

На правах рукописи



ГРОШЕВ ДМИТРИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

**МАГНИТОЭЛЕКТРОСТАТИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ
АКСИОННО-АКТИВНЫХ СИСТЕМ**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань-2020

Работа выполнена на кафедре теории относительности и гравитации ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный руководитель:

Балакин Александр Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории относительности и гравитации Института физики ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Официальные оппоненты:

Бронников Кирилл Александрович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Центра гравитации и фундаментальной метрологии ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы»;

Обухов Юрий Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории теоретической физики ФГБУН «Институт проблем безопасного развития ядерной энергетики РАН».

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. И. Канта», Институт физико-математических наук и информационных технологий.

Защита состоится «21» января 2021 года в 15 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета КФУ 01.03. по теоретической физике и физике конденсированного состояния по адресу:

420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 16а, Институт физики, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 35.

Электронная версия автореферата размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета <http://www.kpfu.ru>

Автореферат разослан «__» _____ 2020 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Учёный секретарь диссертационного совета

кандидат физико-математических наук, доцент

Попов Владимир Александрович



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Термин *аксионная темная материя*, который является ключевым для представленной диссертационной работы, отражает в себе синтез двух идей в современной науке, первая из которых возникла в астрофизике и космологии, а вторая – в физике частиц высоких энергий. Темная материя, не обладающая электрическим зарядом, а потому не испускающая, не поглощающая и не рассеивающая электромагнитное излучение, является одним из ключевых элементов структуры Вселенной; по общепринятым оценкам её общая энергия составляет 23–26% от полной энергии, заключенной в нашей Вселенной. Плотность распределения темной материи достаточно хорошо изучена косвенными методами, в основу которых положен наблюдаемый эффект гравитационного линзирования квазаров, однако, частицы, формирующие темную материю, до сих пор не идентифицированы, хотя существует несколько гипотез на этот счет. Одной из наиболее популярных является гипотеза о том, что вся темная материя или по крайней мере её заметная часть состоит из *аксионов* — гипотетических слабодействующих массивных псевдо-голдстоуновских бозонов. Их существование было предсказано в 1977 году Роберто Печчеи и Хелен Квинн для объяснения гипотезы сохранения СР-инвариантности в сильных взаимодействиях. Легкие массивные бозоны, названные впоследствии аксионами, были детально описаны и введены в физику частиц высоких энергий Френком Вильчеком и Стивеном Вайнбергом в 1978 году. Сами аксионы не обладают электрическим зарядом, однако, квантовая электродинамика предсказывает существование специфических *аксион-фотонных взаимодействий*, отражающих псевдоскалярную природу этих частиц. На уровне классического описания это впервые заметил Вай-Ту Ни в 1977 году, который представил модель взаимодействия псевдоскалярного и электромагнитного полей. В результате дискуссий об аксионах в 1977–1983 годах в науке сформировалось новое направление, которое по предложению Пьера Сикиви стало называться аксионной электродинамикой. Летом 2020 года опубликован доклад экспериментальной группы XENON1T, в котором утверждается, что с точностью до 3σ имеется результат, указывающий на существование солнечных аксионов. Если точность 5σ , требуемая для признания открытия, будет достигнута, то в ближайшее время наука окажется на грани революционного открытия, сопоставимого по значимости с открытием бозона Хиггса.

Термин *аксионно-активные* применим к физическим системам, в которых аксионное поле способно вызвать изменение внутреннего состояния, сформировать новые структуры или индуцировать динамический отклик. В известной степени этот термин является аналогичным термину магнито-активная

система, который пришел из теории плазмы. Наиболее известный пример аксионной активности даёт электродинамическая система: аксионное поле, взаимодействуя с магнитным полем, способно породить электрическое поле, параллельное магнитному. Однако, как следует из аксионной электродинамики, аксионное поле индуцирует изменение состояния электродинамической системы тогда и только тогда, когда 4-градиент псевдоскалярного поля ϕ , ассоциируемого с аксионами, отличен от нуля, $\nabla_k \phi \neq 0$. В частности, статическое пространственно однородное, изотропное распределение аксионной темной материи является электродинамически скрытым, ненаблюдаемым; однако, распределение массивных аксионов в сильном гравитационном поле островных объектов неоднородно, пространственный градиент псевдоскалярного (аксионного) поля отличен от нуля, и магнитоэлектростатическая система в аксионном окружении неминуемо становится аксионно-активной.

Представленная диссертационная работа посвящена изучению *аксион - фотонного взаимодействия* в статических сферически симметричных моделях астрофизического типа, причем все внимание сосредоточено на моделях объектов, обладающих сильным гравитационным полем, сильным магнитным полем и окруженных гало из аксионной темной материи. Благодаря наличию массы у аксионов, темная материя неоднородно распределена в окрестности объектов с сильным гравитационным полем; в этом смысле аксионное поле активировано и способно индуцировать дополнительное электрическое поле при взаимодействии с магнитным. Одной из самых известных статических моделей аксионно-активной системы является *аксионный дион*. Впервые термин дион появился в работе Джулиана Швингера для обозначения гипотетической частицы, обладающей двумя зарядами: электрическим и магнитным. Мы применяем термин аксионный дион к макроскопическому объекту — дираковскому магнитному монополю, окруженному аксионным облаком. Впервые такой объект был описан Френком Вильчеком в 1987 году; на основании аксионной электродинамики автор доказал, что магнитный монополь воспринимается удаленным наблюдателем как электрически заряженный объект, если вокруг монополя имеется аксионная оболочка. Из симметрии задачи следовало, что такая модель характеризуется наличием исключительно монопольных компонент электрического, аксионного и магнитного полей, модель оказалась самосогласованной в том смысле, что компоненты электрического и магнитного полей более высокого порядка не появляются. В течение 33 лет после публикации работы Френка Вильчека модель аксионного диона утвердилась как уникальная теоретическая модель для поиска нестандартных последствий аксион-фотонных взаимодействий в сильном гравитационном поле. В представленной диссертационной работе две оригинальные главы

посвящены исследованию профилей распределения электрического и аксионного полей в окрестности именно таких аксионных дионов; в последней главе рассмотрены объекты с мультипольной структурой взаимодействующих полей.

Актуальность темы исследования

Первый аспект актуальности представленной работы становится очевидным, как только речь заходит о процедуре идентификации частиц, составляющих космическую темную материю. Магия цифр (26% от полной энергии Вселенной) приводит к тому, что проблема раскрытия природы темной материи неминуемо причисляется к одной из важнейших задач астрофизики и космологии. Понятно, что если гипотеза об аксионной природе темной материи справедлива, то открытие аксионов как микрочастиц дает ключ к пониманию структуры Вселенной.

Второй аспект актуальности представленного исследования связан с тем, что рассматриваются астрофизические системы с сильными гравитационными и магнитными полями, которые не могут быть достигнуты в земных условиях. Современные ограничения на константу аксион-фотонного взаимодействия $g_{A\gamma\gamma} < 1.47 \cdot 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$ говорят о том, что обнаружение аксионов в процессе регистрации аксионно-индуцированного электрического поля, возникшего в результате деформации сверхсильного магнитного поля в звездных структурах, может оказаться самым перспективным способом среди косвенных методов решения проблемы распознавания структуры темной материи.

Третий аспект актуальности связан с тем обстоятельством, что исследования аксионных дионов с их нетривиальной магнито-электрической структурой предсказывают возможность наблюдения неких новых последствий аксион-фотонных взаимодействий, что является дополнительным стимулом к развитию и консолидации современных методов в спектроскопии звездных систем.

Цель и задачи работы

Цель работы — в рамках аксионного расширения теории Эйнштейна-Максвелла исследовать серию ковариантных моделей, описывающих распределение статических магнитного, электрического и аксионного полей в окрестности компактных релятивистских объектов с сильным гравитационным полем.

Для достижения названной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. построить самосогласованную модель равновесного распределения аксионной темной материи в гравитационно-магнито-электрическом поле диона;

2. исследовать особенности структуры электрического и псевдоскалярного полей в окрестности аксионного диона с равновесным распределением темной материи в рамках минимальной и неминимальной моделей с нулевой и ненулевой космологической постоянной;

3. исследовать структуру равновесных конфигураций аксионно-активной многокомпонентной релятивистской плазмы в магнитосфере аксионного диона;

4. исследовать модель трансформации дипольных структур в магнитных звездах, окруженных аксионной темной материей, — в конфигурации с магнитным, электрическим и аксионным полями, обладающими квадрупольным, октупольным и другими мультипольными моментами.

Научная новизна

- 1) Впервые теоретически исследован эффект Росселанда-Пеннекока в релятивистской аксионно-активной плазме; проанализирована возможность поляризации и стратификации аксионно-активной плазмы в магнитосфере аксионного диона.
- 2) Показано, что под влиянием аксионного окружения чисто дипольная магнитная структура сферически-симметричного объекта неминуемо трансформируется в магнитоэлектрическую систему с квадрупольным, октупольным и другими высшими моментами и несферическим гало аксионной темной материи.
- 3) Впервые показано, что существуют конфигурации неминимально связанных аксионного, электрического и гравитационного полей, которые регулярны в центре диона.
- 4) Впервые исследованы двухуровневые профили распределения равновесной аксионной темной материи в окрестности дионов.
- 5) Продемонстрировано, что наличие ненулевой космологической постоянной способствует образованию специфических структур-складок в профилях распределения электрического и аксионного полей в окрестности аксионного диона.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Рассмотренные в ней модели взаимодействия электромагнитного, псевдоскалярного (аксионного) и гравитационного полей могут иметь практические применения при интерпретации астрофизических наблюдений, направленных на поиски частиц, составляющих темную материю.

Методы исследования

В работе использованы классические методы теории поля, ковариантной электродинамики, релятивистской физики плазмы и теории гравитации.

Достоверность результатов

Достоверность результатов следует из того, что они получены при анализе точных решений динамических уравнений в рамках теоретико-полевых моделей, соответствующих современным фундаментальным научным представлениям.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Профиль электрического поля, формируемого в окрестности магнитного монополя, окруженного аксионной темной материей, не имеет монотонности, характерной для кулоновских структур, но обладает экстремумами, типичными для двойного электрического слоя Гельмгольца
- 2) Стратификация релятивистской аксионно-активной плазмы в окрестности диона является результатом взаимодействия аксионно-индуцированного электрического поля и модифицированного поля Росселанда-Пеннекока.
- 3) Под влиянием аксионной темной материи дипольная составляющая магнитного поля становится инициатором трансформации магнито - электрических структур в звездах с образованием высших мультипольных моментов магнитного, электрического и аксионного полей.

Апробация работы

Материалы диссертации обсуждались на Международных конференциях: The Modern Physics of Compact Stars and Relativistic Gravity (2019, Yerevan,

Armenia), XII Black Holes Workshop (2019, Guimaraes, Portugal), 3rd Symposium of the BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology (2019, Kazan, Russia); на Российской гравитационной конференции с участием зарубежных ученых: RUSGRAV-XVI (2017, Калининград); на Международных Школах-семинарах "Петровские чтения"(2016, 2017, 2018, Казань).

Публикации

Основные результаты работы изложены в пяти статьях, опубликованных в международных рецензируемых научных изданиях 1-го, 2-го и 3-го кварталей, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки РФ. По материалам диссертации также опубликованы 5 тезисов докладов на Российских и Международных конференциях.

Личный вклад соискателя

Автор диссертации выполнил расчетную часть работы, написал текст диссертации и принял участие в подготовке основных публикаций.

Объем и структура работы

Диссертация изложена на 134 страницах и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы (122 наименования). Диссертация содержит 22 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит основные понятия, используемые в работе, обзор по истории исследуемой проблемы, аргументы, касающиеся актуальности темы исследования, научной новизны и практической значимости работы, цель и основные задачи исследования.

Вторая глава содержит изложение математического формализма аксионного расширения теории Эйнштейна - Максвелла, на котором основана диссертационная работа в целом. Наименование модели означает, что в ней рассматривается поведение полей трех типов: гравитационного, электромагнитного и псевдоскалярного (аксионного). Рассмотрены две версии указанной модели: минимальная и неминимальная.

В разделе 2.1 рассмотрен общий математический формализм релятивистских аксионно-активных систем, который сформулирован в работах предшественников.

В разделе 2.1.1 введен функционал действия, представленный в виде суммы:

$$S = S_{\text{(EMA)}} + S_{\text{(matter)}} + S_{\text{(NM)}}. \quad (1)$$

Первое слагаемое функционала действия

$$S_{\text{(EMA)}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R+2\Lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} \Psi_0^2 (\nabla_m \phi \nabla^m \phi - V) + \frac{1}{4} F^{mn} (F_{mn} + \phi F_{mn}^*) \right\} \quad (2)$$

является классическим в минимальной теории аксион-фотон-гравитонных взаимодействий; он содержит тензор Максвелла F_{mn} , дуальный ему тензор F_{mn}^* , градиент псевдоскалярного поля ϕ , а также потенциал этого поля V . Второе слагаемое функционала действия

$$S_{\text{(matter)}} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} L_{\text{(matter)}} \quad (3)$$

строится с помощью лагранжиана $L_{\text{(matter)}}$, описывающего релятивистские заряженные частицы, образующие плазменные конфигурации в окрестности дионов, и барионную материю, формирующую плотную составляющую этих астрофизических объектов. Третье слагаемое функционала действия

$$S_{\text{(NM)}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{R}^{ikmn} F_{ik} F_{mn} + \frac{1}{4} \phi \chi_{\text{(A)}}^{ikmn} F_{ik} F_{mn}^* + \right. \\ \left. + \Psi_0^2 \left[-\mathfrak{R}_{\text{(A)}}^{mn} \nabla_m \phi \nabla_n \phi + \eta_{\text{(A)}} R \phi^2 \right] \right\} \quad (4)$$

содержит три тензора неминимальной восприимчивости: $\mathcal{R}^{ikmn}$, $\chi_{\text{(A)}}^{ikmn}$, $\mathfrak{R}_{\text{(A)}}^{mn}$, которые построены с помощью тензоров Римана R^{ikmn} , Риччи R^{mn} и скаляра Риччи R :

$$\mathcal{R}^{ikmn} = q_1 R g^{ikmn} + q_2 \mathfrak{R}^{ikmn} + q_3 R^{ikmn}, \quad (5)$$

$$\chi_{\text{(A)}}^{ikmn} = Q_1 R g^{ikmn} + Q_2 \mathfrak{R}^{ikmn} + Q_3 R^{ikmn}, \quad (6)$$

$$\mathfrak{R}_{\text{(A)}}^{mn} \equiv \frac{1}{2} \eta_1 (F^{ml} R_l^n + F^{nl} R_l^m) + \eta_2 R g^{mn} + \eta_3 R^{mn}. \quad (7)$$

Для удобства изложения введена пара вспомогательных тензоров

$$g^{ikmn} \equiv \frac{1}{2} (g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km}), \quad (8)$$

$$\mathfrak{R}^{ikmn} \equiv \frac{1}{2} (R^{im} g^{kn} - R^{in} g^{km} + R^{kn} g^{im} - R^{km} g^{in}). \quad (9)$$

Стандартная вариационная процедура, применённая к функционалу действия, позволяет получить связанную систему уравнений для электромагнитного, псевдоскалярного и гравитационного полей. Уравнения для электромагнитного и аксионного полей представлены следующим образом в *разделе 2.1.2* и в *разделе 2.1.3* :

$$\nabla_k \left\{ F^{ik} + \phi F^{*ik} + \mathcal{R}^{ikmn} F_{mn} + \phi \chi_{(A)}^{ikmn} F_{mn}^* + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \eta_1 \Psi_0^2 [(R^{km} \nabla^i \phi - R^{im} \nabla^k \phi) \nabla_m \phi] \right\} = I^i, \quad (10)$$

$$\nabla_m \left[(g^{mn} + \mathfrak{R}_{(A)}^{mn}) \nabla_n \phi \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \eta_{(A)} R \phi = \\ = - \frac{1}{4 \Psi_0^2} [F^{mn} F_{mn}^* + \chi_{(A)}^{ikmn} F_{ik} F_{mn}^*]. \quad (11)$$

Уравнение гравитационного поля представлено в *разделе 2.1.4*.

В *разделе 2.1.5* обсуждается иерархический подход к решению проблемы; он заключается в том, что гравитационное поле рассматриваемых в работе систем считается сформированным без участия аксионной темной материи. Следовательно, распределение псевдоскалярного (аксионного) поля и решения уравнений для электромагнитного поля рассматриваются на уже сформированном гравитационном фоне.

В *разделе 2.1.6* описана структура фонового пространства-времени, метрика которого имеет вид:

$$ds^2 = N(r) dt^2 - \frac{1}{N(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (12)$$

а в качестве метрической функции $N(r)$ используется точное регулярное решение, полученное Балакиным, Лемушем и Зайцем:

$$N(r) = 1 + \left(\frac{r^4}{r^4 + 2qQ^2} \right) \left[-\frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right]. \quad (13)$$

Здесь q — параметр неминимального взаимодействия фотонов с кривизной пространства - времени; Q — магнитный заряд, M — асимптотическая масса объекта, а Λ — космологическая постоянная. Для этого решения $N(0) = 1$, а все инварианты кривизны конечны. При специальном выборе значений этих параметров формула (13) дает известные частные точные решения Райсснера-Нордстрёма-де Ситтера, Райсснера-Нордстрёма, Шварцшильда, де Ситтера и Шварцшильда-де Ситтера.

В разделе 2.2 приводятся новые (авторские) результаты, которые относятся к развитию математического формализма теории аксионно-активных систем.

В разделе 2.2.1 вводится модифицированный периодический потенциал аксионного поля:

$$V(\phi, \xi_{(1)}, \dots, \xi_{(s)}) = \frac{m_A^2 \Phi_*^2}{2\pi^2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi\phi}{\Phi_*} \right) \right], \quad (14)$$

где управляющая функция $\Phi_* = \Phi_*(\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(s)})$ зависит от модулей векторов Киллинга $\xi_{(a)}$, ассоциированных с симметрией выбранного пространства-времени. Этот потенциал обладает следующим свойством: если $\phi = n\Phi_*$, где n - целое число, сам потенциал и его производная по ϕ обращаются в нуль:

$$V|_{\phi=n\Phi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{|\phi=n\Phi_*} = 0. \quad (15)$$

Значения $\phi = n\Phi_*$ соответствуют минимумам данного потенциала. Коэффициенты в выражении для периодической функции (14) подобраны так, чтобы при малых отклонениях от точек минимума, т.е., при $\phi = n\Phi_* + \psi$ и $|\psi| \ll 1$, значение потенциала V стремилось к квадратичной конструкции $m_A^2 \psi^2$, где m_A - масса покоя аксиона. Состояния аксионного поля, для которых $\phi = n\Phi_*$, названы в работе *равновесными*; приводятся аргументы в пользу такого определения.

В разделе 2.2.2 для обоснования предложенных модификаций теории приведена аналогия с теорией динамического эфира, основанной на введении в лагранжиан времениподобного динамического векторного поля U^i , нормированного на единицу. При динамическом описании векторных полей $\xi_{(a)}^i$ предлагается рассмотреть следующую добавку к функционалу действия:

$$S_{\text{ЕК}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} \{ (R + 2\Lambda) + \\ + \tilde{\lambda} \left[\nabla_{(k} \xi_{m)} \nabla^{(k} \xi^{m)} - \frac{1}{4} (\nabla_n \xi^n)^2 \right] + \mathcal{K}^{abmn} \nabla_a \xi_m \nabla_b \xi_n \}, \quad (16)$$

в котором феноменологически вводится тензор

$$\mathcal{K}^{abmn} = \mathcal{K}_1 \left[g^{ab} g^{mn} - \frac{1}{2} g^{am} g^{bn} + g^{an} g^{bm} \right], \quad (17)$$

содержащий управляющий параметр $\mathcal{K}_1$. Доказано, что при *равновесном* состоянии аксионного поля ни уравнения гравитации, ни уравнения электромагнетизма, ни уравнения аксионного поля не модифицируются, если $\xi_{(a)}^i$

есть либо обычный, либо конформный вектор Киллинга. Иными словами, доказано, что схема введения управляющих скаляров $\xi_{(a)}$ непротиворечива.

В третьей главе рассмотрена структура псевдоскалярного и электромагнитного полей в окрестности аксионного диона, представляющего собой Дираковский магнитный монополь, окруженный аксионной темной материей.

В разделе 3.1 описано равновесное распределение псевдоскалярного (аксионного) и электрического поля *во внешней зоне* сферически-симметричного диона, то есть на расстояниях $r > r_0 \gg r_+$, где r_0 — радиус диона, а r_+ — радиус его внешнего горизонта. Для этой задачи адекватным представлением метрического коэффициента $N(r)$ служит решение Райсснера-Нордстрёма, которое получается из (13) в пределе $q \rightarrow 0$ $\Lambda \rightarrow 0$. При построении функции Φ_* использован скаляр $\xi = \sqrt{N(r)}$ — модуль времениподобного вектора Киллинга $\xi^i = \delta_0^i$, который связан с радиальной переменной по закону

$$r = \frac{M + \sqrt{\xi^2 Q^2 + (M^2 - Q^2)}}{1 - \xi^2}. \quad (18)$$

Новая независимая переменная ξ изменяется в конечном интервале $0 < \xi < 1$, причем значение $\xi=0$ соответствует внешнему горизонту диона, а $\xi=1$ соответствует бесконечности. В терминах новой переменной ξ *ключевое уравнение* минимальной равновесной аксионной магнитоэлектростатики

$$\Phi_*''(\xi) + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{\xi^2 + \nu} \right) \Phi_*'(\xi) - \frac{\left(\Phi_* - \frac{Q_*}{nQ} \right)}{\Psi_0^2 (\xi^2 + \nu)} = 0, \quad \nu = \frac{M^2 - Q^2}{Q^2} \quad (19)$$

сводится к известному уравнению Гойна (Heun)

$$Y'' + Y' \left[\frac{\epsilon}{x-a} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\gamma}{x} \right] + Y \frac{\alpha\beta x - \rho}{(x-a)(x-1)x} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) называется *ключевым* потому, что по его решению восстанавливается и профиль электрического потенциала

$$A_0(r) = A_0(r_0) + Q_* \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) - Q \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2} \Phi_*(\rho), \quad (21)$$

и профиль электрического поля

$$E(r) = \frac{dA_0}{dr} = \frac{1}{r^2} [Q_* - Q\Phi_*(r)]. \quad (22)$$

В разделе 3.1.3 произведен анализ решений ключевого уравнения (19).

Для экстремального случая $M^2=Q^2$ получено аналитическое решение в виде

$$\Phi_*(\xi) = \frac{Q_*}{n_*Q} (1 - \xi^{\sigma_2}) + \Phi_\infty \xi^{\sigma_2} + \left(\frac{\xi^{\sigma_1} - \xi^{\sigma_2}}{\xi_0^{\sigma_1} - \xi_0^{\sigma_2}} \right) \left[\Phi_*(\xi_0) - \frac{Q_*}{n_*Q} (1 - \xi_0^{\sigma_2}) - \Phi_\infty \xi_0^{\sigma_2} \right], \quad (23)$$

с показателями степени

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4Q^2}{\Psi_0^2 M^2}} - 1 \right) \geq 0, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4Q^2}{\Psi_0^2 M^2}} + 1 \right) < 0. \quad (24)$$

Для случая $Q^2 \ll M^2$ (фоновое пространство-время Шварцшильда) точное решение ключевого уравнения выражается через функцию Бесселя мнимого аргумента I_0 :

$$\Phi_*(\xi) = \frac{Q_*}{n_*Q} [1 - I_0(\Gamma\xi)], \quad \Gamma = \frac{Q}{\Psi_0 M}. \quad (25)$$

На горизонте Шварцшильда $\xi = 0$ найденная управляющая функция и её производная обращаются в нуль, $\Phi_*(0)=0$, $\Phi'_*(0)=0$. Для случая $M=0$ (пространство-время с голой сингулярностью), а также для общего случая с доминирующей массой $M^2 > Q^2$ приведены графики, иллюстрирующие решения ключевого уравнения.

В разделе 3.1.4 предположение о виде равновесной функции псевдоскалярного (аксионного) поля $\phi = n\Phi_*(\xi)$ расширено за счет введения ступенчатых равновесных функций вида

$$\phi = \phi_{\text{eq}} = \Phi_*(\xi) [n_1 h(\xi_* - \xi) + n_2 h(\xi - \xi_*)], \quad (26)$$

где $h(z)$ - функция Хевисайда, а параметр ξ_* задает радиус разделительной сферы, на которой сама функция $\Phi_*(\xi)$ и её производная обращаются в нуль. В этом разделе приведены два явных примера двухуровневых распределений равновесного аксионного поля. Один из примеров иллюстрируется управляющей функцией

$$\Phi_*(\xi) = \frac{Q_*}{n_*Q} \left\{ 1 - \frac{K'_0(\Gamma\xi_*)I_0(\Gamma\xi) - K_0(\Gamma\xi)I'_0(\Gamma\xi_*)}{K'_0(\Gamma\xi_*)I_0(\Gamma\xi_*) - K_0(\Gamma\xi_*)I'_0(\Gamma\xi_*)} \right\}. \quad (27)$$

В разделе 3.2 в рамках *неминимальной* теории исследованы полные уравнения аксионной магнитоэлектростатики (10) в ближней зоне. Получены решения, описывающие регулярные в центре электрическое, аксионное и гравитационное поля.

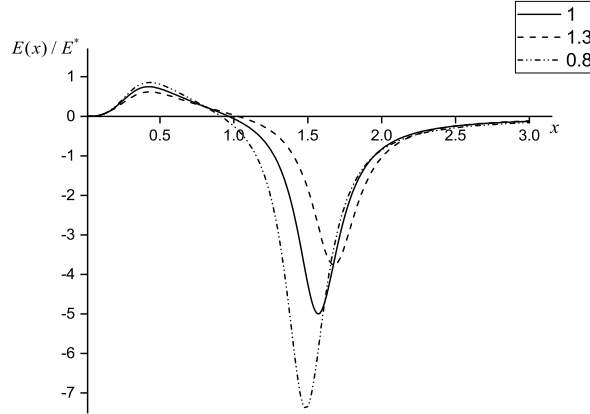


Рис. 1: Иллюстрация профилей нормированного аксионно-индуцированного электрического поля, $E(x)/E^*$, где $E^* = 1/Q$.

В разделе 3.2.1 вводится такой выбор массы диона M , который обеспечивает регулярное в центре решение для $N(r)$ с отсутствующими горизонтами.

В разделе 3.2.2 предъявлены редуцированные тензоры неминимальной восприимчивости, а в разделе 3.2.3 - соответствующие им неминимальные уравнения аксионной магнитоэлектростатики.

В разделе 3.2.4 показано, что существует набор параметров неминимального аксион - фотонного взаимодействия, $Q_1 = \frac{3}{2}q$, $Q_2 = -5q$, $Q_3 = 5q$, при котором решения уравнений аксионной магнитоэлектростатики при малых r имеют вид

$$\phi(r) \approx \phi(0) \left(1 + \frac{\mu_0^2 r^2}{6} \right), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad (28)$$

$$E(r) = \frac{dA_0}{dr} \approx \phi(0) \frac{6r^2}{Q} \left(\frac{\Lambda}{3} + \frac{1}{2q} \right), \quad E(0) = 0, \quad E'(0) = 0. \quad (29)$$

Параметр μ_0 играет роль эффективной массы аксиона, неминимально взаимодействующего с кривизной

$$\mu_0 \equiv \sqrt{\frac{m_A^2 + \frac{6\eta_A}{q}}{1 + \frac{3}{2q}(4\eta_2 + \eta_3)}}. \quad (30)$$

В разделе 3.2.5 численно проанализирован случай $M = 0$, $\Lambda = 0$ на полном интервале $0 < r < \infty$. Результаты численных расчетов приведены на рис. 1.

В разделе 3.3 рассмотрено распределение равновесного псевдоскалярного и электромагнитного поля в окрестности аксионного диона в случае,

когда космологическая постоянная положительна. Исследование проводится в дальней зоне $r > r_0 \gg r_+$, однако, в отличие от предыдущих случаев ограничения по дальности связаны с наличием космологического горизонта. Данному случаю соответствует метрика Райсснера-Нордстрёма-де Ситтера, которая получается из (13) при $q = 0$. Показано, что космологический горизонт является структурообразующим фактором, поскольку приводит к образованию так называемых *складок* в профилях электрического и аксионного полей. Под термином «складка» подразумевается участок профиля метрической функции $N(r)$, отвечающий следующим условиям:

- 1) Складка - это часть профиля, который характеризуется барьером слева, локальным максимумом справа и локальным минимумом между ними.
- 2) Складка - это часть профиля, которая не скрыта ни одним (кроме космологического) горизонтом событий.
- 3) Возможны варианты определений: барьер справа, максимум слева или два максимума разной высоты и минимум между ними.

Возможность существования складок предопределена двумя математическими условиями: первое, $N(r) \neq 0$ (нет горизонтов в окрестности складки); второе, $N' = 0$ по крайней мере в двух точках в окрестности складки. В этом разделе рассмотрены условия образования складок; выполнение этих условий предопределяется значениями двух безразмерных управляющих параметров: параметра $\sqrt{\Lambda Q^2}$ и нормированной массы $\frac{M}{M_c}$, где $M_c = \frac{4}{3}|Q|(\Lambda Q^2)^{\frac{1}{4}}$ - это критическое значение массы. Типичные профили распределения аксионного и электрического полей в окрестности данных складок при различных значениях управляющих параметров показаны на рис. 2 и рис. 3. Особый интерес вызывает профиль электрического поля, который типичен для двойного электрического слоя Гельмгольца, хорошо изученного в электрохимии и физике пограничного слоя.

В четвертой главе исследованы равновесные плазменные конфигурации в магнитосфере аксионного диона и магнитоэлектростатические эффекты, с ними связанные.

Раздел 4.1 посвящен математическому формализму, описывающему поведение аксионно-активной плазмы.

В *разделе 4.1.1* обсуждается система ковариантных кинетических уравнений

$$\frac{p^i}{m_a c} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^j p^k \frac{\partial}{\partial p^j} \right] f_a + \frac{\partial}{\partial p^i} (\mathcal{F}_a^i f_a) = \sum_b I_{ab}, \quad (31)$$

где f_a - это восьмимерная функция распределения, описывающая частицы сорта «а»; символ p^i обозначает 4-вектор импульса частицы; в кинетическом

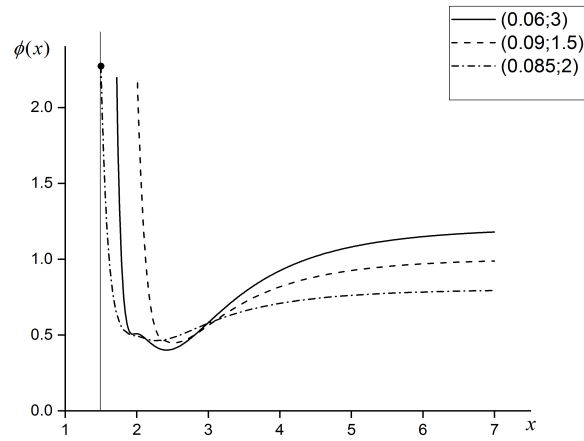


Рис. 2: Профили аксионного поля $\phi(x)$ в окрестности складок.

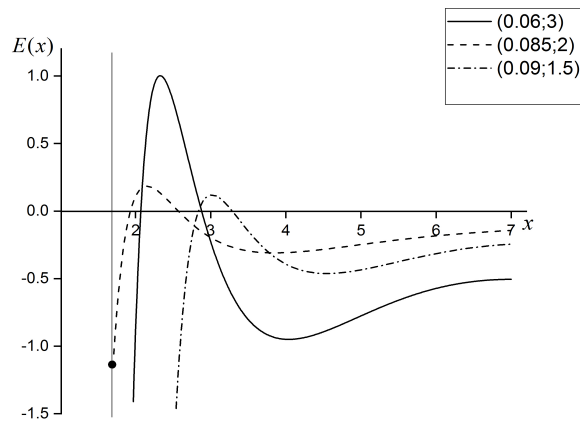


Рис. 3: Типичные профили аксионно-индуцированного электрического поля в окрестности складок.

подходе величина p^i рассматривается как случайная переменная. Символ m_a соответствует массе частиц сорта «а». Выражение I_{ab} символизирует интеграл столкновений между частицами сортов а и b. 4-вектор $\mathcal{F}_a^i$ в уравнении (31) представляет собой силу, которая действует на частицу сорта а.

В разделе 4.1.2 обосновывается гипотеза об аксионно-модифицированной силе Лоренца, которая вводится по следующему правилу:

$$\mathcal{F}_a^i \equiv \frac{e_a}{m_a c^2} [F_k^i + \tilde{\nu} \phi F^{*i}_k] p^k. \quad (32)$$

Безразмерный параметр $\tilde{\nu}$ равен нулю для классической силы Лоренца и равен единице, если принять гипотезу, что тензор Максвелла и дуальный ему тензор входят в модифицированную силу Лоренца симметрично.

В разделе 4.1.3 получены выражения для равновесной релятивистской функции распределения частиц в аксионно-активной плазме в окрестности магнитного монополя; главное её отличие от функции Ютнера состоит в том, что химический потенциал аксионно-активной плазмы содержит интеграл от псевдоскалярного поля:

$$\mathcal{M}_a(r) = \frac{\tilde{\mathcal{M}}_a(r_*)}{k_B T_0} - \frac{e_a}{k_B T_0} \left[A_0(r) - A_0(r^*) + \tilde{\nu} \mu \int_{r_*}^r \frac{dz}{z^2} \phi(z) \right]. \quad (33)$$

В разделе 4.1.4 получена базовая самосогласованная система уравнений аксионной электродинамики в равновесной аксионно-активной фермионной плазме

$$\nabla_k F^{ik} = -F^{*ik} \nabla_k \phi - 4\pi \sum_a e_a \int dP p^i \left[\frac{2h^{-3}}{e^{\mathcal{U}_a} + 1} \right], \quad \mathcal{U}_a = -\mathcal{M}_a + \frac{p^l \xi_l}{k_B T_0}, \quad (34)$$

$$\nabla^k \nabla_k \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{1}{4\Psi_0^2} F_{mn}^* F^{mn}. \quad (35)$$

Здесь ξ_l - это времениподобный вектор Киллинга.

В разделе 4.2 получены ключевые уравнения аксионной электростатики для Больцмановской электронно-ионной плазмы, для электрон-позитронной плазмы, а также для полностью вырожденной электронной плазмы.

В разделе 4.2.1 показано, что для релятивистской Больцмановской плазмы ключевое уравнение представляется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\Theta}{dr} + Q\phi \right\} = -\frac{4\pi}{\sqrt{N(r)}} \sum_a e_a \mathcal{N}_a(r^*) \left[\frac{\lambda_a(r^*)}{\lambda_a(r)} \right] \left[\frac{K_2(\lambda_a(r))}{K_2(\lambda_a(r^*))} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{e_a \Theta(r)}{k_B T_0} \right\} \exp \left\{ -\frac{e_a \tilde{\nu} Q}{k_B T_0} \int_{r^*}^r \frac{dz \phi(z)}{z^2} \right\}, \quad (\Theta(r) = A_0(r) - A_0(r_0)) . \quad (36)$$

где K_2 - это функция Макдональда, а её аргумент $\lambda_a(r) = \frac{m_a c^2}{k_B T_0} \sqrt{N(r)}$ задает отношение энергии покоя частицы к её тепловой энергии на сфере радиуса r .

В разделе 4.2.2 получено ключевое уравнение для вырожденного электронного газа.

В разделе 4.2.3 приводится уравнение для псевдоскалярного (аксионного) поля, находящегося в равновесном состоянии ($\phi = n\Phi_*(r)$):

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 N \frac{d\Phi_*}{dr} + \frac{Q}{n\Psi_0^2} A_0(r) \right] = 0 . \quad (37)$$

В разделе 4.2.4 обсуждаются решения ключевых уравнений равновесной аксионной электростатики плазмы со стандартной ($\tilde{\nu} = 0$) и модифицированной ($\tilde{\nu} = 1$) силой Лоренца. В частности, показано, что при $\tilde{\nu} = 1$ в терминах так называемого суперпотенциала

$$\Psi(r) \equiv \Theta(r) + Q \int_{r^*}^r \frac{dz \Phi_*(z)}{z^2} \quad (38)$$

пара ключевых уравнений для Ψ и Φ_* расщепляется, и уравнение для равновесного псевдоскалярного поля

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[N r^2 \frac{d\Phi_*}{dr} \right] - \frac{Q^2 \Phi_*}{r^4 \Psi_0^2} = -\frac{Q}{r^2 \Psi_0^2} \frac{d\Psi}{dr} \quad (39)$$

можно свести к неоднородному дифференциальному уравнению Фукса.

В разделе 4.3 рассмотрены эффекты *поляризации* и *стратификации* в аксионно - активной плазме.

В разделе 4.3.1 анализируется модель аксионно-активной электронно-ионной плазмы, в которой разноименно заряженные частицы имеют различные массы m_a . В рамках данной модели выделен базовый эффект Росселанда - Пеннекока, рассмотрен случай высокотемпературной плазмы $k_B T_0 > m_a c^2$ с классической силой Лоренца $\tilde{\nu} = 0$ в дальней ($\frac{r^2}{\sqrt{N(r)}} \gg r_A \lambda_D$) и ближней ($\frac{r^2}{\sqrt{N(r)}} \ll r_A \lambda_D$) зонах. Здесь λ_D - радиус Дебая, $r_A = \frac{|Q|}{\Psi_0}$ - характерный радиус аксион-фотонного взаимодействия. Аксионно-индуцированная стратификация плазмы оказывается неминуемой, и структура электрического поля неминуемо приобретает элементы структуры электрического поля двойного слоя.

В разделе 4.3.2 рассматривается релятивистская электрон-позитронная плазма, для которой разноименно заряженные частицы имеют одинаковую массу, и потому классический эффект Росселанда-Пеннекока отсутствует. Показано, что для аксионно-активной электрон-позитронной плазмы для всех вариантов модифицированной силы Лоренца возникают эффекты поляризации и стратификации, в которых стартовая (провоцирующая) роль отводится аксионно-индуцированному электрическому полю диона. В частности, в случае, когда $\tilde{\nu} = 0$,

$$\Theta(x) = \frac{QK\lambda_D}{xr_+} \left\{ C^{**} \sinh \left[\frac{r_+}{\lambda_D}(x-x_*) \right] - \int_{x_*}^x \frac{dz}{z(z-1)(z-a)} \sinh \left[\frac{r_+}{\lambda_D}(x-z) \right] \right\}, \quad (40)$$

где константа интегрирования выбирается как

$$C^{**} = \int_{x_*}^{\infty} \frac{dz}{z(z-1)(z-a)} \exp \left[\frac{r_+}{\lambda_D}(x_* - z) \right], \quad (41)$$

что обусловлено требованием асимптотической конечности электрического потенциала. Асимптотическое значение электрического поля

$$E(x) \rightarrow -4QK \frac{\lambda_D^2}{r^5} \quad (42)$$

имеет не-кулоновский вид. Ввиду того, что $\Theta(r_*) = 0 = \Theta(\infty)$, функция $\Theta(r)$ имеет экстремум. Обозначим радиус, соответствующий экстремуму, как r_{**} , очевидно, что радиальное электрическое поле $E(r) = \Theta'(r)$ равняется нулю на сфере этого радиуса, $E(r_{**}) = 0$. Электрическое поле меняет знак в области $r_* < r < r_{\text{extremum}}$, демонстрируя эффекты поляризации и стратификации в электрон-позитронной плазме.

В разделе 4.3.3 рассмотрен случай вырожденной электронной плазмы по аналогии с исследованием невырожденной модели.

Раздел 4.4 посвящен обсуждению полученных в **главе 4** результатов.

Пятая глава посвящена аксионной магнитоэлектростатике звезд с сильным дипольным магнитным полем (*магнитным звездам*).

В разделе 5.1 построены и решены ключевые уравнения рассматриваемой модели.

В разделе 5.1.1 сформулированы ключевые уравнения для электромагнитного поля

$$\sin \theta \partial_r (r^2 \partial_r A_0) + \frac{1}{N} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta A_0) = -\partial_\theta A_\varphi \partial_r \phi + \partial_r A_\varphi \partial_\theta \phi, \quad (43)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_r (N \partial_r A_\varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta A_\varphi \right) = -\partial_\theta A_0 \partial_r \phi + \partial_r A_0 \partial_\theta \phi, \quad (44)$$

и ключевое уравнение для аксионного поля

$$N \partial_r^2 \phi + \frac{(Nr^2)'}{r^2} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} [\partial_\theta^2 \phi + \cot \theta \partial_\theta \phi] = \frac{1}{\Psi_0^2 r^2 \sin \theta} [\partial_\theta A_0 \partial_r A_\varphi - \partial_r A_0 \partial_\theta A_\varphi]. \quad (45)$$

В разделе 5.1.2 осуществлен поиск решений этих уравнений в виде

$$A_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (46)$$

$$A_\varphi(r, \theta) = -G_0(r) - G_0^*(r) \cos \theta - \sum_{m=1}^{\infty} G_m(r) \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_m(\cos \theta), \quad (47)$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(r) P_k(\cos \theta), \quad (48)$$

где $P_k(\cos \theta)$ - полиномы Лежандра, а $z = \cos \theta$. Получена система уравнений для радиальных функций $F_n(r)$, $G_m(r)$ и $\psi_k(r)$:

$$(NG'_m)' - \frac{m(m+1)}{r^2} G_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_{mkn}^{(3)} [F_n \psi'_k - \psi_n F'_k], \quad (49)$$

$$(r^2 F'_n)' - \frac{n(n+1)}{N} F_n = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [h_{mkn}^{(1)} G_m \psi'_k + h_{mkn}^{(2)} \psi_k G'_m], \quad (50)$$

$$\Psi_0^2 [(r^2 N \psi'_k)' - k(k+1) \psi_k] = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [F'_n G_m h_{mnk}^{(1)} + F_n G'_m h_{mnk}^{(2)}]. \quad (51)$$

В разделе 5.1.3 описана схема вычисления вспомогательных коэффициентов $h_{mkn}^{(1)}$, $h_{mkn}^{(2)}$, $h_{mkn}^{(3)}$, возникших в предыдущем разделе.

Раздел 5.1.4 посвящен получению базовых уравнений *пятимоментной модели*, основанной на взаимодействии пяти полей, описываемых радиальными функциями $F_0(r)$, $\psi_0(r)$, $F_1(r)$, $G_1(r)$, $\psi_1(r)$. Первые две функции соответствуют монопольным компонентам полей (предполагается, $G_0 = 0$, т.е. магнитная монополярная компонента в системе отсутствует). Остальные три функции из этого набора относятся к дипольным компонентам. Показано, что точные решения получившихся уравнений выражаются через функции Гойна.

В разделе 5.2 произведен анализ пятимоментной модели.

В разделе 5.2.1 приведены графики некоторых радиальных функций этой модели.

В разделе 5.2.2 доказано, что энергия магнитного поля может перераспределяться между мультипольными моментами под влиянием аксионного поля.

В разделе 5.3 приведены три возможных сценария физической реализации возникновения мультипольных моментов.

Заключение

1. В разделе 2.2 представлена самосогласованная модель равновесного распределения аксионной темной материи; в этой модели использованы три ключевых элемента: во-первых, введено понятие равновесного состояния аксионного поля, которое определено условием обращения в нуль модифицированного периодического потенциала псевдоскалярного поля и его первой производной; во-вторых, базовая функция состояния, вошедшая в модифицированный потенциал, представлена как функция модулей векторных полей Киллинга, ассоциированных с симметрией выбранного пространства-времени; в-третьих, векторные поля Киллинга рассмотрены как динамические переменные, и доказано, что для определенных нами равновесных аксионных конфигураций уравнения гравитационного и векторного полей остаются неизменными, подчеркивая самосогласованность модели в целом.
2. В главе 3 представлены аналитические решения уравнений аксионной магнитоэлектростатики и результаты численного моделирования профилей распределения электрического и псевдоскалярного полей в окрестности аксионного диона; в разделе 3.1 исследованы модели одноуровневых и ступенчатых распределений аксионного поля, а результаты представлены с помощью решений уравнений Гойна, Эйлера и Бесселя; в разделе 3.2 в рамках неминимального подхода найдены решения уравнений аксионной электростатики, регулярные в центре диона; в разделе 3.3 представлены решения, демонстрирующие профили типа «складок», которые обусловлены влиянием космологической постоянной.
3. В главе 4 обсуждаются аналитические и численные решения уравнений плазменной аксионной электростатики, описывающие равновесные конфигурации релятивистской бозе-газовской, электрон-позитронной и вырожденной электронной плазмы в магнитосфере аксионного диона; в

формализме теории использованы новые концепции аксионного расширения силы Лоренца, как ключевого элемента кинетического уравнения аксионно-активной плазмы, а также аксионного расширения эффекта Росселанда – Пеннекока; показано, что под влиянием аксионного окружения плазма становится стратифицированной, а коллективное электрическое поле имеет признаки, характерные для структуры двойного электрического слоя.

4. В главе 5 анализируются уравнения аксионной магнитоэлектростатики для звезд с сильным магнитным полем, обладающим дипольной составляющей; показано, что под влиянием аксионной темной материи в системе неминуемо возникают квадрупольные и другие высшие моменты магнитного и электрического полей; как результат обратной реакции, гало аксионной темной материи в окрестности диона перестает быть сферически симметричным, а весь процесс трансформации аксионно-магнитоэлектрической структуры диона приводит к её компактификации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ИЗЛОЖЕНО В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК для размещения материалов диссертаций

1.1 Balakin A.B. Polarization and stratification of axionically active plasma in a dyon magnetosphere / A.B. Balakin, D.E. Groshev // Physical Review D. – 2019. – Vol. 99, iss. 2. – P. 023006-1–023006-20.

1.2 Balakin A.B. Magneto-electrostatics of axionically active systems: Induced field restructuring in magnetic stars / A.B. Balakin, D.E. Groshev // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101, iss. 2. – P. 023009-1–023009-12.

1.3 Balakin A.B. New application of the Killing vector field formalism: modified periodic potential and two-level profiles of the axionic dark matter distribution / A.B. Balakin, D.E. Groshev // The European Physical Journal C. – Vol. 80, num. 145. – P. 1-12.

1.4 Balakin A.B. Fingerprints of the Cosmological Constant: Folds in the Profiles of the Axionic Dark Matter Distribution in a Dyon Exterior / A.B. Balakin, D.E. Groshev // Symmetry. – 2020. – Vol. 12, iss. 3. – P. 455-462.

1.5 Balakin A.B. Nonminimal dyons with regular gravitational, electric and axion fields / A.B. Balakin, D.E. Groshev // International Journal of Modern Physics D. – 2020. – Vol. 29, iss. 12. – P. 2050083-1–2050083-16.

2. Тезисы

2.1 Грошев Д.Е. Электродинамические эффекты в аксионно-активных системах / Д.Е. Грошев, А.Б. Балакин // Тезисы докладов 2-й международной зимней школы-семинара «Петровские чтения-2016». – Казань, 2016. – С.21.

2.2 Грошев Д.Е. Электродинамика Аксионно-активных систем: индуцированный эффект Штарка в магнетарах / Д.Е. Грошев, А.Б. Балакин // Тезисы докладов 3-й международной зимней школы-семинара «Петровские чтения-2017». – Казань, 2017. – С.41.

2.3 Groshev D.E. Polarization and stratification of axionically active plasma in a dyon magnetosphere / D.E. Groshev, A.B. Balakin // Тезисы докладов 4-й международной зимней школы-семинара «Петровские чтения-2018». – Казань, 2018. – С.33.

2.4 Groshev D.E. Polarization and stratification of axionically active plasma in a dyon magnetosphere / D.E. Groshev, A.B. Balakin // 3rd Symposium of the BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology, Program and Abstracts. – Kazan, 2019. – P. 39.

2.5 Groshev D. Electrodynamics of axion-active system: polarization and stratification of plasma in an axionic dyon magnetosphere / D. Groshev, A.Balakin // The Modern Physics of Compact Stars and Relativistic Gravity 2019, book of abstracts. – Yerevan, Armenia. – P.7.