Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

На правах рукописи
УДК 519.17

Курносов Артем Дмитриевич

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НЕЗАВИСИМОСТЬЮ И ДОМИНИРОВАНИЕМ В ГРАФАХ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Долгопрудный — 2020

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики физтех-школы прикладной математики и информатики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
доцент
Дайняк Александр Борисович

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр Российской академии наук»

Защита состоится «15» декабря 2020 года в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.009 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):
https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Работа представлена «15» сентября 2020 г. в Аттестационную комиссию Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание учёной степени канди-дата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке игосударственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

1. Актуальность и степень разработанности темы исследования

Значительное место в теории графов занимают задачи, связанные с вычислением или оценкой различных инвариантов графа, например, степени связности, обхвата, хроматического числа, хроматического индекса, кликового числа, числа независимости, числа доминирования и др. Кроме указанных интерес также представляют инварианты, относящиеся к перечислению множеств: количество подграфов в графе, изоморфных данному, например, количество треугольников в графе; количество паросочетаний или совершенных паросочетаний графа, количество независимых множеств, количество доминирующих множеств. Каждая из подобных величин каким-либо образом характеризует граф, причём такие характеристики находят применение как в теоретической математике, так и в прикладных научных областях при моделировании различного рода структур или процессов.

Множество вершин графа называется *независимым*, если никакие две вершины этого множества не соединены ребром. Размер наибольшего независимого множества в графе G называется *числом независимости* и обозначается $\alpha(G)$. Независимое множество — одно из важнейших понятий теории графов, оно тесно связано со многими другими её объектами: кликовое число графа есть число независимости в дополнении этого графа; хроматическое число графа есть минимальное число попарно непересекающихся независимых множеств, на которые можно разбить все вершины этого графа; паросочетание есть независимое множество в рёберном графе; а любое максимальное независимое множество является *доминирующим множеством*, т. е. таким множеством D вершин графа $G = (V, E)$, что каждая вершина $v \in V \setminus D$ имеет соседа в D. Последнее свойство, связывающее между собой независимые и доминирующие множества, влечёт тривиальное соотношение $\gamma(G) \leqslant \alpha(G)$ для любого графа G (величина $\gamma(G)$ — *число доминирования* графа G, т. е. размер наименьшего доминирующего множества в G).

Понятие независимого множества (или двойственное ей понятие *клики*, т. е. подмножества вершин графа, порождающих в нём полный подграф) находит различные интерпретации за пределами чистой теории графов. К примеру, клика является важным объектом в социологии (откуда и пошло использование данного термина в теории графов) и активно используется при анализе социальных сетей. В теории кодирования при рассмотрении графа с вершинами-словами в заданном алфавите и рёбрами, проводимыми для пар слов, переходящих друг в друга при ошибке всего в одной символьной позиции, независимое множество является кодом с расстоянием 2. В диаграммах частично упорядоченных множеств (где ребро проводится между сравнимыми между собой различными элементами) независимые множества представляют собой антицепи. Максимальные независимые множества могут быть использованы, например, при моделировании многоканальных радиосетей.

Через $\iota(G)$ будем обозначать количество всех независимых множеств графа G. Перечислительная задача подсчёта числа антицепей в булевом кубе (то есть величины $\iota(G)$ в диаграмме соответствующего частичного порядка) была поднята Дедекиндом в 1897 году, данные числа, зависящие от размерности булева куба, называются *дедекиндовыми числами*. Позднее было опубликовано множество работ, затрагивающих данную проблему, многие из которых давали асимптотические оценки на дедекиндовы числа.

В компьютерной химии, где химические соединения зачастую моделируются с помощью так называемых *молекулярных графов*, за величиной $\iota(G)$ закрепилось специальное название: *индекс Меррифилда – Симмонса*. Оно вошло в употребление благодаря установленной Меррифилдом и Симмонсом корреляции между данной величиной и точками кипения определённых видов молекул.

Как и исследованию величины ι, количеству максимальных независимых множеств ι_m посвящена довольно обширная литература. Было получено множество результатов, дающих ответы на вопросы об экстремальных значениях параметров ι и ι_m для различных классов графов.

Другим ключевым понятием настоящей диссертационной работы наряду с независимым множеством является доминирующее множество. Его значение в теории графов подтверждается выдающимися числом и разнообразием посвящённых ему работ. Наиболее интенсивное развитие теории доминирования, как и теории графов в целом, началось вместе с эволюцией таких областей, как информатика, электротехника, компьютерная инженерия, исследование операций. Одна лишь монография [1] (Хэйнс, Хедетниеми, Слэйтер), подробно освещающая результаты по доминированию в графах, содержит более 1200 библиографических ссылок.

Наиболее ранними по доминирующим множествам работами считаются такие, в которых были поставлены и частично решены задачи о расстановке фигур шахматной доски, интерес к которым возник в середине XIX века. К задачам такого рода, легко интерпретируемым в терминах доминирования в графе, относится, например, следующая: сколько минимум ферзей можно поставить на шахматную доску, так, чтобы каждое из оставшихся полей доски билось каким-либо ферзём?

Доминирующие множества находят применение во многих прикладных областях, они активно используются для решения задач социальных взаимодействий, в том числе социальных сетей; компьютерной инженерии, в том числе проектирования и обслуживания беспроводных сетей; задач размещения объектов и связей между ними (это могут быть объекты инфраструктуры или, например, деталей электронной схемы), прокладки оптимальных маршрутов и др.

Добавляя различные уточнения к определению доминирующего множества (они могут заключаться, например, в дополнительных требованиях к доминирующему множеству), мы получим множество вариаций доминирования в графах: *независимое доминирующее множество* — множество, являющееся одновременно и независимым, и доминирующим; *связное доминирующее множество* — доминирующее множество графа, порождающее в нём связный подграф; *полное доминирующее множество* — такое доминирующее множество D, что у каждой вершины D есть сосед в D, и т. д. Все эти и многие другие вариации доминирования активно исследуются в современной литературе. В данной работе мы рассмотрим лишь одну из таких вариаций: связное доминирование.

Понятие связного доминирования тесно связано с понятием *остовного дерева*. Если через $l_c(G)$ обозначить максимально возможное число листьев в остовном дереве связного графа G, а через $\gamma_c(G)$ — *число связного доминирования*, т. е. размер наименьшего связного доминирующего множества G, то для произвольного связного графа с хотя бы тремя вершинами можно записать простое общеизвестное соотношение (везде далее $|G|$ — число вершин графа G):

$$\gamma_c(G) + l_c(G) = |G|. \tag{1}$$

Оно следует из того, что любое минимальное связное доминирующее множество D является множеством нелистовых вершин некоторого остовного дерева (в подграфе, порождаемом D, можно выделить остовное дерево, а затем добавить к нему оставшиеся вершины графа в виде листьев, в силу минимальности вершины D сами при этом не будут являться листьями) и, наоборот, множество нелистовых вершин остовного дерева образует связное доминирующее множество.

Другими словами, задача поиска в G остовного дерева с максимальным числом листьев (или, что то же самое, с минимальным числом нелистовых вершин) равносильна задаче поиска наименьшего связного доминирующего множества.

Задача поиска остовного дерева с наибольшим числом листьев упоминается уже в статье В. Г. Визинга [2] 1968 года. Эта задача является NP-трудной даже для кубических графов, поэтому неудивительно, что имеется и продолжает появляться заметное количество работ, в которых приводятся различные нижние оценки величины $l_c(G)$ (что соответствует верхним оценкам числа $\gamma_c(G)$), а также относительно быстрые приближённые алгоритмы для данной задачи. В большинстве работ рассматриваются графы с определённой дополнительной информацией о структуре, например, с ограничением снизу на степени вершин или запретами на содержание определённых подграфов.

Стоит отметить, что связные доминирующие множества находят практическое применение в целом ряде задач, возникающих в моделировании сетей, в основном беспроводных. Использование связного доминирующего множества позволяет упрощать процедуру передачи и хранения информации для различных узлов сети. Например, имея связное доминирующее множество узлов D, можно осуществлять передачу данных между любыми двумя узлами сети, используя только узлы D в качестве промежуточных звеньев маршрута, множество D в таком случае является множеством так называемых *маршрутизаторов*. Именно маршрутизаторы по хранящейся в них *таблице маршрутизации* определяют, куда дальше нужно пересылать пакет полученных данных, и связность D обеспечивает возможность этой передачи для всей сети, даже если во всех узлах, не входящих в D, хранить информацию только о смежных с ними маршрутизаторах.

Помимо вычисления требуемого инварианта в графе вполне естественно поставить *обратную задачу*, то есть задачу существования, построения или описания графов с предписанным значением инварианта. Поскольку обычно, как было показано на примерах рассмотренных величин, инвариант каким-либо образом характеризует интерпретируемый графом объект, то решение обратной задачи позволяет выяснить принципиальную возможность (и, быть может, способ) сконструировать объект с предписанной характеристикой. Например, решение обратной задачи для ι может помочь составить химическое соединение с нужными свойствами.

Сформулируем общие постановки обратных задач существования и минимизации (задачу максимизации можно определить аналогично). Пусть $\mathcal{G}$ — класс графов, а $\varphi : \mathcal{G} \to S$ и $\psi : \mathcal{G} \to T$ — заданные инварианты графа (значениями инварианта могут быть числа, а могут быть, например, последовательности чисел). *Обратная задача существования* для пары $(\mathcal{G}, \varphi)$ ставится следующим образом: для каких $s \in S$ найдётся граф $G \in \mathcal{G}$, такой, что $\varphi(G) = s$? Если $\varphi(G) = s$, то будем говорить, что s *реализуется* графом G, а граф G при этом будет *реализацией* значения s. Для значений инварианта, являющихся решениями задачи существования, можно также поставить *обратную задачу описания*: для данного $s \in S$ описать множество графов $G \in \mathcal{G}$ с $\varphi(G) = s$.

Пусть S — множество всех значений, которые некоторый инвариант φ принимает на произвольных графах. При $S \subseteq \mathbb{N}$ будем говорить, что класс графов $\mathcal{G}$ является *сильно φ-полным*, если для каждого $s \in S$ найдётся его реализация $G \in \mathcal{G}$. Если же такой граф $G \in \mathcal{G}$

найдётся для всех достаточно больших $s \in S$, то класс $\mathcal{G}$ назовём *слабо φ-полным*, или просто *φ-полным*.

Если существование соответствующих реализаций установлено, то имеет смысл *обратная задача минимизации* для тройки $(\mathcal{G}, \varphi, \psi)$: для заданного $s \in S$ найти величину $L^{\mathcal{G}}_{\varphi, \psi}(s) = \inf\{\psi(G) \mid G \in \mathcal{G}, \varphi(G) = s\}$ (для аналогичной задачи максимизации соответствующего конечного максимума потенциально может и не быть). Нас будет интересовать в первую очередь *асимптотика* функции $L^{\mathcal{G}}_{\varphi, \psi}(s)$ для φ-полных классов графов. Если $\mathcal{G}$ — класс всех графов, то вместо $L^{\mathcal{G}}_{\varphi, \psi}(s)$ будем писать $L_{\varphi, \psi}(s)$.

Классическим примером обратной задачи является задача определения для заданного набора целых неотрицательных чисел, соответствует ли этот набор степеням вершин некоторого графа; в терминах общей постановки существования пара $(\mathcal{G}, \varphi)$ тогда соответствует классу всех графов и степенной последовательности $\varphi = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ графа. Данная задача была независимо решена Гавелом [3], Хакими [4], а также Эрдёшем и Галлаи [5].

Рассмотрим результаты по обратным задачам, касающиеся независимых множеств. В 1989 году Линек [6] доказал сильную ι-полноту класса $\mathcal{B}$ всех двудольных графов. Так как при добавлении к графу изолированной вершины число независимых множеств удваивается, то задачу реализации натуральных чисел он свёл к задаче реализации нечётных чисел. При этом Линек не просто доказал реализуемость всех натуральных чисел, но и заодно получил верхнюю оценку на число вершин в графах-реализациях, что в терминах нашей постановки обратной задачи минимизации является верхней оценкой величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota, \nu}(n)$, где за ν здесь и далее мы обозначаем инвариант, отражающий число вершин графа. Приведём соответствующий результат.

Теорема 1 (Линек, [6]). *Для любого нечётного натурального числа n, удовлетворяющего неравенству $2^{k-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^k-1$, существует двудольный граф с долями размера $a = \lfloor \log_2 n \rfloor$ и $\lfloor \log_2(n - 2^a + 1) \rfloor$, реализующий число n в качестве значения ι.*

Что весьма интересно, при доказательстве теоремы 1 Линек попутно решил другую обратную задачу: он показал, что для любого натурального $n \geqslant 2$ существует двудольный граф G с долями размера $\lceil \log_2 n \rceil$ и $\lceil \log_2 n \rceil + 1$, реализующий n как величину $c(G)$, где $c(G)$ — это число всех полных двудольных подграфов G с непустыми долями.

В работе [6] Линек также выдвинул гипотезу, что класс $\mathcal{T}$ всех деревьев является ι-полным. Данная гипотеза на настоящий момент не доказана, однако имеются работы, где получены некоторые занимательные результаты, связанные с ней. Например, Лау [7] доказал, что для любого возможного остатка r по произвольному модулю m существует дерево-реализация, количество независимых множеств которого даёт остаток r по модулю m, при этом ранее Вагнером [8] было установлено, что для любого натурального m доля деревьев с ι, кратным m, стремится к 1 по мере роста числа вершин в них.

Перейдём к результатам, связанным с ι_m. В 1960 году Миллер и Мюллер [9] привели верхнюю оценку величины ι_m для класса всех графов с фиксированным числом вершин. Эта же задача была независимо решена в работе Муна и Мозера [10] 1965 года. При этом результат в обеих работах был получен в терминах максимальных клик. В тех же работах описаны и все экстремальные графы.

Нижняя оценка числа максимальных независимых множеств для класса всех графов тривиальна: для пустого графа $\iota_m(G) = 1$. Ясно, что присутствие изолированных вершин никак не отражается на величине ι_m. Поэтому имеет смысл рассматривать графы без оных. Однако даже при рассмотрении всех графов без изолированных вершин (для фиксированного числа вершин) нижняя оценка остаётся тривиальной: полный двудольный граф имеет ровно два максимальных независимых множества. Можно заметить, что и в этом примере есть особый тип вершин: так называемые *вершины-дубликаты*. Вершины u, v графа G называются *дубликатами* друг друга, если $\mathcal{N}_G(u) = \mathcal{N}_G(v)$. Количество дубликатов у произвольной вершины также не влияет на ι_m, то есть можно удалить или наоборот добавить сколько угодно дубликатов, не изменив при этом ι_m.

Джоу, Чан, Линь и Ма [11] рассмотрели как раз класс $\mathcal{S}$ графов без дубликатов и изолированных вершин (но граф K_1 тоже включён ими в $\mathcal{S}$ в виде исключения). Они решили обратную задачу описания для класса $\mathcal{S}$ и величины ι_m для значений $\iota_m(G) \in \{1, 2, 3\}$, а также обратную задачу максимизации для тройки ($\mathcal{S}$, ι_m, ν) (напомним, что ν — число вершин графа). Вот соответствующий результат.

Теорема 2 (Джоу, Чан, Линь и Ма, [11])**.** *Пусть G — граф без изолированных вершин и вершин-дубликатов с $\iota_m(G) = k$, $k \geqslant 2$. Тогда $|G| \leqslant 2^{k-1} + k - 2$, причём оценка является достижимой для любого $k \geqslant 2$.*

Очевидно, оценка теоремы 2 задаёт также нижнюю оценку числа ι_m для графов с фиксированным числом вершин класса $\mathcal{S}$. Если в классе $\mathcal{S}$ ограничиться рассмотрением лишь деревьев, получится класс $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ деревьев без листьев-дубликатов (нелистовых дубликатов и изолированных вершин, за исключением случая K_1, быть в дереве не может по определению). В 2018 году Талецкий и Малышев [12] решили обратную задачу описания для класса n-вершинных деревьев из $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ и экстремального значения величины ι_m: ими было описано множество всех n-вершинных деревьев из $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ с наименьшим количеством максимальных независимых множеств для любого n.

В значительной части работ, посвящённых величине ι_m, исследуются её экстремальные значения на тех или иных классах графов. Так, Лю [13] решил обратную задачу максимизации для $(\mathcal{B},\ \nu,\ \iota_m)$ и обратную задачу описания для найденного максимального значения. Соответствующая точная верхняя оценка имеет вид

$$\iota_m(G) \leqslant 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

для двудольных n-вершинных графов.

В 2015 году автором настоящей диссертационной работы в соавторстве с Дайняком А. Б. [14] были исследованы обратные задачи существования и минимизации для тройки $(\mathcal{B},\ \iota_m,\ \nu)$ и была дана асимптотическая оценка на величину $L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\,\nu}(n)$. Данная работа продолжает традиции по решению обратных задач существования, касающихся перечисления независимых множеств, берущие начало с работы Линека [6].

Не вызывает сомнений, что наиболее элементарными, но при этом важнейшими глобальными характеристиками графа являются его число вершин и число рёбер. Самой же используемой локальной характеристикой, пожалуй, является степень вершины в графе. Поэтому неудивительно, что уже упомянутая ранее и решённая в работах [3–5] задача реализации целочисленной последовательности в виде степенной последовательности графа стала одной из первых рассмотренных в литературе обратных задач, а соответствующие условия существования широко известны среди специалистов по теории графов.

Хакими [4, 15] называет два графа *d-инвариантными*, если они имеют одинаковые степенные последовательности. При решении поставленных задач им активно использовалась следующая операция по перестроению графа, которая, очевидно, сохраняет степенную последовательность. Пусть четыре различные вершины u, v, w, t графа G таковы, что $uv,\ wt \in E(G)$ и $uw,\ vt \notin E(G)$, тогда операция, заключающаяся в удалении из G рёбер uv, wt и проведении рёбер uw, vt, называется *элементарным d-инвариантным преобразованием*. Данная операция является довольно естественным слабо меняющим граф действием по его перестроению, поэтому неудивительно, что она нередко возникала в том или ином виде в других работах по теории графов. Например, в книге Зыкова [16] она называется 4-*сдвигом*. В дальнейшем мы будем склоняться именно к такому названию термина. Указанная операция активно применяется автором настоящей диссертационной работы для исследования обратных задач, касающихся чисел α и γ, на классах деревьев с заданными степенными последовательностями.

Гейл [17] и Райзер [18] независимо друг от друга получили критерий существования двудольной реализации для целочисленной последовательности, впоследствии именуемый *критерием Гейла – Райзера*. Примечательно, что Райзер пришёл к данному результату в терминах построения $\{0,\, 1\}$-матриц с предписанными суммами чисел на столбцах и строках, и при этом, как и Хакими [4, 15], он тоже активно использовал операцию, являющуюся по сути 4-сдвигом.

Интересно, что алгоритм реализации графом степенной последовательности целых неотрицательных чисел, задействованный Гавелом [3] и Хакими [4] (именуемый в современной литературе *редукционным процессом Гавела – Хакими*), позволяет оценить число независимости произвольного графа с данной степенной последовательностью. Заключается алгоритм в определённых шагах по изменению последовательности (удалению наибольшего элемента и уменьшению последующих элементов), приводящих в случае *графичности* (т. е. существования реализации) исходной последовательности к *остаточной последовательности*, состоящей только из нулей. Это число нулей принято называть *остатком* [residue] исходной последовательности $\mathbf{d}$ (а также соответствующего графа-реализации), будем обозначать его $\mathrm{r}(\mathbf{d})$. Оказывается, для произвольного графа G со степенной последовательностью $\mathbf{d}$ верна оценка

$$\alpha(G) \geqslant \mathrm{r}(\mathbf{d}),$$

что было доказано Фавароном, Маэо и Сакле [19], а также Григгсом и Клейтманом [20].

Кроме указанной имеются и другие нижние оценки, зависящие от степенной последовательности графа. Одной из наиболее известных является следующая:

Теорема 3 (Каро [21], Вэй [22])**.** *Для любого графа G выполнено*

$$\alpha(G) \geqslant \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg_G(v) + 1}.$$

Оценка достигается в точности на графах, компонентами связности которых являются клики.

В 2016 году была представлена точная нижняя оценка числа независимости на классе лесов с фиксированной степенной последовательностью (везде далее n_k — количество элементов рассматриваемой последовательности, равных k, а $n_{\geqslant k}$ — количество соответствующих элементов, не меньших чем k):

Теорема 4 (Гентнер, Хеннинг, Ротенбах, [23])**.** *Пусть невозрастающая последовательность натуральных чисел $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ такова, что $d_1 \geqslant 2$ и $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-c)$ для некоторого* *положительного* c. *Положим* $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}$ — *класс лесов, реализующих* $\mathbf{d}$. *Положим также* $\alpha_{\min} := \min_{F \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}}} \alpha(F)$. *Тогда*

$$\alpha_{\min} = \begin{cases} n_1 - c + 1, & \text{если } n_1 > n_{\geqslant 2} \text{ и } c < \left\lceil \frac{n_1 - n_{\geqslant 2} + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пеппер [24, 25] рассмотрел алгоритм, применяемый к целочисленной последовательности, схожий с редукционным процессом Гавела – Хакими, назвав его *аннигиляционным процессом*. Как и при редукционном процессе, в конце аннигиляционного процесса остаётся последовательность, состоящая только из нулей. Число этих нулей называется *числом аннигиляции* исходной последовательности. Имеется другое более удобное равносильное определение, которое мы приводим далее.

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — неубывающая последовательность степеней вершин графа G. Тогда *числом аннигиляции* $\mathbf{d}$ (и, соответственно, числом аннигиляции G) называется величина $\mathrm{a}(\mathbf{d})$, определяемая как

$$\mathrm{a}(\mathbf{d}) := \max\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i = |E(G)|\Big\}.$$

Число аннигиляции является верхней оценкой числа независимости для любого графа [24, 25]. Гентнер, Хеннинг и Ротенбах [26] показали, что на классе лесов с заданной степенной последовательностью $\mathbf{d}$ число $\mathrm{a}(\mathbf{d})$ является точной верхней оценкой для α.

Одной из целей настоящей диссертационной работы является решение обратных задач существования и построения для тройки ($\mathcal{T}$, d, α) (через d будем обозначать здесь и далее инвариант, задающий степенную последовательность графа), что включает в себя как решение экстремальных задач, аналогичных задачам работ [23, 26] (но для деревьев, а не лесов), так и исследование реализуемых деревьями значений α, лежащих между соответствующими экстремальными значениями.

Далее рассмотрим результаты по доминирующим множествам. Очевидно, верхней оценкой для числа доминирования является *число независимого доминирования*, т. е. размер наименьшего независимого доминирующего множества в графе. Для произвольного дерева на хотя бы двух вершинах Фаварон [27] получил следующий результат.

Теорема 5 (Фаварон, [27])**.** *Пусть есть дерево* T *на* $n \geqslant 2$ *вершинах с* l *листьями. Тогда в* T *существует независимое доминирующее множество размера не больше чем* $(n + l)/3$.

В той же работе [27] были охарактеризованы все деревья, на которых оценка достигается.

В ранее упомянутой работе [23] авторы решили не только обратную задачу минимизации для $(\mathcal{F},\, d,\, \alpha)$, но и обратную задачу максимизации для $(\mathcal{F},\, d,\, \gamma)$.

Теорема 6 (Гентнер, Хеннинг, Ротенбах, [23])**.** *Пусть неубывающая n-последовательность натуральных чисел $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ такова, что $d_n \geqslant 2$. Пусть $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-c)$ для некоторого положительного c. Положим $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}$ — класс лесов, реализующих $\mathbf{d}$, а $\gamma_{\max} := \max_{F \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}}} \gamma(F)$. Тогда*

$$\gamma_{\max} = \begin{cases} n - n_1 + c - 1, & \text{если } n_1 > n_{\geqslant 2} \text{ и } c < \left\lceil \frac{n_1 - n_{\geqslant 2} + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{если } n_1 > n_{\geqslant 2} \text{ и } c \geqslant \left\lceil \frac{n_1 - n_{\geqslant 2} + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lceil \frac{n + n_1 - 2}{3} \right\rceil, & \text{если } n_1 \leqslant n_{\geqslant 2}. \end{cases}$$

В число основных результатов настоящей диссертационной работы входят решённые обратные задачи существования и построения для тройки $(\mathcal{T},\, d,\, \gamma)$. Как показывает проведённое автором исследование [28], оценка Фаварона числа независимого доминирования, представленная в теореме 5, зачастую является точной верхней оценкой числа доминирования на классе деревьев с заданной степенной последовательностью.

Нижняя оценка числа γ для деревьев, в которой аналогично оценке Фаварона задействованы только количества вершин и листьев дерева, была получена Леманской [29]. Вот соответствующий результат:

Теорема 7 (Леманска, [29])**.** *Для любого дерева T с ровно $n \geqslant 3$ вершинами и l листьями верна оценка*

$$\gamma(T) \geqslant \frac{n - l + 2}{3}.$$

В той же работе [29] были охарактеризованы все соответствующие экстремальные графы.

Классической нижней оценкой для γ на произвольных графах, выражающейся через степени вершин, является оценка, представленная Слэйтером [30] в 1992 году. Приведём её.

Числом Слэйтера графа G, имеющего невозрастающую степенную последовательность $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, называется величина, которую имеет смысл сразу распространить на последовательность $\mathbf{d}$:

$$\mathrm{sl}(\mathbf{d}) := \mathrm{sl}(G) = \min\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{k} (d_i + 1) \geqslant n\Big\}.$$

Слэйтером было установлено [30], что для любого графа G выполняется неравенство

$$\gamma(G) \geqslant \mathrm{sl}(G).$$

Именно благодаря работе [30] за величиной sl в литературе закрепилось упомяутое название.

Достижимая нижняя оценка числа доминирования в лесах с заданными последовательностями степеней была получена Гентнером, Хеннингом и Ротенбахом [26]. Вот соответствующий результат.

Теорема 8 (Гентнер, Хеннинг, Ротенбах, [26])**.** *Пусть невозрастающая последовательность натуральных чисел* $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *является степенной последовательностью для некоторого леса без изолированных вершин. Положим* $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}$ *— класс лесов, реализующих* $\mathbf{d}$*, и* $\gamma_{\min} := \min_{F \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}}} \gamma(F)$*. Тогда*

$$\gamma_{\min} = \min\{k_1, k_2\},$$

где

$$k_1 = \min\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant \sum_{i=k+1}^{n} d_i\Big\};$$

$$k_2 = \min\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant n - k,$$

$$0 \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant \max\{0,\ 2(n_{\geqslant 2} - k) - 2\}\Big\}.$$

Примечательно, что число k_1 в теореме 8 есть не что иное, как $(n - \mathrm{a}(\mathbf{d}))$, в чём легко убедиться, воспользовавшись определением числа аннигиляции. Также число k_2 задаётся неравенством из определения числа Слэйтера, но с дополнительным ограничением.

При этом точная нижняя оценка числа γ для классов деревьев с фиксированными степенными последовательностями выглядит несколько проще [28] и тоже приводится в качестве основного результата настоящей диссертационной работы.

Как уже отмечалось ранее, значительное отражение в литературе, затрагивающей связные доминирующие множества, нашли работы, дающие оценку снизу на максимальное возможное число листьев $l_c(G)$ в остовных деревьях графа G; такие оценки соответствуют верхним оценкам на $\gamma_c(G)$ (благодаря соотношению (1)).

Так, Клейтман и Вест [31] рассмотрели обратную задачу минимизации для тройки $(\mathcal{G}_n^c,\ \delta,\ l_c)$, где $\mathcal{G}_n^c$ — класс всех связных графов на n вершинах, δ — минимальная степень вершины в графе. Величина $L_{\delta,\, l_c}^{\mathcal{G}_n^c}(k)$ обозначена в их работе как $l(n, k)$. Очевидно, $l(n, 2) = 2$

при любом $n \geqslant 3$. Приведём известные на настоящий момент результаты для других малых значений k.

Клейтман и Вест [31] показали, что

$$l(n,3) \geqslant \left\lceil \frac{n}{4} + 2 \right\rceil, \tag{2}$$

$$l(n,4) \geqslant \left\lceil \frac{2n+8}{5} \right\rceil. \tag{3}$$

Для $k = 5$ соответствующую оценку привели Григгс и Ву [32]:

$$l(n,5) \geqslant \left\lceil \frac{n}{2} + 2 \right\rceil. \tag{4}$$

Оценки (2), (3), (4) подтверждают для $k = 3$, 4, 5 гипотезу, высказанную Линиалом в 1988 году (соответствующая работа не была им опубликована), о том, что

$$l(n,k) \geqslant \frac{k-2}{k+1} \cdot n + c_k,$$

где c_k — некоторая неотрицательная константа, зависящая только от $k \geqslant 3$. Имеется общая для всех возможных $k \geqslant 3$ конструкция, на которой достигается оценка Линиала. Таким образом, для случаев $k = 3$, 4, 5 представленная обратная задача минимизации полностью решена.

Для малых чисел $k \geqslant 6$ гипотеза на настоящий момент не подтверждена. Из современных исследований, направленных на подтверждение или опровержение гипотезы Линиала на малых числах, можно отметить работу Симаровой [33], из которой следует оценка

$$l(n,6) \geqslant \frac{11}{21} n.$$

При этом установлено, что для достаточно больших значений k гипотеза Линиала не выполняется. Например, Каро, Вест и Юстер [34] вычислили асимптотику величины $\gamma_c(n,k) = n - l(n,k)$, по сути являющейся ответом на обратную задачу максимизации для тройки $(\mathcal{G}_n^c,\ \delta,\ \gamma_c)$. Соответствующий результат, очевидно, опровергающий гипотезу Линиала при больших k, имеет следующий вид:

$$\gamma_c(n,k) = (1 + o(1)) \frac{\ln(k+1)}{k+1} \cdot n,\ \ k \to \infty.$$

Нижние оценки на γ_c исследовали, например, Дезормо, Хэйнс и Хеннинг [35]. Среди представленных авторами оценок выделим приведённую в терминах степенной последовательности графа. Пусть степенная последовательность $\mathbf{d}$ графа G задаётся числами $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$. Дезормо, Хэйнс и Хеннинг [35] ввели следующую величину, именуемую ими *connected order-sum number* и обозначаемую как

$$\operatorname{ord}_c(\mathbf{d}) := \operatorname{ord}_c(G) = \min\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{k}(d_i - 1) \geqslant n - 2\Big\}.$$

Как было показано [35], число $\operatorname{ord}_c(G)$ является нижней оценкой на γ_c для любого связного графа G. Данная оценка достигается по крайней мере на всех деревьях [35].

В недавней статье [36] автора настоящей диссертационной работы была исследована обратная задача минимизации для тройки $(\mathcal{G}^c,\ d,\ \gamma_c)$, где $\mathcal{G}^c$ — класс связных графов. Основой исследования среди прочего как раз является величина $\operatorname{ord}_c(\mathbf{d})$.

2. Цели и задачи работы

Целью настоящей работы является решение нескольких обратных и экстремальных задач, связанных с независимостью и доминированием, на специальных классах графов.

Основные задачи настоящей диссертационной работы состоят в следующем.

1. Асимптотически оценить наименьшее количество вершин, которое может иметь двудольный граф, количество максимальных независимых множеств которого равно предписанному числу.

2. Указать множество всех возможных значений числа независимости для класса деревьев с заданной степенной последовательностью; рассмотреть структурные особенности деревьев-реализаций.

3. Указать множество всех возможных значений числа доминирования для класса деревьев с заданной степенной последовательностью; рассмотреть структурные особенности деревьев-реализаций.

4. Получить точную нижнюю оценку для числа связного доминирования на классе связных графов с фиксированной степенной последовательностью.

3. Научная новизна работы

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

4. Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Основные результаты диссертации могут быть использованы при исследовании классов двудольных графов, деревьев, связных графов, классов с фиксированной степенной последовательностью; для построения графов с предписанными свойствами. Методы, использованные при доказательстве основных результатов, могут быть полезны как для дальнейшего улучшения полученных результатов, так и для проведения аналогичного исследования для других классов графов и других инвариантов графа.

5. Методология и методы исследования

В работе использованы методы теории графов и комбинаторики. Отметим, что при этом задействован общий для решения поставленных задач 2 и 3 метод, заключающийся в применении к графу специального вида операций локального перестроения, слабо меняющих требуемые инварианты.

6. Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты, лично полученные соискателем:

1. Получена асимптотическая оценка минимального числа вершин в двудольной реализации предписанного числа максимальных независимых множеств ι_m (теорема 1.2.1).

2. Найдено множество всех значений числа независимости для класса деревьев с заданной степенной последовательностью (теорема 4.4.1). При этом представлены некоторые структурные особенности реализаций.

3. Представлен новый способ получения достижимой нижней оценки числа доминирования для каждого класса деревьев с заданной степенной последовательностью (длины хотя бы три) и приводится построение соответствующего экстремального дерева (теорема 5.2.3).

4. Найдено множество всех значений числа доминирования для класса деревьев с заданной степенной последовательностью (теорема 5.4.1). При этом представлены некоторые структурные особенности реализаций.

5. Представлены достаточные условия достижимости известной ранее нижней оценки числа связного доминирования на классе связных графов с заданной степенной последовательностью (теорема 6.1.3), а также следствия из них, например, получена

соответствующая точная нижняя оценка для всех возможных классов связных регулярных графов (следствие 6.1.2).

6. Представлена нижняя оценка числа связного доминирования для классов связных бирегулярных графов с листьями (теорема 6.2.2). Оценка достижима по крайней мере в некоторых случаях (теорема 6.2.1, утверждение 6.2.5).

7. Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, выносимые на защиту, являются достоверными, о чём свидетельствует строгое математическое изложение всех доказательств, а также факт публикации работ в научных изданиях, входящих в перечень ВАК, рецензируемых и индексируемых в базе данных Scopus. Дополнительным показателем достоверности является соответствие результатов диссертационной работы независимо полученным результатам работ некоторых зарубежных авторов, занимавшихся схожими задачами.

По теме исследования автор принимал участие в следующей конференции:

- 9-я Международная конференция “Дискретные модели в теории управляющих систем” (Красновидово, 20–22 мая 2015 г.).

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, шести разделов, одного приложения, заключения и списка литературы, включающего 111 наименований. Общий объём диссертации составляет 133 страницы, куда входят также два рисунка и одна таблица. Введение имеет собственную нумерацию теорем, гипотез и соотношений, выраженную арабскими числами. Нумерация теорем, лемм, гипотез, утверждений и следствий в основной части диссертации включает в себя три числа: номер соответствующего раздела, номер подраздела, а также порядковый номер внутри подраздела. Нумерация всех соотношений в основной части диссертации включает в себя только номер раздела и порядковый номер соотношения внутри него. Приложение содержит одно вспомогательное утверждение, нумеруемое отдельно от всех остальных утверждений диссертации. Нумерация таблиц и рисунков сквозная, т. е. не зависит от того, в какой части диссертации они представлены.

Во **Введении** обосновывается актуальность работы, приводятся общая постановка задач, обзор литературы по теме исследования, цели и задачи работы, её научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, перечисляются основные результаты работы, выносимые на защиту, также представлены сведения об апробации результатов, перечислены публикации по теме исследования, в конце Введения представлена структура диссертационной работы.

Первый раздел

Данный раздел посвящён обратным задачам минимизации, связанным с перечислением независимых множеств.

В **первом подразделе** приводятся два простых утверждения, дающие верхнюю оценку на величину $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n)$ для чисел n вида 2^t-1.

Утверждение 1.1.1 *При $k=2^t$ имеет место оценка $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(2^k-1)\sim k$.*

Утверждение 1.1.2 *При $n=2^k-1$, где k — произвольное натуральное число, имеет место оценка $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n)<3k/2$.*

Данные утверждения демонстрируют, что обратная задача существования, решённая Линеком [6], допускает естественное продолжение в виде обратной задачи минимизации.

Второй подраздел первого раздела посвящён получению как можно более точных асимптотических оценок величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n)$, приведём его основные результаты.

Теорема 1.2.1. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ выполнены неравенства*

$$2\log_2 n \leqslant L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n) \leqslant 2.69\log_2 n + O(1).$$

Верхняя оценка в теореме 1.2.1 показывается с помощью индуктивного построения реализаций, основанного на подобранном специальным образом конечном наборе графов.

Обозначим через $\overline{n}$ двоичную запись числа n. Через $w^{(k)}$ будем обозначать двоичное слово, получающееся k-кратным повторением слова w.

Теорема 1.2.2. *Пусть n — натуральное число, имеющее двоичную запись $w_1^{(q_1)}\dots w_k^{(q_k)}$ для некоторых непустых слов $w_1,\dots,w_k$ и натуральных чисел $q_1,\dots,q_k$. Пусть p_i — длина w_i. Тогда при $\sum_{i=1}^k p_i = o(\log_2 n)$ справедлива асимптотика*

$$L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n)\sim 2\log_2 n$$

(вне зависимости от величин q_i).

Теорема 1.2.2 не входит в перечень положений, выносимых на защиту, поскольку она была получена в соавторстве с научным руководителем автора настоящей диссертационной работы Дайняком А. Б., которым был внесён основной вклад в её доказательство.

Результаты данного раздела были опубликованы в работе [14].

Второй раздел

В данном разделе приводится основная вспомогательная информация, затрагивающая степенные последовательности, реализуемые графами (**первый подраздел**) и, в частности, деревьями (**второй подраздел**).

Последовательности целых неотрицательных чисел длины n будем называть n-последовательностями. Для непустой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ с наименьшим членом, не меньшим 2 (последовательности с таким свойством в дальнейшем обозначаем именно так), введём величину:

$$l(\widetilde{\mathbf{d}}) := \sum_{i=1}^{n} d_i - 2(n-1).$$

Рассмотрим последовательность $\mathbf{d}$, которая образуется присоединением к $\widetilde{\mathbf{d}}$ ровно $l(\widetilde{\mathbf{d}})$ элементов, равных 1. Несложно понять, что множество деревьев, реализующих последовательность $\mathbf{d}$, непусто, причём величина $l(\widetilde{\mathbf{d}})$ равна в точности количеству листьев в каждом таком дереве-реализации. Класс деревьев, реализующих $\mathbf{d}$, обозначим как $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$. Последовательность $\widetilde{\mathbf{d}}$ будем называть *сокращённой* последовательностью (для последовательности $\mathbf{d}$). Ясно, что рассмотрение всех возможных классов $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ равносильно рассмотрению всех классов деревьев с фиксированными степенными последовательностями длины не менее трёх.

В разделе вводится также следующая величина для неубывающих сокращённых n-последовательностей, схожая с числом аннигиляции:

$$\widetilde{\mathrm{a}}(\widetilde{\mathbf{d}}) := \max\Big\{a \in \mathbb{Z} \mid \sum_{i=1}^{a} d_i \leqslant n-1\Big\}.$$

Третий раздел

В данном разделе вводятся и исследуются специальные операции по преобразованию графа, называемые автором настоящей диссертационной работы X- и Y-операциями. Первая из этих операций является обобщением 4-сдвига и рассматривается в **первом подразделе**. Для неё показываются свойства, характеризующие её как слабо меняющее числа α и γ действие по локальному перестроению графа. Во **втором подразделе** аналогичным образом рассматривается Y-операция. В **третьем подразделе** приводится лемма, собирающая воедино все основные свойства введённых операций, используемые в последующих разделах.

Четвёртый раздел

Данный раздел посвящён обратной задаче существования и соответствующей задаче построения для пары $(\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}},\, \alpha)$.

В **первом подразделе** приводится некоторая вспомогательная информация.

Во **втором подразделе** даётся точная нижняя оценка числа α для деревьев класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$. Она имеет следующий вид.

Теорема 4.2.2. *Пусть неубывающая n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ такова, что $d_1 \geqslant 2$. Положим $\alpha_{\min} := \min_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \alpha(T)$. Тогда*

$$\alpha_{\min} = \max\left\{ l(\widetilde{\mathbf{d}}),\ \left\lceil \frac{n + l(\widetilde{\mathbf{d}})}{2} \right\rceil \right\}.$$

Завершается подраздел теоремой, характеризующей связь между множеством соответствующих экстремальных по α деревьев и множеством деревьев класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ с наибольшим размером множества $\mathrm{H}(T)$ вершин T, смежных с листьями:

Теорема 4.2.3. *Пусть $\widetilde{\mathbf{d}}$ — сокращённая n-последовательность степеней $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Пусть $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$ — класс деревьев $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, реализующих максимум $|\mathrm{H}(T)|$, а $\mathcal{T}_{\alpha}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ — класс деревьев $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, реализующих $\alpha_{\min}$. Тогда эти классы соотносятся следующим образом:*

- *$\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathcal{T}_{\alpha}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ при $n \leqslant l(\widetilde{\mathbf{d}})$, а также при условии $\forall i\ d_i = 2$;*
- *$\mathcal{T}_{\alpha}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$, когда одновременно выполнено $n_{\geqslant 3}(\widetilde{\mathbf{d}}) > 0$ и разность $n - l(\widetilde{\mathbf{d}})$ положительна и чётна;*
- *$\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subsetneq \mathcal{T}_{\alpha}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ при $n_{\geqslant 3}(\widetilde{\mathbf{d}}) > 0$ и $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) = 1$, а также в случае, когда $l(\widetilde{\mathbf{d}}) = 3$ и $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 3$ — нечётное число;*
- *$\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\alpha}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \neq \varnothing$ и $\mathcal{T}_{\alpha}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \neq \varnothing$ во всех остальных случаях, т. е. когда одновременно выполнены условия $l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 4$ и $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 3$ — нечётное число.*

В **третьем подразделе** приводится верхняя оценка числа α:

Теорема 4.3.2. *Пусть $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1,\, \ldots,\, d_n)$, где $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, — сокращённая n-*

последовательность для древесной последовательности $\mathbf{d}$. *Обозначим*

$$\alpha_{\max} := \max_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \alpha(T).$$

Тогда

$$\alpha_{\max} = \mathrm{a}(\mathbf{d}) = l(\widetilde{\mathbf{d}}) + \widetilde{\mathrm{a}}(\widetilde{\mathbf{d}}).$$

В заключительном **четвёртом подразделе** показывается, что множеством всех значений числа α, реализуемых деревьями класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, является отрезок натуральных чисел с концами в соответствующих экстремальных точках $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$, вычисленных в двух предыдущих подразделах.

Теорема 4.4.1. *Пусть* $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, \ldots, d_n)$, *где* $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. *Положим*

$$\alpha_{\min} := \min_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \alpha(T), \quad \alpha_{\max} := \max_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \alpha(T).$$

Тогда для любого натурального числа α *из промежутка* $\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$ *существует реализующее его дерево* T *из класса* $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, *такое, что* $\alpha(T) = \alpha$.

При доказательстве теоремы 4.4.1 строится последовательность деревьев, начинающаяся с дерева, реализующего $\alpha_{\max}$, в которой каждое следующее дерево получается из предыдущего с помощью X- или Y-операции; последнее дерево последовательности реализует $\alpha_{\min}$.

Все результаты данного раздела были представлены автором настоящей диссертационной работы совместно с Дайняком А. Б. [37] на IX Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» в мае 2015 года. При этом результаты работ [23, 26], в которых приводятся точные нижняя и верхняя оценки числа α для классов лесов с заданными степенными последовательностями, появились в электронной базе arXiv в июле 2015.

Пятый раздел

В данном разделе аналогично предыдущему решается обратная задача существования и построения для $(\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}, \gamma)$.

В **первом подразделе** приводится некоторая вспомогательная информация.

Второй подраздел посвящён получению точной нижней оценки числа γ на классе $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$. Соответствующая оценка выражается через две специальные величины. Первая из них — число Слэйтера, которое мы распространяем на неубывающую сокращённую последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_1 \geqslant 2$, воспользовавшись тем, что $n + l(\widetilde{\mathbf{d}})$ есть число вершин в деревьях из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$:

$$\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i + 1) \geqslant n + l(\widetilde{\mathbf{d}})\Big\}.$$

Вторую определяем следующим образом:

$$\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\Big\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i - 1) \geqslant l(\widetilde{\mathbf{d}})\Big\}.$$

Итоговая нижняя оценка имеет вид:

Теорема 5.2.3. *Пусть дана неубывающая n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_1 \geqslant 2$. Положим*

$$\gamma_{\min} := \min_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \gamma(T).$$

Тогда

$$\gamma_{\min} = \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}), \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})\}.$$

Теорема 5.2.3 решает обратную задачу минимизации для $(\mathcal{T}, d, \gamma)$ и включена в список положений, выносимых на защиту. Указанная обратная задача является частным случаем решённой в [26] обратной задачи минимизации для $(\mathcal{F}, d, \gamma)$. При этом ценность и новизна теоремы 5.2.3 заключается в следующем.

Прежде всего, достижимость нижней оценки на требуемом классе доказывается в предложенной теореме конструктивно, то есть в работе фактически дополнительно решена обратная задача построения, в отличие от работы [26]. Кроме того, выражение для оценки в теореме 5.2.3 имеет более простой вид, как максимум из двух удобно вычисляемых величин, — известной оценки Слэйтера $\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$ и оригинальной введённой в настоящей диссертационной работе величины $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})$, являющейся по сути нижней оценкой на число вершин в дереве, смежных с листьями. В работе [26] доказательство концептуально сложнее, оно использует множество технических инструментов: связь доминирующих и независимых множеств в графах, оценки Пеппера для числа независимости и Слэйтера для числа доминирования, упомянутый ранее критерий Гейла – Райзера [17, 18] существования двудольной реализации, а также 4-сдвиги.

В **третьем подразделе** приводится точная верхняя оценка числа γ на классе $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$:

Теорема 5.3.2. *Пусть дана неубывающая n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ (как и* *обычно, считаем $d_1 \geqslant 2$). Положим $\gamma_{\max} := \max_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \gamma(T)$. Тогда*

$$\gamma_{\max} = \min\left\{n,\, l(\widetilde{\mathbf{d}}) + \left\lfloor \frac{n - l(\widetilde{\mathbf{d}})}{3} \right\rfloor\right\}.$$

В конце подраздела дополнительно устанавливается тесная связь между классом деревьев, реализующих $\gamma_{\max}$, и классом деревьев, реализующих максимум $|\mathrm{H}|$ (что верно и для класса деревьев, реализующих $\alpha_{\min}$).

Теорема 5.3.3. *Пусть $\widetilde{\mathbf{d}}$ — сокращённая n-последовательность степеней $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Пусть $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$ — класс деревьев $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, реализующих максимум $|\mathrm{H}(T)|$, а $\mathcal{T}_{\gamma}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$ — класс деревьев $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, реализующих $\gamma_{\max}$. Тогда эти классы соотносятся следующим образом:*

- $\mathcal{T}_{\gamma}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$ *при $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \leqslant 1$, а также при условии $\forall i\ d_i = 2$;*
- $\mathcal{T}_{\gamma}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$, *когда одновременно выполнены все условия: $n_{\geqslant 3}(\widetilde{\mathbf{d}}) > 0$, $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 3$, $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \equiv 0,\, 1 \pmod 3$;*
- $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subsetneq \mathcal{T}_{\gamma}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}})$ *при $n_{\geqslant 3}(\widetilde{\mathbf{d}}) > 0$ и $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) = 2$, а также в случае, когда выполнены все условия: $l(\widetilde{\mathbf{d}}) = 3$, $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 5$ и $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \equiv 2 \pmod 3$;*
- $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\gamma}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \neq \varnothing$ *и $\mathcal{T}_{\gamma}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\max}(\widetilde{\mathbf{d}}) \neq \varnothing$ во всех остальных случаях, т. е. когда одновременно выполнены условия $l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 4$, $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant 5$ и $n - l(\widetilde{\mathbf{d}}) \equiv 2 \pmod 3$.*

В **четвёртом подразделе** показывается, что множество всех реализуемых деревьями класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ значений γ является отрезком натуральных чисел с концами в соответствующих вычисленных в предыдущих подразделах экстремальных точках $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$.

Теорема 5.4.1 *Пусть $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, \ldots, d_n)$, где $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Положим $\gamma_{\min} := \min_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \gamma(T)$; $\gamma_{\max} := \max_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}} \gamma(T)$. Тогда для любого натурального числа γ из промежутка $\gamma_{\min} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_{\max}$ существует реализующее его дерево T из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, то есть такое, что $\gamma(T) = \gamma$.*

В доказательстве теоремы 5.4.1 задействован тот же метод, основанный на X- и Y-операциях, что был использован для реализации соответствующего числу α отрезка в предыдущем разделе.

Результаты данного раздела были опубликованы в работе [28].

Шестой раздел

Данный раздел посвящён обратной задаче минимизации для тройки ($\mathcal{G}^c$, d, γ_c) (напоминаем, что $\mathcal{G}^c$ — класс связных графов) в тех случаях, когда степенная последовательность d является "почти" регулярной. Класс связных графов, имеющих степенную последовательность $\mathbf{d}$, обозначим как $\mathcal{G}^c_{\mathbf{d}}$. Тогда соответствующая обратная задача минимизации заключается в нахождении величины

$$\gamma_c^{\min}(\mathcal{G}^c_{\mathbf{d}}) := \min_{G \in \mathcal{G}^c_{\mathbf{d}}} \{\gamma_c(G)\}.$$

Приведём результаты, полученные в **первом подразделе**. Упомянутая ранее нижняя оценка для γ_c, обозначенная в работе [35] как ord_c, влечёт для невозрастающей степенной последовательности $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ связного графа G при $n \geqslant 3$ оценку

$$\gamma_c(G) \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{d_1 - 1} \right\rceil.$$

Показывается, что оценка оказывается точна по крайней мере в следующих случаях.

Теорема 6.1.3. *Пусть дана n-последовательность $\mathbf{d}$ длины $n \geqslant 3$, состоящая из чисел $k = d_1 = d_2 = \cdots = d_m > d_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant d_n$ с чётной суммой, и пусть $m \geqslant \lceil \frac{n-2}{k-1} \rceil + k$. Тогда класс $\mathcal{G}^c_{\mathbf{d}}$ не пуст и для него выполнено*

$$\gamma_c^{\min}(\mathcal{G}^c_{\mathbf{d}}) = \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil.$$

Естественным следствием теоремы 6.1.3 является результат её применения к последовательностям регулярных графов. Обозначив за $\mathcal{R}^c_{n,k}$ класс связных k-регулярных графов на n вершинах, получаем

Следствие 6.1.2. *При $2 \leqslant k \leqslant n-1$ и чётном произведении $k \cdot n$ класс $\mathcal{R}^c_{n,k}$ не пуст и для него*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{n,k}\right) = \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil.$$

Во **втором подразделе** задача минимизации рассматривается для *бирегулярных графов* с листьями, т. е. графов, в которых множество вершин разбивается на два непустых подмножества, одно из которых — листья, а другое состоит из вершин некоторой фиксированной степени $k > 1$. Через $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ будем обозначать класс связных бирегулярных графов с ровно m вершинами степени k и l листьями.

Значение $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right)$ для случаев вида $m \geqslant \lceil \frac{m+l-2}{k-1} \rceil + k$ легко считается из теоремы 6.1.3. Данная величина легко вычисляется и в следующем случае.

Утверждение 6.2.1. *Пусть класс $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ не пуст, а $m \leqslant k$. Тогда для любого графа $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ имеем $\gamma_c(G) = m$.*

Для оставшихся случаев приводится нижняя оценка на величину $\gamma_c^{\min}$ (теорема 6.2.2), а также устанавливается, что она всегда достижима при $m = k+1$ (следует из теоремы 6.2.1).

Теорема 6.2.1. *Пусть даны целые положительные числа k, l, где l чётно. Пусть t — такое натуральное число, что $t(t-1)+2 \leqslant l \leqslant t(t+1)$. Тогда класс $\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}$ не пуст тогда и только тогда, когда $k \geqslant t+1$, причём для него выполнено равенство*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) = t+2.$$

Теорема 6.2.2. *Рассмотрим непустой класс $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$, где $q := \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil$, $m = k+q-a$, $1 \leqslant a \leqslant q-1$. Пусть $m+l-2 = (k-1)q - r$, $0 \leqslant r \leqslant k-2$. Тогда выполнено неравенство*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) \geqslant q + \sqrt{a(k-1) - r + \frac{1}{4}} - a + \frac{1}{2}.$$

В конце подраздела рассматриваются особенности поведения последовательности величин $\left\{\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ (несколько первых членов могут быть не определены) в точке m (и после неё), удовлетворяющей равенству $m = \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil + k - 1$, при фиксированных чётных значениях k и l.

Результаты раздела опубликованы автором в работе [36].

Приложение A

В приложении рассматриваются возможности по оптимизации рассмотренных ранее процессов построения последовательностей деревьев, реализующих соответственно отрезки $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ и $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$. Полученные в результате такой оптимизации последовательности обладают свойством *строгого* убывания/возрастания на них требуемого инварианта. Там же введена и использована дополнительная операция по перестроению графа, обобщающая Y-операции — *операция связывания цепей.*

Заключение

В настоящей диссертационной работе были рассмотрены и решены несколько обратных задач, связанных с независимыми и доминирующими множествами.

Была рассмотрена обратная задача минимизации для тройки $(\mathcal{B},\, \iota_m,\, \nu)$. В работе приводятся полученные асимптотические оценки на наименьшее число вершин, требующееся для двудольной реализации предписанного числа максимальных независимых множеств.

Для произвольного класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ деревьев с фиксированной непустой сокращённой степенной последовательностью $\widetilde{\mathbf{d}}$ были полностью решены обратные задачи существования и построения на парах $(\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}},\, \alpha)$ и $(\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}},\, \gamma)$. Множеством значений инварианта (α или γ), реализуемых деревьями такого класса, является отрезок натуральных чисел. Были приведены соответствующие последовательности деревьев, получающихся друг из друга с помощью простых локальных операций, реализующие соответствующие отрезки. Кроме того, было подробно рассмотрено, как соотносятся между собой множество деревьев с наименьшим значением числа независимости, множество деревьев с наибольшим значением числа доминирования и множество деревьев с максимально возможным числом вершин, смежных с листьями, в зависимости от вида степенной последовательности, определяющей класс деревьев. На примере построенных последовательностей деревьев было показано, что увеличение числа вершин, смежных с листьями, а также группировка проходных вершин в цепи, длины которых удовлетворяют определённым сравнениям по модулю (по модулю 2 для независимости и по модулю 3 для доминирования), напрямую влияет на рост рассмотренных инвариантов.

Также была рассмотрена обратная задача минимизации для тройки $(\mathcal{G}^c,\, d,\, \gamma_c)$. Для классов связных графов с фиксированными степенными последовательностями, “близкими” к регулярной, были получены точные нижние оценки числа связного доминирования. Частным случаем такого результата является полученная точная нижняя оценка числа γ_c на классах связных регулярных графов. Для классов бирегулярных графов с листьями в определённых случаях были получены точные нижние оценки γ_c, для оставшихся видов таких классов была получена нижняя оценка, которая в ряде случаев бывает достижима.

Представленная диссертационная работа допускает множество задач, которые могли бы служить продолжением настоящего исследования. Так, можно рассмотреть вопросы уточнения асимптотической оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota_m,\nu}(n)$, в том числе, используя ту же технику с подбором специального набора графов Γ, на основе которого индуктивно реализуются все натуральные числа, начиная с некоторого момента. Используя схожую или какую-либо другую технику, можно рассмотреть вопрос уточнения асимптотической оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\nu}(n)$.

Продолжением работы, затрагивающей реализацию чисел α и γ деревьями произвольного класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, может служить изучение вопросов вычислительной сложности предложенных алгоритмов построения последовательностей деревьев, реализующих соответствующие отрезки $[\alpha_{\min},\, \alpha_{\max}]$ и $[\gamma_{\min},\, \gamma_{\max}]$ (можно оценить требуемые время и память для построения всей последовательности деревьев в зависимости от предполагаемых формата исходных данных и формата реализации самого алгоритма).

Естественным непосредственным продолжением настоящего исследования мы видим также решение следующих задач, связанных с числом связного доминирования γ_c: изучение вопросов достижимости предложенной нижней оценки числа γ_c на классах связных бирегулярных графов с листьями; получение точной нижней оценки γ_c для всех возможных таких классов; изучение поведения рассмотренных последовательностей $\left\{\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ до “особой” точки m. Более общей задачей, затрагивающей число связного доминирования и продолжающей начатое исследование, является задача получения точной нижней оценки γ_c для произвольно выбранного класса связных графов с фиксированной степенной последовательностью.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю к. ф.-м. н., доц. Александру Борисовичу Дайняку за интересный выбор тем, непрерывную поддержку в ходе всего исследования и множество ценных советов и рекомендаций, способствовавших продвижению работы.

Список публикаций автора по теме исследования

В изданиях из *перечня Министерства науки и высшего образования РФ рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание учёной степени кандидата наук*, имеется 3 публикации по теме исследования, в которых представлены основные результаты диссертационной работы: [14, 28, 36]. Из них [14] написана в соавторстве. Работы [14] и [28] опубликованы в журналах, индексируемых базой данных Scopus. Работа [36] опубликована в журнале, индексируемом RSCI и входящем в перечень ВАК. Все результаты настоящей диссертационной работы, перечисленные в списке положений, выносимых на защиту, получены лично соискателем.

Список литературы

[1] *Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Slater P.J.* Fundamentals of Domination in Graphs. — New York: Marcel Dekker, Inc., Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1998. — 455 P.

[2] *Визинг В.Г.* Некоторые нерешённые задачи в теории графов // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23. — С. 117–134.

[3] *Havel V.* A remark on the existence of finite graphs (Czech.) // Čas. Pěstování Mat. — 1955. — Vol. 80. — P. 477–480.

[4] *Hakimi S.L.* On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph // SIAM J. Appl. Math. — 1962. — Vol. 10. — P. 496–506.

[5] *Erdős P., Gallai T.* Gráfok előírt fokszámú pontokkal // Matematikai Lapok. — 1960. — Vol. 11. — P. 264—274.

[6] *Linek V.* Bipartite graphs can have any number of independent sets // Discrete Mathematics. — 1989. — Vol. 76, N. 2. — P. 131–136.

[7] *Law H.-F.* On the number of independent sets in a tree // Electr. J. Comb. — 2010. — Vol. 17. — P. N18.

[8] *Wagner S.G.* Almost all trees have an even number of independent sets // Electron. J. Combin. — 2009. — Vol. 16, N. 1. — P. R93.

[9] *Miller R.E., Muller D.E.* The problem of maximum consistent subsets // IBM Research Report RC-240., J. T. Watson Research Center, Yorktown Heights, N. Y. — 1960.

[10] *Moon J., Moser L.* On cliques in graphs // Israel Journal of Mathematics. — 1965. — Vol. 3, N. 1. — P. 23–28.

[11] *Jou M.-J., Chang G.J., Lin C.C., Ma T.-H.* A finiteness theorem for maximal independent sets // J. Graphs and Combinatorics. — 1996. — Vol. 12. — P. 321–326.

[12] *Талецкий Д.С., Малышев Д.С.* Деревья без листьев-дубликатов с наименьшим количеством максимальных независимых множеств // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 4. — С. 115–133.

[13] *Liu J.* Maximal independent sets in bipartite graphs // Journal of Graph Theory. — 1993. — Vol. 17, N. 4. — P. 495–507.

[14] *Дайняк А.Б., Курносов А.Д.* Об одной экстремальной обратной задаче теории графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, № 1. — С. 19–31.

[15] *Hakimi S.L.* On Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Linear Graph II. Uniqueness // SIAM J. Appl. Math. — 1963. — Vol. 11, N. 1. — P. 135–147.

[16] *Зыков А.А.* Основы теории графов. — М.: Наука. Физматлит, 1987. — 384 С.

[17] *Gale D.* A theorem on flows in networks // Pacific J. Math. — 1957. — Vol. 7, N. 2. — P. 1073–1082.

[18] *Ryser H.J.* Combinatorial properties of matrices of zeros and ones // Canad. J. Math. — 1957. — Vol. 9. — P. 371–377.

[19] *Favaron O., Mahéo M., Saclé J.* On the residue of a graph // J. Graph Theory. — 1991. — Vol. 15, N. 1. — P.39–64.

[20] *Griggs R., Kleitman D.* Independence and the Havel-Hakimi Residue // Discrete Math. — 1994. — Vol. 127. — P. 209–212.

[21] *Caro Y.* New results on the independence number // Technical Report, Tel Aviv University. — 1979.

[22] *Wei V.K.* A lower bound on the stability number of a simple graph // Bell Laboratories Technical Memorandum, N. 81-11217-9, Murray Hill, NJ. — 1981.

[23] *Gentner M., Henning M., Rautenbach D.* Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence // Discrete Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 206. — P. 181–187.

[24] *Pepper R.* On the Annihilation Number of a Graph // Recent advances in applied mathematics and computational and information sciences. — 2009. — Vol. 1. — P. 217–220.

[25] *Pepper R.* Binding Independence // Ph.D. Dissertation, University of Houston. — 2004.

[26] *Gentner M., Henning M., Rautenbach D.* Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence // Journal of Graph Theory. — 2018. — Vol. 88, N. 1. — P. 131–145.

[27] *Favaron O.* A bound on the independent domination number of a tree // Vishwa International Journal of Graph Theory. — 1992. — Vol. 1, N. 1. — P. 19–27.

[28] *Курносов А.Д.* Множество всех возможных значений числа доминирования в деревьях с заданной степенной последовательностью // Дискретный анализ и исследование операций. 2020. — Т. 27, № 1. — С. 61–87.

[29] *Lemanska M.* Lower bound on the domination number of a tree // Discussiones Mathematicae, Graph Theory. — 2004. — Vol. 24. — P. 165–169.

[30] *Slater P. J.* Locating dominating sets and locating-dominating sets // Graph Theory, Combinatorics and Applications (Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, Western Michigan University, Kalamazoo, USA, June 1–5, 1992). — New York: Wiley, 1995. — Vol. 2. — P. 1073–1079.

[31] *Kleitman D.J., West D.B.* Spanning trees with many leaves // SIAM J. Discrete Math. — 1991. — Vol. 4, N. 1. — P. 99–106.

[32] *Griggs J.R., Wu M.* Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5 // Discrete Mathematics. — 1992. — Vol. 104, N. 2. — P. 167–183.

[33] *Симарова Е.Н.* Оценка количества листьев в остовном дереве связного графа с минимальной степенью 6 // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 464. — С. 112—131.

[34] *Caro Y., West D.B., Yuster R.* Connected domination and spanning trees with many leaves // SIAM J. Discrete Math. — 2000. — Vol. 13, N. 2. — P. 202–211.

[35] *Desormeaux W.J., Haynes T.W., Henning M.A.* Bounds on the connected domination number of a graph // Discrete Appl. Math. — 2013. — Vol. 161, N. 18. — P. 2925–2931.

[36] *Курносов А.Д.* О нижней оценке числа связного доминирования в графах с фиксированной степенной последовательностью // Труды МФТИ. — 2020. — Т. 12, № 2. — С. 40–54.

[37] *Курносов А.Д., Дайняк А.Б.* Независимые множества в деревьях с заданными степенными последовательностями // Труды IX Международной конференции «Дискретные модели

в теории управляющих систем», Красновидово, Московская область, 20–22 мая, 2015. — С. 141–142.