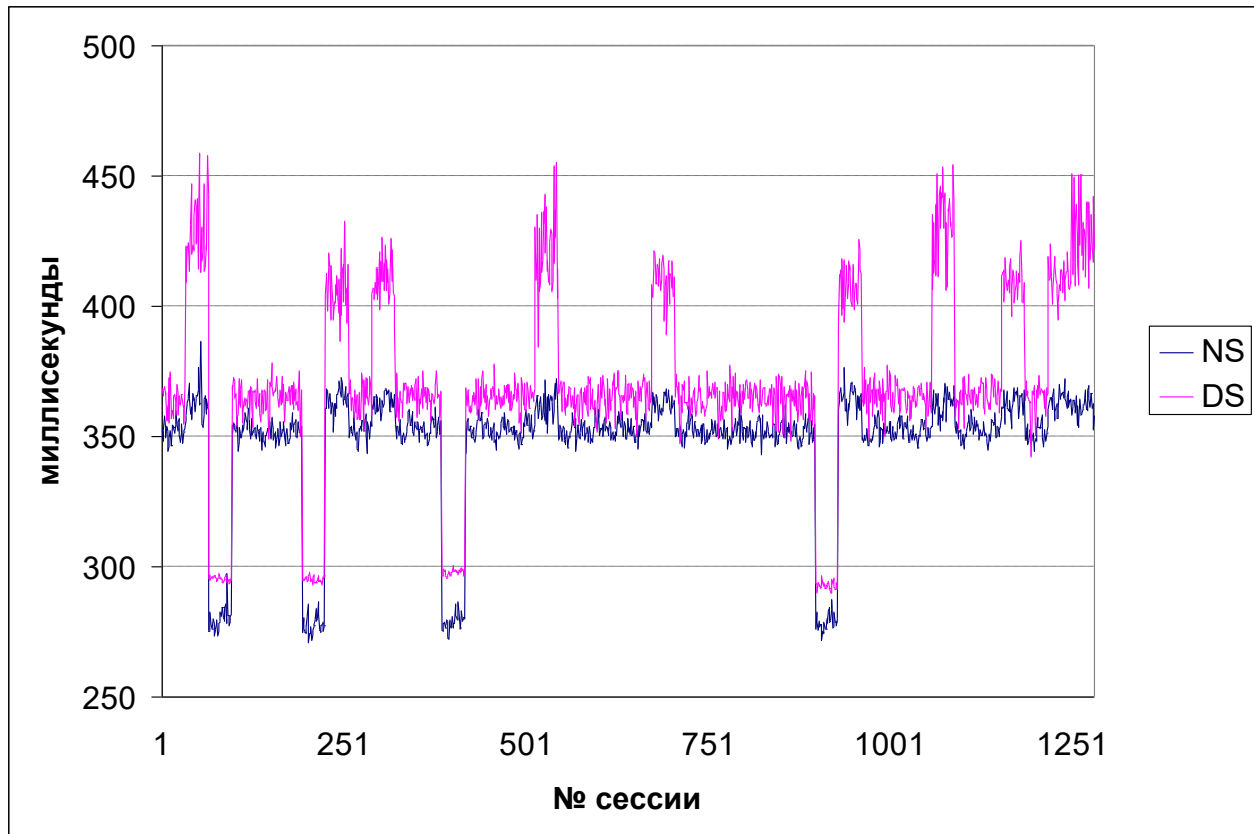


Рис. 4.4. Усредненные результаты временных задержек сети в зависимости от номера сессии для сложной кольцевой конфигурации сети (Рис. 4.2): синяя линия – пакетная модель NS-2; красная линия – потоковая модель.

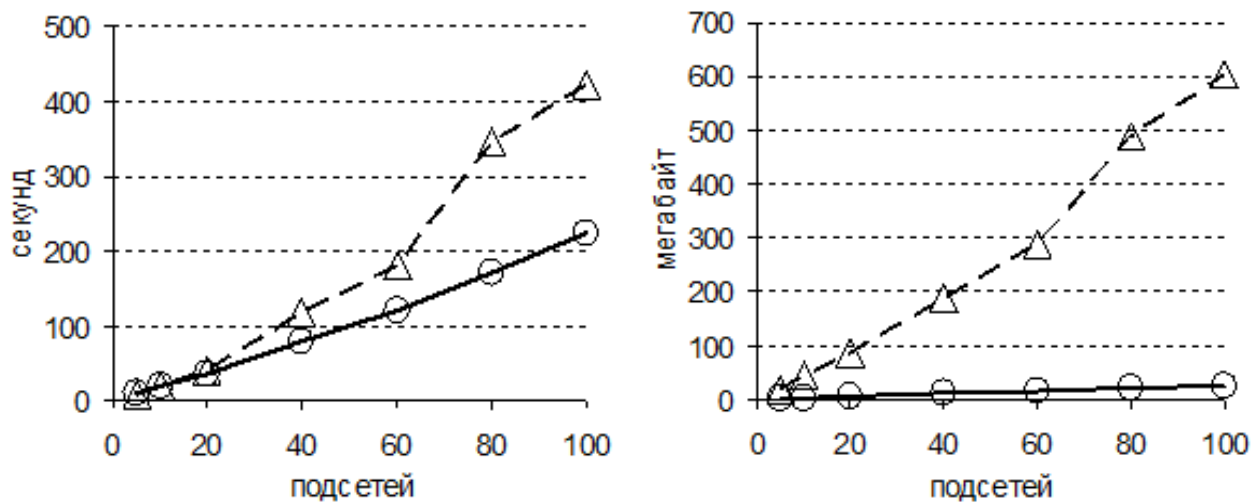


Рис. 4.5. Потребление вычислительных ресурсов в зависимости от количества моделируемых подсетей (5-100, 64 сессии на подсеть, размер пакета 1 КБ): слева – время расчета; справа – количество используемой памяти; треугольники – пакетная модель NS-2; окружности – потоковая модель.

Заметно, что большинство соединений демонстрируют сходные величины. Вместе с этим присутствует большой разброс значений производительности отдельных соединений от значений характерных для соответствующей группы соединений. Необходимо также отметить группы соединений, у которых замет-

но отличаются значения задержки (см. Рис 4.4). В части использования вычислительных ресурсов потоковая модель обнаруживает значительную их экономию. В наибольшей степени экономится занимаемая вычислительная память и в меньшей степени время численного расчета (см. Рис 4.5).

Глава 5.

Пятая глава посвящена моделированию распространения газовых примесей в вентиляционных сетях. Разработана оригинальная вычислительная математическая модель распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях с использованием уравнений газовой динамики путем численного сопряжения областей разной размерности. Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности является ключевым элементом разработанной модели, поскольку его использование уменьшает математическую сложность и одновременно повышает её вычислительную эффективность. Проведенные расчеты показали, что модель с хорошей точностью позволяет определять распределение газодинамических параметров в трубопроводной сети и решать задачи динамического управления вентиляцией.

В данной работе исследуется проблема построения математической модели распространения мелкодисперсных или газовых примесей в вентиляционных сетях на основе газодинамического подхода. Расчет распространения примесей в данной работе проводился на основе уравнений течения многокомпонентного газа, при этом используется модель односкоростной однотемпературной газовой динамики. Нахождение скорости и давления несущей фазы считается эквивалентно нахождению скорости и давления при трехмерном течении идеального газа. Также предполагается, что движение частиц примесей происходит под действием давления несущей газовой фазы (т.е. парциальные давления фракций примеси совпадают с парциальным давлением несущей фазы) и вещество примеси не претерпевает фазовых переходов и химических превращений либо эффектами этих процессов можно пренебречь, как и взаимодействием частиц примеси друг с другом. Такое приближение справедливо лишь при малых объемных концентрациях примесей.

В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной, однотемпературной постановке с правой частью, описывающей пристеночное трение. В областях сочленения труб и примыкающих объемах использовалась эта же система уравнений, но уже в трехмерной постановке с турбулентной вязкостью в правой части. Сопряжения граничных условий на границе областей разной размерности обеспечивается через решение соответствующей задачи Римана вдоль нормальной компоненты скорости по отношению к этой границе. При этом в одномерных уравнениях поперечные компоненты скорости и соответственно импульса полагаются равными нулю для корректного замыкания системы уравнений на разрыве. Использование алгоритма сопряжения областей разной размерности уменьшает математическую сложность модели и одновременно повышает её вычислительную эффективность.

В вентиляционной трубе использовалась одномерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной, однотемпературной постановке с правой частью, учитывающей пристеночное трение и силу тяжести:

В областях сочленения труб и примыкающих комнатах используется трехмерная система уравнений газовой динамики с примесями в односкоростной и однотемпературной постановке с турбулентной вязкостью в правой части. Учет турбулентной вязкости производится согласно k - ε модели. При этом нетурбулентной вязкостью мы пренебрегаем.

Решение задачи Римана для многокомпонентного газа в одномерной постановке строится с помощью решения задачи Римана о распаде разрыва между однокомпонентными газами с различными показателями адиабаты. Примеси в нашей постановке переносятся со скоростью течения газа, поэтому разрыв между ними фактически эволюционирует как контактный разрыв. Таким образом, на границе ячеек задача сводится к решению задачи Римана вдоль нормального направления скорости в трубе.

Рассмотрим вентиляционную трубу в трехмерной постановке. Пусть на стенках трубы стоят отражающие граничные условия. Потоки на границе получаются из решения задачи Римана для одного и того же газа вдоль нормали к стенке трубы, но нормальная скорость газа снаружи стенки берется противоположной нормальной скорости газа внутри. Считаем, что газ, попадая в одномерную трубу, теряет свой поперечный импульс практически мгновенно. Этого же эффекта можно добиться, не добавляя поперечный импульс в одномерные ячейки, то есть обнуляя соответствующие компоненты импульса поперек трубы. Поскольку поперечная скорость газа в трубе теперь всегда будет равна нулю, граничные условия на стенках трубы более не потребуются.

Также на границе между трехмерными и одномерными вычислительными областями со стороны одномерной области, поперечные компоненты скорости вместе с удельной турбулентной энергией полагаются равными нулю.

Для проверки корректности работы алгоритма численного сопряжения одномерных и трехмерных областей был поставлен модельный вычислительный эксперимент по расчету нестационарных процессов вентиляции в модельной сети выработок угольной шахты. В частности, был проведен расчет проветривания тупиковой выработки вентилятором местного проветривания. Расчеты проветривания тупика проводились для модельного участка сети, представленного на Рис. 5.6, и имеющего следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 – 100 м; длины горизонтальных выработок 2–3, 5–6 – 400 м; длина тупиковой выработки 4–5 – 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м². В тупиковой выработке по всей длине задавалась повышенная концентрация метана $\rho_{CH_4} = 0.3$ кг/м³. Квадратными сечениями на модельной сети выработок показаны границы расчетных зоны с трехмерной сеткой с размером ячейки – $0.33 \times 0.33 \times 0.33$ м, на остальных участках сети использовалась одномерная сетка с шагом – 0.66 м.

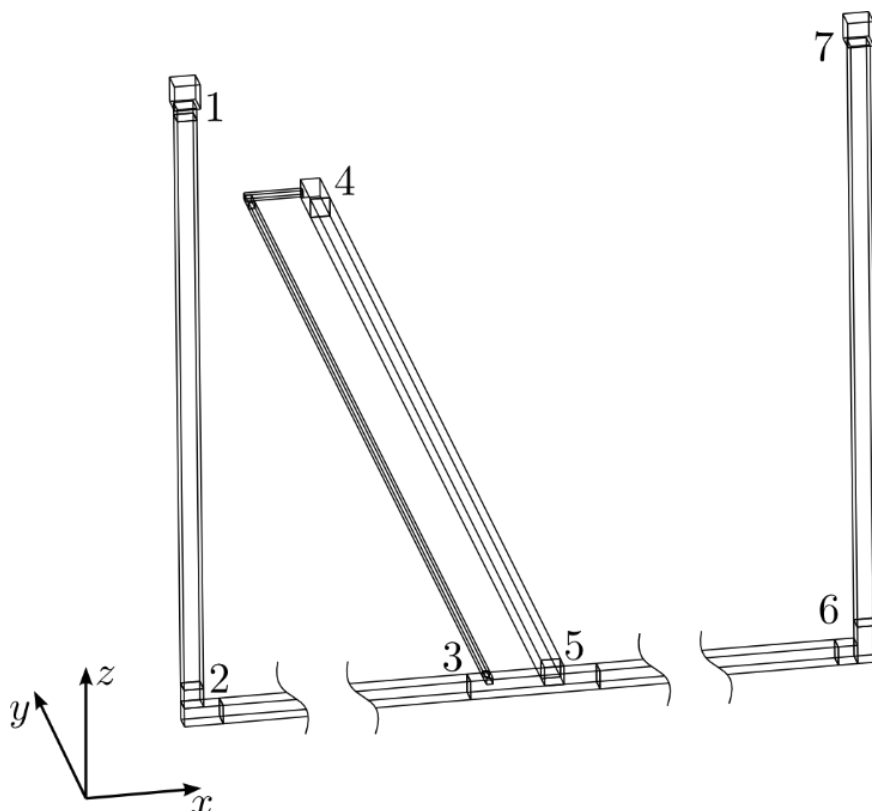


Рис. 5.6 Модельный участок сети, имеющий следующие размеры: длины вертикальных выработок 1–2, 6–7 – 100 м; длины горизонтальных выработок 2–3, 5–6 – 400 м; длина тупиковой выработки 4–5 – 200 м; площадь сечений выработок была принята 10 м², вентиляционной трубы 3–4 – 1 м². Квадратными сечениями показаны границы расчетных зон с трехмерной сеткой.

В начальный момент времени на фоне стационарного режима проветривания сети задаваемого основным вентилятором (№ 1 на Рис. 5.1, скорость на выходе 2.1 м/с) в работу включается вентилятор местного проветривания, установленный в выработке на расстоянии – 10 м от сопряжения с тупиковой выработкой 4–5 и подающий по специальному вентиляционному трубопроводу 3–4 сечением 1 м² поток воздуха к тупику выработки со скоростью 12 м/с (см. Рис. 5.1).

После включения вентилятора местного проветривания из тупиковой выработки 4–5 постепенно происходит вытеснение газа с повышенным содержанием метана в выработку 5–6. В зоне сопряжения выработок происходит перемешивание струи газа из тупика с газом,двигающимся к выходу из выработки 5–6, в результате чего метан выдувается из выработки в атмосферу. Результаты расчетов распределения примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа) представлены на Рис. 5.2.

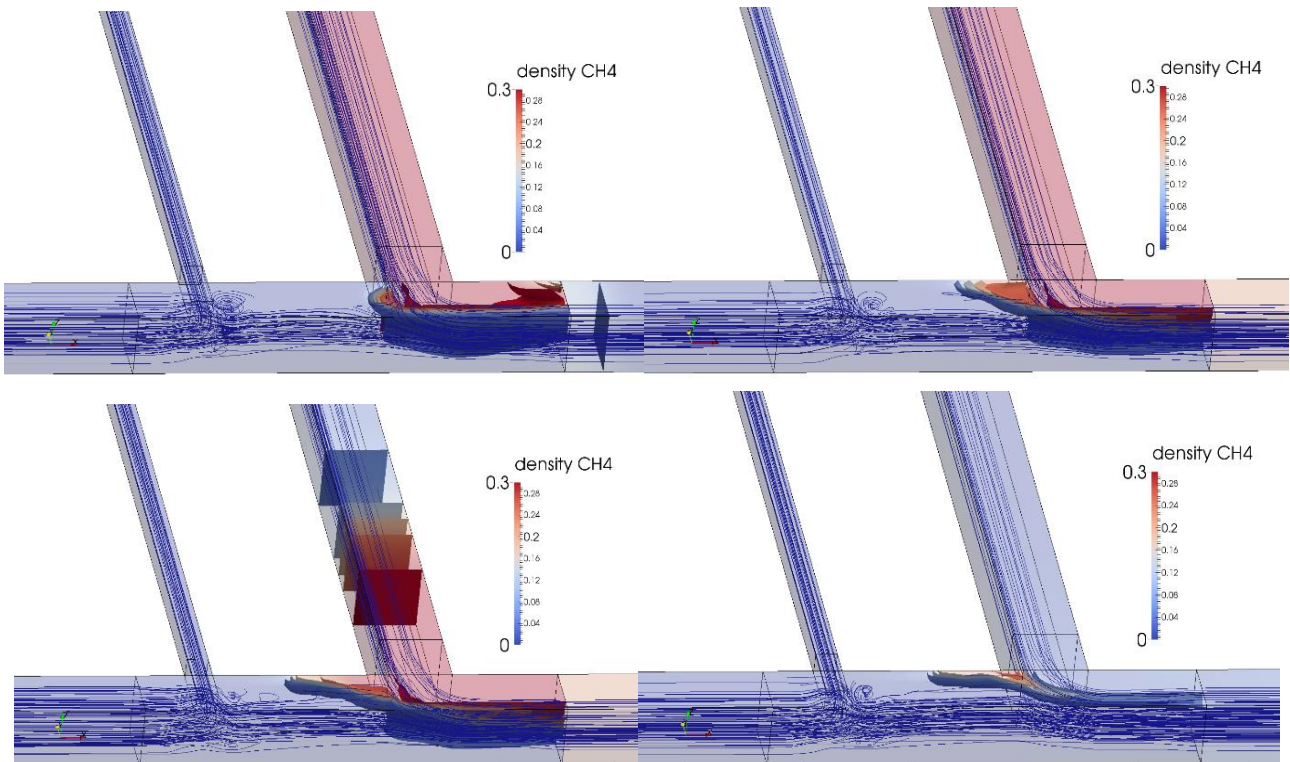


Рис. 5.2 Результаты расчетов распределения плотности примеси метана в зоне сопряжения выработок в моменты времени 5 с (вверху слева), 40 с (вверху справа), 130 с (внизу слева) и 150 с (внизу справа). Сплошные линии на рисунках показывают изолинии течения газа.

Использование трехмерных сеток в областях сочленения выработок позволяет детально контролировать динамику течения газа и примесей. На Рис. 5.2 мы можем частично наблюдать эффект обратного перетока метана из тупиковой выработки 4-5 в вентиляционную трубу 3-4 в случае задания высокой скорости потока на вентиляторе местного проветривания, который хорошо заметен в момент времени 130 с. Тем не менее, мы видим, что метан в итоге доходит до вентиляционной трубы и со временем выдувается в атмосферу. Таким образом, разработанная математическая модель позволяет определять распределение газодинамических параметров течения в трубопроводной сети и позволяет решать задачи динамического управления вентиляцией сети.

Глава 6.

Шестая глава посвящена моделированию глобальных электроэнергетических сетей. Хотя теория электрических сетей (цепей) различного назначения (энергетические, радиотехнические и т.п.) давно и хорошо разработана, вопросы, связанные с негармонической динамикой, нелинейными процессами и т.д. в глобальных, разветвленных сетях (т.е. с большим числом ветвей с распределенными параметрами и узловых элементов) остались практически нерешенными. Кроме того, существующие методы даже для линейных сетей с сосредоточенными параметрами требуют решения линейных систем уравнений большой размерности (как правило, с помощью тех или иных итерационных методов), что часто можно сделать более эффективно, если сразу исходить из динамиче-

ских уравнений без предположения о существовании только гармонических колебаниях в системе, что, собственно, и предлагается в данной главе.

Электроэнергетическую сеть (ЭС) представлена в виде графа, состоящего из сосредоточенных элементов-узлов, связанных линиями-проводниками – ребрами графа. Ребра представляют из себя одно – или многопроводные длинные линии с распределенными параметрами. Каждое из них характеризуется длиной X_k и удельными – на единицу длины: полным сопротивлением линии $R_k(t, x_k, i_k)$; проводимостью утечки $G_k(t, x_k, i_k)$; индуктивностью $L_k(t, x_k, i_k)$ и емкостью $C_k(t, x_k, u_k)$.

Зависимости R_k, L_k от текущего значения тока $i_k(x_k, t)$ определяются вольт-амперной и вебер-амперной характеристиками линии, а также температурой проводника, за счет ее влияния на удельное сопротивление и физические размеры. Зависимость C_k от текущего значения напряжения $u_k(x_k, t)$ определяется соответствующей кулон-вольтной характеристикой. В простейшем случае эти параметры являются константами. Отклонения этих величин от константных значений происходит в предельных режимах работы ЭС, но, как правило, прежде чем это происходит, релейная защита успевает отключить соответствующее устройство от ЭС. Необходимо также помнить, что все параметры модели берутся по их полной величине без разделения на активную и реактивную составляющие. В случае многофазных линий каждая фаза может быть описана отдельной линией с соответствующим сдвигом и согласованием фаз.

В качестве узловых элементов сети будем рассматривать: источники электроэнергии (электрогенераторы) с заданными номинальной мощностью и напряжением; потребители (нагрузка) самого разного рода, от одиночных до сложных комплексных (населенный пункт, предприятие) в зависимости от масштаба и детализации модели. Для нас в них важны мощность потребления $P(t)$ либо сопротивление нагрузки; простые точки ветвления сети (типа «распределительных щитов», например, с простейшими условиями связи – равенством напряжений во всех точках примыкания ветвей к данному узлу); трансформаторные подстанции (одновременно с распределительными функциями также повышающие либо понижающие напряжение), параметры которых описываются некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы собрать полную вычислительную модель, состоящую из вышеописанных элементов, основанную на решении соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных гиперболического типа.

За искомые параметры в точке x_k в момент времени t линии электрической сети с номером k примем текущее значение тока $i_k(x_k, t)$ и текущее значение напряжения $u_k(x_k, t)$. В этом случае для описания процессов в линии нам подойдет система так называемых «телеграфных уравнений», которая записывается в виде:

$$\begin{cases} \partial i_k / \partial t + (1 / L_k) \partial u_k / \partial x_k = f_{0k} = -(R_k / L_k) i_k, \\ \partial u_k / \partial t + (1 / C_k) \partial i_k / \partial x_k = f_{1k} = -(G_k / C_k) u_k, \end{cases} \quad (6.1)$$

где f_{0k} , f_{1k} могут дополнительно включать возможные внешние (распределенные) источники или стоки тока и напряжения.

В качестве граничных условий на входах ЭС может быть задано как функция времени значение напряжения с учетом падения напряжения на внутреннем сопротивлении источника $u_k(0,t) = E_k(t) - i_k r_k$, либо мощность $p_k(0,t) = P_k(t)$.

На выходах мы, как правило, будем использовать в качестве граничного условия закон Ома с заданной зависимостью сопротивления нагрузки от времени $u_k(X_k, t) / i_k(X_k, t) = R_k(t)$.

В точках ветвления графа ЭС постановка граничных условий зависит от типа сосредоточенных элементов. Для простейших ветвлений дополнительной искомой величиной является напряжение $u_l(t)$. При расчете таких граничных точек для различных связанных с узлом l ветвей в качестве граничных условий можно использовать закон Ома, если необходимо учитывать потери на контактах или равенство всех напряжений если этими потерями можно пренебречь. Помимо этого, для расчета таких внутренних узлов графа используется равенство нулю алгебраической суммы токов.

Для узлов графа, являющихся понижающими или повышающими напряжение трансформаторами, искомыми величинами являются токи i_{lm} и напряжения u_{lm} обмоток, совпадающие со значениями токов и напряжений в окончаниях входящих в узел l и выходящих из него ветвей (подключенных к трансформатору линий).

В глобальных электрических сетях трансформаторы, как правило, используются только для преобразования рабочих напряжений, а ветвления выполняются на шинах. В этом случае на каждую фазу приходится одна входная обмотка и одна выходная, и система уравнений трансформатора (для каждой фазы) принимает следующий упрощенный вид:

$$\begin{cases} \sqrt{C_{lm}} u_{lm}^{n+1} + \beta_{lm} \sqrt{L_{lm}} i_{lm}^{n+1} = w_{lm}^{n+1} (i_{lm}^n, u_{lm}^n), \\ \sqrt{C_{lr}} u_{lr}^{n+1} + \beta_{lr} \sqrt{L_{lr}} i_{lr}^{n+1} = w_{lr}^{n+1} (i_{lr}^n, u_{lr}^n), \\ \beta_{lm} (R_{lm} i_{lm} + L_{lm} di_{lm} / dt) + \beta_{lr} L_{lm,r} di_{lr} / dt = u_{lm}(t), \\ \beta_{lm} L_{lm,r} di_{lm} / dt + \beta_{lr} (L_{lr} di_{lr} / dt + R_{lr} i_{lr}) = u_{lr}(t). \end{cases} \quad (6.2)$$

коэффициенты $\beta_{lm} = 1$ для входящей в узел ветви и $\beta_{lr} = -1$ – для выходящей из узла ветви, либо наоборот.

Помимо граничных условий, необходимо задать некоторые начальные условия $i_k(x_k, 0) = i_{k0}$, $u_k(x_k, 0) = u_{k0}$, которые со временем «забываются» и, в зависимости от граничных условий, осуществляется выход на «стационарный» или периодический режимы.

Далее представлены некоторые результаты, полученные с помощью программного комплекса, реализованного с использованием вышеописанных методов.

На Рис. 6.1 представлены результаты расчета прохождения прямоугольного фронта с амплитудой 10 кВ через понижающий трансформатор (модель ТДТН-16000, коэффициент трансформации 11, $L_v=421$ Гн, $L_n=47$ Гн). Результат – «разброс» напряжения при отражениях, превышение напряжения на входе трансформатора напряжения источника 10 кВ, а значит и его расчетного входного напряжения. На выходе трансформатора – вместо «полочки» прямоугольные импульсы с длиной волны, равной четырем длинам ветви №1, т.е. мы имеем генерацию высокочастотной составляющей сигнала при воздействии низкочастотным с крутым фронтом (например, при подключении, либо, наоборот, при обрыве линии).

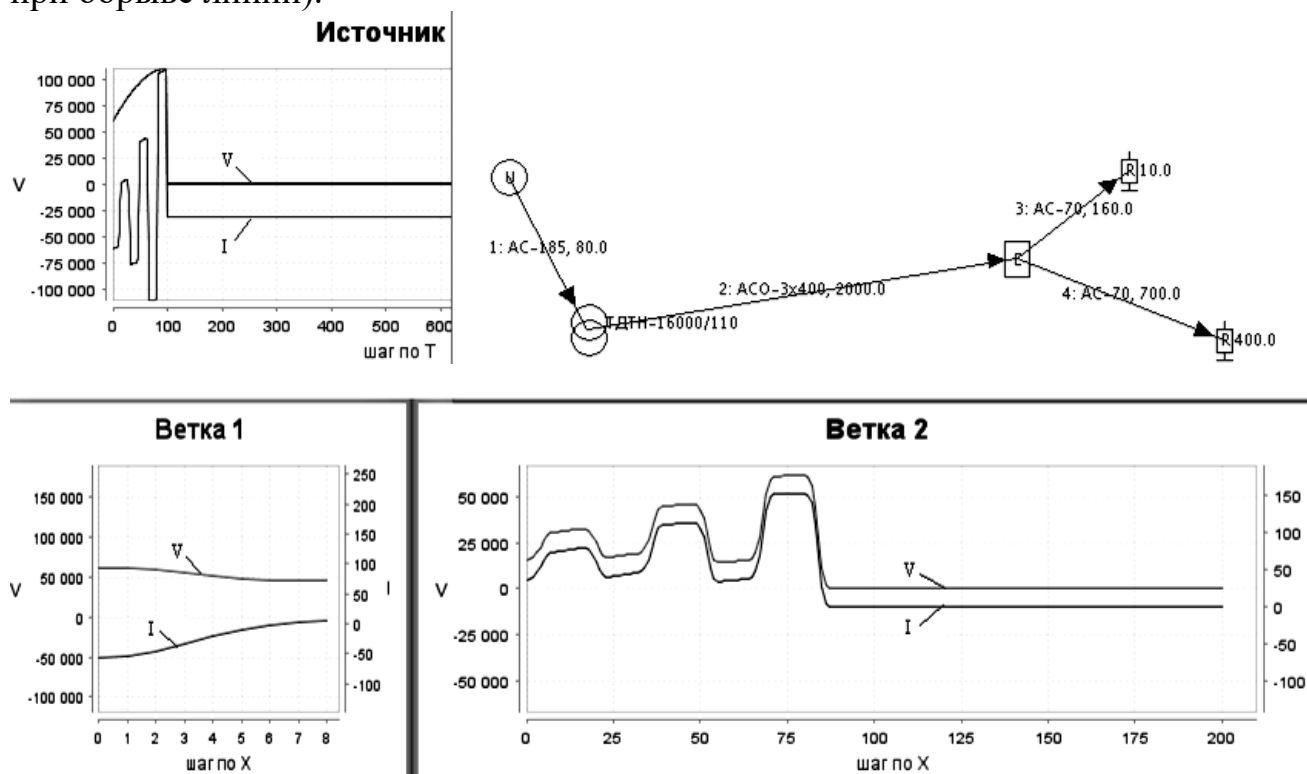


Рис. 6.1. Прохождение прямоугольного фронта и его отражений через понижающий трансформатор.

Рис. 6.2. Та же цепь несколько позже. Мы видим результат воздействия наведённой высокочастотной составляющей на линию №3. В нашем примере мы искусственно смоделировали неблагоприятную ситуацию, когда длина волны наведённой составляющей 32 км кратна длине этой линии 16 км. На практике подобная ситуация возможна, если кратны длины линий №1 и №3, так как высокочастотная составляющая вызвана отражениями на ветви №1 (длина волны наведенной составляющей равна четырем длинам линии №1, в нашем случае 8 км). В результате резонанса амплитуда напряжения в линии №3 на неко-

торое время намного (в особо неблагоприятных случаях – в разы) превышает номинал.

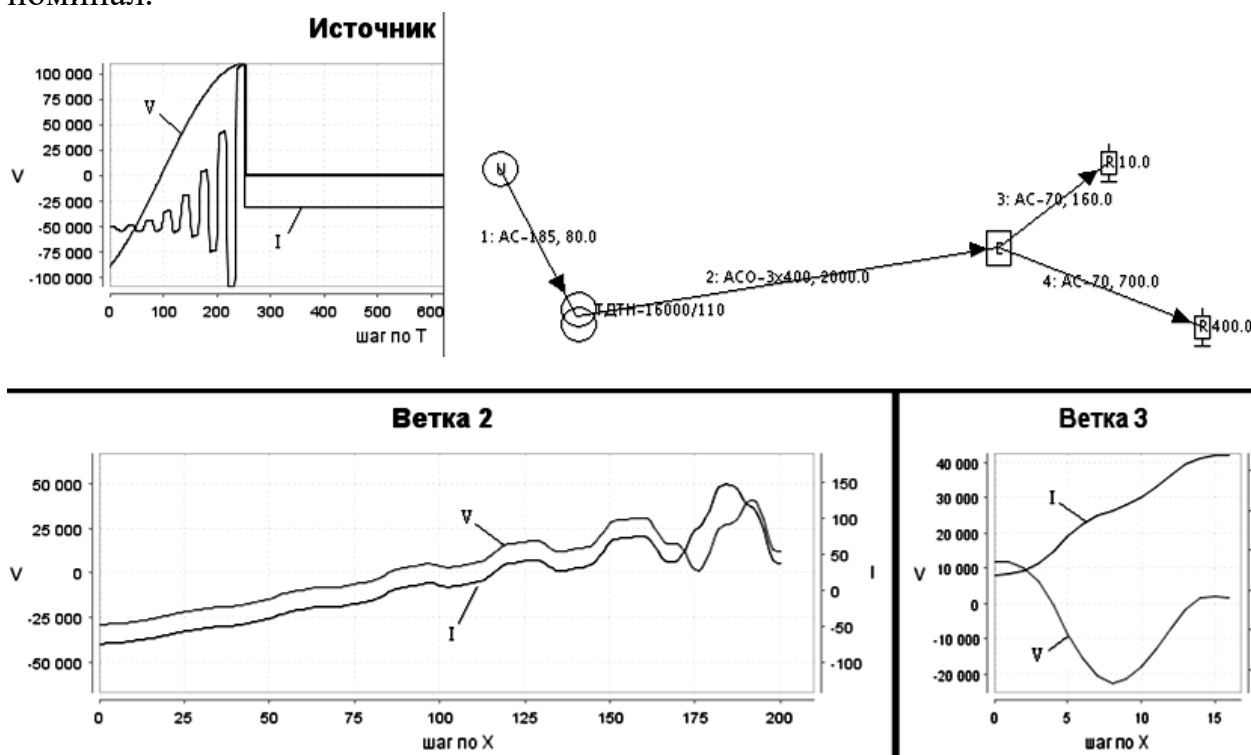


Рис. 6.2. Резонансные явления на линии при наличии высокочастотной составляющей, вызванной вышеописанными эффектами.

В целом полученные результаты соответствуют теоретически прогнозируемым, что позволяет считать разработанный программный комплекс пригодным для моделирования процессов, происходящих в электроэнергетических сетях, и постепенно переходить к моделированию и изучению результатов на все более сложных глобальных разветвленных сетях. Разработанная вычислительная модель может использоваться для численного моделирования электродинамики глобальных (межрегиональных) электроэнергетических сетей заданной топологии, для исследования экстремальных ситуаций в этих сетях, для проектирования и оптимизации их работы и др. Тестирование разработанной вычислительной модели, реализованной в виде программного комплекса, показало её пригодность для решения вышеперечисленных задач.

В заключении сформулированы основные выводы диссертации.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Kholodov A.S., Kholodov Y.A. Computational Models on Graphs for the Nonlinear Hyperbolic System of Equations // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2004. — V. 476. — P. 161-167. Doi: 10.1115/PVP2004-2580.
2. Kholodov A.S., Simakov S.S., Kholodov Y.A. Global matter transport simulation using dynamical models of cardiovascular and respiratory systems // Proceedings of the 2005 Summer Bioengineering Conference. — 2005. — Vol. 2005. — P. 51-52.

3. *Simakov S.S., Kholodov A.S., Yevdokimov A.V., Kholodov Y.A.* Numerical Simulations of Cardiovascular Diseases and Global Matter Transport // In Advanced Information and Telemedicine Technologies for Health. — 2005. — Vol. 2. — P. 188–192.
4. *Simakov S.S., Kholodov A.S., Kholodov Y.A., Nadolskiy A.A., Shushlebin A.N.* Global Dynamical Model of the Cardiovascular System // In: Motasoaes C.A. et al. (eds) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006. — Springer, Dordrecht.
Doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_204
5. *Simakov S.S., Kholodov A.S., Kholodov Y.A., Nadolskiy A.A., Shushlebin A.N.* Computational Study of the Vibrating Disturbances to the Lung Function // In: Motasoaes C.A. et al. (eds) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006. — Springer, Dordrecht.
Doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_205
6. *Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2006. — Vol. 46(9). — P. 1560–1588. Doi: <https://doi.org/10.1134/S0965542506090089>
7. *Kholodov Y.A., Kholodov A.S., et al.* Computational Models on Graphs for Nonlinear Hyperbolic and Parabolic System of Equations // In: Motasoaes C.A. et al. (eds) III European Conference on Computational Mechanics. — 2006. — Springer, Dordrecht.
Doi: https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_43
8. *Kholodov Y., Evseev E., Morozov E., Bapayev A.* Simulation Model for the Rod System Graphs Dynamics // ASME Pressure Vessels and Piping Conference. — 2006. — Vol. 2. — P. 485–496. Doi: 10.1115/PVP2006-ICPVT-11-93708.
9. *Северов Д.С., Трифонов С.В., Миненко М.И., Холодов Я.А.* Численное моделирование IP-сетей передачи данных в рамках уравнений сплошной среды // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 46. — С. 218–227.
10. *Морозов И.И., Холодов Я.А.* Моделирование режимов глобальных электрических сетей // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 47. — С. 170–178.
11. *Трифонов С.В., Холодов Я.А., Миненко М.И., Т.Е. Истомин Т.Е., Чечендаев А.В.* Алгоритмы оптимизации работы беспроводной сенсорной сети на базе протокола ZigBee // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 56 — С. 86–95.
12. *Bordonos A.K., Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Morozov I.I.* Modeling of the global high-voltage grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2009. — Vol. 21(6). — P. 3–16.
13. *Морозов И.И., Холодов Я.А., Крылов Д.А., Геллер О.В.* Моделирование режимов глобальных электроэнергетических систем // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2. № 3(7). — С. 46–52.
14. *Холодов Я.А., Холодов А.С., Гасников А.В., Морозов И.И., Тарасов В.Н.* Моделирование транспортных потоков – актуальные проблемы и перспективы их решения // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2. № 4(8). — С. 152–162.
15. *Geller O.V., Vasilev M.O., Kholodov Y.A.* Building a high-performance computing system for simulation of gas dynamics // Computer Research and Modeling. — 2010. — Vol. 2(3). — P. 309–317.
16. *Morozov I.I., Gasnikov A.V., Tarasov V.N., Kholodov Y.A., Kholodov A.S.* Numerical study of traffic flows by the hydrodynamic models // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3(4). — P. 389–412.
17. *Severov D.S., Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Comparison of packet-level and fluid models of IP networks // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4(4). — P. 385–393. Doi: <https://doi.org/10.1134/S2070048212040072>

18. *Trifonov S.V., Kholodov Y.A.* Study and optimization of wireless sensor network based on ZigBee protocol // *Computer Research and Modeling*. — 2012. — Vol. 4(4). — P. 855-869
19. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков // М.: МЦНМО. — 2013. — 428 с.
20. *Kholodov Y.A., Alekseenko A.E., Vasilev M.O., Kholodov A.S.* Developing the mathematical model of road junction by the hydrodynamic approach // *Computer Research and Modeling*. — 2014. — Vol. 6(4). — P. 503-522.
21. *Alekseenko A.E., Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Goreva A.I., Vasilev M.O., Chekhovich Y.V., Mishin V.D., Starozhilets V.M.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I // *Computer Research and Modeling*. — 2015. — Vol. 7(6). — P. 1185-1203.
22. *Kholodov Y.A., Alekseenko A.E., Kholodov A.S., Vasilev M.O., Mishin V.D.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part II // *Computer Research and Modeling*. — 2015. — Vol. 7(6). — P. 1205-1219.
23. *Xiuzheng Z., Liguoz Z., Kholodov Y.A.* Model predictive control of eco-driving for transit using V2I communication. *Control Conference (CCC)*, 2015, P. 2511-2516. Doi: 10.1109/ChiCC.2015.7260026
24. *Alekseenko A.E., Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Boundary control problems for quasilinear systems of hyperbolic equations // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56(6). — P. 916-931. Doi: <https://doi.org/10.1134/S0965542516060166>
25. *Kholodov Y.A., Vasilev M.O., Kholodov A.S., Tsybulin I.V.* Developing the mathematical model for fine impurities spreading in ventilation networks // *Math. Models Comput. Simul.* — 2017. — Vol. 9(2). — P. 142-154. Doi: <https://doi.org/10.1134/S2070048217020077>
26. *Alekseenko A.E., Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Chekhovich Y.V., Starozhilets V.M.* Adaptive traffic light control on highway entrances // *2017 IEEE 20th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. — 2017. — P. 1-6. Doi: 10.1109/ITSC.2017.8317729
27. *Prokoptsev N.G., Alekseenko A.E., Kholodov Y.A.* Traffic flow speed prediction on transportation graph with convolutional neural networks // *Computer Research and Modeling*. — 2018. — Vol. 10(3), P. 359-367. Doi: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-359-367
28. *Verentsov S.I., Magerramov E.A., Vinogradov V.A., Gizatullin R.I., Alekseenko A.E., Kholodov Y.A.* Bayesian localization for autonomous vehicle using sensor fusion and traffic signs // *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 295-303. DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-295-303
29. *Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Tsybulin I.V.* Construction of Monotone Difference Schemes for Systems of Hyperbolic Equations // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2018. — Vol. 58(8). — P. 1226-1246. Doi: <https://doi.org/10.1134/S0965542518080110>
30. *Sergey Verentsov, Emil Magerramov, Vlad Vinogradov, Ramil Gizatullin, Andrey Alekseenko, Yaroslav Kholodov and Evgeniy Nikolskiy.* Bayesian Framework for Vehicle Localization Using Crowdsourced Data. *2018 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, Changshu, 2018, pp. 215-219. DOI: 10.1109/IVS.2018.8500404
31. *Kholodov Y.A.* Development of network computational models for the study of nonlinear wave processes on graphs // *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 777-814. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-777-814.

Холодов Ярослав Александрович
Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных
волновых процессов на графах

Автореф. дис. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук

Подписано в печать _____ 2021. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 2. Тираж 100 экз.

Типография Переплётофф