

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Шелемех Елена Александровна

**Минимаксный метод расчета экзотических и американских опционов
на неполном рынке с конечным горизонтом
(дискретное время)**

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени кандидата наук
по прикладной математике

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Хаметов Владимир Минирович

Москва – 2021

Постановка задачи расчета опционов на неполном рынке. Пусть время дискретно. Имеются активы двух видов. Эволюция цен активов первого вида может быть описана предсказуемой случайной последовательностью. Такие активы называют безрисковыми. Эволюция цен активов второго вида может быть описана только согласованной случайной последовательностью, их называют рисковыми. Рынок – это набор, состоящий из конечного числа безрисковых и рискованных активов¹. В диссертации предполагается, что: 1) на рынке перевод одного вида актива в другой не требует дополнительных затрат, т.е. отсутствуют транзакционные издержки, 2) отсутствуют торговые ограничения.

Опцион – это контракт между продавцом и покупателем, состоящий в: 1) реализации продавцом опциона права на совершение с ним сделки в будущем на условиях, зафиксированных в контракте в момент продажи опциона, и получении продавцом опциона от покупателя за переданное право вознаграждения (стоимость опциона, премия); 2) совершении указанной сделки при поступлении требования от покупателя опциона в некоторый момент времени в будущем в соответствии с условиями контракта. Сделка может представлять собой: а) покупку или продажу рискованных активов продавцу опциона покупателем опциона (поставочный опцион), или б) осуществление расчетов на сумму разницы между стоимостью активов, по крайней мере один из которых является рискованным (беспоставочный опцион). За счет полученной премии продавец формирует набор, состоящий из рискованных и безрисковых активов (портфель) и управляет им с тем, чтобы совокупная стоимость всех входящих в портфель активов (капитал портфеля) позволила продавцу опциона достоверно исполнить его обязательства по контракту. Портфель, удовлетворяющий последнему требованию, называют хеджирующим¹.

По способу задания момента возникновения у покупателя права требовать совершения предусмотренной опционом сделки выделяют контракты европейского, экзотического и американского типов. Опционы европейского типа могут быть востребованы только в конкретную дату, зафиксированную в тексте контракта. Момент востребования экзотического опциона может быть обусловлен наступлением некоторого случайного события, о котором сказано в контракте. Например, барьерный опцион подлежит исполнению в случае достижения ценой рискованного актива некоторого заданного уровня или в случае ее выхода за пределы установленного текстом договора коридора². Как в случае европейского, так и в случае экзотического опционов после заключения контракта стороны не имеют возможности повлиять на наступление момента востребования. Покупатель американского опциона вправе потребовать исполнения

¹ Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. - М.: ФАЗИС, 1998.

предусмотренной контрактом сделки в любой момент времени по своему выбору: а) вплоть до наступления фиксированной даты (опцион с конечным горизонтом); б) без ограничения срока (случай бесконечного горизонта). В диссертации рассматривается только случай конечного горизонта.

При моделировании ценообразования европейского опциона на неполном рынке стоит задача найти стоимость опциона и хеджирующий портфель («рассчитать опцион»). Для американского опциона дополнительно необходимо найти момент его предъявления к исполнению¹.

Известно, что рынок полностью описывается распределением цен активов. Обычно предполагается, что оно известно лишь с точностью до эквивалентности. Кроме того, стандартным является предположение о безарбитражности рынка. Безарбитражные рынки характеризуются тем, что на них существует эквивалентная мартингальная (риск-нейтральная) мера¹. Среди безарбитражных рынков выделяют «идеальные» рынки: на них любое платежное обязательство 1) имеет единственную безарбитражную цену и 2) воспроизводимо, т.е. существует такой портфель, капитал которого в момент исполнения обязательства равен величине этого обязательства. Такие рынки называют совершенными или полными. Известно¹, что рынок полон тогда и только тогда, когда эквивалентная мартингальная мера единственна. На полных рынках безарбитражная цена европейского опциона равна ожидаемому значению выплаты относительно мартингальной меры, а задача расчета опциона американского типа сводится к задаче об оптимальной остановке динамического платежного обязательства, причем математическое ожидание берется относительно указанной меры¹.

Полный рынок – это идеальная модель. Обычно безарбитражные рынки неполны, т.е. эквивалентная мартингальная мера не единственна, и, вообще говоря, эквивалентным мартингальным мерам соответствуют различные цены опциона (они образуют множество мощности континуума) и портфели продавца². Необходимо описать и обосновать подход участников контракта к выбору безарбитражной цены и портфеля.

Степень разработанности проблемы. В литературе хорошо изучены два подхода к описанной выше проблеме выбора: а) максимизация ожидаемой полезности участника рынка и б) суперхеджирование. В рамках этих подходов рассматривают как статическую, так и динамическую постановки, с дискретным и с непрерывным временем.

Задача максимизации ожидаемой полезности участника рынка в статической постановке заключается в нахождении вероятностной меры, доставляющей экстремум ожидаемому терминальному значению функции полезности этого участника по

² Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. - М: МЦНМО, 2008.

некоторому множеству мер. Эта задача рассматривалась в работах таких авторов как Schachermayer W., Крамков Д.О., Гущин А.А., Рохлин Д.Б., Delbaen F., Grandits P. и Summer Ch., Biagini S. и Frittelli M., Хасанов Р.В. и других. Для различных моделей рынка показано, что рассматриваемая задача является «двойственной» к задаче суперхеджирования³, получены условия существования решения обеих задач, которые трудно проверить (например, ^{4,5}). Задачу максимизации ожидаемой полезности в динамической постановке рассматривалась в работах Quenez M.C. и соавторов, где для различных моделей рынков в динамической задаче максимизации полезности получены условия существования и некоторые свойства решений.

Второй подход состоит в построении портфеля (называемого суперхеджирующим), капитал которого позволяет достоверно исполнить опцион относительно любой эквивалентной мартингальной меры (см. публикации Ширяева А.Н., Крамкова Д.О., Кабанова Ю.М., Föllmer H., El Karoui N., Quenez M.C., Delbaen F., Schachermayer W., Berkaoui A., Neufeld A., Nutz M. и других). Известно², что: 1) верхняя цена хеджирования европейского (американского) опциона представима в виде верхней грани значения ожидаемой выплаты по множеству эквивалентных (локально) мартингальных мер (и моментов остановки); 2) построение суперхеджирующего портфеля опциона основано на опциональном разложении. Установлены условия существования такого разложения (и, соответственно, условия существования суперхеджирующего портфеля) для супермартингалов относительно класса эквивалентных (локально) мартингальных мер² и достаточно богатого класса абсолютно непрерывных мер, стабильных к бифуркации⁶. Однако, известные результаты не дают конструктивного способа построения опционального разложения, суперхеджирующего портфеля (и оптимального момента остановки).

В работах Хаметова В.М., Зверева О.В. и Силаева А.А. описан теоретико-игровой подход (минимаксный и максиминный) к расчету европейских опционов на неполных рынках. Получены рекуррентные соотношения беллмановского типа для цены игры, установлены достаточные условия существования решений минимаксной задачи и некоторые его свойства. Для задачи расчета американского опциона на неполном рынке

³ Cvitanic J., Schachermayer W., Wang H. Utility Maximization in Incomplete Markets with Random Endowment // Finance and Stochastics. 2001. Vol. 5. Issue 2. P. 259-272.

⁴ Delbaen F., Schachermayer W. The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes // Mathematische Annalen. 1998. Vol. 312. Issue 2. P. 215-260.

⁵ Biagini S., Frittelli M. A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Annals of Applied Probability. 2008. Vol. 18. No. 3. P. 929-966.

⁶ Berkaoui A. On a generalized optional decomposition theorem [Электронный ресурс] // An International Journal of Probability and Stochastic Processes. 2014. Vol. 86. Issue 6.

Riedel F.⁷ предложил теоретико-игровой максиминный подход, отражающий точку зрения покупателя опциона. Для случая, когда рынок может быть описан слабо компактным устойчивым к склейке подмножеством эквивалентных вероятностных мер, получены: 1) рекуррентные соотношения для максиминной ожидаемой выплаты; 2) условия существования вероятностной меры, доставляющей нижнюю грань ожидаемой выплате по опциону, и оптимального момента остановки. Построены примеры расчета американских опционов. Предложенный Riedel F. подход не включает построение хеджирующего портфеля. Также, множества эквивалентных и мартингалных эквивалентных вероятностных мер, с помощью которых обычно описывают неполный рынок, не являются слабо компактными.

Актуальность. Таким образом, остается актуальной проблема разработки конструктивных способов построения решений задач расчета опционов на неполном рынке, описываемом множеством эквивалентных вероятностных мер. В диссертации впервые описан и применен минимаксный теоретико-игровой подход к решению этой проблемы для экзотических и американских опционов. Дано дальнейшее развитие упомянутым выше результатам работ Хаметова В.М. и Зверева О.В. Отсюда следует актуальность темы диссертации.

Цели и задачи исследования. Цель диссертационной работы состоит в: 1) обосновании применимости минимаксного метода для расчета экзотического и американского опционов на неполном рынке в динамической постановке; 2) построении и исследовании минимаксной модели ценообразования экзотического и американского опционов на неполном рынке «без трения» и без торговых ограничений с конечным горизонтом и дискретным временем, отражающую точку зрения продавца опциона. Для достижения этих целей потребовалось решить задачи: 1) дать описание и экономическую интерпретацию минимаксного метода расчета экзотического и американского опционов на неполном рынке «без трения» и без торговых ограничений; 2) на основе данного описания сформулировать оптимизационные задачи для расчета экзотического и американского опционов в случае, когда время дискретно, цена единственного безрискового актива постоянна, наблюдение ведется за конечномерными согласованными последовательностями, описывающими эволюцию цен рискованных активов, горизонт конечен, динамическое платежное обязательство есть равномерно ограниченная согласованная последовательность, функция риска продавца опциона - экспоненциальная; для решений минимаксных задач: 3) обосновать возможность применения

⁷ Riedel F. Optimal stopping with multiple priors // *Econometrica*. 2009. Vol. 77. No. 3. P. 857-908.

стохастического варианта метода динамического программирования; 4) установить условия существования; 5) исследовать свойства; 6) разработать метод построения.

Методология исследования. Для построения модели ценообразования экзотического и американского опционов на неполном рынке в диссертации применен минимаксный теоретико-игровой метод, отражающий точку зрения продавца опциона. В соответствии с этим методом задача расчета экзотического (американского) опциона интерпретирована как игра двух (трех) лиц: продавца опциона, рынка (и покупателя опциона). Продавец управляет портфелем. Стратегии рынка – это вероятностные меры из числа эквивалентных. (Покупатель американского опциона выбирает момент предъявления контракта к исполнению.) В диссертации применение минимаксного метода отражает точку зрения продавца опциона. В отношении продавца предполагается, что: 1) он рационален; 2) его функция риска – экспоненциальная, зависит от дефицита капитала его портфеля. Рациональность продавца понимается в следующем смысле. В ситуации, когда распределение цен рискованных активов известно продавцу лишь с точностью до эквивалентности (а покупатель американского опциона волен выбрать любой момент для предъявления контракта к исполнению), продавец определяет цену опциона, исходя из «наихудшей» для себя ситуации, когда распределение цен рискованных активов (и момент предъявления контракта американского типа к исполнению) максимизирует его ожидаемый риск. При этом сам продавец выбирает такой портфель, который минимизировал бы «наихудшее» значение ожидаемого риска. Таким образом, продавцу необходимо решить задачу стохастической оптимизации (минимаксную задачу продавца): в качестве функционала качества выступает ожидаемый риск продавца, внутренняя верхняя грань берется по множеству эквивалентных вероятностных мер (и моментов остановки), а внешняя нижняя грань – по множеству портфелей. Под решением минимаксной задачи в диссертации понимается набор: 1) «наихудшая» вероятностная мера, (и оптимальный момент остановки) – доставляет внутреннюю верхнюю грань; 2) оптимальный портфель продавца - доставляет внешнюю нижнюю грань, и 3) минимаксный ожидаемый риск продавца. Для установления условий разрешимости минимаксных задач и при исследовании свойств их решений в диссертации использовались методы теории случайных процессов и оптимального стохастического управления, стохастического и функционального анализа, теории игр.

Основные результаты, выносимые на защиту.

- Для неполного рынка с конечным горизонтом «без трения», когда цены рискованных активов являются согласованными последовательностями, доказано, что эволюция минимаксных значений ожидаемого экспоненциального риска продавцов экзотического и

американского опционов описываются рекуррентными соотношениями беллмановского типа (теоремы 2, 32- 34).

- Критерий существования и достаточные условия единственности оптимальных портфелей продавцов экзотического и американского опционов с экспоненциальной функцией риска на неполном рынке «без трения» и торговых ограничений, совпадение оптимального портфеля продавца и суперхеджирующего портфеля с минимальным капиталом (теоремы 7, 13, 15, 18, 36, а также следствия 16-17, 39-41).

- Условия существования решения минимаксной задачи продавца для экзотических и американских опционов (достаточные условия – по совокупности утверждений 7, 20, 32-33, критерии – теоремы 7 и 22 в совокупности, 23, 28).

- Свойства «наихудшей» меры: мартингальность (теорема 21, 33), дискретность (теорема 26, 33), отождествимость исходного неполного рынка с полным относительно «наихудшей» меры (теорема 26, следствия 27 и 42).

- Утверждения, связывающие минимаксные задачи для экзотических и американских опционов друг с другом (теоремы 32-33, следствие 44), минимаксные задачи с задачами суперхеджирования (следствия 16-17, 39-40) и, для американского опциона, с задачей об оптимальной остановке относительно «наихудшей» меры (следствие 43).

- Алгоритмы пошагового построения решений минимаксных задач (алгоритмы 1 и 2, теоремы 28, 32-33, следствие 29).

Применение алгоритмов позволило построить в диссертации новые примеры: а) аналитического расчета экзотических и американских опционов на одномерном неполном рынке, цена рискованного актива на котором эволюционирует как геометрическое случайное блуждание: рассчитаны бинарный, барьерный опционы, европейский опцион на максимум цены рискованного актива; стандартные американские опционы колл и пут, русский опцион; б) расчета американского опциона колл с дисконтированием на биномиальном рынке в системе символьных вычислений Maple 14.

Научная новизна. Все выносимые на защиту утверждения являются новыми, из них следуют известные результаты теории расчета опционов на неполных рынках.

Общие выводы исследования. В диссертации впервые применен минимаксный метод расчета экзотического и американского опционов на неполном рынке без «трения» и без торговых ограничений с конечным горизонтом и дискретным временем. Метод позволил: 1) сформулировать минимаксные оптимизационные задачи продавца опционов с экспоненциальной функцией риска; 2) описать эволюцию минимаксного значения ожидаемого экспоненциального риска продавца, 3) обосновать критерии существования решения указанных минимаксных задач; 4) установить такие важные свойства решения

как мартингальность и дискретность «наихудшей» вероятностной меры; 5) предложить конструктивный способ построения решений; 6) установить совпадение решений минимаксных задач с задачами суперхеджирования экзотических и американских опционов. Построены новые примеры расчета опционов на неполном рынке.

Личный вклад автора в разработку проблемы. Все результаты, выносимые на защиту, получены диссертантом лично. Участие соавторов опубликованных статей по теме диссертации, заключалось в следующем: Хаметов В.М. – постановка проблемы для исследования и общее научное руководство, Васильев Г.А. - составление обзора результатов по теории Шоке и задаче Монжа-Канторовича, Ясонов Е.В. - реализация предложенного диссертантом алгоритма на ЭВМ в системе Maple 14.

Список опубликованных статей, где отражены основные научные результаты диссертации.

Основные результаты по теме диссертационного исследования изложены в следующих публикациях.

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах, индексируемых международными базами цитирования Web of Science и Scopus.

1. Хаметов В.М., Шелемех Е.А. О единственности опционального разложения полумартингалов // Математические заметки. - 2019. - Том 105. - № 3. - С. 476–480.

2. Хаметов В.М., Шелемех Е.А. Верхняя и нижняя границы оптимальной остановки случайной последовательности (конечный горизонт) // Автоматика и телемеханика. - 2019. - Вып. 3. - С. 152-172.

3. Хаметов В.М., Шелемех Е.А. Экстремальные меры и хеджирование американских опционов // Автоматика и телемеханика. - 2016. - № 6. - С. 121 -144.

4. Хаметов В.М., Шелемех Е.А. Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // Автоматика и телемеханика. - 2015. - № 9. - С. 125 -149.

5. Васильев Г.А., Хаметов В.М., Шелемех Е.А. Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай) // Математические заметки. - 2013. - Том 94. - № 6. - С. 944 -948.

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах, входящих в список журналов высокого уровня, подготовленный в НИУ ВШЭ.

1. Шелемех Е.А. Расчет экзотических опционов на неполных рынках // Экономика и математические методы. - 2017. – Том 53. - № 3. - С. 78-92.

2. Хаметов В.М., Шелемех Е.А., Ясонов Е.В. Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами: сборник трудов. - 2014. - Вып. 52. - С. 6 -22.

Работа прошла апробацию на следующих международных и всероссийских конференциях:

- IX Московской международной конференции по Исследованию операций (ORM-2018 Germeyer-100), г. Москва, 22–27 октября 2018 г., тема доклада – «Example calculation of exotic options in incomplete $\{1,S\}$ -market»;
- четвертой всероссийской конференции «Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых», г. Москва, ЦЭМИ РАН, 1 декабря 2017 г., тема доклада – «Справедливая стоимость опциона с выпуклой функцией выплаты на неполном $\{1,S\}$ -рынке»;
- шестой международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI», г. Ростов-на-Дону, 24–29 апреля 2016 г., тема доклада – «Calculation of exotic option in incomplete $\{1,S\}$ -market with discrete measure (a finite number of states)»;
- VIII Московской международной конференции по Исследованию операций (ORM2016), г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 17–22 октября 2016 г., тема доклада – «Superhedging of American options in an incomplete $\{1,S\}$ -markets (discrete time, final horizon)»;
- V Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками», г. Саратов, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 9–12 ноября 2016 г., темы докладов – «Расчет экзотических опционов на неполном рынке, заданном марковской цепью с конечным числом состояний», «Solving Optimal Stopping Problem by Using Computer Algebra Systems»;
- третьей всероссийской конференции «Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых», ЦЭМИ РАН, г. Москва, 7 декабря 2016 г., тема доклада – «Примеры суперхеджирования опционов на максимум цены рискованного актива на неполном $\{1,S\}$ -рынке»;
- третьем российском Экономическом конгрессе, г. Москва, 19–23 декабря 2016 г., тема доклада – «Расчет экзотических опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом»;

- втором российском Экономическом конгрессе, г. Суздаль, 18-22 февраля 2013 г., тема доклада – «Существование решения задачи расчета американского опциона на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом».