На правах рукописи

Алхалифах Сераж Абдулразак

Оценки функционалов типа Бора в различных классах аналитических и гармонических функций

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2021

Работа выполнена на *кафедре математического анализа Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

Научный руководитель:	*ведущий научный сотрудник НОМЦ ПФО, доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВО К(П)ФУ*
	Каюмов Ильгиз Рифатович.
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет»*
	Гарифьянов Фархат Нургаязович,
	доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»
	Хабибуллин Булат Нурмиевич.
Ведущая организация:	*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.*

Защита состоится «17» июня 2021 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета *КФУ.01.05.* при *ФГАОУ ВО К(П)ФУ* по адресу: *420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Сведения о защите и автореферат диссертации размещены на официальных сайтах Высшей аттестационной комиссии Министерства науки и высшего образования Российской Федерации https://vak.minobrnauki.gov.ru и ФГАОУ ВО К(П)ФУ www.kpfu.ru.

Автореферат разослан «____» _____ 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

кандидат физ.-мат. наук, доцент *Насибуллин Р.Г.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Объектом исследования в настоящей диссертационной работе являются неравенства типа Бора[1] для аналитических функций и гармонических отображений в плоскости комплексного переменного.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, а $\mathcal{A}$ – пространство аналитических функций в $\mathbb{D}$. Очевидно, что каждая функция $f \in \mathcal{A}$ имеет разложение в степенной ряд в начале координат. Возникает вопрос: что можно сказать о сумме модулей членов ряда?

В 1914 году Харальд Бор[2] исследовал этот вопрос и заметил: «В частности, решение того, что называется “проблема абсолютной сходимости” для ряда Дирихле типа $\sum a_n n^{-s}$, должно быть основано на изучении соотношений между абсолютным значением степенного ряда от бесконечного числа переменных, с одной стороны, а с другой — суммой абсолютных значений отдельных членов. Именно в ходе этого исследования я пришел к рассмотрению проблемы, касающейся степенных рядов только одной переменной, которую мы обсуждали в прошлом году и которая, кажется, сама по себе представляет некоторый интерес».

Пусть $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{A} : |f(z)| < 1 \text{ in } \mathbb{D}\}$. Классический результат Х. Бора[2] в окончательном виде выглядит следующим образом:

Теорема А. *Пусть функция* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *– аналитична в* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| \leq 1$ *для всех* $z \in \mathbb{D}$. *Тогда*

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad \textit{для всех} \quad r = |z| \leq \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Константа $\frac{1}{3}$ *не может быть улучшена.*

Заметим, что в 1914 г. Х. Бор получил неравенство (1) только для $r \leq 1/6$.

[1] Харальд Август Бор (1887 – 1951), младший брат известного физика-теоретика Нильса Бора. Долгое время он работал профессором математики в Копенгагенском университете.

[2] Bohr, H. *A theorem concerning power series* / H. Bohr // Proc. London Math. Soc. — 1914. — Vol. 13, no. 2. — P. 1–5.

Точная версия теоремы для $r \leq 1/3$ была независимо доказана М. Риссом, И. Шуром и Ф. Винером[3], и константа $1/3$ называется радиусом Бора. Другие доказательства также приведены Сидоном[4], Томичем[5] и Полсеном и др.[6,7].

В последние годы проблема радиуса Бора привлекает внимание многих исследователей в области теории функций одной и нескольких комплексных переменных. Эта проблема имеет отношение к плоским гармоническим отображениям, многочленам, областям с несколькими комплексными переменными, решениям эллиптических уравнений в частных производных и более абстрактным задачам. Проблематика неравенств типа Бора относится к теории экстремальных задач аналитических функций. Большой вклад в ее развитие внесли отечественные математики: Г.М. Голузин, М.В. Келдыш, М.А. Лаврентъев, И.И. Привалов, Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев, И.А. Александров, А.Ю. Васильев, В.В. Горяйнов, Е.П. Долженко, В.Н. Дубинин, С.Л. Крушкаль, Г.В. Кузьмина, Н.А. Лебедев, Н.Г. Макаров, И.М. Милин, С.Р. Насыров, Д.В. Прохоров, А.Ю. Солынин, В.В. Старков, Н.А. Широков.

При изучении неравенства Бора широко рассматриваются два типа пространств. Это пространство подчинений и пространство комплекснозначных ограниченных гармонических отображений. Один из способов обобщения понятия феномена Бора, первоначально определенного для отображений на $\mathbb{D}$, состоит в том, чтобы переписать неравенство Бора в эквивалентной форме

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 - |a_0| = 1 - |f(0)|. \tag{2}$$

Расстояние до границы — важная геометрическая величина. Обратим внимание,

---

[3] Dixon, P. G. *Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality* / P. G. Dixon // Bull. Lond. Math. Soc. — 1995. — Vol. 27, no. 4. — P. 359–362.

[4] Sidon, S. *Über einen Satz von Herrn Bohr* / S. Sidon // Math. Z. — 1927. — Vol. 26, no. 1. — P. 731–732.

[5] Tomić, M. *Sur un théoréme de H. Bohr* / M. Tomić // Math. Scand. — 1962. — Vol. 11. — P. 103–106.

[6] Paulsen, V. I. *On Bohr's inequality* / V. I. Paulsen, G. Popescu, D. Singh // Proc. London Math. Soc. — 2002. — Vol. 85. — P. 493–512.

[7] Paulsen, V. I. *Bohr's inequality for uniform algebras* / V. I. Paulsen, D. Singh // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132, no. 12. — P. 3577–3579.

что число $1-|f(0)|$ – расстояние от точки $f(0)$ до границы $\mathbb{T}$ единичного круга $\mathbb{D}$. С использованием этой формулировки неравенства Бора в терминах расстояния, понятие радиуса Бора можно обобщить на класс функций f, аналитических в $\mathbb{D}$, которые принимают значения в данной области Ω.

Определение 0.1. *Пусть $f, g \in \mathcal{B}$. Функция $f(z)$ называется подчиненной*[8] *функции $g(z)$, это обозначается*

$$f(z) \prec g(z),$$

если существует функция $\omega(z)$, голоморфная в $\mathbb{D}$ и удовлетворяющая условиям: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и

$$f(z) = g(\omega(z)) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Пусть $S(f) = \{g : g \prec f\}$ и $\Omega \subseteq f(\mathbb{D})$. Говорят, что семейство $S(f)$ удовлетворяет феномену Бора, если существует r_f, $0 < r_f \leq 1$, такое, что всякий раз, когда $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in S(f)$, имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n = M_g(r) - |b_0| \leq d(f(0), \partial f(\mathbb{D})) \quad \text{для всех} \quad r \leq r_f. \tag{3}$$

Здесь $M_g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n$, $\partial f(\mathbb{D})$ – граница $f(\mathbb{D})$ и $d(a, A)$ – расстояние от элемента a до множества . Заметим, что если $f(z) = (a_0 - z)/(1 - \bar{a_0} z)$ при $|a_0| < 1$ и $\Omega = \mathbb{D}$, то $d(f(0), \partial\Omega) = 1 - |a_0| = 1 - |b_0|$, так что (3) выполняется при $r_f = 1/3$ согласно теореме А. Мы говорим, что семейство $S(f)$ удовлетворяет классическому феномену Бора, если (3) выполняется для $|z| = r < r_0$ с компенсацией $1 - |f(0)|$ вместо $d(f(0), \partial f(\mathbb{D}))$.

Следовательно, формулировка в терминах расстояния позволяет распространить теорему Бора на различные расстояния при условии, что феномен Бора вы-

[8] Авхадиев, Ф. Г. *Введение в геометрическую теорию функций* / Ф. Г. Авхадиев. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2012. — 127 с.

полняется. Абу–Муханна[9] получил следующую теорему:

Теорема 0.2. *Если f, g аналитичны в $\mathbb{D}$ и такие, что f однолистна в $\mathbb{D}$ и $g \in S(f)$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq d(f(0), \partial f(\mathbb{D})) \quad \text{для всех} \quad r \leq r_f = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157. \tag{4}$$

Точность r_f показывает функция Кебе $f(z) = z/(1-z)^2$.

Мажорантный ряд функции f, определенный как $M_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, принадлежит к очень важному классу рядов, а именно к рядам с неотрицательными членами. Как отметили Али, Барнард и Солынин[10], есть еще один класс интересных рядов – класс знакочередующихся рядов. Для $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ соответствующий знакочередующийся ряд имеет вид

$$\mathfrak{A}_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k |a_n| r^n. \tag{5}$$

Авторы[11] получили несколько результатов о радиусе Бора, в том числе следующий аналог теоремы А.

Теорема 0.3. *Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ аналитична и ограничена в $\mathbb{D}$, то*

$$|\mathfrak{A}_f(r)| \leq \|f\|_{\infty} \quad \text{для всех} \quad r \leq r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Радиус $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ является наилучшим.

Также доказали следующая.

Теорема 0.4. *Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$ – нечетная аналитическая функция в $\mathbb{D}$ такая, что $|f(z)| \leq 1$ в $\mathbb{D}$. Тогда $M_f(r) \leq 1$ для $0 \leq r \leq r_*$, где r_* – решение уравнения*

$$5r^4 + 4r^3 - 2r^2 - 4r + 1 = 0,$$

---

[9] Abu-Muhanna, Y. *Bohr phenomenon in subordination and bounded harmonic classes* / Y. Abu-Muhanna // Complex Var. Elliptic Equ. — 2010. — Vol. 55, no. 11. — P. 1071–1078.

[10] Ali, R. M. *A note on the Bohr's phenomenon for power series* / R. M. Ali, R. W. Barnard, A. Yu. Solynin // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 449, no. 1. — P. 154–167.

которое является единственным в интервале $1/\sqrt{3} < r < 1$. *Величина* r_* *может быть вычислена в терминах радикалов, как*

$$r_* = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{\frac{A+32}{3}} + \frac{1}{10}\sqrt{\frac{64}{3} - \frac{A}{3} + 144\sqrt{\frac{3}{A+32}}} = 0.7313\ldots,$$

где

$$A = 10 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \left((47 - 3\sqrt{93})^{\frac{1}{3}} + (47 + 3\sqrt{93})^{\frac{1}{3}} \right).$$

Однако нахождение точного радиуса Бора для нечетной аналитической функции оставалось открытой проблемой, и в 2017 году Каюмов и Поннусами[11] решили ее и доказали следующую теорему

Теорема 0.5. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$ *– нечетная аналитическая функция в* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| \leq 1$ *в* $\mathbb{D}$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}| r^{2k-1} \leq 1 \quad \textit{для всех} \quad r \leq r_0,$$

где $r_0 \simeq 0.789991...$ *максимальный положительный корень уравнения*

$$8r^4 + r^2 - 6r + 1 = 0,$$

и константа r_0 *не может быть улучшена.*

В 2017 году Каюмов и Поннусами[12] ввели новую величину, $R_N^f(z)$ для f, определенную равенством

$$R_N^f(z) = |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k, \quad |z| = r, \tag{6}$$

которую они назвали суммой Бора–Рогозинского. Они также исследовали радиусы Бора-Рогосинского для семейства $\mathcal{B}$ и получили следующий результат.

[11] Kayumov, I. R. *Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions* / I. R. Kayumov, S. Ponnusamy // J. Math. Anal. and Appl. — 2018. — Vol. 465. — P. 857–871.

[12] Kayumov, I. R. *Bohr–Rogosinski radius for analytic functions* / I. R. Kayumov, S. Ponnusamy. — 2017. — 10 p. — Preprint, available online. https://arxiv.org/pdf/1708.05585.pdf.

Теорема 0.6. *Предположим, что* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *аналитична в единичном круге* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| < 1$ *в* $\mathbb{D}$. *Тогда*

$$|f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad \textit{для } r \leq R_N, \tag{7}$$

где R_N *– положительный корень уравнения* $2(1+r)r^N - (1-r)^2 = 0$. *Радиус* R_N *является наилучшим из возможных. Более того,*

$$|f(z)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad \textit{для } r \leq R'_N, \tag{8}$$

где R'_N *– положительный корень уравнения* $(1+r)^N - (1-r)^2 = 0$, *и радиус* R'_N *является наилучшим.*

При $N = 1$ величина (6) связана с классической суммой Бора, в которой $f(0)$ заменяется на $f(z)$. Очевидно, что

$$|S_N(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=N}^{\infty} a_k z^k \right| \leq R_N^f(z)$$

и, следовательно, установление радиуса типа Бора для $R_N^f(z)$ дает радиус Рогозинского в случае ограниченных аналитических функций. Следовательно, сумма Бора–Рогозинского связана с характеристикой Рогозинского.

Обобщение неравенства Бора для гармонических отображений в единичном круге $\mathbb{D}$ было инициировано Абу–Муханной[10].

Теорема 0.7. *Пусть* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ *– комплексное гармоническое отображение в* $\mathbb{D}$. *Если* $|f(z)| \leq 1$ *в* $\mathbb{D}$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \leq \frac{2}{2\pi} \approx 0.63662,$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e^{i\mu} a_n + e^{-i\mu} b_n| r^n + |\mathrm{Re}\ e^{i\mu} a_0| \leq 1 \tag{9}$$

для $r \leq 1/3$ *и любого действительного* μ. *Равенство в* (9) *достигается только в пределе на функции Мёбиуса*

$$f(z) = \frac{z-a}{1-az}, \quad 0 < a < 1, \quad \textit{при} \quad a \to 1.$$

В 2018 году Каюмов, Поннусами и Шакиров[13] исследовали радиус Бора для локально однолистных плоских гармонических отображений. Они получили следующую теорему:

Теорема 0.8. *Предположим, что* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ *является сохраняющим ориентацию* K*-квазиконформным гармоническим отображением в единичном круге* $\mathbb{D}$*, где* $|h(z)| \leq 1$ *в* $\mathbb{D}$*. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq 1 \quad \text{для } r \leq \tfrac{K+1}{5K+1}, \tag{10}$$

и

$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq 1 \quad \text{для } r \leq \tfrac{K+1}{3K+1}. \tag{11}$$

Константы $\frac{K+1}{5K+1}$ *и* $\frac{K+1}{3K+1}$ *не могут быть улучшены.*

Боас[14] и Хавинсон[15], Айзенберг[16,17], а также Айзенберг и Тарханов[18] расширили неравенство Бора для голоморфных функций в некоторых конкретных областях (например для полных областей Рейнхардта) в $\mathbb{C}^n$. В 1956 году Риччи[19] начал исследование радиуса Бора с фиксированным нулевым коэффициентом a_0, и в 1962 году Бомбьери[20] решил проблему для a_0: он доказал, что $|a_0| \geq \frac{1}{2}$. Несколько улучшенных версий классического неравенства Бора были даны Каюмовым и

[13] Kayumov, I. R. *Bohr radius for locally univalent harmonic mappings* / I. R. Kayumov, S. Ponnusamy, N. Shakirov // Math. Nachr. — 2018. — Vol. 291. — P. 1757–1768.

[14] Boas, H. P. *Majorant series* / H. P. Boas // Korean Math. Soc. — 2000. — Vol. 37, no. 2. — P. 321–337.

[15] Boas, H. P. *Bohr's power series theorem in several variables* / H. P. Boas, D. Khavinson // Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — Vol. 125, no. 10. — P. 2975–2979.

[16] Aizenberg, L. *Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series* / L. Aizenberg // Proc. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 128, no. 4. — P. 1147–1155.

[17] Aizenberg, L. *Generalization of results about the Bohr radius for power series* / L. Aizenberg // Stud. Math. — 2007. — Vol. 180. — P. 161–168.

[18] Aizenberg, L. *A Bohr phenomenon for elliptic equations* / L. Aizenberg, N. Tarkhanov // Proc. Amer. Math. Soc. — 2001. — Vol. 82, no. 3. — P. 385–401.

[19] Ricci, G. *Complementi a un teorema di H. Bohr riguardante le serie di potenze* / G. Ricci // Rev. Un.Mat. Argentina. — 1955/1956. — Vol. 17. — P. 185–195.

[20] Bombieri, E. *Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze* / E. Bombieri // Boll. Un. Mat. Ital. — 1962. — Vol. 17, no. 3. — P. 276–282.

Поннусами[21,12]. Евдоридис, Поннусами и Расила[22] представили несколько улучшенных версий неравенства Бора для гармонических отображений. Каюмов и Поннусами[23] также обсуждали радиус Бора для класса аналитических функций g, когда g подчиняется функции из класса нечетных однолистных функций. Недавно Лиу и Поннусами[24] установили теорему Бора для ν–отображений Блоха. Мы отсылаем читателя к недавнему исследованию Абу–Муханна, Али и Поннусами[25]. Более того, Поннусами, Виджаякумар и Виртс[26,27] рассмотрели задачу определения радиуса Бора в улучшенной форме для функций, имеющих нескольких нулей в начале координат. Более подробную информацию об обобщениях и расширениях результата Бора можно найти в библиографии и ссылки в нем.

Цели и задачи диссертационной работы.

- Доказательство аналога неравенства типа Бора для квазиподчиненных аналитических функций и нечетных подчиненных аналитических функций.

- Получение радиуса Бора для аналитических функций с фиксированным нулевым коэффициентом, а также для K-квазиконформных гармонических отображений.

- Обобщение классического неравенства Рогозинского.

---

[21] Kayumov, I. R. *Improved version of Bohr's inequality* / I. R. Kayumov, S. Ponnusamy // Comptes Rendus Mathematique. — 2018. — Vol. 356, no. 3. — P. 272–277.

[22] Evdoridis, S. *Improved Bohr's inequality for locally univalent harmonic mappings* / S. Evdoridis, S. Ponnusamy, A. Rasila // Indag. Math. (N.S.). — 2019. — Vol. 30. — P. 201–213.

[23] Kayumov, I. R. *Bohr inequality for odd analytic functions* / I. R. Kayumov, S. Ponnusamy // Comput. Methods Funct. Theory. — 2017. — Vol. 17. — P. 679–688.

[24] Liu, G. *On harmonic ν–bloch and ν–bloch-type mappings* / G. Liu, S. Ponnusamy // Results in Mathematics. — 2018. — Vol. 73, no. 90. — 17 p. — https://doi.org/10.1007/s00025-018-0853-2.

[25] Abu–Muhanna, Y. *On the Bohr inequality* / Y. Abu-Muhanna, R. M. Ali, S. Ponnusamy / Ed. by N.K. Govil et al. — In "Progress in approximation theory and applicable complex analysis" Springer optimization and its applications, 2016. — Vol. 117. — P. 265–295.

[26] Ponnusamy, S. *New inequalities for the coefficients of unimodular bounded functions* / S. Ponnusamy, R. Vijayakumar, K.-J. Wirths // Results in Mathematics. — 2020. — Vol. 75, no. 107. — 11 p. — https://doi.org/10.1007/s00025-020-01240-1.

[27] Ponnusamy, S. *Bohr type inequalities for functions with a multiple zero at the origin* / S. Ponnusamy, K.-J. Wirths // Comput. Methods Funct. Theory. — 2020. — 12 p. — https://doi.org/10.1007/s40315-020-00330-z.

- Изучение нескольких улучшенных версий неравенства Бора для ограниченных аналитических функций и для сохраняющих ориентацию K-квази- конформных гармонических отображений, и нахождение точного радиуса Бора.

- Получение точного радиуса Бора для подкласса аналитических функций с ограничениями на коэффициенты ряда Тейлора, и для сохраняющих ориентацию K-квазиконформных гармонических отображений.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Часть результатов получена в нераздельном соавторстве с И.Р. Каюмовым и С. Поннусами при равноправном участии сторон. В теоремах 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5, 1.4.7, 1.4.10, 1.4.12, 1.4.13, 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.6, И.Р. Каюмову и С. Поннусами принадлежат постановки задач и метод исследования.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные в данной диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения экстремальных свойств ограниченных аналитических функций и гармонических функций, изучения различных подклассов аналитических функций и подклассов гармонических функций, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов.

Методы исследования. В диссертации использовались вариационные методы, а также методы геометрической теории функций комплексного переменного.

Кроме того, мы также используем программное обеспечение «Wolfram Mathematica» для решения и объяснения неравенств, используемых при доказательстве некоторых теорем и примеров.

Положения, выносимые на защиту:

- Доказан аналог неравенства типа Бора для квазиподчиненных аналитических функций и нечетных подчиненных аналитических функций.

- Получена точная версия неравенства Бора для аналитических функций с

фиксированным нулевым коэффициентом, а также для K-квазиконфор- мных гармонических отображений.

- Установлена новая версия неравенства Рогозинского для аналитических функций, определенных на единичном круге $\mathbb{D}$.

- Найдены точные радиусы Бора для некоторых версий неравенства Бора для класса ограниченных аналитических функций и для сохраняющих ориентацию K-квазиконформных гармонических отображений.

- Установлено неравенство Бора для подкласса аналитических функций с ограничениями на коэффициенты ряда Тейлора, и для подкласса сохраняющих ориентацию K-квазиконформных гармонических отображений.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1) XIII Международная летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы - 2017», 21 – 27 августа 2017 г., г. Казань.

2) II Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы физико-математического образования - 2017», 20 – 22 октября 2017 г., г. Набережные Челны.

3) XVII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения - 2018», 23 – 28 ноября 2018 г., г. Казань.

4) XIV Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы - 2019», 7 – 12 сентября 2019 г., г. Казань.

5) Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения - 2020», 24 – 28 августа 2020 г., г. Казань.

Публикации. Содержание диссертации опубликовано в 7 печатных работах, из них 3 статьи [1–3] опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в

список ВАК РФ, или приравненных к ним, а также в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 4 работы опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов [4–7].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личной вклад автора в опубликованные работы. И.Р. Каюмову и С. Поннусами в совместных публикациях принадлежат постановки задач и метод исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 90 страниц. Библиография включает 90 наименований.

Содержание работы

Во введении описана кратко история неравенства Харальда Августа Бора, обоснована актуальность диссертационной темы, поставлены основные цели и задачи диссертации, обоснованы научная новизна и практическая значимость работы, описана методология и сформулированы выносимые на защиту положения, описана структура диссертации.

В первой главе в разделе 1.1 диссертации содержится напоминание о некоторых основных понятиях и результатах, которых будут использованы в тексте диссертации.

В параграфе 1.2 диссертации получен аналог неравенства типа Бора для квазиподчиненных аналитических функций. В 1970 году Робертсон[28] представил и разработал концепцию квазиподчинения, которая сочетает в себе принципы подчинения и мажоризации.

Мы говорим, что $f(z)$ *мажорируется функцией* $g(z)$ *в* $\mathbb{D}$*, если* $|f(z)| \leq |g(z)|$ *для всех* $z \in \mathbb{D}$.

[28] Robertson, M. S. *On the theory of univalent functions* / M. S. Robertson // Annals of Mathematics. — 1936. — Vol. 37, no. 2. — P. 374–408.

Определение 0.9. *Пусть $f, g \in \mathcal{B}$. Функция $f(z)$ называется квазиподчиненной*[29] *функции $g(z)$, это обозначается*

$$f(z) \prec_q g(z),$$

если для всех $z \in \mathbb{D}$ справедливо равенство

$$f(z) = \phi(z) g(\omega(z)), \tag{12}$$

где функции ω и ϕ голоморфны в области $\mathbb{D}$, причем $|\omega(z)| \leq |z|$ и $|\phi(z)| \leq 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$.

Нами доказан следующий результат

Теорема 1.2.1 *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – две аналитические функции в $\mathbb{D}$ с разложениями Тейлора $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, соответственно. Если $f(z) \prec_q g(z)$, то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k \quad \text{для всех} \quad |z| = r \leq \frac{1}{3}. \tag{13}$$

В следующем разделе 1.3 диссертации произведено сравнение радиуса Бора для нечетных функций f и g с отношением подчиненности с работой Каюмова и Поннусами для класса нечетных функций, где радиус Бора оказался равным 0.789991..., а радиус Бора для нечетных функций f и g, где $f \prec g$, оказался равным $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.2 *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – нечетные аналитические функции в $\mathbb{D}$ с разложениями Тейлора $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$ и $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} z^{2k-1}$, соответственно. Если $f(z) \prec g(z)$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}| r^{2k-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r^{2k-1} \quad \text{для } |z| = r \leq \tfrac{1}{\sqrt{3}}. \tag{14}$$

[29] Авхадиев, Ф. Г. *Введение в геометрическую теорию функций* / Ф. Г. Авхадиев. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2012. — 127 с.

Раздел 1.4 диссертации посвящен модифицированной версии классического неравенства Рогозинского. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.2 *Пусть* $f \in \mathcal{B}$ *и* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Тогда*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \quad \text{для всех } |z| = r \leq \tfrac{1}{2}. \tag{15}$$

Далее приводится результат, который является точной версией неравенства Бора для аналитических функций с фиксированным нулевым коэффициентом. Нами доказана следующая

Теорема 1.4.4 *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *– аналитическая функция в* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| \leq 1$ *для всех* $z \in \mathbb{D}$. *Тогда имеет место следующее точное неравенство:*

$$\frac{1 - (1 + |a_0| - |a_0|^2)r}{1 - |a_0| r} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad \text{для всех } r \leq 1/3. \tag{16}$$

Пример функции $g(z) = (z + a_0)/(1 + \overline{a_0} z)$ *показывает, что равенство выполняется для всех* $a_0 \in \mathbb{D}$ *и* $r \leq 1/3$.

Более того, в этом разделе сформулированы следующие теоремы.

Теорема 1.4.6 *Предположим, что* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *является аналитической функцией в* $\mathbb{D}$ *и* $|f(z)| < 1$ *для всех* $z \in \mathbb{D}$ *и* $0 \leq |a_0| = a < 1$. *Тогда*

$$|f(z)| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \tag{17}$$

для всех $a \geq 2\sqrt{3} - 3 \approx 0.4641016$ *и* $|z| = r \leq r_a$, *где*

$$r_a = \frac{1}{\sqrt{(1+a)^2 + a^2} + 1 + a}$$

и радиус r_a *является точным.*

Теорема 1.4.9 *Пусть* $f \in \mathcal{B}$ *и* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *и* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$A_f(z) := |f(z^m)| + |z^m| \, |f'(z^m)| + \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad \text{для всех} \quad r \leq R_{m,1}, \tag{18}$$

где $R_{m,1}$ – наибольший положительный корень уравнения $\varphi_m(x) = 0$,

$$\varphi_m(x) \doteqdot (1-x)(x^{2m}+2x^m-1)+2x^2(1+x^m)^2, \tag{19}$$

и константы $R_{m,1}$ не могут быть улучшены.

Теорема 1.4.11 *Если $f \in \mathcal{B}$ и $m \in \mathbb{N}$, то*

$$B_f(z) := |f(z^m)| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{f^{(k)}(z^m)}{k!} \right| r^k \leq 1 \quad \textit{для всех } r \leq R_{m,2}, \tag{20}$$

где $R_{m,2}$ – наименьший положительный корень уравнения $\psi_m(x) = 0$,

$$\psi_m(x) \doteqdot 2x^2 - (1-x^{2m})(1-x^m-x), \tag{21}$$

и константы $R_{m,2}$ не могут быть улучшены.

В разделе 1.5 сформулированы и доказаны три точных версии неравенства типа Бора для класса ограниченных аналитических функций.

Далее в разделе 1.6 диссертации введем подкласс $\mathcal{B}'$ аналитических функций, определенных в единичном круге $\mathbb{D}$ следующим образом

$$\mathcal{B}' = \{f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : f \in \mathcal{B} \quad \text{и} \quad |a_n| \leq 1 - |a_0| \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Нами доказан следующий результат.

Теорема 1.6.4 *Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}'$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1 \quad \textit{для всех} \quad r \leq \frac{1}{2}, \tag{22}$$

где $|z| = r$, и радиус $r = 1/2$ является точным.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию нескольких версий неравенства типа Бора для K-квазиконформных гармонических отображений и получению радиуса Бора для семейства гармонических отображений вида $f = h + \overline{g}$, где $h \in \mathcal{B}'$.

В разделе 2.1 диссертации дано напоминание о некоторых основных понятиях и результатах, которые будут использованы в тексте диссертации.

В разделе 2.2 получены две версии неравенства Бора для K-квазиконформных гармонических отображений, первая из них является обобщенной версией теоремы 1.4.4, а вторая является обобщенной версией теоремы 1.4.6, и доказаны следующие теоремы

Теорема 2.2.1 *Предположим, что* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ *– сохраняющее ориентацию* K*-квазиконформное гармоническое отображение в* $\mathbb{D}$*, где* $|h(z)| \leq 1$ *в* $\mathbb{D}$*. Тогда выполняется следующее точное неравенство:*

$$\frac{1 - r(|a_0| + (k+1)(1-|a_0|^2))}{1 - r|a_0|} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq 1 \quad \text{для } r \leq \tfrac{1}{3}. \tag{23}$$

Функция

$$\frac{z + a_0}{1 + \overline{a_0} z} + \lambda \overline{\frac{z + a_0}{1 + \overline{a_0} z}}$$

при $\lambda \to 1$ *демонстрирует, что неравенство* (23) *является точным для всех* $a_0 \in \mathbb{D}$ *и всех* $r \leq \frac{1}{3}$*.*

Теорема 2.2.3 *Пусть* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ *– сохраняющее ориентацию* K*-квазиконформное гармоническое отображение в* $\mathbb{D}$*, где* $|h(z)| < 1$ *в* $\mathbb{D}$*, и* $0 \leq a = |a_0| < 1$*. Тогда выполняется следующее точное неравенство:*

$$|h(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq 1, \tag{24}$$

для всех $a \geq \alpha_k$ *и* $|z| = r \leq r_{a,k}$*, где*

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{k^2 + 12k + 12} - (2k+3)}{k+1} \quad \text{и} \quad r_{a,k} = \frac{B_{a,k} - (k+2)(1+a)}{2a^2(k+1) + 2ak},$$

где $B_{a,k} = \sqrt{a^2(k^2 + 8k + 8) + 2a(k^2 + 6k + 4) + (k+2)^2}$*.*
Радиус $r_{a,k}$ *является точным.*

Далее в разделе 2.3 введен и найден радиус Бора еще для двух улучшенных версий неравенства Бора для гармонических отображений. Имеет место

Теорема 2.3.1 *Предположим, что* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ *является гармоническим отображением* $\mathbb{D}$ *таким, что* $|g'(z)| \leq k|h'(z)|$ *для*

некоторых $k \in [0,1]$ *и* $h \in \mathcal{B}$ *и* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$D_f(z) := |h(z^m)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq 1 \quad \textit{для всех } r \leq R^k_{m,1}, \tag{25}$$

где $R^k_{m,1}$ – *наибольший положительный корень уравнения* $\lambda_m(r) = 0$,

$$\lambda_m(x) \doteqdot 2x(1+k)(1+x^m) - (1-x)(1-x^m), \tag{26}$$

и константы $R^k_{m,1}$ *не могут быть улучшены.*

Теорема 2.3.3 *Предположим, что* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ *является гармоническим отображением* $\mathbb{D}$ *таким, что* $|g'(z)| \leq k|h'(z)|$ *для некоторых* $k \in [0,1]$ *и* $h \in \mathcal{B}$ *и* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_f(z) := |h(z^m)| + |z^m|\,|h'(z^m)| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq 1 \quad \textit{для всех } r \leq R^k_{m,2}, \tag{27}$$

где $R^k_{m,2}$ – *наибольший положительный корень уравнения* $\Lambda_m(r) = 0$, *где* $\Lambda_m(r)$ *определяется в следующем уравнении*

$$\Lambda_m(x) \doteqdot (1-x)(x^{2m} + 2x^m - 1) + 2x(x+k)(1+x^m)^2,$$

и константы $R^k_{m,2}$ *не могут быть улучшены.*

В разделе 2.4 сформулирована и доказана новая точная версия неравенства типа Бора для сохраняющих ориентацию K-квазиконформных гармонических отображений.

Далее в разделе 2.5 диссертации установлено неравенство типа Бора для сохраняющих ориентацию K-квазиконформных гармонических отображений вида $f = h + \overline{g}$, где $h \in \mathcal{B}'$, и показана его точность.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.5.2 *Предположим, что* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ – *сохраняющее ориентацию* K*-квазиконформное гармоническое отображение в* $\mathbb{D}$, *где* $h \in \mathcal{B}'$. *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1} |b_n| r^n \leq 1 \quad \textit{для всех} \quad r \leq \frac{K+1}{3K+1}, \tag{28}$$

где $r = |z|$, *а константа* $\frac{K+1}{3K+1}$ *не может быть улучшена.*

В заключении сформулированы результаты диссертации.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Каюмову Ильгизу Рифатовичу за постановку проблемы, постоянную поддержку и за внимание к работе и за участие в обсуждении полученных результатов и помощь при оформлении диссертации. Автор выражает огромную благодарность профессорам кафедры математического анализа Аксентьеву Леониду Александровичу, Насырову Семену Рафаиловичу и другим профессорам за отличные, очень познавательные лекции, которые помогли автору в его исследованиях. Автор также выражает благодарность сотрудникам кафедры за помощь в процессе обучения в К(П)ФУ. Автор выражает огромную благодарность профессору математического факультета, Индийского Технологического Института Мадраса Поннусами Саминатхану за плодотворное сотрудничество и наставническое, доброжелательное отношение.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Alkhaleefah, S.A.* Bohr phenomenon for the special family of analytic functions and harmonic mappings / S.A. Alkhaleefah // Проблемы анализа / Problemy Analiza - Issues of Analysis. — 2020. — Vol. 9, № 3. — P. 3 – 13 (перечень ВАК, WoS, Scopus). https://doi.org/10.15393/j3.art.2020.7990.

2. *Alkhaleefah, S.A.* Bohr-Rogosinski inequalities for bounded analytic functions / S.A. Alkhaleefah, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, № 11. — P. 2110 – 2119 (перечень ВАК, Scopus). https://doi.org/10.1134/S1995080220110049.

3. *Alkhaleefah, S.A.* On the Bohr inequality with a fixed zero coefficient / S.A. Alkhaleefah, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2019. — Vol. 147, № 12. — P. 5263 – 5274 (перечень Scopus). https://doi.org/10.1090/proc/14634.

Материалы конференций

4. *Алхалифах, С.А.* О неравенстве Бора с фиксированным нулевым коэффициентом / С.А. Алхалифах, И.Р. Каюмов, С. Поннусами / Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество // Материалы XIII Международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» / Под ред. С. Р. Насырова. Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2017. — Т. 54. — С. 40 – 41.

5. *Алхалифах, С.А.* О неравенстве Бора с фиксированным нулевым коэффициентом / С.А. Алхалифах, А.В. Каюмова, С. Поннусами // Материалы II Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы физикоматематического образования» (г. Набережные Челны, 20-22 октября

2017 г.) / Под ред. И.А. Шакирова, В.Б. Тулвинскего. — Набережные Челны: НГПУ, 2017. — С. 6 – 7.

6. *Алхалифах, С.А.* О неравенстве Бора для подчиненных и квазиподчиненных функций / С.А. Алхалифах, И.Р. Каюмов, С. Поннусами / Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского // Материалы XVII Всероссийской молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения–2018» (23-28 ноября 2018 г., Казань) / Под ред. С.Р. Насырова. Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. — Т. 56. — С. 19 – 21.

7. *Алхалифах, С.А.* Об усиленном неравенстве Бора / С.А. Алхалифах, И.Р. Каюмов, С. Поннусами / Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество // Материалы XIV Международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» / Под ред. С. Р. Насырова. Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2019. — Т. 57. — С. 24 – 25.

Подписано в печать ??.??.2020.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60 × 84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 1,16.

Уч.-изд. л. 1,32. Тираж 100 экз. Заказ №??.

Отпечатано с готового оригинал-макета

в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28