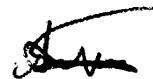


Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)”



На правах рукописи

УДК 519.176

Сагдеев Арсений Алексеевич

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ РАМСЕЯ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2020

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики
Федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования «Московский физико-технический
институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук».

Защита состоится «4» марта 2021 года в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.011 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета):

<https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>

Работа представлена «15» декабря 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Задача, с которой так или иначе связаны все рассматриваемые в настоящей работе проблемы, берет свое начало в 1950 году, когда Нельсон заинтересовался вопросом о том, какого минимального числа цветов $\chi(\mathbb{R}^2)$ достаточно для того, чтобы раскрасить евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ так, что никакие две точки на единичном расстоянии не оказались бы покрашены в один и тот же цвет. Столь элементарное определение *хроматического числа плоскости* $\chi(\mathbb{R}^2)$ может создать впечатление о том, что и найти точное значение этой величины будет нетрудно. Однако, за прошедшие 70 лет этого до сих пор не было сделано, и лучшие оценки, которые мы имеем на сегодняшний день, таковы:

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7,$$

причем неравенство $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$ было доказано только в 2018 году^[1].

Одним из наиболее естественных обобщений исходной задачи Нельсона является постановка вопроса о нахождении *хроматического числа* $\chi(\mathbb{R}^n)$ *евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$, определяемого при $n \neq 2$ абсолютно аналогично. А именно, величиной $\chi(\mathbb{R}^n)$ называют минимальное число цветов, достаточное для того, чтобы раскрасить $\mathbb{R}^n$ так, что никакие две точки на единичном расстоянии не оказались бы покрашены в один и тот же цвет.

Случай $n = 1$ тривиален: справедливость точного равенства $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$ практически очевидна^[2]. Однако зазор между наилучшей известной нижней и верхней оценками очень быстро возрастает с ростом n . Например, при $n = 3$ наилучшие из известных на сегодняшний день оценок таковы^{[3][4]}:

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15.$$

Отметим, что задача о нахождении оценки хроматических чисел $\chi(\mathbb{R}^n)$ при других малых значениях параметра n также представляет значительный интерес^{[5][6]}.

^[1]A.D.N.J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, Geombinatorics, 28 (2018), 18 - 31.

^[2]А. Сойфер, *Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее*, Матем. просвещение, 2004, N8, 186 - 221.

^[3]Oren Nechushtan, *On the space chromatic number*, Discrete Math., 256, N1-2 (2002), 499 - 507.

^[4]D. Coulson, *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete Math., 256, N1-2 (2002), 83 - 90.

^[5]D. Cherkashin, A. Kulikov, A. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces*, Discrete Applied Mathematics, 243 (2018), 125 - 131.

^[6]L.I. Bogoliubsky, A.M. Raigorodskii, *A Remark on Lower Bounds for the Chromatic Numbers of Spaces of Small Dimension with Metrics ℓ_1, ℓ_2* , Math. Notes., 105 (2019), N2, 180 - 203.

При растущем n доказано, что хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^n)$ возрастает экспоненциально быстро. А именно, при $n \rightarrow \infty$ справедливы неравенства:

$$(1.239\dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Верхняя оценка получена в 1972 году Ларманом и Роджерсом^[7], а нижняя — в 2000 году Райгородским^[8].

Для обоснования верхних оценок, аналогичных рассмотренным выше, обычно приводят явную раскраску пространства $\mathbb{R}^n$ в требуемое число цветов. А вот для обоснования нижних оценок используются *дистанционные графы*. Граф $G = (V, E)$, множество V вершин которого является подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$, называется *дистанционным*, если длины всех его ребер равны друг другу. Нетрудно видеть, что для любого дистанционного графа G , вложенного в пространство $\mathbb{R}^n$, верно неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G),$$

где *хроматическое число* $\chi(G)$ *графа* G определяется как минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы никакие две смежные вершины не оказались бы покрашены в один и тот же цвет. Отметим, что теорема де Брейна–Эрдеша^[9] гарантирует существование конечного дистанционного графа G , для которого последнее неравенство обращается в равенство.

Первой работой, где этот подход был реализован в общем виде, а не только при конкретных значениях параметра n , стала работа Райского^[10], в которой в качестве исследуемого дистанционного графа был выбран некоторый аналог *веретена Мозера*, состоящий из четырех особым образом соединенных между собой правильных n -мерных симплексов. Этот подход позволил получить линейную по n оценку

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2.$$

Ларман и Роджерс^[7] предложили использовать в данной задаче совершенно иной тип дистанционных графов. Пусть даны натуральные числа $n > k > t > 0$. Дистанционный граф $G(n, k, t) = (V(n, k), E(n, k, t))$ определяется следующим образом. Его вершинами являются все точки n -мерного пространства такие, что ровно k их координат равны единице, а остальные — нулю; ребро соединяет две

^[7]D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.

^[8]А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства*, Успехи мат. наук, 55 (2000), N2, 147 - 148.

^[9]Bruijn, N. D., Erdos, P. (1951). A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. Indagationes Mathematicae, 13, 371-373.

^[10]D.E. Raiskii, *Realization of all distances in a decomposition of the space $\mathbb{R}^n$ into $n + 1$ parts*, Mathematical notes, 7 (1970), N3, 194 - 196.

вершины тогда и только тогда, когда они имеют ровно t общих единичных координат. Более формально,

$$V(n, k) = \left\{ v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \ v_i \in \{0, 1\} \text{ и } \sum_{i=1}^n v_i = k \right\},$$

$$E(n, k, t) = \left\{ \{v, w\} : v, w \in V(n, k) \text{ и } \sum_{i=1}^n v_i w_i = t \right\}.$$

Пусть $\alpha(G)$ — *число независимости графа* G , то есть размер наибольшего подмножества его вершин, не содержащего внутри себя ни одного ребра графа G . В силу классического неравенства

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)},$$

для получения нижних оценок на хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^n)$ достаточно научиться оценивать сверху числа независимости графов $G(n, k, t)$.

Воспользовавшись уже известной на тот момент теоремой Надя, утверждающей, что $\alpha(G(n, 3, 1)) \leq n$, Ларман и Роджерс доказали, что

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \frac{n^2}{6} + o(n^2).$$

Впоследствии, рассмотрев графы $G(n, 5, 2)$, Ларману удалось доказать, что с некоторой константой $c > 0$ справедливо даже более сильное неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^3 + o(n^3).$$

Первую экспоненциально растущую нижнюю оценку хроматического числа удалось получить Франклу и Уилсону^[11] в 1981 году с помощью разработанного ими *линейно-алгебраического метода*. Пусть $k = \kappa n + o(n)$, $t = \tau n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, где $0 < \tau < \kappa \leq \frac{1}{2}$ — некоторые фиксированные константы. При всех $0 < y < x$ определим функцию

$$c_x^y = \frac{x^x}{y^y(x-y)^{x-y}}.$$

Франкл и Уилсон доказали, что если величина $k - t$ является простым числом, то при $n \rightarrow \infty$ и дополнительном условии $2\tau \leq \kappa$ справедливо неравенство

$$\alpha(G(n, k, t)) \leq (c_1^{\kappa-\tau} + o(1))^n.$$

^[11]P. Frankl, R.M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, 1 (1981), N4, 357-368.

Как было показано позднее^[12], данное неравенство является асимптотически неулучшаемым. Франкл и Уилсон получили также некоторую оценку $\alpha(G(n, k, t))$ и в случае $2\tau > \kappa$, однако этот их результат оказался не оптимальным и впоследствии был усилен Пономаренко и Райгородским^[13]. Полученный ими результат имеет довольно громоздкую формулировку, так что мы приведем ее только тогда, когда она понадобится нам по существу. Вопрос об оптимальности данных результатов Пономаренко и Райгородского является открытым.

Положив значения вспомогательных параметров равными $\kappa = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\tau = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, Франкл и Уилсон доказали, что

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + o(1) \right)^n = (1.207... + o(1))^n.$$

Наилучшая из известных на сегодняшний день и уже упоминавшаяся нами асимптотическая нижняя оценка величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ была получена Райгородским за счет применения той же линейно-алгебраической техники к так называемым $\{-1, 0, 1\}$ -графам, которые отличаются от $G(n, k, t)$ графов тем, что координаты их вершин принимают значения не только 1 или 0, но и -1 .

Рассмотрим еще более сильное обобщение задачи о вычислении хроматического числа плоскости $\chi(\mathbb{R}^2)$. Напомним, что *обхватом* графа называют длину его наименьшего цикла (обхват графов без циклов по определению полагается равным бесконечности). Для каждого $m \geq 2$ и каждого $n \geq 1$ мы определим величину $\xi_m(\mathbb{R}^n)$ равной максимуму хроматических чисел дистанционных графов в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с обхватом более m . Так как обхват любого графа по определению не меньше трех, то в силу уже упомянутой теоремы де Брейна-Эрдёша справедливо равенство

$$\xi_2(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathbb{R}^n),$$

так что данная задача действительно является обобщением исходной.

Вопрос “существует ли дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4 и без треугольников?” был задан Эрдёшем^[14]. На него был дан положительный ответ. Более того, О’Доннелл^{[15][16]} доказал, что для любого $k \in \mathbb{N}$

^[12]А.В. Бобу, А.Э. Куприянов, А.М. Райгородский, *Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением*, Матем. сборник, 207 (2016), N5, 17-42.

^[13]Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Пробл. передачи информ., 49 (2013), N4, 98 - 104.

^[14]P. Erdős, *Unsolved problems*, Congres Numerantium XV, Utilitas Math., Winnipeg, 1976.

^[15]P. O’Donnell, *Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph embedding*, Geombinatorics, 9:3 (2000), 145 - 150.

^[16]P. O’Donnell, *Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph embedding*, Geombinatorics, 9:4 (2000), 180 - 193.

существует дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4 и с обхватом более m , доказав тем самым, что $\xi_m(\mathbb{R}^2) \geq 4$ при всех $m \geq 2$. В упомянутой выше недавней работе^[1] было показано, что $\xi_2(\mathbb{R}^2) = \chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$. Вопрос о том, при каких $m > 2$ справедливо неравенство $\xi_m(\mathbb{R}^2) \geq 5$, остается открытым.

Представляет значительный интерес и задача о поведении величины $\xi_m(\mathbb{R}^n)$ при фиксированном m и растущем n . Демехин, Райгородский и Рубанов^[17] доказали, что при $n \rightarrow \infty$ справедливо неожиданное на первый взгляд неравенство

$$\xi_3(\mathbb{R}^n) \geq \left(2 \left(\frac{1}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} + o(1) \right)^n = (1.058... + o(1))^n.$$

Данное неравенство показывает, что экспоненциального по n роста хроматического числа дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$ можно добиться даже ограничившись только рассмотрением дистанционных графов без треугольников. Более сильную гипотезу об экспоненциальном по n росте величины $\xi_m(\mathbb{R}^n)$ некоторое время не удавалось доказать ни при каком фиксированном $m > 3$.

Купавский^[18] представил неявное решение данной проблемы. Ему удалось доказать, что для каждого фиксированного значения $m \geq 2$ существует некоторое $c_m > 1$ такое, что

$$\xi_m(\mathbb{R}^n) \geq (c_m + o(1))^n$$

при $n \rightarrow \infty$. Пусть ξ_m — точная верхняя грань констант c_m , для которых справедливо последнее неравенство. Конкретных нижних оценок, отделяющих величины ξ_m от единицы, до сих пор представлено не было.

Оригинальная задача Нельсона о нахождении хроматического числа плоскости $\chi(\mathbb{R}^2)$ допускает и другие обобщения. Например, в рамках *евклидовой теории Рамсея*^{[19][20][21]} изучается ситуация, когда “запрещается” одноцветность не просто пары точек на единичном расстоянии, а некоторой другой, более сложной конфигурации. Приведем формальное определение.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ — некоторое фиксированное множество. *Хроматическим числом $\chi(\mathbb{R}^n; M)$ пространства $\mathbb{R}^n$ с запрещенным подмножеством M* мы назовем

^[17]Е.Е. Демехин, А.М. Райгородский, О.И. Рубанов, *Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера*, Матем. сборник, 204 (2013), N4, 49 - 78.

^[18]A.B. Kupavskiy, *Distance Graphs with Large Chromatic Number and Arbitrary Girth*, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 2 (2012), N2, 52 - 62.

^[19]P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems I*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14 (1973), N3, 341 - 363.

^[20]P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems II*, In A. Hajnal, R. Rado and V. Sós, eds., Infinite and Finite Sets I, North Holland, Amsterdam, 1975, 529 - 557.

^[21]R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

минимальное число цветов, которых достаточно для того, чтобы раскрасить пространство $\mathbb{R}^n$ так, что никакая изометричная копия $M' \subset \mathbb{R}^n$ множества M не оказалась бы полностью одноцветной.

Нетрудно видеть, что данное определение действительно обобщает исходную задачу Нельсона, так как если M — пара точек на единичном расстоянии, то только что определенная нами величина $\chi(\mathbb{R}^n; M)$ в точности совпадает с $\chi(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что в этом случае, как уже было упомянуто выше, величина $\chi(\mathbb{R}^n; M)$ экспоненциально быстро стремится к бесконечности с ростом n . Данное наблюдение мотивирует следующее определение.

Множество $M \subset \mathbb{R}^d$ называется (*экспоненциально*) *рамсеевским*, если величина $\chi(\mathbb{R}^n; M)$ (*экспоненциально*) стремится к бесконечности с ростом n . Одной из центральных проблем евклидовой теории Рамсея является задача об описании всех рамсеевских и экспоненциально рамсеевских множеств. Эта задача пока еще очень далека от своего решения. Доказано, что любое рамсеевское множество $M \subset \mathbb{R}^d$ обязано быть конечным и сферичным (т.е. лежать на поверхности некоторой $(d - 1)$ -мерной сферы в $\mathbb{R}^d$.) Долгое время была популярна гипотеза, утверждающая, что эти два условия являются не только необходимыми, но и достаточными. В последнее время стал популярен другой, более сложный гипотетический критерий рамсеевности^[22], однако для условий, накладываемых им на множество $M \subset \mathbb{R}^d$, строго не доказана ни их необходимость, ни достаточность.

Тем не менее, некоторые другие конкретные примеры рамсеевских множеств, помимо уже упомянутой пары точек на единичном расстоянии, известны. А именно, была обоснована рамсеевость множества вершин произвольной трапеции^[23], правильного k -угольника^[24] и даже правильного многогранника в любой размерности^[25]. Помимо этого, очевидно, что если $M_1 \subset M_2$ и M_2 — рамсеевское множество, то M_1 — тоже, так как $\chi(\mathbb{R}^n; M_1) \geq \chi(\mathbb{R}^n; M_2)$. Кроме того, Франкл и Редль^[26] доказали, что если M_1, M_2 являются рамсеевскими множествами, то таковым также является и их декартово произведение $M_1 \times M_2$.

Для некоторых множеств обосновано даже более сильно свойство — их экспоненциальная рамсеевость. Франкл и Редль^{[27][28]} показали, что этим свойством обладают множества вершин произвольных симплексов и прямоугольных парал-

^[22]I. Leader, P.A. Russell, M. Walters, *Transitive sets in Euclidean Ramsey theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 119 (2012), N2, 382 - 396.

^[23]I. Kříž, *All trapezoids are Ramsey*, Discrete Mathematics, 108 (1992), 59 - 62.

^[24]I. Kříž, *Permutation groups in euclidean ramsey theory*, Proceedings of the American Mathematical Society, 112 (1991), N3, 899 - 907.

^[25]K. Cantwell, *All regular polytopes are Ramsey*, J. Combin. Theory Ser. A, 114 (2007), 555 - 562.

^[26]P. Frankl, V. Rödl, *All triangles are Ramsey*, Trans. of Amer. Math. Soc., 297 (1986), N2, 777 - 779.

^[27]P. Frankl, V. Rödl, *Forbidden intersections*, Trans. of Amer. Math. Soc., 300 (1987), N1, 259 - 286.

^[28]P. Frankl, V. Rödl, *A partition property of simplices in Euclidean space*, J. of Amer. Math. Soc., 3 (1990), N1, 1-7.

лелепипедов любой размерности. Однако, их доказательство было неявным, и даже для простейшего случая — множества Δ вершин равностороннего треугольника, Франкл и Редль не предъявили константу $c_\Delta > 1$ такую, что

$$\chi(\mathbb{R}^n; \Delta) \geq (c_\Delta + o(1))^n$$

при $n \rightarrow \infty$. За исключением уже упомянутой константы 1.239..., явно обосновывающей экспоненциальную рамсеевость пары точек на единичном расстоянии, конкретные примеры таких констант $c > 1$ для других экспоненциально рамсеевских множеств не были найдены.

Наибольший интерес для данной работы представляет рассмотрение ситуации, когда запрещенное множество M является множеством вершин S_d правильного d -мерного симплекса. Для доказательства экспоненциальной рамсеевости данных множеств Франклу и Редлю потребовалось глубоко изучить свойства графов $G(n, k, t)$.

Пусть, как и ранее, $k = \kappa n + o(n)$, $t = \tau n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, где $0 < \tau < \kappa \leq \frac{1}{2}$ — некоторые фиксированные константы, а величина $k - t$ является простым числом. Нетрудно видеть, что из верхней оценки Франкла и Уилсона на число независимости $\alpha(G(n, k, t))$ следует существование такого достаточно маленького положительного числа δ , что любое подмножество W вершин графа $G(n, k, t)$ мощности хотя бы $(1 - \delta)^n |V(n, k)|$ содержит внутри себя хотя бы одно ребро.

Франклу и Редлю^[28] удалось доказать справедливость более сильного утверждения, гарантирующего попадание “почти всех” ребер $G(n, k, t)$ в произвольное “достаточно большое” подмножество его вершин. А именно, они доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех достаточно больших n любое подмножество W вершин графа $G(n, k, t)$ мощности хотя бы $(1 - \delta)^n |V(n, k)|$ содержит внутри себя хотя бы $(1 - \varepsilon)^n |E(n, k, t)|$ ребер. Нетрудно видеть, что если для некоторых фиксированных значений параметров ε, κ и τ утверждение теоремы Франкла и Редля справедливо при некотором $\delta > 0$, то оно справедливо и при всех $0 < \delta' < \delta$, так что в дальнейшем в данной работе через $\delta(\varepsilon, \kappa, \tau)$ мы будем обозначать точную верхнюю грань значений δ , при которых теорема Франкла–Редля справедлива. Как уже было отмечено выше, данные результаты были неконструктивными, так что задача отыскания явной оценки величины $\delta(\varepsilon, \kappa, \tau)$, гарантируемой используемой техникой, является весьма нетривиальной.

Для доказательства положительности величины $\delta(\varepsilon, \kappa, \tau)$ Франкл и Редль рассмотрели вспомогательную задачу экстремальной теории множеств, представляющую и самостоятельный интерес. Пусть $a(n) = an + o(n)$, $\rho(n) = \rho n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, где $0 < \rho < a \leq \frac{1}{2}$ — некоторые фиксированные константы. Пусть

$[n] = \{1, \dots, n\}$ — стандартное n —элементное множество, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — две совокупности его $a(n)$ —элементных подмножеств с запрещенным перекрестным пересечением мощности $\rho(n)$ (т.е. такие, что для всех $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$ верно, что $|F \cap G| \neq \rho(n)$). Франкл и Редль доказали, что такие совокупности $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не могут “быть очень большими” одновременно. А именно, они доказали существование такого достаточно маленького положительного числа ϵ , что при всех достаточно больших n справедливо неравенство $|\mathcal{F}| \cdot |\mathcal{G}| < (4 - 4\epsilon)^n$. Иначе говоря, наложение даже одного единственного запрета на мощность перекрестного пересечения сразу же экспоненциально понижает максимально возможное произведение мощностей двух совокупностей. Как и ранее, через $\epsilon(a, \rho)$ в данной работе мы будем обозначать точную верхнюю грань значений $\epsilon > 0$, при которых справедлива данная теорема Франкла–Редля.

Отметим, что данный результат наиболее интересен в ситуации $a = \frac{1}{2}$, так как при $a < \frac{1}{2}$ существует “не так много” $a(n)$ —элементных подмножеств, и экспоненциально понижение по сравнению с 4^n обеспечивается и без запрета на мощность пересечения. Однако, в той же работе^[28] было показано, что и в этой ситуации наложение одного единственного запрета на мощность перекрестного пересечения обеспечивает экспоненциальное понижение максимального возможного произведения мощностей двух совокупностей по сравнению с тем же максимумом, но без наложения запрета.

Первая попытка конкретизации определенной выше функции $\epsilon(a, \rho)$ была сделана в серии работ^{[29][30][31]}, в которой был приведен некоторый алгоритм, получающий на вход значения параметров a и ρ и выдающий на выходе нижнюю оценку величины $\epsilon(a, \rho)$. В качестве недостатков данной серии работ нам бы хотелось отметить два следующих факта. Во-первых, представленный алгоритм выдает далеко не оптимальные результаты в рамках используемого метода. Во-вторых, не был произведен асимптотический анализ данного алгоритма, который позволил бы для любой фиксированной размерности d правильного симплекса получить явные нижние экспоненциально растущие при $n \rightarrow \infty$ оценки хроматических чисел $\chi(\mathbb{R}^n; S_d)$.

^[29] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, А.А. Харламова, *О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником*. Матем. сборник, 205 (2014), N9, 97 - 120.

^[30] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, А.А. Харламова, *Улучшение теоремы Франкла–Редля о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения*, Доклады РАН, 457 (2014), N2, 144 - 146.

^[31] А.Е. Звонарев, А.М. Райгородский, *Улучшения теоремы Франкла–Редля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и их следствия в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником*, Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, 288 (2015), 109 - 119.

Цель работы и основные задачи

Цель настоящей работы состоит в нахождении в явном виде нижних оценок функций $\epsilon(a, \rho)$ и $\delta(\epsilon, \kappa, \tau)$, а также в применении полученных результатов к двум задачам теории Рамсея. Во-первых, к задаче об отыскании явных нижних нетривиальных оценок величин ξ_m при $k \geq 2$. Во-вторых, к задаче о нахождении при каждом $d \in \mathbb{N}$ явной нижней экспоненциально растущей при $n \rightarrow \infty$ оценки хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n; S_d)$ n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с запрещенным правильным одноцветным d -мерным симплексом S_d .

Научная новизна

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для экстремальной теории множеств, экстремальной теории графов и гиперграфов, комбинаторной геометрии и, конечно, теории Рамсея. Однако, данные результаты могут иметь и практические приложения к теории кодирования и дерандомизации алгоритмов.

Методология и методы исследования

В диссертации используется линейно-алгебраический, вероятностный и другие классические методы экстремальной комбинаторики.

Положения диссертации, выносимые на защиту

1. Представлен новый, улучшенный алгоритм получения явных нижних оценок значений величины $\epsilon(a, \rho)$.
2. Произведен асимптотический анализ как ранее известного, так и нового алгоритма получения оценок значений величины $\epsilon(a, \rho)$ для случая $a = \frac{1}{2}$, $\rho \rightarrow \frac{1}{2}$.
3. Результаты пунктов 1 и 2 применены для нахождения явной нижней оценки величины $\delta(\epsilon, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ для всех достаточно малых $\epsilon > 0$.
4. Представлен новый, не зависящий от результатов пунктов 1 и 2 метод нахождения явных нижних оценок величины $\delta(\epsilon, \kappa, \tau)$ при всех возможных допустимых значениях параметров.

5. Результаты пунктов 3 и 4 применены для нахождения при каждом $m \geq 2$ явной нижней нетривиальной оценки величины ξ_m .
6. Результаты пунктов 3 и 4 применены для нахождения при каждом $d \in \mathbb{N}$ явной нижней экспоненциально растущей при $n \rightarrow \infty$ оценки хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n; S_d)$.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных конференциях:

- Международная конференция “European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications”, Вена, Австрия, 28 августа – 1 сентября, 2017
- Международная конференция “Extremal Combinatorics and Discrete Geometry”, Майкоп, Россия, 19 – 23 декабря, 2018
- Международная конференция “3rd Hungarian-Russian Combinatorics workshop”, Москва, Россия, 20 – 25 мая, 2019
- Международная конференция “European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications”, Братислава, Словакия, 26 – 30 августа, 2019
- Всероссийская конференция “Осенние математические чтения в Адыгее”, Майкоп, Россия, 15 – 20 октября, 2019

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 10 работах, представленных в конце списка литературы. Все эти работы опубликованы в журналах, индексируемых базой Scopus и входящих в перечень ВАК. Все результаты, выносимые на защиту в данной диссертации, были получены автором диссертации самостоятельно, включая результаты, опубликованные в совместных работах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 89 наименований. Общий объем диссертации составляет 105 страниц.

Основное содержание работы

Во введении мы излагаем историю возникновения и изучения всех рассматриваемых в настоящей работе задач, а также приводим небольшой обзор смежных результатов.

Первая глава диссертации состоит из 4 разделов и посвящена исследованию величины $\epsilon(a, \rho)$, определение которой дано выше.

В разделе **1.1** мы приводим формулировку алгоритма Франкла–Редля, позволяющего по заданным значениям величин a и ρ получать конкретную нижнюю оценку величины $\epsilon(a, \rho)$.

В разделе **1.2** мы анализируем результаты работы данного алгоритма для важного для применений к другим задачам экстремальной комбинаторики частного случая значений параметров $a = \frac{1}{2}, \rho = \frac{1-z}{2}, z \rightarrow 0$. Центральным результатом данного раздела является следующая конструктивная теорема.

Теорема 2. При $0 < z \leq \frac{1}{25}$ справедливо неравенство

$$\epsilon\left(\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) \geq \left(\frac{8}{19+4\sqrt{2}}z - \frac{4}{3}z^2\right)^2.$$

Доказательство данной теоремы представляет из себя очень аккуратный подбор вспомогательных параметров с последующим асимптотическим анализом всех величин, участвующих в алгоритме Франкла–Редля.

В разделе **1.3** мы приводим новый, улучшенный алгоритм получения по заданным значениям величин a и ρ конкретных нижних оценок величины $\epsilon(a, \rho)$.

Наконец, в завершающем данную главу разделе **1.4** мы показываем, что вычисление всех вспомогательных величин, участвующих в нашем новом улучшенном алгоритме, может быть значительно упрощено. Мы применяем данные упрощения к уже упомянутому важному для применения к другим задачам экстремальной комбинаторики частному случаю значений параметров $a = \frac{1}{2}, \rho = \frac{1-z}{2}, z \rightarrow 0$ и тем самым обосновываем справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. При $z \rightarrow 0$ верно, что

$$\epsilon\left(\frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) \geq \frac{1}{9}z^2 + O(z^3).$$

Отметим, что результат теоремы 6 немного усиливает ранее доказанную нами теорему 2, являющуюся следствием алгоритма Франкла–Редля.

Вторая глава посвящена изучению некоторых свойств дистанционных $\{0, 1\}$ -графов $G(n, k, t)$. Мы ограничиваемся рассмотрением следующего асимптотического случая.

Пусть $0 \leq \tau \leq \kappa \leq 1$ — некоторые параметры такие, что $1 - 2\kappa + \tau \geq 0$. Пусть $k = k(n)$ и $t = t(n)$ — две натуральнозначные функции такие, что

$$k = \kappa n + o(n), \quad t = \tau n + o(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а их разность $k(n) - t(n)$ является простым числом при всех $n \in \mathbb{N}$.

Раздел **2.1** посвящен изучению чисел независимости $\alpha(G(n, k, t))$. В нем мы приводим упрощенную версию результата Пономаренко–Райгородского, усиливающего ранее известные результаты Франкла–Уилсона для случая $2\tau > \kappa$. Наша новая формулировка оказывается значительно проще оригинальной.

Теорема 7. Пусть $k = k(n) \sim \kappa n$, $t = t(n) \sim \tau n$ при $n \rightarrow \infty$, где $0 \leq \tau \leq \kappa \leq 1$ и $1 - 2\kappa + \tau \geq 0$. Пусть при каждом n величина $k - t$ является простым числом. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо неравенство

$$\alpha(G(n, k, t)) \leq (\alpha(\kappa, \tau) + o(1))^n,$$

где

$$\alpha(\kappa, \tau) = \begin{cases} c_1^{\kappa-\tau} & \text{если } 2\kappa \leq 1, \ 2\tau \leq \kappa, \\ \frac{c_1^\kappa c_1^{\kappa-\tau}}{c_1^{2\kappa-2\tau}} & \text{если } 2\kappa \leq 1, \ 2\tau > \kappa, \\ \alpha(1 - \kappa, 1 - 2\kappa + \tau) & \text{если } 2\kappa > 1. \end{cases}$$

В разделе **2.2** мы используем результаты первой главы настоящей работы для получения нижних оценок определенной выше величины $\delta(\varepsilon, \kappa, \tau)$ для частного случая $\kappa = \frac{1}{2}, \tau = \frac{1}{4}$. Напомним, что положительность данной величины, доказанная еще Франклом и Редлем, гарантирует, неформально говоря, что любое “достаточно большое” подмножество вершин графа $G(n, k, t)$ обязательно содержит внутри себя “почти все” его ребра.

Центральным результатом данного раздела является следующая теорема, связывающая между собой величины $\delta(\varepsilon, \kappa, \tau)$ и $\epsilon(a, \rho)$.

Теорема 8. Пусть $k = k(n) \sim \frac{1}{2}n$, $t = t(n) \sim \frac{1}{4}n$ при $n \rightarrow \infty$, а величина $k - t$ при каждом n является простым числом. Предположим, что для некоторого $0 < z < 1$ положительное число $R < 2$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$R > \sqrt{2} c_{1/2}^{(1-z)/4}, \quad R > 2 \left(1 - \epsilon \left(\frac{1}{2}, \frac{1-z}{2} \right) \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда любое подмножество W вершин графа $G(n, k, t)$ мощности хотя бы R^n содержит внутри себя по крайней мере

$$\left(\frac{2R}{c_1^z} + o(1) \right)^n$$

ребер при $n \rightarrow \infty$.

Заменяя теперь в формулировке теоремы 8 величину $\epsilon(\frac{1}{2}, \frac{1-z}{2})$ ее нижней оценкой, гарантированной теоремой 2 или 6 соответственно, мы доказываем следующие два утверждения.

Теорема 9. При $0 < \epsilon \leq 0.1$ справедливо неравенство

$$\delta\left(\epsilon, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \geq \left(\frac{4}{19 + 4\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{\ln \epsilon}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + 10|\ln \epsilon|^{-1/2}}\right).$$

Теорема 10. При $\epsilon \rightarrow 0$ справедливо неравенство

$$\delta\left(\epsilon, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \geq \left(\frac{1}{6} + o(1)\right)^2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{\ln \epsilon}\right)^2.$$

В разделе **2.3** мы приводим принципиально новый метод получения нижних оценок величины $\delta(\epsilon, \kappa, \tau)$, не зависящий от результатов первой главы.

Центральным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 11. Пусть $n \geq k \geq t$ — произвольные целые неотрицательные числа такие, что $n - 2k + t \geq 0$. Пусть ρ_V и ρ_E — произвольные числа из интервала $(0; 1)$. Для всех целых неотрицательных значений a и b , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq b \leq t, \quad 0 \leq a \leq n - 2k + t,$$

определим величины M_1, M_2, M_3 следующими равенствами:

$$M_1 = \rho_V |V(n, k)| C_k^b C_{n-k}^a, \quad M_2 = \rho_E |E(n, k, t)| C_t^b C_{n-2k+t}^a, \quad M_3 = C_n^b C_{n-b}^a.$$

Предположим, что существуют целые числа a, b , удовлетворяющие приведенным выше неравенствам, такие, что

$$M_1 \geq 2M_2, \quad M_1 \geq 2M_3 \alpha(G(n - a - b, k - b, t - b)).$$

Тогда любое подмножество W вершин графа $G(n, k, t)$ мощности хотя бы $\rho_V |V(n, k)|$ содержит внутри себя хотя бы $\rho_E |E(n, k, t)|$ ребер.

Доказательство данной теоремы представляет из себя комбинацию более ранних идей Франкла, Редля, Звонарева и Райгородского, уже использованную нами для доказательства теоремы 8, с принципиально новым подходом Киваша и Лонга^[32], использованного ими для решения совсем иной, “неоднородной” задачи.

После оптимизации вспомогательных параметров в теореме 11 для нашего асимптотического случая мы обосновываем справедливость следующей теоремы.

Теорема 12. *При любых фиксированных $0 < \tau < \kappa < 1$ таких, что $1 - 2\kappa + \tau > 0$, найдется такая стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\alpha(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon, \kappa, \tau)$, что при всех достаточно малых ε справедливо неравенство*

$$\delta(\varepsilon, \kappa, \tau) \geq \left(\frac{1 + \alpha(\varepsilon)}{4\kappa - 4\tau} \right) \frac{\varepsilon^2}{\ln^2 \varepsilon}.$$

Отметим, что, во-первых, теорема 12 применима к любым значениям $0 < \tau < \kappa \leq 1$, а не только к $\tau = \frac{1}{4}$, $\kappa = \frac{1}{2}$, как этого требуют упомянутые выше теоремы 9 и 10. Во-вторых, даже при применении к значениям $\tau = \frac{1}{4}$, $\kappa = \frac{1}{2}$ теорема 12 значительно сильнее предшествующих аналогов.

В состоящей из двух разделов **третьей главе** мы применяем полученные нами ранее результаты к двум открытым проблемам, относящимся к теории Рамсея.

Первая из данных проблем, рассмотренная в разделе **3.1**, касается нахождения нетривиальных нижних оценок определенных выше величин ξ_m , показывающих насколько быстро с ростом размерности может расти хроматическое число дистанционных графов при дополнительном предположении, что все их циклы имеют длину строго превосходящую m .

Мы обобщаем идеи Купавского, показавшего, что при каждом фиксированном $m \geq 2$ справедливо неравенство $\xi_m > 1$, и доказываем следующую конструктивную теорему.

Теорема 13. *Пусть $0 < \tau < \kappa < 1$ и $1 - 2\kappa + \tau > 0$. Пусть $m \geq 2$ и ε_m — положительное число такое, что*

$$\frac{1 - \delta(\varepsilon_m, \kappa, \tau)}{1 - \varepsilon_m} < \left(c_\kappa^\tau c_{1-\kappa}^{\kappa-\tau} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Тогда

$$\xi_m \geq \frac{1}{1 - \delta(\varepsilon_m, \kappa, \tau)}.$$

^[32]Р. Keevash, E. Long, *Frankl-Rödl-type theorems for codes and permutations*, Trans. of Amer. Math. Soc., 369 (2017), 1147 - 1162.

Проведя оптимизацию по всем участвующим в формулировке данной теоремы параметрам, а также заменив величину $\delta(\varepsilon, \kappa, \tau)$ своей нижней оценкой, гарантированной теоремой 12, мы обосновываем следующую асимптотическую нижнюю оценку величин ξ_m .

Теорема 14. *При $m \rightarrow \infty$ справедливо неравенство*

$$\xi_m \geq 1 + \frac{0.632... + o(1)}{m^2 \ln^2 m}.$$

Кроме того, при $3 \leq m \leq 10$ мы приводим таблицу явных оценок величин ξ_m , оптимальных в рамках используемого метода. Отметим, что полученная нами оценка величины ξ_3 слабее явной оценки $\xi_3 \geq 1.058...$, полученной ранее Демехиным, Райгородским и Рубановым^[17].

В разделе **3.2** мы применяем полученные нами в первых двух главах данной диссертации результаты к задаче о хроматическом числе n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ с запрещенным правильным d -мерным симплексом.

Мы рассматриваем случай $d = 2$ отдельно от остальных, так как для случая $d = 2$ мы проводим максимально аккуратный подбор вспомогательных параметров, максимизирующий итоговую оценку, в то время как в общем случае мы существенно огрубляем многие вычисления стремясь лишь “не сильно” испортить получающуюся в итоге оценку для больших d . Соответственно, следующие две теоремы являются ключевыми результатами данного раздела.

Теорема 17. *При $n \rightarrow \infty$ справедливо неравенство*

$$\chi(\mathbb{R}^n, S_2) \geq (1.014 + o(1))^n.$$

Теорема 18. *При любом натуральном $d \geq 2$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\chi(\mathbb{R}^n, S_d) \geq \left(1 + \frac{1}{2^{2d+4}}\right)^n.$$

В **заключении** мы приводим основные результаты диссертации, а также описываем возможные направления дальнейшего развития настоящего исследования.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Представлен новый алгоритм для решения задачи Франкла–Редля о двух семействах подмножеств некоторого фиксированного множества с запрещенным перекрестным пересечением.

- Для важного для приложений частного случая данной задачи произведен асимптотический анализ как ранее известного, так и нового алгоритмов решения.
- Представлено несколько явных результатов, гарантирующих, что любое “достаточно большое” подмножество вершин дистанционного графа $G(n, k, t)$ обязательно содержит внутри себя “почти все” его ребра.
- Получены явные нижние экспоненциально растущие оценки максимально возможного хроматического числа дистанционного графа в $\mathbb{R}^n$ с обхватом строго большим m .
- Получены явные нижние экспоненциально растущие оценки хроматического числа n –мерного пространства $\mathbb{R}^n$ с запрещенным правильным d –мерным симплексом S_d .

Существует множество различных естественных направлений дальнейшего развития данного исследования среди которых нам хотелось бы особенно отметить следующие.

Во-первых, было бы полезно ввести некоторые модификации в представленные в первой главе алгоритмы решения задачи Франкла–Редля о двух семействах подмножеств некоторого фиксированного множества с запрещенным перекрестным пересечением так, чтобы получающиеся результаты являлись нетривиальными при всех возможных значениях вспомогательных параметров.

Во-вторых, было бы очень интересно распространить методы доказательства того, что любое “достаточно большое” подмножество вершин дистанционного графа $G(n, k, t)$ обязательно содержит внутри себя “почти все” его ребра, представленные во второй главе настоящей работы, с $\{0, 1\}$ –графов на $\{-1, 0, 1\}$ –графы.

В свете того факта, что именно рассмотрение $\{-1, 0, 1\}$ –графов ранее позволило А.М. Райгородскому усилить основание экспоненты в нижней оценке величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, естественно ожидать, что реализация данного направления продолжения исследования приведет к усилению большинства результатов, представленных нами в третьей главе настоящей работы.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Райгородскому Андрею Михайловичу за постановку задач и неоценимую поддержку в научной работе, а также благодарит Рыбникову Валентину за существенную помощь в организации компьютерных вычислений.

Работы автора по теме диссертации

- [1] А.М. Райгородский, А.А. Сагдеев, *О хроматическом числе пространства с запрещенным правильным симплексом*, Доклады РАН, 472 (2017), N2, 127 - 129.
- [2] А.А. Сагдеев, *О нижних оценках хроматических чисел дистанционных графов с большим обхватом*, Матем. заметки, 101 (2017), N3, 430 - 445.
- [3] Р.И. Просанов, А.М. Райгородский, А.А. Сагдеев, *Улучшения теоремы Франкла-Рёдля и геометрические следствия*, Доклады РАН, 475 (2017), N2, 137 - 139.
- [4] А.А. Sagdeev, *On a Frankl-Rödl theorem and its geometric corollaries*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 61 (2017), 1033 - 1037.
- [5] А.А. Сагдеев, *О хроматическом числе пространства с запрещенным правильным симплексом*, Матем. заметки, 102 (2017), N4, 579 - 585.
- [6] А.М. Райгородский, А.А. Сагдеев, *Об одной оценке в экстремальной комбинаторике*, Доклады РАН, 478 (2018), N3, 271 - 273.
- [7] А.А. Сагдеев, *О теореме Франкла-Рёдля*, Известия РАН, 82 (2018), N6, 128 - 157.
- [8] А.А. Сагдеев, *Улучшенная теорема Франкла-Рёдля и некоторые ее геометрические следствия*, Проблемы передачи информации, 54 (2018), N2, 45 - 72.
- [9] А.А. Sagdeev, A.M. Raigorodskii, *On a Frankl-Wilson theorem and its geometric corollaries*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 88 (2019), N3, 1029 - 1033.
- [10] А.А. Сагдеев, *Об одной теореме Франкла-Уилсона*, Проблемы передачи информации, 55 (2019), N4, 86 - 106.