

На правах рукописи



Дужин Василий Сергеевич

**Эффективные компьютерные методы исследования
моделей в квантовой механике и статистической
физике, основанных на диаграммах Юнга**

Специальность 05.13.18 —
«Математическое
моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре алгоритмической математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Васильев Николай Николаевич

Официальные оппоненты: **Блинов Юрий Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»,
заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования

Малых Михаил Дмитриевич,
доктор физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»,
доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей

Гусев Александр Александрович,
доктор физико-математических наук,
Объединенный институт ядерных исследований,
старший научный сотрудник

Защита состоится 22 декабря 2020 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета ПДС 0200.001 при РУДН по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН или на официальном сайте диссертационных советов РУДН по адресу: <http://dissovet.rudn.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214, ученому секретарю диссертационного совета ПДС 0200.001.

Автореферат разослан 16 ноября 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.001,
канд. физ.-мат. наук, доцент



Демидова А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Методы исследования многих моделей современной математической физики основаны на комбинаторике диаграмм и таблиц Юнга с использованием марковских процессов на двумерном и трехмерном графах Юнга. Примером является квантовое описание явления ферромагнетизма в полупроводниках, которое впервые было предложено Гейзенбергом в 1928 г. и развивалось в работах Бете, Изинга и Бакстера. В 1972 г. Родни Бакстер дал решение трехмерной модели ферромагнетизма (XYZ модели Гейзенберга). Фаддеев Л. Д. увидел, что ряд формул Бакстера напоминает хорошо знакомые ему формулы из метода обратной задачи. Полученные на этом пути в работе (Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., 1979 г.) результаты позволили интерпретировать формулы Бакстера, используя операторы на диаграммах Юнга. Это позволило упростить и алгебраизовать формулы Бакстера и дать их полное доказательство. Физический интерес представляет изучение асимптотических свойств этой модели и, в особенности, основного состояния — состояния с наименьшей энергией и младших возбужденных состояний.

Эвристический метод нахождения точных решений задачи о периодической цепочке взаимодействующих частиц со спином $1/2$ (XXX-модель Гейзенберга), возникающий в случае изотропной ферромагнитной цепочки, основан на применении анзаца Бете. С помощью этого анзаца решения задачи связываются с периодическим оператором Кокстера—Лапласа, действующим в векторном пространстве, порожденном таблицами Юнга, состоящими из двух строк. Спектр оператора Кокстера—Лапласа и его собственные векторы описывают физические характеристики состояний такой изотропной ферромагнитной цепочки.

Периодический оператор Кокстера—Лапласа определяется некоторой двухстрочной диаграммой Юнга из n клеток и элементом группового кольца $L_n = nI - (S_1 + S_2 + \dots + S_n)$ симметрической группы S_n , где I это тождественная перестановка, S_i для $i \in [1, n-1]$ кокстеровские транспозиции $(i, i+1)$ и дополнительная транспозиция S_n вида $(n, 1)$, меняющая числа n и 1 местами. Спектр этого оператора соответствует спектру гамильтониана исходной системы. Сложность вычисления этого спектра обусловлена тем фактом, что этот оператор действует в пространстве огромной размерности, базис которого занумерован всеми двухстрочными таблицами Юнга заданной формы. Например, размерность пространства, в котором действует оператор L_n , соответствующий прямоугольной диаграмме Юнга размера $2 \cdot n$, равна числу Каталана $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. Тем не менее, подход,

основанный на эффективной реализации операций линейной алгебры в векторных пространствах, порожденных таблицами Юнга фиксированной формы, позволил определить спектры соответствующих операторов Лапласа для всех $n \leq 30$. В матричном представлении последний из этих операторов имел бы размер $C_{15} \times C_{15} = 2674440 \times 2674440$.

В статье (Вершик А. М., 1996 г.) описана связь широко используемых в квантовой статистической механике статистик Ферми и Бозе с плоскими разбиениями и их предельными формами. В частности, А. М. Вершиком было показано, что равномерная статистика на множестве двумерных диаграмм Юнга заданного размера эквивалентна статистике двумерного Бозе-газа.

Д. А. Павловым была исследована асимптотика роста размерностей максимальных неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$, а также были изучены предельные формы типичных диаграмм Юнга, построенных с помощью процесса Ричардсона.

В работе (H. Rost, 1981 г.) исследовано поведение частиц, соответствующее случайному марковскому процессу на двумерном графе Юнга со статистикой Ричардсона. Здесь впервые была установлена предельная форма диаграмм Юнга данного случайного процесса, соответствующего динамике поведения частиц в этой модели. Функция, описывающая предельную форму для процесса Ричардсона, определяет одновременно и функцию плотности распространения частиц в этой физической модели.

Исследование асимптотического поведения марковских процессов на градуированных графах имеет приложения в таких областях науки, как теория представлений (центральные меры, описание характеров симметрической группы, поиск неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$ с максимальными размерностями (Вершик А. М., Керов С. В., 1985 г.) и др. задачи асимптотической теории представлений), статистическая физика (трехмерная модель Изинга (R. Cerf, R. Kenyon, 2001 г.)), построение точных решений интегрируемых систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих интегрируемые модели квантовой механики (Боголюбов Н. М., 2007 г.), построение дискретных моделей для уравнений квантовой механики (R. P. Feynman, A. R. Hibbs, 1965 г.; F. Hoyle, J. V. Narlikar, 1972 г.; H. A. Gersch, 1981 г.), исследование информационных потоков в телекоммуникационных сетях (Попова А. Е., 2001 г.) и др. Для изучения поведения ферромагнетиков при нулевой температуре важными являются характеристики роста трехмерных диаграмм Юнга (А. Okounkov, N. Reshetikhin, 2003 г.). Применение комбинаторного

аппарата диаграмм Юнга приводит к интересным связям между физикой кристаллов и физикой инстантонов (N. Nekrasov, 2003 г.).

Вычисление характеристик конечных диаграмм и таблиц Юнга больших размеров требует привлечения эффективных алгоритмов и использования высокопроизводительных вычислительных систем. Асимптотические же свойства диаграмм и таблиц Юнга исследовать еще сложнее. Переход к асимптотикам до сих пор представляет значительные трудности как в теории, так и при проведении компьютерных экспериментов. Поэтому представляется особенно актуальной разработка алгоритмов и программных средств для компьютерного исследования диаграмм и таблицы Юнга в различных областях науки.

В рамках диссертации разработаны методы и алгоритмы исследования случайных марковских процессов на двумерном и трехмерном графах Юнга. Отдельный интерес представляют последовательности двумерных диаграмм Юнга, генерируемые центральным процессом Планшереля. При этом до сих пор не существует описания всех центральных процессов на трехмерном графе Юнга. Для невырожденного центрального процесса, который также существует и в трехмерном случае, не известны точные формулы его переходных вероятностей. Некоторые его асимптотические свойства могут быть изучены с помощью специального асимптотически центрального процесса, а метод вычисления его копереходных вероятностей предложен в данной диссертации.

Степень разработанности темы. В работе (R. M. Baer, P. Brock, 1968 г.) впервые был поставлен вопрос о поиске диаграмм Юнга с максимальными размерностями. Дж. Маккеем в 1976 г. была выдвинута гипотеза о существовании неприводимых представлений симметрической группы с аномально большими размерностями, а также перебором были получены первые 75 диаграмм с максимальными размерностями. В работе (Вершик А. М., Керов С. В., 1985 г.) были получены границы нормализованных размерностей для типичных планшерелевских диаграмм Юнга, там же была опровергнута гипотеза МакКея. При этом в этой статье была выдвинута гипотеза о существовании предела таких нормализованных размерностей. Последовательность диаграмм с максимальными размерностями была продолжена до 130 этажа графа Юнга в работе (Вершик А. М., Павлов Д. А., 2009 г.), там же была построена последовательность из первых 310 диаграмм Юнга с наибольшими размерностями среди всех симметричных диаграмм и диаграмм, отличающихся не более чем на одну клетку от симметричных.

В работах (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2015 г.; Дужин В. С., Чудновская А. А., 2019 г.) описаны алгоритмы, с помощью которых была построена последовательность диаграмм Юнга со сверхбольшими размерностями, включающая все известные диаграммы с максимальными размерностями, до 10^6 -го уровня графа Юнга. Для случая строгих диаграмм Юнга результат аналогичного эксперимента описан в (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2016 г.). В работе (V. S. Duzhin, N. N. Vasilyev, 2016 г.) были даны оценки пределов нормализованных размерностей двумерных диаграмм Юнга с максимальными размерностями. В статье (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2019 г.) был предложен рандомизированный вариант преобразования Шютценберже, с помощью которого была построена последовательность из 1000 трехмерных диаграмм Юнга со сверхбольшими размерностями.

Целью данной работы является разработка методов и алгоритмов для исследования асимптотического поведения марковских процессов на двумерных и трехмерных градуированных графах. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов и алгоритмов
 - а) построения неприводимых и проективных представлений симметрической группы $S(n)$ со сверхбольшими размерностями с применением параллельных вычислений на кластере.
 - б) исследования жадных последовательностей диаграмм в марковских процессах на двумерных и трехмерных градуированных графах с применением параллельных вычислений на кластере.
 - в) исследования копереходных вероятностей на трехмерном графе Юнга с применением параллельных вычислений на кластере.
2. Создание комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения численного эксперимента с целью исследования
 - а) размерностей неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$.
 - б) жадных последовательностей диаграмм Юнга.
 - в) копереходных вероятностей для центральной меры на градуированных графах.
3. Проведение комплексного исследования гипотезы о пределе нормализованных размерностей планшерелевских диаграмм Юнга,

выдвинутой А. М. Вершиком в 1985 г., в рамках численного эксперимента (V. S. Duzhin, N. N. Vasilyev, 2016 г.) со сверхбольшими последовательностями диаграмм Юнга на современном вычислительном кластере.

Научная новизна:

1. С помощью разработанных в рамках диссертационного исследования алгоритмов впервые были построены последовательности из 10^6 неприводимых и проективных представлений симметрической группы $S(n)$ со сверхбольшими размерностями (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2015 г.).
2. Впервые был предложен подход для вычисления копереходных вероятностей центрального процесса на трехмерном графе Юнга, основанный на рандомизированном варианте преобразования Шютценберже (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2019 г.).
3. Впервые построена последовательность трехмерных диаграмм Юнга со сверхбольшими размерностями (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2019 г.).
4. Было выполнено исследование свойств жадных последовательностей двумерных и трехмерных диаграмм Юнга (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2016 г.).

Практическая значимость

Математические модели, основанные на диаграммах и таблицах Юнга, применяются в большом количестве различных научных областей, таких как теория представлений, математическая физика, квантовая механика, информатика и др. При исследовании таких моделей, требующих эффективной реализации соответствующих методов и алгоритмов, могут быть применены результаты, полученные в рамках диссертации, а также разработанные методики проведения численных экспериментов.

Результаты диссертации уже были использованы в учебном процессе при создании бакалаврского курса «Специальные разделы алгебры», предназначенного для студентов направлений 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Методология и методы исследования. В асимптотической комбинаторике существуют различные методы исследования задач, связанных с поведением таблиц Юнга для различных марковских процессов. К этим методам в частности относится использование алгоритма Робинсона—Шенстеда—Кнута (RSK) и преобразования Шютценберже.

В настоящей работе были реализованы генераторы последовательностей из следующих марковских процессов:

- процесс Ричардсона на 2D и 3D графах Юнга и Шура;
- процесс Планшереля на двумерных графах Юнга и Шура;
- псевдопланшерелевский процесс на трехмерном графе Юнга.

Поскольку размерности диаграмм Юнга растут экспоненциально, для исследования их асимптотических свойств они должны быть определенным образом нормированы. Метод нормировки двумерных стандартных диаграмм Юнга был введен в (Вершик А. М., Керов С. В., 1985 г.). В рамках данной диссертации были предложены формулы для нормализованных размерностей на графе Шура (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2016 г.) и трехмерном графе Юнга (V. S. Duzhin, N. N. Vassiliev, 2016 г., 2017 г.).

Существуют различные методы моделирования случайных последовательностей диаграмм Юнга с планшерелевским распределением. В частности, в работе (Вершик А. М., Павлов Д. А., 2009 г.) такие последовательности генерировались с помощью алгоритма Робинсона—Шенстеда—Кнута. В настоящем диссертационном исследовании эта задача решалась посредством реализации марковских цепей на графе Юнга. Это позволило построить последовательности диаграмм Юнга намного большей длины.

Для вычисления копереходных вероятностей центрального случайного процесса на трехмерном графе Юнга был использован метод, основанный на использовании преобразования Шютценберже. В диссертации была предложена его рандомизированная модификация, применение которой позволило генерировать случайные таблицы Юнга заданной формы с равномерным случайным распределением (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2019 г.).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны и реализованы в виде комплекса программ оригинальные алгоритмы построения последовательностей двумерных и трехмерных диаграмм Юнга со сверхбольшими размерностями.
2. С помощью компьютерных экспериментов установлено, что произвольная пара последовательностей жадного ветвления, построенная на двумерном или трехмерном графе Юнга, объединяется через конечное число шагов (V. S. Duzhin, N. N. Vassiliev, 2015 г., 2016 г., 2017 г.).

3. Предложен метод вычисления копереходных вероятностей на произвольном градуированном графе с помощью рандомизированного преобразования Шютценберже (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2019 г.).
4. Доказано, что путь Шютценберже для произвольной таблицы Юнга является последовательностью активных клеток в предложенном в данной работе алгоритме быстрого преобразования Шютценберже
5. Доказано, что размерности диаграмм Юнга, получаемых с помощью предложенного в данном диссертационном исследовании алгоритма встряски с глубиной 1, обладают размерностями, большими чем у исходных диаграмм, или равными им.

Достоверность Вычислительные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы, были основаны на использовании строгих методов математического моделирования и находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Размерности диаграмм Юнга в последовательностях, получаемых с помощью предлагаемых алгоритма встряски и алгоритма ветвей, превышают размерности диаграмм, полученных в (Вершик А. М., Павлов Д. А., 2009 г.), или совпадают с ними в случае, когда эти размерности максимальные.

Оценки пределов нормализованных размерностей двумерных диаграмм Юнга с максимальными размерностями, полученные в (V. S. Duzhin, N. N. Vasilyev, 2016 г.), лежат в пределах диапазона, полученного А. М. Вершиком в 1985 г.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- международной конференции по приложениям компьютерной алгебры (АСА-2016) (Кассель, Германия);
- международной конференции по приложениям компьютерной алгебры (АСА-2017) (Иерусалим, Израиль);
- международной конференции по приложениям компьютерной алгебры (АСА-2018) (Сантьяго-де-Компостела, Испания);
- международной конференции по полиномиальной компьютерной алгебре (РСА) (ММИ имени Эйлера, Санкт-Петербург, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019);
- международной конференции Computer Assisted Mathematics (САМ-2019) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 2019);

- международном рабочем совещании по компьютерной алгебре (Дубна, 2015, 2016, 2018, 2019);
- семинаре по теории представлений и динамическим системам (ПОМИ им. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, 2016);
- семинаре по математическому моделированию РУДН (Москва, 2018);
- семинаре по алгоритмической математике (СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 2017, 2018).

Личный вклад. Вклад соискателя в работах, выполненных в соавторстве, заключается в:

- Разработке и реализации алгоритмов, связанных с двумерными и трехмерными диаграммами Юнга;
- Проведении численного моделирования марковских процессов на градуированных графах;
- Исследовании свойств жадных последовательностей двумерных и трехмерных диаграмм Юнга;
- Получении оценок для пределов нормализованных размерностей типичных и жадных последовательностей диаграмм Юнга;
- Разработке и реализации алгоритма рандомизированного преобразования Шютценберже на двумерных и трехмерных таблицах Юнга.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях, 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 8 — в тезисах докладов на международных конференциях.

Содержание работы

Во **введении** приводится обоснование актуальности проведенного исследования, дается краткий обзор результатов по изучаемой проблеме, а также формулируются задачи и методы их решения.

В **первой главе** вводятся основные понятия, используемые в диссертации, такие как диаграммы и таблицы Юнга, двумерные и трехмерные графы Юнга и Шура, нормализованные размерности диаграмм. Рассматриваются различные виды марковских процессов на градуированных графах и соответствующие им предельные формы диаграмм Юнга.

Двумерная *стандартная диаграмма Юнга* представляет собой конечный набор клеток, расположенных в виде строк, выровненных по левому краю, длина которых не возрастает. *Строгой диаграммой Юнга* называется диаграмма Юнга, не имеющая столбцов одинаковой высоты.

На рис. 1а изображен пример стандартной диаграммы Юнга, а на рис. 1б — строгой диаграммы Юнга. *Граф Юнга* — бесконечный ориентированный

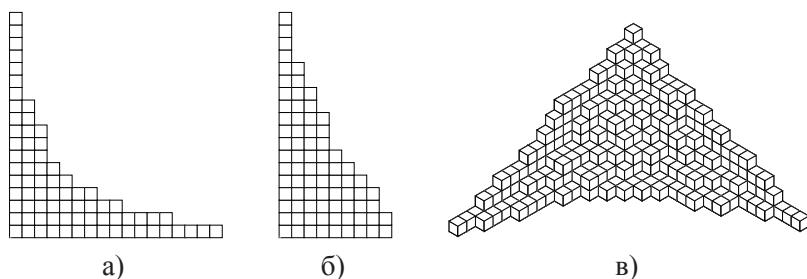


Рис. 1 — Примеры диаграмм Юнга: а) двумерная стандартная, б) двумерная строгая, в) трехмерная

градуированный граф, вершинами которого являются диаграммы Юнга, а ребра соединяют каждую диаграмму с диаграммой, к которой добавлена одна клетка. Наличие ребра на графе, соединяющего диаграммы λ_n и λ_{n+1} будем обозначать следующим образом: $\lambda_n \nearrow \lambda_{n+1}$. Подграф графа Юнга, состоящий исключительно из строгих диаграмм Юнга, называется *графом Шура*. *Таблицей Юнга* называется расстановка чисел от 1 до n в клетках диаграммы Юнга, где n — размер диаграммы, возрастающая по строкам и по столбцам. *Размерностью диаграммы Юнга* называется количество возможных таблиц Юнга данной диаграммы или, что эквивалентно, количество путей в эту диаграмму из корня графа Юнга.

Поскольку точные размерности диаграмм Юнга с ростом их размера растут экспоненциально, для исследования асимптотического поведения размерностей диаграмм Юнга удобно использовать их нормировку. Нормализованная размерность c_{sta} стандартной диаграммы λ , предложенная в работе (Вершик А. М., Керов С. В., 1985 г.), определена формулой:

$$c_{sta}(\lambda) = \frac{-2}{\sqrt{n}} \ln \frac{\dim \lambda}{\sqrt{n!}}, \quad (1)$$

где n — размер диаграммы, $\dim \lambda$ — размерность диаграммы.

Если на градуированном графе каждому ребру сопоставить некоторую переходную вероятность с условием того, что сумма вероятностей исходящих ребер равна единице, то на градуированном графе задается некоторый марковский процесс. Каждой вершине графа соответствует значение ее вероятности, равное сумме вероятностей путей, приходящих в эту вершину из корня графа. В частности, марковский процесс на графе Юнга определяет некоторую вероятностную меру на стандартных диаграммах Юнга.

На двумерных графах Юнга и Шура существует выделенный процесс, называемый *процессом Планшереля* (Вершик А. М., Керов С. В., 1977 г.), обладающий свойством центральности: вероятности любых двух различных путей, соединяющих одинаковые диаграммы, равны между собой. Процесс Планшереля как на графе Юнга, так и на графе Шура не является единственным центральным процессом. Однако он выделен тем свойством, что высота и ширина диаграммы растут медленнее любой линейной функции.

Отдельный интерес представляет собой детерминированная бесконечная последовательность, называемая *последовательностью жадного ветвления* или *жадной последовательностью*, в которой на каждом шаге выбирается ветвь с максимальной вероятностью. В частности, жадные последовательности (пути) могут быть построены на двумерном и трехмерном графах Юнга.

Трехмерные диаграммы Юнга, называемые также *плоскими разбиениями*, представляют собой наборы последовательно вложенных друг в друга двумерных диаграмм Юнга. На рис. 1 в приведен пример трехмерной диаграммы Юнга.

Трехмерный граф Юнга является обобщением двумерного графа Юнга: в его вершинах расположены трехмерные диаграммы, а каждое ребро из вершины с диаграммой λ ведет в вершину, диаграмма которой может быть получена путем добавления одной клетки к λ . На трехмерном графе Юнга предположительно существует единственный центральный процесс с медленным ростом глубины, ширины и высоты диаграммы, однако точные значения переходных вероятностей для такого процесса пока неизвестны. В работе (Васильев Н. Н., Терентьев А. Б., 2015 г.) рассмотрен т.н. *псевдопланшерелевский* процесс на трехмерном графе Юнга, близкий к центральному.

Вторая глава посвящена результатам массивных численных экспериментов, связанных с построением и исследованием различных последовательностей диаграмм Юнга, состоящих из сотен тысяч и даже миллионов клеток.

Одной из задач, решаемых в настоящей работе, является построение последовательностей стандартных и строгих диаграмм Юнга с размерами от 1 до 10^6 , обладающих большими и максимальными размерностями. В качестве начального приближения для последовательности диаграмм с максимальными размерностями была выбрана жадная планшерелевская последовательность диаграмм Юнга. Поскольку размерность диаграммы Юнга прямо пропорциональна планшерелевской вероятности пути в эту

диаграмму, а вероятность пути равна произведению переходных вероятностей, добавление к диаграмме λ клетки с максимальной переходной вероятностью приводит в диаграмму с наибольшей размерностью среди всех диаграмм, получаемых из λ добавлением одной клетки. Установлено, что размерности большинства диаграмм из жадной последовательности значительно превышают размерности случайных планшерелевских диаграмм, что однако не исключает того, что далеко не все диаграммы из жадной последовательности обладают максимальными размерностями. Например, уже 15-я диаграмма имеет не максимальную размерность.

В настоящей диссертации предложены алгоритмы поиска диаграмм Юнга с размерностями, превышающие размерности диаграмм из жадных последовательностей: алгоритм встряски и алгоритм ветвей. Под *увеличением размерности* диаграммы будем понимать процесс поиска другой диаграммы того же размера, но имеющей бóльшую размерность. В качестве начальных диаграмм были выбраны диаграммы из жадной последовательности, помещенные в массив MAX . В процессе применения стратегий увеличения размерностей в массив сохранялись те диаграммы, размерности которых превосходили размерности диаграмм массива. Благодаря такому подходу результирующая последовательность включает в себя все известные диаграммы Юнга с размерами до 10^6 , обладающие максимальными размерностями.

Идея *алгоритма встряски* состоит в преобразовании исходной диаграммы λ_n в другую диаграмму λ'_n того же размера, но предположительно обладающую большей размерностью. Алгоритм последовательно обрабатывает N диаграмм размера $n \in [1, N]$:

1. К диаграмме из n клеток D раз (изначально 1 раз) добавляется клетка с максимальной планшерелевской вероятностью.
2. Из диаграммы удаляется D клеток с минимальной вероятностью.
3. Полученная диаграмма сравнивается с диаграммой размера n из массива MAX . Если размерность диаграммы не увеличилась, глубина встряски D увеличивается на единицу. В противном случае происходит сброс глубины встряски $D = 1$, а полученная диаграмма замещает диаграмму размера n в MAX .
4. Шаги 1-3 повторяются, пока $D < MAXD$.

Теорема 1. Пусть задана некоторая последовательность диаграмм Λ с размерами $[1, n]$. Обозначим через Λ' последовательность диаграмм, полученную после применения алгоритма встряски с глубиной 1 к диаграммам

из Λ . В таком случае последовательность Λ' мажорирует последовательность Λ .

Доказательство. Пусть λ_{n+1}^* — диаграмма, получаемая жадным приращением клетки к некоторой диаграмме $\lambda_n \in \Lambda$. Предположим, что $\dim \lambda'_n < \dim \lambda_n$. В таком случае $P(\lambda_n \nearrow \lambda_{n+1}^*) < P(\lambda'_n \nearrow \lambda_{n+1}^*)$, что противоречит жадной стратегии данного шага алгоритма. $\square$

Заметим, что данная теорема не обобщается на случай алгоритма встряски с большим числом шагов.

Еще один предложенный в данной работе подход к поиску диаграмм с большими размерностями, называемый *алгоритмом ветвей*, основан на одновременном построении s последовательностей диаграмм («ветвей») и выборе из них на каждом шаге диаграммы с наибольшей размерностью. Таким образом, на i -м уровне графа Юнга в качестве текущей рассматривается не одна, а массив M из s диаграмм размера i .

Алгоритм начинает работу из корня графа, т.е. изначально в M помещается одна диаграмма размера 1. Для получения диаграммы размера $i+1$ с большей размерностью осуществляются следующие шаги:

1. К каждой диаграмме из массива M жадным образом добавляется одна клетка. Размер диаграмм становится равным $i+1$.
2. Из полученных диаграмм с помощью процедуры встряски получают другие диаграммы размера $i+1$.
3. s диаграмм с наибольшими размерностями, полученные в пп. 1 и 2, сохраняются в M . Диаграмма с наибольшей размерностью из M помещается в MAX , в случае, если ее размерность больше, чем у диаграммы $MAX[i+1]$. Цикл повторяется.

С помощью этих алгоритмов построены последовательности стандартных и строгих диаграмм Юнга с размерами $n \in [1, 10^6]$. Первые 130 стандартных диаграмм и первые 250 строгих диаграмм этих последовательностей совпали с диаграммами с максимальными размерностями, вычисленными перебором (Вершик А. М., Павлов Д. А., 2009 г.).

Введем т.н. *хвостовое отношение эквивалентности* на бесконечных путях в графе Юнга, считая два пути эквивалентными, если они полностью совпадают, начиная с некоторой диаграммы. Соответствующие классы эквивалентности называются концами графа Юнга и образуют так называемую границу графа Юнга. Объединение любых двух жадных последовательностей означало бы, что все жадные последовательности, начинающиеся с любой диаграммы, определяет одну и ту же точку на границе

графа Юнга, т.е. один и тот же класс эквивалентности. Это дало бы основание полагать, что асимптотика максимальных размерностей в точности равна асимптотике размерностей любой жадной последовательности.

Это свойство было проверено на большом количестве случайно сгенерированных с помощью процесса Планшереля пар стандартных и строгих диаграмм Юнга, в том числе существенно отличающихся по форме, а также для случайных псевдопланшерелевских трехмерных диаграмм. Во всех этих случаях построенные жадные последовательности объединялись в одну через конечное число шагов. Контрпримеров к гипотезе об эквивалентности жадных последовательностей найдено не было.

Были исследованы осцилляции функции нормализованных размерностей диаграмм Юнга. Установлено, что график первого ряда разностей нормализованных размерностей соседних диаграмм жадных последовательностей включает в себя несколько дискретных уровней. Характеристики пар диаграмм, соответствующих разностям, принадлежащим различным уровням, исследованы с помощью компьютерных экспериментов.

До сих пор не доказана давно стоящая гипотеза А. М. Вершика о существовании пределов нормализованных размерностей диаграмм Юнга из жадных и типичных планшерелевских последовательностей. Тем не менее, исходя из этой гипотезы, были получены экспериментальные оценки пределов нормализованных размерностей жадных последовательностей диаграмм Юнга. Значения оценок равны 0.700281 и 0.182837 для случая двумерных стандартных и двумерных строгих диаграмм соответственно. В трехмерном случае экспериментальные значения пределов нормализованных размерностей равны -0.759212 для жадной и -0.67548 для случайной псевдопланшерелевских последовательностей.

В **третьей главе** рассматриваются результаты численных экспериментов с преобразованиями Шютценберже и Робинсона—Шенстеда—Кнута. Представлен алгоритм быстрого преобразования Шютценберже на двумерных и трехмерных таблицах Юнга, блок-схема которого приведена на рис. 2.

Отдельно рассмотрены такие его модификации, как преобразование Шютценберже с сохранением формы и преобразование Шютценберже с рандомизацией. С помощью последнего была произведена оценка копереходных вероятностей ребер на первых 1000 этажах трехмерного графа Юнга и построена жадная последовательность трехмерных диаграмм Юнга. Переборным алгоритмом впервые вычислены трехмерные

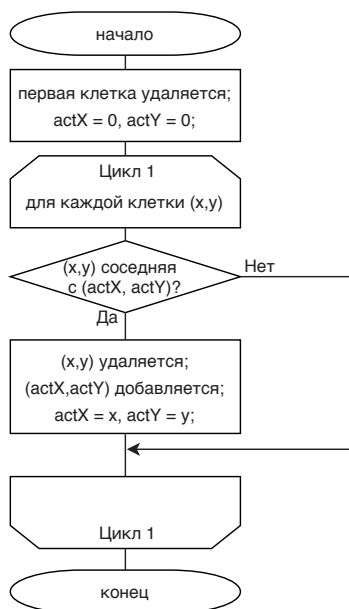


Рис. 2 — Блок-схема быстрого алгоритма Шютценберже

диаграммы Юнга с размерами до 33 клеток включительно, обладающие максимальными размерностями. Обнаружено, что частотная гистограмма координат последних клеток путей Шютценберже на двумерных таблицах, построенная многократным применением преобразования Шютценберже, по форме совпадает с распределением планшерелевских вероятностей на фронте диаграммы Юнга. Данная форма соответствует закону полукругового распределения Вигнера. Аналогично, в трехмерном случае частотная гистограмма координат последних клеток путей Шютценберже на трехмерных таблицах близка к распределению псевдопланшерелевских вероятностей на фронте трехмерной диаграммы Юнга.

С помощью компьютерных экспериментов были изучены некоторые свойства преобразования Робинсона—Шенстеда—Кнута (RSK). В частности, изучена зависимость значения первого элемента входной последовательности от координат конца пути Шютценберже. Исследовано, как размер таблиц влияет на точность восстановления значений входной последовательности при применении обратного алгоритма RSK. Установлено, что при фиксированной записывающей таблице значения первого элемента последовательности зависят только от координат конца нерва нумерующей таблицы. Изучено, как зависит положение единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Представлена реализация оригинальных алгоритмов построения последовательностей двумерных и трехмерных диаграмм Юнга со сверхбольшими размерностями в виде комплекса программ.
2. Экспериментально установлено, что произвольная пара последовательностей жадного ветвления, построенная на двумерном или трехмерном графе Юнга, объединяется в одну через конечное число шагов (V. S. Duzhin, N. N. Vassiliev, 2015 г., 2016 г., 2017 г.).
3. Предложен метод вычисления копереходных вероятностей на произвольном градуированном графе с помощью рандомизированного преобразования Шютценберже (Дужин В. С., Васильев Н. Н., 2019 г.).
4. Доказано, что последовательность активных клеток в таблице Юнга в предлагаемой реализации алгоритма Шютценберже является путем Шютценберже этой таблицы.
5. Доказано, что размерности диаграмм Юнга, получаемых с помощью предложенного в данном диссертационном исследовании алгоритма встряски с глубиной 1, обладают размерностями, большими чем у исходных диаграмм, или равными им.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Дужин В. С.* Исследование эволюции записывающей таблицы в соответствии Робинсона-Шенстеда-Кнута // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. — 2019. — Т. 27, № 4. — С. 316—324.
2. *Дужин В. С., Чудновская А. А.* Поиск диаграмм Юнга с большими размерностями // Компьютерные инструменты в образовании. — 2019. — № 4. — С. 33—43.
3. *Duzhin V., Vasilyev N.* Modeling of an Asymptotically Central Markov Process on 3D Young Graph // Mathematics in Computer Science. — 2017. — Vol. 11. — P. 315—328.
4. *Vasiliev N. N., Duzhin V. S.* Numerical Study of the Asymptotics of Path Probabilities in a Markov Process Close to a Central One on the 3D Young Graph // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 224. — P. 214—220.
5. *Duzhin V. S., Vasilyev N. N.* Asymptotic Behavior of Normalized Dimensions of Standard and Strict Young Diagrams – Growth and Oscillations //

Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2016. — Vol. 25. — P. 19—34.

6. *Vasiliev N. N., Duzhin V. S.* A Study of the Growth of the Maximum and Typical Normalized Dimensions of Strict Young Diagrams // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 216. — P. 53—64.
7. *Duzhin V., Vassiliev N.* Schutzenberger transformation on the three-dimensional Young graph // Proceedings of the XXIV Conference on Applications of Computer Algebra (ACA 2018). — 2018.
8. *Duzhin V., Vasilyev N.* The study of Markov processes on 3D Schur graph // Proceedings of the XXIII Conference on Applications of Computer Algebra (ACA 2017). — 2017.
9. *Vasilyev N., Duzhin V.* Greedy trajectories of Plancherel processes on two dimensional Young and Schur graphs // Proceedings of the XXII Conference on Applications of Computer Algebra (ACA 2016). — 2016.
10. *Duzhin V., Kuzmin A., Vassiliev N.* RSK bumping trees and a fast RSK algorithm // International Conference “Polynomial Computer Algebra 2019”. — 2019.
11. *Duzhin V., Vasilyev N.* Schutzenberger transformation on graded graphs: Implementation and numerical experiments // International Conference “Polynomial Computer Algebra 2018”. — 2018.
12. *Duzhin V., Vasilyev N.* The greedy sequences of Young diagrams produced by Markov processes on 2D and 3D Young graphs // International Conference “Polynomial Computer Algebra 2017”. — 2017.
13. *Duzhin V., Vassilyev N.* Growth and oscillations of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams // International Conference “Polynomial Computer Algebra 2016”. — 2016.
14. *Vasilyev N. N., Duzhin V. S.* Computation of maximal dimensions of irreducible representations of symmetric groups $S(n)$ // International Conference “Polynomial Computer Algebra 2015”. — 2015.
15. *Дужин В. С., Васильев Н. Н.* Рандомизированное преобразование Шютценберге и вычисление копереходных вероятностей центрального процесса на трехмерном графе Юнга // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXXI, Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — Т. 485. — С. 90—106.

Дужин Василий Сергеевич

Эффективные компьютерные методы исследования моделей в квантовой механике и статистической физике, основанных на диаграммах Юнга

С помощью вычислительных экспериментов исследуются различные вопросы, связанные с двумерными и трехмерными диаграммами и таблицами Юнга. Разработаны эффективные алгоритмы, с помощью которых были построены последовательности диаграмм Юнга с большими и максимальными размерностями. Изучены свойства последовательностей жадного ветвления двумерных и трехмерных диаграмм Юнга. В частности, с помощью компьютерного моделирования установлено, что произвольная пара последовательностей жадного ветвления, построенных на двумерном или трехмерном графе Юнга, начинает совпадать через конечное число шагов. Предложен алгоритм, основанный на рандомизированной версии преобразования Шютценберже, позволяющий оценивать копереходные вероятности для марковских процессов с центральной мерой на произвольном градуированном графе. Представлены результаты численных экспериментов.

Duzhin, Vasilii S.

Effective computer methods for studying
models in quantum mechanics and statistical physics based on Young diagrams

This dissertation discusses different problems related to two- and three- dimensional Young diagrams and Young tableaux using numerical experiments. Sequences of Young diagrams of large and maximum dimensions were produced by efficient algorithms which were developed in the current study. The properties of greedy sequences of 2D and 3D Young diagrams were investigated. Particularly, the results of computer simulation show that an arbitrary pair of greedy sequences constructed on 2D or 3D Young graphs merges in a finite number of steps. The algorithm based on the randomized version of Schutzenberger transformation which allows to estimate co-transition probabilities of central Markov processes on any graded graph was proposed. Results of numerical experiments are presented.

Дужин Василий Сергеевич

Эффективные компьютерные методы исследования моделей
в квантовой механике и статистической физике, основанных на диаграммах Юнга

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____