Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

Институт естественных наук и математики

На правах рукописи

Эдмонд В. Х. Ли

ВКЛАД В ТЕОРИЮ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
доктора математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор
М. В. Волков

Москва – 2020

1 Общая характеристика диссертации

Актуальность темы диссертации

Многообразие — класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфизмов, подалгебр и прямых произведений. По теореме Биркгофа [18], многообразия — это в точности классы алгебр, заданные тождествами. С 1960-х годов систематически и интенсивно изучаются многообразия полугрупп, которые, как известно, включают в себя многообразия периодических групп. Опубликован целый ряд обзоров, посвященных различным аспектам изучения многообразий полугрупп: эквациональные свойства и проблема конечной базируемости [10, 114, 115], структурные свойства полугрупп в многообразиях [11], решетки многообразий [1, 9, 25, 111], алгоритмические проблемы [44]. Большое внимание уделяется также многообразиям полугрупп с дополнительными операциями (см., например, монографии и обзоры по многообразиям групп [29, 79], инволютивных полугрупп [20], инверсных полугрупп [83] и вполне регулярных полугрупп [84]).

Существует три свойства конечности, исследование которых очень популярно в теории многообразий. Многообразие называют

- *конечно базируемым*, если его эквациональная теория конечно аксиоматизируема;
- *конечно порожденным*, если оно порождается конечной алгеброй;
- *малым*, если оно имеет конечное число подмногообразий.

Как заметил Сапир [98], указанные три свойства независимы в том смысле, что многообразие, удовлетворяющее любым двум из этих свойств, не обязано удовлетворять третьему из них. Многообразие, удовлетворяющее всем трем указанным выше свойствам, принято называть *кроссовым*.

Диссертация состоит из трех частей (части I, II и III), посвященных многообразиям полугрупп, инволютивных полугрупп и моноидов соответственно. Чтобы различать эти три типа многообразий, через $\mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\mathfrak{C}$, $\mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\mathfrak{C}$ и $\mathsf{V}_{\mathsf{mon}}\mathfrak{C}$ будем обозначать, соответственно, многообразие полугрупп, инволютивных полугрупп и моноидов, порожденное классом алгебр соответсвующего типа $\mathfrak{C}$. Через $\mathfrak{L}(\mathbf{X})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{X}$. Результаты диссертации можно условно разделить на следующие четыре группы:

1) результаты о многообразиях Риса–Сушкевича;
2) результаты об апериодических моноидах с центральными идемпотентами;
3) достаточные условия наличия у многообразий эквациональных свойств;
4) результаты об инволютивных полугруппах.

Рассмотрим подробно каждую из этих четырех групп.

1) Многообразия Риса–Сушкевича. Класс вполне 0-простых полугрупп — один из первых классов полугрупп, изучавшихся еще в пионерских работах Риса [91] и Сушкевича [109]. Он является одним из наиболее важных классов полугрупп. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\mathbf{RS}_n$ многообразие, порожденное всеми вполне 0-простыми полугруппами над группами экспоненты n. Следуя Кублановскому [6], полугруппы из многообразия $\mathbf{RS}_n$ будем называть *полугруппами Риса–Сушкевича*, а подмногообразия многообразия $\mathbf{RS}_n$ — *многообразиями Риса–Сушкевича*. В работе [32] получен очень важный результат, устанавливающий конечную базируемость многообразия $\mathbf{RS}_n$. Однако существует большое число примеров бесконечно базируемых многообразий Риса–Сушкевича [17, 42, 45, 67, 74, 75]. С момента публикации статьи [32] многообразиям Риса–Сушкевича уделялось много внимания. Результаты в этом направлении получены Волковым, Кублановским, Ли и Райли (см., например, [6, 47–51, 66, 67, 69, 70, 92–97, 117]).

Большим препятствием при изучении многообразий Риса–Сушкевича (и их уникальной особенностью) является тот факт, что не все такие многообразия порождаются вполне простыми или вполне 0-простыми полугруппами, что делает невозможным применение при их рассмотрении теоремы Риса. Многообразия Риса–Сушкевича, порождающиеся вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами, принято называть *точными*. Несмотря на то, что точные многообразия Риса–Сушкевича полностью охарактеризованы [94], задача полного описания решетки $\mathfrak{L}(\mathbf{RS}_n)$ кажется безнадежной. Эта задача крайне трудна даже в самом простом случае $n = 1$: только 13 подмногообразий многообразия $\mathbf{RS}_1$ точны [94], а из результатов Верникова и Волкова [4] следует, что многообразие $\mathbf{RS}_1$ *конечно универсально*, т.е. в решетку $\mathfrak{L}(\mathbf{RS}_1)$ вкладывается любая конечная решетка. Таким образом, следующие открытые проблемы имеют фундаментальное значение, особенно учитывая, что не известно ни одного примера бесконечно базируемого подмногообразия в $\mathbf{RS}_1$.

Проблема 1. Исследовать решетку $\mathfrak{L}(\mathbf{RS}_1)$ и описать принадлежащие ей конечно базируемые, конечно порожденные и малые многообразия.

Проблема 2 ([35, вопрос 4.8])**.** Содержит ли многообразие $\mathbf{RS}_1$ континуум подмногообразий?

Многообразие $\mathbf{RS}_1$ содержит только тривиальные группы. Многообразия с таким свойством называют *апериодическими*.

2) Апериодические моноиды с центральными идемпотентами. На протяжении многих лет многообразиям моноидов уделялось существенно меньше внимания по сравнению с многообразиями полугрупп. В течение нескольких десятилетий, возможно, наиболее изученными оставались многообразие $\mathbb{C}\mathrm{OM}$ всех коммутативных моноидов [33] и многообразие $\mathbb{I}\mathrm{DEM}$ всех идемпотентных моноидов [118]. Ситуация изменилась с середины 1990-х годов, когда стало популярным изучение фактор-моноидов Риса свободных моноидов. Для произвольного множества слов $\mathscr{W}$ над некоторым счетным алфавитом $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}$ фактор-моноид Риса свободного моноида $\mathscr{A}^*$ по идеалу всех слов, не являющихся подсловами слов из $\mathscr{W}$, и положим $\mathbb{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W} = \mathsf{V}_{\mathsf{mon}}\{\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}\}$.

Фактор-моноиды Риса свободных моноидов впервые появились еще в конце 1960-х годов в статье Перкинса [81]: рассматриваемый там моноид

$$\mathcal{P}_{25} = \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyxy,\, xyzyx,\, xzyxy,\, x^2z\}$$

порядка 25 доставляет один из первых опубликованных примеров бесконечно базируемой конечной полугруппы. Однако только на рубеже тысячелетий в пионерских работах Джексона [35, 38] стали рассматриваться многообразия, порождающиеся такими моноидами. Наиболее заметные результаты связаны с моноидом $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyx\}$: многообразие полугрупп $\mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\big\{\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyx\}\big\}$ имеет континуум подмногообразий [35], в то время как многообразие моноидов $\mathsf{V}_{\mathsf{mon}}\big\{\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyx\}\big\}$ содержит только пять подмногообразий [38]. Кроме того, в [38] доказано, что многообразия

$$\mathbb{J}_1 = \mathbb{R}_{\mathcal{Q}}\{xhxyty\} \quad \text{и} \quad \mathbb{J}_2 = \mathbb{R}_{\mathcal{Q}}\{xhytxy,\, xyhxty\}$$

являются *предельными*, т.е. минимальными бесконечно базируемыми многообразиями. Это первые опубликованные примеры предельных многообразий моноидов. Решетки их подмногообразий изображены на рис. 1, где через $\mathbf{0}$ обозначено тривиальное многообразие моноидов.

Поскольку фактор-моноиды Риса свободных моноидов принадлежат классу $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$ всех апериодических моноидов с центральными идемпотентами, Джексон в [38, Вопрос 1] поставил следующий вопрос.

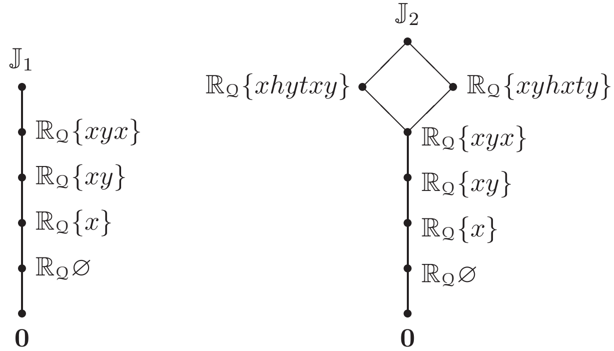

Рис. 1: решетки $\mathfrak{L}(\mathbb{J}_1)$ и $\mathfrak{L}(\mathbb{J}_2)$.

Проблема 3. Являются ли $\mathbb{J}_1$ и $\mathbb{J}_2$ единственными конечно порожденными предельными многообразиями в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$?

Из рис. 1 и предельности многообразий $\mathbb{J}_1$ и $\mathbb{J}_2$ вытекает, что эти многообразия являются *почти кроссовыми*, т.е. минимальными некроссовыми многообразиями. Поэтому актуальна следующая проблема.

Проблема 4. Являются ли $\mathbb{J}_1$ и $\mathbb{J}_2$ единственными почти кроссовыми многообразиями в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$?

При рассмотрении слов, которые появляются на рис. 1, может создаться впечатление, что с увеличением сложности множества слов $\mathscr{W}$ возрастает сложность многообразия $\mathbb{R}_{\mathfrak{Q}}\mathscr{W}$. Такая тенденция прослеживается во многих случаях, но не всегда. Например, слово $xyxy$, несомненно, проще слова $xhytxy$, однако многообразие $\mathbb{R}_{\mathfrak{Q}}\{xyxy\}$ бесконечно базируемо [101] и имеет континуум подмногообразий [121], а многообразие $\mathbb{R}_{\mathfrak{Q}}\{xhytxy\}$ кроссово.

3) Достаточные условия для эквациональных свойств. Поскольку алгебра удовлетворяет тем же тождествам, что и многообразие, ею порожденное, можно без двусмысленности называть алгебру *конечно базируемой*, если она порождает конечно базируемое многообразие. Конечные алгебры целого ряда типов конечно базируемы. Это относится, в частности, к группам [80], ассоциативным и Лиевым кольцам ([7, 46] и [2], соответственно), решеткам [76]. Однако, как отмечалось выше, не все конечные полугруппы конечно базируемы.

Одной из наиболее известных проблем универсальной алгебры является *проблема конечной базируемости* — исследование алгебр на предмет их конечной базируемости. Будучи весьма естественной сама по себе, эта проблема обнаруживает ряд интересных и порой неожиданных связей с другими вопросами, важными как с теоретической, так и с прикладной точки зрения, например, с практически реализуемыми алгоритмами проверки вхождения в некоторые классы формальных языков [13] и классическими теоретико-числовыми гипотезами — такими, как гипотеза о существовании бесконечного числа простых чисел-близнецов, гипотеза Гольдбаха, гипотеза о существовании нечетного совершенного числа [82]. Алгоритмическая версия проблемы конечной базируемости, известная как *проблема конечной базируемости Тарского*, была поставлена Тарским [110] как задача разрешимости: существует ли алгоритм, который для данной конечной алгебры определяет, конечно базируема она или нет. В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен [77], однако для конечных полугрупп эта проблема остается открытой. Следующая ослабленная версия полугруппового варианта этой проблемы была предложена Сапиром [100].

Проблема 5 ([100, проблема 3.10.10]; см. также [10, вопрос 7.1] и [115, проблема 4.1])**.** Существует ли алгоритм, который для данного конечного множества слов $\mathscr{W}$ определяет, конечно базируем моноид $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}$ или нет?

Очевидно, что из отрицательного решения проблемы 5 следует отрицательное решение проблемы конечной базируемости Тарского для полугрупп.

На протяжении многих лет большое внимание уделяется изучению свойства бесконечной базируемости конечных полугрупп. Обильную информацию на эту тему можно найти в обзорах Волкова [114, 115]. Общий подход здесь состоит в нахождении достаточных условий бесконечной базируемости. Одно из таких условий было найдено Перкинсом [81]. Используя это условие, он доказал бесконечную базируемость моноида $\mathcal{B}_2^1$, который получается присоединением единицы к полугруппе Брандта

$$\mathcal{B}_2 = \left\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\middle|\, \mathsf{a}^2 = \mathsf{b}^2 = 0,\ \mathsf{aba} = \mathsf{a},\ \mathsf{bab} = \mathsf{b} \right\rangle,$$

и моноида $\mathcal{P}_{25}$. С тех пор было получено много достаточных условий бесконечной базируемости. Некоторые из них можно найти в работах [14, 19, 34, 36–39, 72, 73, 78, 101, 102, 104–106, 120]. Указанные результаты дают много примеров бесконечно базируемых конечных полугрупп и фактор-моноидов Риса свободных моноидов.

Что касается методов доказательства конечной базируемости тех или иных конечных полугрупп, то, несмотря на годы работы в этом направлении, ее итогом остается «набор изолированных теорем, а не единая теория» [115, стр. 190]. Один из подходов состоит в изучении *наследственно конечно базируемых* многообразий, т.е. многообразий, все подмногообразия которых конечно базируемы. Если система тождеств Σ задает наследственно конечно базируемое многообразие, то любая полугруппа, удовлетворяющая Σ, конечно базируема. Такую систему тождеств Σ принято называть *наследственно конечно базируемой*. Тождество называют *наследственно конечно базируемым*, если система тождеств, состоящая из одного этого тождества, наследственно конечно базируема. Поскольку многообразия коммутативных и идемпотентных полугрупп наследственно конечно базируемы (в первом случае это доказано в [81], а во втором — в [3,27,28]), тождества $xy \approx yx$ и $x^2 \approx x$ также обладают этим свойством.

Изучение наследственно конечно базируемых тождеств было инициировано Поллаком в 1970-х годах, и на протяжении десяти лет он внес огромный вклад в их классификацию [85–89]. За более подробной информацией о достижениях Поллака при изучении наследственно конечно базируемых тождеств и многообразий полугрупп в целом, мы отсылаем к обзору его работ [116].

Одним из типов тождеств, которые еще не полностью классифицированы, остаются *полупростые* тождества, т.е. тождества вида $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, в которых в слово $\mathbf{u}$ все переменные входят не более одного раза, а в слово $\mathbf{v}$ одна переменная входит ровно два раза, а все остальные — не более одного раза.

Проблема 6 ([90]). Какие из полупростых тождеств наследственно конечно базируемы?

4) Инволютивные полугруппы. Унарная операция $x \mapsto x^*$ на полугруппе S называется *инволюцией*, если S удовлетворяет тождествам

$$(x^*)^* \approx x, \quad (xy)^* \approx y^* x^*. \tag{inv}$$

Унарную полугруппу $\langle S, {}^* \rangle$ принято называть *инволютивной*, если операция * является инволюцией. Инволютивная полугруппа $\langle S, {}^{-1} \rangle$ называется *инверсной*, если она удовлетворяет тождествам $xx^{-1}x \approx x$ и $xx^{-1}yy^{-1} \approx yy^{-1}xx^{-1}$. Класс инверсных полугрупп включает в себя все группы. Примером инволютивной, но не инверсной полугруппы могут служить матричные полугруппы с операцией транспозиции.

Один из основных мотивов изучения инволютивных полугрупп, как и в случае обычных полугрупп, состоит в том, что они являются естественным обобщением групп; наличие же инволюции позволяет лучше имитировать присущую группам внутреннюю симметрию. Парадоксально, но инволютивная полугруппа

$\langle S, {}^* \rangle$ и ее полугрупповой *редукт* S могут обладать различными эквациональными свойствами, например, с точки зрения конечной базируемости. Как заметил Волков [115, § 2], бесконечные инволютивные полугруппы, подтверждающие этот тезис, были известны давно. Однако конечные бесконечно базируемые инволютивные полугруппы, полугрупповые редукты которых конечно базируемы, были обнаружены совсем недавно [40, 63], а конечные инволютивные полугруппы с противоположным свойством, как отмечается в [15, § 1], неизвестны. Таким образом, следующая открытая проблема представляет фундаментальный интерес.

Проблема 7. Существуют ли конечные конечно базируемые инволютивные полугруппы, полугрупповые редукты которых бесконечно базируемы?

Возможна ситуация, когда полугруппа является редуктом двух инволютивных полугрупп с различными эквациональными свойствами. Простым примером такой полугруппы является моноид Брандта $\mathcal{B}_2^1$, на котором можно определить две инволюции: операцию $x \mapsto x^*$, которая переставляет местами элементы ab и ba, оставляя на месте все остальные элементы, и операцию $x \mapsto x^{-1}$, меняющую местами элементы a и b и оставляющую на месте другие элементы. Инволютивная полугруппа $\langle \mathcal{B}_2^1, {}^* \rangle$ *существенно бесконечно базируема* [16], т.е. любое локально конечное многообразие, ее содержащее, бесконечно базируемо. Что касается инволютивной полугруппы $\langle \mathcal{B}_2^1, {}^{-1} \rangle$, которая является также инверсной полугруппой, то она не является существенно бесконечно базируемой [99]. Таким образом, естественным представляется вопрос о существовании других, более экстремальных примеров.

Проблема 8. Существуют ли две инволютивные полугруппы, имеющие один и тот же полугрупповой редукт, одна из которых конечно базируема, а другая бесконечно базируема?

Заметим, что инверсный моноид Брандта $\langle \mathcal{B}_2^1, {}^{-1} \rangle$ не только бесконечно базируем [5], но и не имеет неприводимого базиса тождеств [41]. При этом не известно ни одной конечной инволютивной полугруппы с бесконечным неприводимым базисом тождеств. Таким образом, актуальна следующая проблема.

Проблема 9. Существует ли конечная инволютивная полугруппа с бесконечным неприводимым базисом тождеств?

Решетки $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$ всех многообразий полугрупп и $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ всех многообразий инволютивных полугрупп изучаются с 1960-х и 1970-х годов соответственно. Тем не менее, о строении решетки $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ известно существенно меньше, чем о строении решетки $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$. Однако, несмотря на то, что изучено только несколько небольших фрагментов решетки $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$, полученных результатов достаточно, чтобы продемонстрировать, что решетки $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ и $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$ очень не похожи друг на друга. Например, многообразие $\mathbf{I}\textsc{dem}^*$ всех идемпотентных инволютивных полугрупп не является почти кроссовым [12], а решетка $\mathfrak{L}(\mathbf{I}\textsc{dem}^*)$ подмногообразий этого многообразия немодулярна и имеет бесконечную ширину [21, 22]. Многообразие же $\mathbf{I}\textsc{dem}$ всех идемпотентных полугрупп, напротив, является почти кроссовым, а решетка $\mathfrak{L}(\mathbf{I}\textsc{dem})$ его подмногообразий дистрибутивна и имеет ширину 3 [3, 27, 28]. Сравнивая результаты работ [23, 26] с одной стороны и [43] с другой, можно заметить и другие различия между решетками $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ и $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$, связанные с атомами обсуждаемых решеток. За дополнительной информацией о решетке $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ мы отсылаем к работе [20], а о решетке $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$ — к обзорам [1, 9, 25, 111].

Цели диссертации

Диссертация посвящена многообразиям полугрупп, инволютивных полугрупп и моноидов. Основной целью диссертации является исследование

- эквациональных свойств, таких, как наличие или отсутствие конечного, неприводимого или бесконечного неприводимого базиса тождеств;
- свойств, связанных с решетками многообразий, таких, как свойства быть конечно порожденным или малым многообразием;
- других, более сильных свойств многообразий, таких, как свойства быть наследственно конечно базируемым, существенно бесконечно порожденным или кроссовым многообразием;
- многообразий, минимальных по отношению к некоторым свойствам, таких, как предельные и почти кроссовы многообразия;
- строения решеток подмногообразий;
- взаимоотношений между инволютивными полугруппами и их полугрупповыми редуктами касательно различных эквациональных свойств;
- различий между решетками $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ и $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$.

Более конкретной целью диссертации является полное решение проблем 1–4 и 6–9, а также некоторой ослабленной версии проблемы 5.

Методы исследования

Большинство результатов диссертации связано с эквациональными свойствами. Поэтому синтаксический метод — непосредственные манипуляции с тождествами — используется в ней повсеместно. Стандартный способ доказательства конечной базируемости алгебры состоит в явном вычислении ее базиса тождедств. Этот метод используется также для доказательства существования бесконечного неприводимого базиса тождеств или отсутствия неприводимого базиса тождеств. С другой стороны, чтобы показать, что алгебра бесконечно базируема, достаточно показать, что в ней «длинные» тождества невыводимы из «коротких». При этом нет необходимости явного указания ее базиса тождеств. Чтобы показать, что многообразие удовлетворяет более сильным свойствам, таким как наследственная конечная базируемость или кроссовость, зачастую сначала требуется разбить решетку его подмногообразий на интервалы.

Абсолютное большинство доказательств диссертации самодостаточно. Тем не менее, в нескольких случаях используются известные результаты, некоторые из которых не являются синтаксическими, например,

- результат автора и Волкова об идемпотентно разделимых полугруппах [69] и результат Верникова и Волкова о минимальном конечно универсальном многообразии [4] имеют ключевое значение при изучении апериодических многообразий Риса–Сушкевича;

- характеризация Страубинга конечных *нильпотентных моноидов* (т.е. таких конечных моноидов M с единицей 1, что $M \setminus \{1\}$ — нильпотентная полугруппа) [108] играет важную роль при описании кроссовых и существенно бесконечно порожденных многообразий в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$;

- для проверки наследственной конечной базируемости *надкоммутативного* многообразий моноидов (т.е. многообразия, содержащего многообразие всех коммутативных моноидов) требуется достаточное условие конечной базируемости, полученное Волковым [113];

- исследование Волкова о конечной базируемости прямых произведений произвольных полугрупп с нильпотентными полугруппами [112] играет ключевую роль в построении поправимых полугрупп (полугруппа S называется *поправимой*, если она сама бесконечно базируема, но моноид S^1 конечно базируем).

Научная новизна

Ниже перечислены основные новые результаты диссертации.

Часть I (многообразия полугрупп):

- каждое апериодическое многообразие Риса–Сушкевича конечно базируемо [122];
- характеризация кроссовых и конечно порожденных апериодических многообразий Риса–Сушкевича [123];
- полное описание полупростых наследственно конечно базируемых тождеств [61];
- новое достаточное условие бесконечной базируемости полугрупп [124];
- достаточное условие отсутствия неприводимого базиса тождеств у бесконечно базируемой конечной алгебры произвольного типа [129].

Часть II (инволютивные полугруппы):

- первые примеры конечно базируемых конечных инволютивных полугрупп, полугрупповые редукты которых бесконечно базируемы [62];
- первые примеры конечных инволютивных полугрупп с бесконечным неприводимым базисом тождеств [127];

- первые примеры троек конечных инволютивных полугрупп, имеющих один и тот же полугрупповой редукт, таких, что первая из них конечно базируема, вторая имеет бесконечный неприводимый базис тождеств, а третья не имеет такого базиса [129];
- скрученная инволютивная полугруппа бесконечно базируема, если бесконечно базируем ее полугрупповой редукт [128].

Часть III (многообразия моноидов):

- существование и единственность двух максимальных наследственно конечно базируемых надкоммутативных многообразий моноидов [125];
- характеризация наследственно конечно базируемых многообразий моноидов в нескольких широких классах [125];
- характеризация кроссовых и существенно бесконечно порожденных многообразий моноидов в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$ [54, 57, 60];
- первые примеры конечных поправимых полугрупп и способы их построения [59].

Научная значимость результатов

- Методы, развитые при изучении апериодических многообразий Риса–Сушкевича, и полученные с их помощью результаты (глава 3), способствовали исследованиям в нескольких направлениях, например, в изучении многообразий Риса–Сушкевича, содержащих нетривиальные группы [6, 70], многообразий, порождающихся моноидами, которые получаются из полугрупп Риса–Сушкевича [52, 53, 55, 56], многообразий, порождающихся небольшими полугруппами [24, 58, 65, 71], конечных полугрупп, порождающих псевдомогообразия, неразложимые в объединение в решетке псевдомногообразий конечных полугрупп [68].

- Описание конечно базируемых, конечно порожденных и малых апериодических многообразий Риса–Сушкевича (глава 3) является решением проблемы 1.

- Конечная базируемость всех апериодических многообразий Риса–Сушкевича (глава 3) обеспечивает отрицательное решение проблемы 2.

- Полное описание всех полупростых наследственно конечно базируемых тождеств (глава 4) влечет решение проблемы 6.

- Достаточное условие бесконечной базируемости полугрупп (глава 5) и эквациональные результаты о многообразиях моноидов (главы 11 и 14) послужили мотивацией для дальнейшей работы над проблемой конечной базируемости [102–104].

- Новые примеры инволютивных полугрупп с экстремальными и контрастными свойствами (главы 7–9) раздвинули границы в понимании того, насколько велика разница между (1) конечными инволютивными полугруппами и их полугрупповыми редуктами, (2) некоторыми конечными инволютивными полугруппами, имеющими одинаковый полугрупповой редукт, (3) решетками $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ и $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$. В результате получено положительное решение проблем 7–9.

- Условие, при котором свойство бесконечной базируемости инволютивной полугруппы наследуется ее полугрупповым редуктом (глава 10), может быть использовано для переноса многих результатов об эквациональных свойствах полугрупп на случай инволютивных полугрупп.

- Исследование многообразий инволютивных полугрупп (главы 7–10) продолжается в настоящее время [63, 64].
- Наследственная конечная базируемость ряда многообразий моноидов (глава 11), во-первых, дала положительное решение проблемы 3, во-вторых, обеспечила метод определения наследственной конечной базируемости моноидов вида $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}$ (ср. с проблемой 5), и в-третьих, повлекла последующую работу о предельных многообразиях моноидов [119].
- Методы, развитые при изучении многообразий апериодических моноидов, и полученные с их помощью результаты (главы 12 и 13), во-первых, повлекли положительное решение проблемы 4, а во-вторых, сыграли важную роль в описании цепных многообразий моноидов [31] и в построении многообразий моноидов с континуумом подмногообразий [30, 121].

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на:

- 3-й международной алгебраической конференции в Нови-Саде (Нови-Сад, Сербия, 2009);
- международном семинаре по группам и полугруппам (Порту, Португалия, 2015);
- международной конференции в честь 81-летия Дж. Роудза (Рамат-Ган, Израиль, 2018);

- специальной сессии Американского математического общества, посвященной теории полугрупп (Нэшвилл, Теннесси, США, 2004);
- семинаре «Алгебраические системы» в Уральском федеральном университете (Екатеринбург, 2017);
- алгебраическом семинаре университета Ланьчжоу (Ланьчжоу, КНР, 2019) — серия из 4 докладов;
- алгебраическом семинаре университета науки и технологии Шэньси (Сиань, КНР, 2019).

2 Краткое содержание диссертации

Часть I: полугруппы

Результаты этой части можно разбить на четыре группы.

1) Апериодические многообразия Риса–Сушкевича. Наибольшее апериодическое подмногообразие многообразия $\mathbf{RS}_1$ совпадает с многообразием $\mathbf{A_2}$, порожденным 0-простой полугруппой

$$\mathcal{A}_2 = \left\langle \mathsf{a}, \mathsf{e} \,\middle|\, \mathsf{e}^2 = \mathsf{eae} = \mathsf{e},\ \mathsf{aea} = \mathsf{a},\ \mathsf{a}^2 = 0 \right\rangle.$$

Поэтому изучение апериодических многообразий Риса–Сушкевича совпадает с изучением решетки $\mathfrak{L}(\mathbf{A_2})$. Важными подмногообразиями многообразия $\mathbf{A_2}$ являются многообразия $\mathbf{B_2} = \mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\{\mathcal{B}_2\}$, $\mathbf{A_0} = \mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\{\mathcal{A}_0\}$ и $\mathbf{B_0} = \mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\{\mathcal{B}_0\}$, где

$$\mathcal{A}_0 = \left\langle \mathsf{e}, \mathsf{f} \,\middle|\, \mathsf{e}^2 = \mathsf{e},\ \mathsf{f}^2 = \mathsf{f},\ \mathsf{ef} = 0 \right\rangle$$

$$\text{и} \quad \mathcal{B}_0 = \left\langle \mathsf{a}, \mathsf{e}, \mathsf{f} \,\middle|\, \mathsf{e}^2 = \mathsf{e},\ \mathsf{f}^2 = \mathsf{f},\ \mathsf{ef} = \mathsf{fe} = 0,\ \mathsf{ea} = \mathsf{af} = \mathsf{a} \right\rangle.$$

Полугруппы $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B}_0$ изоморфны некоторым подполугруппам в $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно.

Для каждого $\mathbf{V} \in \{\mathbf{A_2}, \mathbf{B_2}, \mathbf{A_0}, \mathbf{B_0}\}$ существует наибольшее подмногообразие $\overline{\mathbf{V}}$ многообразия $\mathbf{A_2}$, не содержащее $\mathbf{V}$. Многообразие $\overline{\mathbf{A_2}}$ является наибольшим собственным подмногообразием многообразия $\mathbf{A_2}$, а решетка $\mathfrak{L}(\overline{\mathbf{A_2}})$ — дизъюнктным объединением интервалов

$$\mathfrak{I}_1 = [\mathbf{A_0} \vee \mathbf{B_2}, \overline{\mathbf{A_2}}], \quad \mathfrak{I}_2 = [\mathbf{A_0}, \overline{\mathbf{B_2}}], \quad \mathfrak{I}_3 = [\mathbf{B_2}, \overline{\mathbf{A_0}}],$$

$$\mathfrak{I}_4 = [\mathbf{B_0}, \overline{\mathbf{A_0}} \cap \overline{\mathbf{B_2}}] \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}_5 = \mathfrak{L}(\overline{\mathbf{B_0}}).$$

Каждый из интервалов $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$ и $\mathfrak{I}_4$ изоморфен прямому произведению двух счетных цепей. Однако описание интервала $\mathfrak{I}_5$ невозможно, поскольку в него вкладывается любая конечная решетка [4].

Предложение 10 (§ 3.3). *Решетка $\mathfrak{L}(\mathbf{A_2})$ является дизъюнктным объединением счетного дистрибутивного интервала*

$$[\mathbf{B_0}, \mathbf{A_2}] = \mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \cup \mathfrak{I}_3 \cup \mathfrak{I}_4 \cup \{\mathbf{A_2}\}$$

и решетки $\mathfrak{L}(\overline{\mathbf{B_0}}) = \mathfrak{I}_5$.

Из упомянутого выше частичного описания решетки $\mathfrak{L}(\overline{\mathbf{A_2}})$ можно вывести несколько результатов.

Теорема 11 (теорема 1.5). *Многообразие $\mathbf{A_2}$ наследственно конечно базируемо.*

Из этой теоремы следует счетность решетки $\mathfrak{L}(\mathbf{A_2})$ и, следовательно, отрицательное решение проблемы 2.

Тождество вида $x_1 x_2 \cdots x_n \approx x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}$, где π — некоторая нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, принято называть *перестановочным.* Тождество вида $x_1 x_2 \cdots x_n \approx \mathbf{w}$, не являющее перестановочным, называют *неоднородным.*

Неоднородные тождества и многообразие $\mathbf{H}_{\mathsf{com}}$, определяемое тождествами $xyx \approx y^2$, $xy \approx yx$, играют ключевую роль в характеризации кроссовых подмногообразий многообразия $\mathbf{A_2}$.

Теорема 12 (теорема 1.6)**.** *Для подмногообразия* $\mathbf{V}$ *многообразия* $\mathbf{A_2}$ *следующие условия эквивалентны*:

(a) $\mathbf{V}$ *кроссово*;

(b) $\mathbf{V}$ — *малое*;

(c) $\mathbf{V}$ *конечно порождено и* $\mathbf{B_0} \nsubseteq \mathbf{V}$;

(d) $\mathbf{V}$ *удовлетворяет некоторому неоднородному тождеству*;

(e) $\mathbf{H}_{\mathsf{com}} \nsubseteq \mathbf{V}$.

Из этой теоремы следует, что многообразие $\mathbf{H}_{\mathsf{com}}$ является единственным почти кроссовым подмногообразием многообразия $\mathbf{A_2}$, а некроссовы подмногообразия многообразия $\mathbf{A_2}$ образуют интервал $[\mathbf{H}_{\mathsf{com}}, \mathbf{A_2}]$. Более того, теоремы 11 и 12 обеспечивают решение проблемы 1.

Следствие 13 (предложения 3.48 и 3.49)**.**

(i) *Кроссовы подмногообразия многообразия* $\mathbf{A_2}$ *образуют неполную подрешетку в* $\mathfrak{L}(\mathbf{A_2})$.

(ii) *Конечно порожденные подмногообразия многообразия* $\mathbf{A_2}$ *образуют неполную подрешетку в* $\mathfrak{L}(\mathbf{A_2})$.

2) Наследственно конечно базируемые тождества. Следующий результат дает полное описание полупростых наследственно конечно базируемых тождеств и, следовательно, решение проблемы 6.

Теорема 14 (теорема 4.1). *Полупростое тождество наследственно конечно базируемо тогда и только тогда, когда оно не совпадает с тождеством*

$$x_1 x_2 \cdots x_\ell \, y^2 z_1 z_2 \cdots z_r \approx x_1 x_2 \cdots x_\ell \, y z_1 z_2 \cdots z_r,$$

где $\ell, r \geq 0$ *и* $(\ell, r) \neq (0,0)$.

3) Полугруппы без конечного базиса тождеств.

Теорема 15 (теорема 1.23). *Если для некоторого* $n \geq 2$ *полугруппа удовлетворяет тождествам*

$$x^{2n} \approx x^n, \quad x^n \Biggl(\prod_{i=1}^{m} y_i^n\Biggr) x^n \approx x^n \Biggl(\prod_{i=m}^{1} y_i^n\Biggr) x^n, \quad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

но не удовлетворяет тождеству $(x^n y^n x^n)^{n+1} \approx x^n y^n x^n$, *то она бесконечно базируема.*

Для конечных полугрупп этот результат можно сформулировать следующим образом.

Следствие 16 (следствие 5.8). *Если конечная полугруппа удовлетворяет псевдотождествам*

$$x^\omega \Biggl(\prod_{i=1}^{m} y_i^\omega\Biggr) x^\omega \approx x^\omega \Biggl(\prod_{i=m}^{1} y_i^\omega\Biggr) x^\omega, \quad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

но не удовлетворяет псевдотождеству $(x^\omega y^\omega x^\omega)^{\omega+1} \approx x^\omega y^\omega x^\omega$, *то она бесконечно базируема.*

В качестве примера полугруппы, к которой применима теорема 15, можно взять прямое произведение $\mathscr{J}$-тривиальной полугруппы

$$\mathcal{L}_\ell = \Bigl\langle \mathsf{e}, \mathsf{f} \Bigm| \mathsf{e}^2 = \mathsf{e},\ \mathsf{f}^2 = \mathsf{f},\ \underbrace{\mathsf{efefe} \cdots}_{\ell \text{ букв},\ \ell \geq 2} = \mathsf{0} \Bigr\rangle$$

порядка 2ℓ и циклической группы $\mathcal{Z}_n$ порядка $n \geq 1$. Это прямое произведение обозначается через $\mathcal{L}_{\ell,n}$.

Следствие 17 (следствие 5.3). *Полугруппа $\mathcal{L}_{\ell,n}$ конечно базируема тогда и только тогда, когда $\ell = 2$.*

4) Полугруппы без неприводимого базиса тождеств.

Теорема 18 (теорема 6.3). *Пусть A — произвольная бесконечно базируемая конечная алгебра. Предположим, что*

(a) *найдется базис тождеств $\Lambda = \Lambda_0 \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ алгебры A такой, что множество Λ_0 конечно и $\Lambda_0 \cup \{\lambda_{k+1}\} \vdash \lambda_k$ для всех $k \geq 1$;*

(b) *любой базис тождеств алгебры A содержит тождества $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ такие, что $\Lambda_0 \cup \{\theta_k\} \vdash \lambda_k$ для всех $k \geq 1$.*

Тогда алгебра A не имеет неприводимого базиса тождеств.

Для каждого $n \geq 1$, тождества

$$x^{n+2} \approx x^2, \quad x^{n+1}yx^{n+1} \approx xyx, \quad xhykxty \approx yhxkytx,$$

$$x\left(\prod_{i=1}^{m}(y_i h_i y_i)\right)x \approx x\left(\prod_{i=m}^{1}(y_i h_i y_i)\right)x, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

образуют базис тождеств полугруппы $\mathcal{L}_{3,n}$; к этому базису тождеств можно применить теорему 18 и получить следующий результат.

Теорема 19 (теорема 6.20). *Полугруппа $\mathcal{L}_{3,n}$ не имеет неприводимого базиса тождеств.*

Базис тождеств полугруппы $\mathcal{L}_{3,n}$ также можно использовать для определения верхней границы сложности проблемы принадлежности многообразию, порожденному этой полугруппой.

Теорема 20 (теорема 6.21)**.** *Проблема принадлежности многообразию, порожденному полугруппой $\mathcal{L}_{3,n}$, лежит в классе* $\mathsf{co\text{-}NP}$.

Часть II: инволютивные полугруппы

Результаты этой части можно разбить на две группы.

1) Парадоксальные примеры. Для каждого $\ell \geq 2$ полугруппа $\mathcal{L}_\ell$ допускает единственную инволюцию *, которая полностью определяется ее действием на порождающих e, f:

$$(\mathsf{e}^\star, \mathsf{f}^\star) = \begin{cases} (\mathsf{f}, \mathsf{e}), & \text{если } \ell \text{ четно,} \\ (\mathsf{e}, \mathsf{f}), & \text{если } \ell \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Например, в полугруппе $\mathcal{L}_3 = \{\mathsf{0}, \mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{ef}, \mathsf{fe}, \mathsf{fef}\}$ инволюция * переставляет местами элементы ef и fe и оставляет на месте все остальные элементы.

Циклическая группа $\mathcal{Z}_n$ при $n \geq 3$, напротив, допускает несколько инволюций. В самом деле, если $\Re \in \{1, 2, \ldots, n\}$ — *квадратный корень из единицы по модулю* n, т.е. $\Re^2 \equiv 1 \pmod{n}$, то унарная операция $x \mapsto x^\Re$ на $\mathcal{Z}_n$ является инволюцией. Например, если $n \geq 3$, то операция взятия обратного элемента в группе $\mathcal{Z}_n$ совпадает с инволюцией $x \mapsto x^{n-1}$.

Теорема 21 (теорема 1.30)**.** *Прямое произведение*

$$\langle \mathcal{L}_{3,n}, {}^{\star\Re} \rangle = \langle \mathcal{L}_3, {}^\star \rangle \times \langle \mathcal{Z}_n, {}^\Re \rangle$$

имеет конечный базис тождеств, если $\Re = 1$, и бесконечный неприводимый базис тождеств в противном случае.

Таким образом, у инволютивной полугруппы $\langle \mathcal{L}_{3,n}, {}^{\star\Re} \rangle$ всегда есть неприводимый базис тождеств. Ее полугрупповой редукт, напротив, по теореме 19 неприводимого базиса тождеств не имеет. Таким образом, справедливо

Следствие 22. *Инволютивная полугруппа $\langle \mathcal{L}_{3,n}, {}^{\star 1} \rangle$ конечно базируема, а ее полугрупповой редукт $\mathcal{L}_{3,n}$ бесконечно базируем.*

Заметим, что из теоремы 21 следует положительное решение проблем 8 и 9, а из следствия 22 — положительное решение проблемы 7.

Доказательство теоремы 21 состоит в поиске базиса тождеств инволютивной полугруппы $\langle \mathcal{L}_{3,n}, {}^{\star\Re} \rangle$. Тождества (inv) и

$$x^{n+2} \approx x^2, \quad x^{n+1}yx^{n+1} \approx xyx, \quad xhykxty \approx yhxkytx,$$

$$xy^*x^* \approx xyx^*, \quad x^*yx^* \approx xyx, \quad xhx^*kx \approx xhxkx$$

образуют базис тождеств инволютивной полугруппы $\langle \mathcal{L}_{3,n}, {}^{\star 1} \rangle$, в то время как бесконечный неприводимый базис тождеств инволютивной полугруппы $\langle \mathcal{L}_{3,n}, {}^{\star\Re} \rangle$ при $\Re > 1$ может быть построен из тождеств (inv) и некоторых из следующих тождеств:

$$x^{n+2} \approx x^2, \quad x^{n+1}yx^{n+1} \approx xyx, \quad xhykxty \approx yhxkytx,$$

$$x^*yx^* \approx x^{\Re}yx^{\Re}, \quad xhx^*kx \approx xhx^{\Re}kx,$$

$$x^*\,\mathbf{h}_1\,y^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_2\,x^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_3\,y^{\circledast_3} \approx x^{\Re}\,\mathbf{h}_1\,y^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_2\,x^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_3\,y^{\circledast_3},$$

$$x^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_1\,y^*\,\mathbf{h}_2\,x^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_3\,y^{\circledast_3} \approx x^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_1\,y^{\Re}\,\mathbf{h}_2\,x^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_3\,y^{\circledast_3},$$

$$x^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_1\,y^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_2\,x^*\,\mathbf{h}_3\,y^{\circledast_3} \approx x^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_1\,y^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_2\,x^{\Re}\,\mathbf{h}_3\,y^{\circledast_3},$$

$$x^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_1\,y^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_2\,x^{\circledast_3}\,\mathbf{h}_3\,y^* \approx x^{\circledast_1}\,\mathbf{h}_1\,y^{\circledast_2}\,\mathbf{h}_2\,x^{\circledast_3}\,\mathbf{h}_3\,y^{\Re},$$

$$x\Bigg(\prod_{i=1}^{m}(y_i\mathbf{h}_iy_i^*)\Bigg)x^* \approx x\Bigg(\prod_{i=m}^{1}(y_i\mathbf{h}_iy_i^*)\Bigg)x^*, \quad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

где $\mathbf{h}_i \in \{\varnothing, h_i\}$ и $\circledast_i \in \{1, *\}$ при $i = 1, 2, 3$.

Для непересекающихся полугрупп S_1 и S_2, не содержащих символа 0, *0-прямым объединением* этих полугрупп называют полугруппу

$$S_1 \uplus S_2 = S_1 \cup S_2 \cup \{0\},$$

в которой произведение двух элементов из S_i совпадает с их обычным произведением в S_i $(i = 1, 2)$ и $ab = ba = 0$ для всех $a \in S_1 \cup \{0\}$ и $b \in S_2 \cup \{0\}$. В общем случае 0-прямое объединение произвольных полугрупп S_1 и S_2 можно построить, просто переобозначив все их элементы таким образом, чтобы выполнялись условия $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ и $0 \notin S_1 \cup S_2$.

Теорема 23 (теорема 9.1). *Для каждого $n \geq 3$ существуют три инволютивные полугруппы с одним и тем же полугрупповым редуктом $\mathcal{L}_{3,n} \uplus \mathcal{L}_{3,n}$ такие, что одна из них имеет конечный базис тождеств, вторая имеет бесконечный неприводимый базис тождеств, а третья не имеет неприводимого базиса тождеств.*

Инволютивные полугруппы $\langle \mathcal{L}_\ell, {}^\star \rangle$, где $\ell = 2, 3, 4, \ldots$, подчеркивают различия в строении решеток $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ и $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$.

Теорема 24 (теорема 1.33). *Многообразия*

$$\mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\{\mathcal{L}_2\} \subset \mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\{\mathcal{L}_3\} \subset \mathsf{V}_{\mathsf{sem}}\{\mathcal{L}_4\} \subset \cdots$$

образуют одну бесконечную цепь в решетке $\mathfrak{L}_{\mathsf{sem}}$, а многообразия

$$\begin{aligned} &\mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{L}_2, {}^\star \rangle\} \subset \mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{L}_4, {}^\star \rangle\} \subset \mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{L}_6, {}^\star \rangle\} \subset \cdots \\ \text{и} \quad &\mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{L}_3, {}^\star \rangle\} \subset \mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{L}_5, {}^\star \rangle\} \subset \mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{L}_7, {}^\star \rangle\} \subset \cdots \end{aligned}$$

— две несравнимые бесконечные цепи в решетке $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$.

2) Эквациональные теории инволютивных полугрупп. Инволютивная полугруппа называется *скрученной*, если многообразие, ею порожденное, содержит инволютивную полурешетку $\langle \mathcal{S}\ell_3, {}^* \rangle$, где

$$\mathcal{S}\ell_3 = \left\langle \mathsf{e}, \mathsf{f} \,\middle|\, \mathsf{e}^2 = \mathsf{e},\, \mathsf{f}^2 = \mathsf{f},\, \mathsf{ef} = \mathsf{fe} = 0 \right\rangle$$

и операция * переставляет местами элементы e и f.

Теорема 25 (теорема 1.36). *Если полугрупповой редукт скрученной инволютивной полугруппы бесконечно базируем, то и сама эта инволютивная полугруппа бесконечно базируема.*

Поскольку многообразие $\mathsf{V}_{\mathsf{inv}}\{\langle \mathcal{S}\ell_3, {}^*\rangle\}$ является атомом решетки $\mathfrak{L}_{\mathsf{inv}}$ [26], условие скрученности в теореме 25 невозможно ослабить, кроме как вообще опустить его. Однако избавиться от скрученности нельзя, поскольку, в силу теорем 19 и 21, нескрученная инволютивная полугруппа $\langle \mathcal{L}_3, {}^\star\rangle$ конечно базируема, а ее полугрупповой редукт $\mathcal{L}_3$ этим свойством не обладает. Наконец, теорему 25 невозможно обратить, так как существует соответствующий контрпример [40]. Таким образом, теорему 25 невозможно усилить ни в каком направлении.

Из теоремы 25 следует ряд результатов.

Теорема 26 (теорема 1.37). *Любая инволютивная полугруппа, имеющая бесконечно базируемый полугрупповой редукт, вкладывается в некоторую бесконечно базируемую инволютивную полугруппу, мощность которой превышает мощность исходной не более, чем на три элемента.*

Теорема 27 ([15]; теорема 1.38). *Если полугрупповой редукт скрученной инволютивной полугруппы существенно бесконечно базируем, то и сама эта инволютивная полугруппа существенно бесконечно базируема.*

Конечная алгебра, не являющаяся существенно бесконечно базируемой, называется *слабо конечно базируемой*. Класс слабо конечно базируемых конечных полугрупп образует псевдомногообразие [114, п. 4.4]. Для инволютивных полугрупп, напротив, аналогичный результат не имеет места.

Предложение 28 (предложение 1.39). *Класс слабо конечно базируемых конечных инволютивных полугрупп не является псевдомногообразием.*

Например, инверсный моноид $\langle \mathcal{B}_2^1, {}^{-1} \rangle$ слабо конечно базируем [99], а инволютивная полурешетка $\langle \mathcal{S}\ell_3, {}^* \rangle$ конечно базируема [22], однако их прямое произведение $\langle \mathcal{B}_2^1, {}^{-1} \rangle \times \langle \mathcal{S}\ell_3, {}^* \rangle$ существенно бесконечно базируемо в силу теоремы 27.

Часть III: моноиды

Результаты этой части можно разбить на три группы.

1) Наследственно конечно базируемые многообразия.

Теорема 29 (теорема 11.1). *Многообразие моноидов $\mathbb{O}$, заданное тождествами*

$$xhxyty \approx xhyxty, \quad xhytxy \approx xhytyx,$$

наследственно конечно базируемо.

Многообразие $\mathbb{O}^{\triangleleft}$, двойственное к $\mathbb{O}$, очевидно, также наследственно конечно базируемо.

Теорема 30 (теорема 1.52). *Пусть $\mathbb{V}$ — многообразие моноидов такое, что либо $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$, либо $\mathbb{V} \subseteq \mathsf{V}_{\mathsf{mon}}\{\mathcal{B}_2^1\}$, либо $\mathbb{R}_{\mathcal{Q}}\{xyx\} \subseteq \mathbb{V}$, либо $\mathbb{C}\mathbb{OM} \subseteq \mathbb{V}$. Тогда следующие условия для многообразия $\mathbb{V}$ эквивалентны*:

(a) *$\mathbb{V}$ наследственно конечно базируемо;*

(b) $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2 \nsubseteq \mathbb{V}$;

(c) $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{O}$ *или* $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{O}^{\triangleleft}$.

Из теоремы 30 можно вывести положительное решение проблемы 3 и некоторые другие результаты.

Теорема 31 (теоремы 1.53 и 1.54 и следствие 11.18).

(i) *Многообразия* $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$ *и только они являются предельными многообразиями в классе* $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$.

(ii) *Многообразия* $\mathbb{O}$, $\mathbb{O}^{\triangleleft}$ *и только они являются максимальными наследственно конечно базируемыми надкоммутативными многообразиями моноидов.*

(iii) *Надкоммутативных предельных многообразий моноидов не существует.*

Напомним, что Сапир [100, проблема 3.10.10] поставил проблему конечной базируемости для фактор-моноидов Риса $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}$ для конечного множества слов $\mathscr{W}$ (см. проблему 5). Эта проблема остается открытой, однако, поскольку $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W} \in \mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$, используя теорему 30 можно установить, когда моноид $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}$ наследственно конечно базируем как моноид.

Теорема 32 (теорема 1.55). *Для любого конечного множества слов* $\mathscr{W}$ *фактор-моноид Риса* $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\mathscr{W}$ *наследственно конечно базируем как моноид тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе тождеств из формулировки теоремы 29 или двойственной к ней.*

2) Кроссовы и существенно бесконечно порожденные многообразия. Для каждого $n \geq 2$ обозначим через $\mathbb{A}_n^{\mathsf{zen}}$ многообразие моноидов, заданное тождествами

$$x^{n+1} \approx x^n, \quad x^n y \approx y x^n,$$

а через $\mathbb{S}_n$ — многообразие моноидов, заданное тождеством

$$x \prod_{i=1}^{n-1} (h_i x) \approx x^n \prod_{i=1}^{n-1} h_i.$$

Положим $\mathbb{K} = \mathbb{A}_2^{\mathsf{zen}} \cap \mathbb{O} \cap \mathbb{O}^{\triangleleft}$.

Теорема 33 (теорема 1.57)**.** *Для многообразия* $\mathbb{V}$ *из класса* $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$ *следующие условия эквивалентны*:

(a) $\mathbb{V}$ *кроссово*;

(b) $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2, \mathbb{K} \nsubseteq \mathbb{V}$;

(c) $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{A}_n^{\mathsf{zen}} \cap \mathbb{O} \cap \mathbb{S}_n$ *или* $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{A}_n^{\mathsf{zen}} \cap \mathbb{O}^{\triangleleft} \cap \mathbb{S}_n$ *для некоторого* $n \geq 2$.

Таким образом, любое кроссово многообразие из класса $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$ содержится в одном из многообразий $\mathbb{A}_n^{\mathsf{zen}} \cap \mathbb{O} \cap \mathbb{S}_n$ и $\mathbb{A}_n^{\mathsf{zen}} \cap \mathbb{O}^{\triangleleft} \cap \mathbb{S}_n$ для некоторого $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, а многообразия $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$, $\mathbb{K}$ и только они являются почти кроссовыми многообразиями в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$. В частности, проблема 4 имеет отрицательное решение. Отметим, что многообразиями $\mathbb{J}_1$ и $\mathbb{J}_2$ исчерпываются конечно порожденные почти кроссовы многообразия в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$, а $\mathbb{K}$ — единственное бесконечно порожденное почти кроссово многообразие в этом классе.

Не только само многообразие $\mathbb{K}$, но и всякое содержащее его многообразие из класса $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$ бесконечно порожденно. Многообразия с таким свойством называются *существенно бесконечно порожденными в классе* $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$.

Теорема 34 (теорема 1.58)**.** *Для многообразия* $\mathbb{V}$ *из класса* $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$ *следующие условия эквивалентны*:

(a) $\mathbb{V}$ *является существенно бесконечно порожденным в классе* $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$;

(b) $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}$;

(c) $\mathbb{V} \nsubseteq \mathbb{S}_n$ *для всех* $n \geq 2$.

Таким образом, $\mathbb{K}$ является наименьшим существенно бесконечно порожденным многообразием в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$, и класс всех многообразий из $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$, содержащих $\mathbb{K}$, совпадает с классом всех существенно бесконечно порожденных многообразий в $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$. Тем не менее, многообразие $\mathbb{K}$ не является существенно бесконечно порожденным в классе всех моноидов, поскольку оно содержится в многообразии $\mathsf{V}_{\mathsf{mon}}\{\mathcal{B}_2^1\}$ (следствие 12.19).

Подмногообразие $\mathbb{W}$ многообразия $\mathbb{A}_2^{\mathsf{zen}} \cap \mathbb{S}_3$, заданное тождествами

$$xyhxty \approx yxhxty, \quad xhytxy \approx xhytyx,$$

является первым примером бесконечно порожденного многообразия в классе $\mathbb{A}^{\mathsf{zen}}$, не являющегося существенно бесконечно порожденным в этом классе (§ 12.5).

Через $\mathbb{A}^{\mathsf{com}}$ обозначим класс апериодических моноидов с коммутирующими идемпотентами, а через $\widetilde{\mathbb{A}}^{\mathsf{com}}$ — класс всех моноидов из $\mathbb{A}^{\mathsf{com}}$, удовлетворяющих тождеству $x^2yx \approx xyx^2$.

Теорема 35 (теорема 1.60)**.** *Многообразие из класса $\widetilde{\mathbb{A}}^{\mathsf{com}}$ кроссово тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразий $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$ и $\mathbb{K}$.*

Предложение 36 (предложение 1.61)**.** *Многообразия $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$, $\mathbb{K}$ и только они являются почти кроссовыми подмногообразиями многообразия $\mathsf{V}_{\mathsf{mon}}\{\mathcal{B}_2^1\}$.*

3) Фактор-моноиды Риса свободного моноида: дальнейшие примеры.

Теорема 37 (теорема 1.62)**.** *Для любой группы G конечной экспоненты прямое произведение $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyx\} \times G$ конечно базируемо тогда и только тогда, когда группа G абелева.*

Напомним, что моноид $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyx\}$, а также все конечные группы порождают кроссовы многообразия моноидов (см. [38] и [80] соответственно). Таким образом, теорема 37 показывает, что объединение двух кроссовых многообразий моноидов не обязано быть кроссовым.

Полугруппа Брандта $\mathcal{B}_2$ является примером такой конечно базируемой конечной полугруппы S, что моноид S^1 бесконечно базируем [8, 81]. Как уже отмечалось, полугруппа с противоположными свойствами называется поправимой. Первый пример поправимой полугруппы был найден Шнеерсоном [107], однако эта полугруппа бесконечна. Примеры конечных поправимых полугрупп можно построить следующим образом.

Теорема 38 (теорема 1.64)**.** *Пусть S и N — полугруппы такие, что моноид S^1 бесконечно базируем, полугруппа N нильпотентна, а моноид $S^1 \times N^1$ конечно базируем. Тогда полугруппа $P = S^1 \times N$ поправима.*

В силу результата Джексона и О. Сапир [39, следствие 5.2], конечные полугруппы S и N, удовлетворяющие условию теоремы 38, могут быть без труда выбраны из класса фактор-моноидов Риса свободного моноида. Например, если

$$S = \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{xyxy\} \backslash \{1\} \quad \text{и} \quad N = \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}\{x^2y^2, xy^2x\} \backslash \{1\},$$

то $P = S^1 \times N$ — поправимая полугруппа порядка $9 \times 12 = 108$. На самом деле полугруппа P содержит подполугруппу

$$\{(a, 0) \mid a \in S^1\} \cup \{(0, b) \mid b \in N\}$$

порядка 20, которая также является поправимой. В настоящее время порядок наименьшей поправимой полугруппы неизвестен, но известно, что такая полугруппа содержит не менее семи элементов (§ 14.2).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в [121]– [130].

Литература

[1] А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута, О решетке многообразий полугрупп, Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т., 1979, 3–46.

[2] Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский, Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли, *Матем. сб.* **96**, № 4 (1975), 543–559.

[3] А. П. Бирюков, Многообразия идемпотентных полугрупп, *Алгебра и логика* **9**, № 3 (1970), 255–273.

[4] Б. М. Верников, М. В. Волков, Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II, *Изв. Урал. гос. ун-та. (Матем., механ.)*, № 10(1) (1998), 13–33.

[5] Е. И. Клейман, О базисах тождеств многообразий инверсных полугрупп, *Сиб. матем. журн.* **20**, № 4 (1979), 760–777.

[6] С. И. Кублановский, О ранге многообразий Риса–Сушкевича, *Алгебра и анализ* **23**, № 4 (2011), 59–135.

[7] И. В. Львов, Многообразия ассоциативных колец I, *Алгебра и логика* **12**, № 3 (1973), 269–297.

[8] А. Н. Трахтман, Базис тождеств пятиэлементной полугруппы Брандта, Исслед. по соврем. алгебре, Свердловск: Урал. гос. ун-т., 1981, 147–149.

[9] Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков, Решетки многообразий полугрупп, *Изв. вузов. Математика*, № 3 (2009), 3–36.

[10] Л. Н. Шеврин, М. В. Волков, Тождества полугрупп, *Изв. вузов. Математика*, № 11 (1985), 3–47.

[11] Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов, Структурные аспекты теории многообразий полугрупп, *Изв. вузов. Математика*, № 6 (1989), 3–39.

[12] C. L. Adair, Bands with an involution, *J. Algebra* **75**, № 2 (1982), 297–314.

[13] J. Almeida, Finite Semigroups and Universal Algebra, World Scientific, Singapore, 1994.

[14] K. Auinger, Y. Z. Chen, X. Hu, Y. F. Luo, M. V. Volkov, The finite basis problem for Kauffman monoids, *Algebra Universalis* **74**, № 3–4 (2015), 333–350.

[15] K. Auinger, I. Dolinka, T. V. Pervukhina, M. V. Volkov, Unary enhancements of inherently non-finitely based semigroups, *Semigroup Forum* **89**, № 1 (2014), 41–51.

[16] K. Auinger, I. Dolinka, M. V. Volkov, Matrix identities involving multiplication and transposition, *J. Eur. Math. Soc.* **14**, № 3 (2012), 937–969.

[17] K. Auinger, M. B. Szendrei, On identity bases of epigroup varieties, *J. Algebra* **220**, № 2 (1999), 437–448.

[18] G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**, № 4 (1935), 433–454.

[19] Y. Z. Chen, X. Hu, Y. F. Luo, O. Sapir, The finite basis problem for the monoid of two-by-two upper triangular tropical matrices, *Bull. Aust. Math. Soc.* **94**, № 1 (2016), 54–64.

[20] S. Crvenković, I. Dolinka, Varieties of involution semigroups and involution semirings: a survey, *Bull. Soc. Math. Banja Luka* **9** (2002), 7–47.

[21] I. Dolinka, All varieties of normal bands with involution, *Period. Math. Hungar.* **40**, № 2 (2000), 109–122.

[22] I. Dolinka, Remarks on varieties of involution bands, *Comm. Algebra* **28**, № 6 (2000), 2837–2852.

[23] I. Dolinka, On the lattice of varieties of involution semigroups, *Semigroup Forum* **62**, № 3 (2001), 438–459.

[24] C. C. Edmunds, E. W. H. Lee, K. W. K. Lee, Small semigroups generating varieties with continuum many subvarieties, *Order* **27**, № 1 (2010), 83–100.

[25] T. Evans, The lattice of semigroups varieties, *Semigroup Forum* **2**, № 1 (1971), 1–43.

[26] S. Fajtlowicz, Equationally complete semigroups with involution, *Algebra Universalis* **1**, № 1 (1971), 355–358.

[27] C. F. Fennemore, All varieties of bands, *Semigroup Forum* **1**, № 2 (1970), 172–179.

[28] J. A. Gerhard, The lattice of equational classes of idempotent semigroups, *J. Algebra* **15**, № 2 (1970), 195–224.

[29] C. K. Gupta, A. Krasilnikov, The finite basis question for varieties of groups — some recent results, *Illinois J. Math.* **47**, № 1–2 (2003), 273–283.

[30] S. V. Gusev, On the ascending and descending chain conditions in the lattice of monoid varieties, Сиб. электрон. матем. изв. **16** (2019), 983–997.

[31] S. V. Gusev, B. M. Vernikov, Chain varieties of monoids, *Dissertationes Math.* (*Rozprawy Mat.*) **534** (2018), 73 pp.

[32] T. E. Hall, S. I. Kublanovskiĭ, S. Margolis, M. V. Sapir, P. G. Trotter, Algorithmic problems for finite groups and finite 0-simple semigroups, *J. Pure Appl. Algebra* **119**, № 1 (1997), 75–96.

[33] T. J. Head, The varieties of commutative monoids, *Nieuw Arch. Wisk.* **16** (1968), 203–206.

[34] X. Hu, Y. Z. Chen, Y. F. Luo, On the finite basis problem for the monoids of partial extensive injective transformations, *Semigroup Forum* **91**, № 2 (2015), 524–537.

[35] M. Jackson, Finite semigroups whose varieties have uncountably many subvarieties, *J. Algebra* **228**, № 2 (2000), 512–535.

[36] M. Jackson. On the finite basis problem for finite Rees quotients of free monoids, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **67**, № 1–2 (2001), 121–159.

[37] M. Jackson, Finite semigroups with infinite irredundant identity bases, *Internat. J. Algebra Comput.* **15**, № 3 (2005), 405–422.

[38] M. Jackson, Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras, *Semigroup Forum* **70**, № 2 (2005), 159–187.

[39] M. Jackson, O. Sapir, Finitely based, finite sets of words, *Internat. J. Algebra Comput.* **10**, № 6 (2000), 683–708.

[40] M. Jackson, M. V. Volkov, The algebra of adjacency patterns: Rees matrix semigroups with reversion, Fields of Logic and Computation, Lecture Notes in Comput. Sci. **6300**, Springer, Berlin, 2010, 414–443.

[41] J. Kaďourek, On varieties of combinatorial inverse semigroups II, *Semigroup Forum* **44**, № 1 (1992), 53–78.

[42] J. Kaďourek, On finite completely simple semigroups having no finite basis of identities, *Semigroup Forum* **97**, № 1 (2018), 154–161.

[43] J. Kalicki, D. Scott, Equational completeness of abstract algebras, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **58** (1955), 650–659.

[44] O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir, Algorithmic problems in varieties, *Internat. J. Algebra Comput.* **5**, № 4–5 (1995), 379–602.

[45] P. A. Kozhevnikov, On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent, *Comm. Algebra* **40**, № 7 (2012), 2628–2644.

[46] R. L. Kruse, Identities satisfied by a finite ring, *J. Algebra* **26** (1973), № 2, 298–318.

[47] S. I. Kublanovskiĭ, E. W. H. Lee, N. R. Reilly, Some conditions related to the exactness of Rees–Sushkevich varieties, *Semigroup Forum* **76**, № 1 (2008), 87–94.

[48] E. W. H. Lee, On the Lattice of Rees–Sushkevich Varieties, Ph.D. thesis, Simon Fraser University, Vancouver, Canada, 2002.

[49] E. W. H. Lee, Identity bases for some non-exact varieties, *Semigroup Forum* **68**, № 3 (2004), 445–457.

[50] E. W. H. Lee, Subvarieties of the variety generated by the five-element Brandt semigroup, *Internat. J. Algebra Comput.* **16**, № 2 (2006), 417–441.

[51] E. W. H. Lee, On the complete join of permutative combinatorial Rees–Sushkevich varieties, *Int. J. Algebra* **1**, № 1–4 (2007), 1–9.

[52] E. W. H. Lee, On the variety generated by some monoid of order five, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **74**, № 3–4 (2008), 509–537.

[53] E. W. H. Lee, Hereditarily finitely based monoids of extensive transformations, *Algebra Universalis* **61**, № 1 (2009), 31–58.

[54] E. W. H. Lee, Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents, *Port. Math.* **68**, № 4 (2011), 425–429.

[55] E. W. H. Lee, Finite basis problem for 2-testable monoids, *Cent. Eur. J. Math.* **9**, № 1 (2011), 1–22.

[56] E. W. H. Lee, Varieties generated by 2-testable monoids, *Studia Sci. Math. Hungar.* **49**, № 3 (2012), 366–389.

[57] E. W. H. Lee, Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents, *Beitr. Algebra Geom.* **54**, № 1 (2013), 121–129.

[58] E. W. H. Lee, Finite basis problem for semigroups of order five or less: generalization and revisitation, *Studia Logica* **101**, № 1 (2013), 95–115.

[59] E. W. H. Lee, Finitely based monoids obtained from non-finitely based semigroups, *Univ. Iagel. Acta Math.* **51** (2013), 45–49.

[60] E. W. H. Lee, Inherently non-finitely generated varieties of aperiodic monoids with central idempotents, *Записки научных семинаров ПОМИ* **423** (2014), 166–182.

[61] E. W. H. Lee, On a question of Pollák and Volkov regarding hereditarily finitely based identities, *Period. Math. Hungar.* **68**, № 2 (2014), 128–134.

[62] E. W. H. Lee, Finitely based finite involution semigroups with non-finitely based reducts, *Quaest. Math.* **39**, № 2 (2016), 217–243.

[63] E. W. H. Lee, Non-finitely based finite involution semigroups with finitely based semigroup reducts, *Korean J. Math.* **27**, № 1 (2019), 53–62.

[64] E. W. H. Lee, Varieties of involution monoids with extreme properties, *Q. J. Math.* **70**, № 4 (2019).

[65] E. W. H. Lee, J. R. Li, Minimal non-finitely based monoids, *Dissertationes Math.* (*Rozprawy Mat.*) **475** (2011), 65 pp.

[66] E. W. H. Lee, N. R. Reilly, The intersection of pseudovarieties of central simple semigroups, *Semigroup Forum* **73**, № 1 (2006), 75–94.

[67] E. W. H. Lee, N. R. Reilly, Centrality in Rees–Sushkevich varieties, *Algebra Universalis* **58**, № 2 (2008), 145–180.

[68] E. W. H. Lee, J. Rhodes, B. Steinberg, Join irreducible semigroups, *Internat. J. Algebra Comput.* **29**, № 7 (2019), 1249–1310.

[69] E. W. H. Lee, M. V. Volkov, On the structure of the lattice of combinatorial Rees–Sushkevich varieties, Semigroups and Formal Languages, World Scientific, Singapore, 2007, 164–187.

[70] E. W. H. Lee, M. V. Volkov, Limit varieties generated by completely 0-simple semigroups, *Internat. J. Algebra Comput.* **21**, № 1–2 (2011), 257–294.

[71] E. W. H. Lee, W. T. Zhang, Finite basis problem for semigroups of order six, *LMS J. Comput. Math.* **18**, № 1 (2015), 1–129.

[72] J. R. Li, Y. F. Luo, Classification of finitely based words in a class of words over a 3-letter alphabet, *Semigroup Forum* **91**, № 1 (2015), 200–212.

[73] J. R. Li, W. T. Zhang, Y. F. Luo, On the finite basis problem for certain 2-limited words, *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*) **29**, № 3 (2013), 571–590.

[74] G. I. Mashevitzky, On bases of completely simple semigroup identities, *Semigroup Forum* **30**, № 1 (1984), 67–76.

[75] G. I. Mashevitzky, On the finite basis problem for completely 0-simple semigroup identities, *Semigroup Forum* **59**, № 2 (1999), 197–219.

[76] R. N. McKenzie, Equational bases for lattice theories, *Math. Scand.* **27** (1970), 24–38.

[77] R. N. McKenzie, Tarski's finite basis problem is undecidable, *Internat. J. Algebra Comput.* **6**, № 1 (1996), 49–104.

[78] I. Mikhailova, O. Sapir, Lee monoid L_4^1 is non-finitely based, *Algebra Universalis* **79**, № 3 (2018), Art. 56, 14 pp.

[79] H. Neumann, Varieties of Groups, Springer-Verlag, New York, 1967.

[80] S. Oates, M. B. Powell, Identical relations in finite groups, *J. Algebra* **1**, № 1 (1964), 11–39.

[81] P. Perkins, Bases for equational theories of semigroups, *J. Algebra* **11**, № 2 (1969), 298–314.

[82] P. Perkins, Finite axiomatizability for equational theories of computable groupoids, *J. Symbolic Logic* **54**, № 3 (1989), 1018–1022.

[83] M. Petrich, Inverse Semigroups, Wiley & Sons, New York, 1984.

[84] M. Petrich, N. R. Reilly, Completely Regular Semigroups, Wiley & Sons, New York, 1999.

[85] G. Pollák, On hereditarily finitely based varieties of semigroups, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **37**, № 3–4 (1975), 339–348.

[86] G. Pollák, A class of hereditarily finitely based varieties of semigroups, Algebraic Theory of Semigroups, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **20**, Amsterdam, 1979, 433–445.

[87] G. Pollák, On identities which define hereditarily finitely based varieties of semigroups, Algebraic Theory of Semigroups, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **20**, Amsterdam, 1979, 447–452.

[88] G. Pollák, On two classes of hereditarily finitely based semigroup identities, *Semigroup Forum* **25**, № 1–2 (1982), 9–33.

[89] G. Pollák, Some sufficient conditions for hereditarily finitely based varieties of semigroups, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **50**, № 3–4 (1986), 299–330.

[90] G. Pollák, M. V. Volkov, On almost simple semigroup identities, Semigroups, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **39**, Amsterdam, 1985, 287–323.

[91] D. Rees, On semi-groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **36**, № 4 (1940), 387–400.

[92] N. R. Reilly, Complete congruences on the lattice of Rees–Sushkevich varieties, *Comm. Algebra* **35**, № 11 (2007), 3624–3659.

[93] N. R. Reilly, The interval $[\mathbf{B_2}, \mathbf{NB_2}]$ in the lattice of Rees–Sushkevich varieties, *Algebra Universalis* **59**, № 3–4 (2008), 345–363.

[94] N. R. Reilly, Varieties generated by completely 0-simple semigroups, *J. Aust. Math. Soc.* **84**, № 3 (2008), 375–403.

[95] N. R. Reilly, Shades of orthodoxy in Rees–Sushkevich varieties, *Semigroup Forum* **78**, № 1 (2009), 157–182.

[96] N. R. Reilly, Regular principal factors in free objects in Rees-Sushkevich varieties, *Semigroup Forum* **86**, № 1 (2013), 162–182.

[97] N. R. Reilly, Regular principal factors in free objects in varieties in the interval $[\mathbf{B_2}, \mathbf{NB_2} \vee \mathbf{G_n}]$, *Semigroup Forum* **89**, № 1 (2014), 249–265.

[98] M. V. Sapir, On Cross semigroup varieties and related questions, *Semigroup Forum* **42**, № 3 (1991), 345–364.

[99] M. V. Sapir, Identities of finite inverse semigroups, *Internat. J. Algebra Comput.* **3**, № 1 (1993), 115–124.

[100] M. V. Sapir, Combinatorial Algebra: Syntax and Semantics, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2014.

[101] O. Sapir, Finitely based words, *Internat. J. Algebra Comput.* **10**, № 4 (2000), 457–480.

[102] O. Sapir, Non-finitely based monoids, *Semigroup Forum* **90**, № 3 (2015), 557–586.

[103] O. Sapir, Finitely based monoids, *Semigroup Forum* **90**, № 3 (2015), 587–614.

[104] O. Sapir, The finite basis problem for words with at most two non-linear variables, *Semigroup Forum* **93**, № 1 (2016), 131–151.

[105] O. Sapir, Lee monoids are nonfinitely based while the sets of their isoterms are finitely based, *Bull. Aust. Math. Soc.* **97**, № 3 (2018), 422–434.

[106] O. Sapir, Finitely based sets of 2-limited block-2-simple words, *Semigroup Forum* **99** (2019), № 3, 881–897.

[107] L. M. Shneerson, On the axiomatic rank of varieties generated by a semigroup or monoid with one defining relation, *Semigroup Forum* **39**, № 1 (1989), 17–38.

[108] H. Straubing, The variety generated by finite nilpotent monoids, *Semigroup Forum* **24**, № 1 (1982), 25–38.

[109] A. K. Suschkewitsch, Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Math. Ann.* **99** (1928), 30–50.

[110] A. Tarski, Equational logic and equational theories of algebras, Contributions to Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1968, 275–288.

[111] B. M. Vernikov, Special elements in lattices of semigroup varieties, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **81**, № 1–2 (2015), 79–109.

[112] M. V. Volkov, On the join of varieties, *Simon Stevin* **58**, № 4 (1984), 311–317.

[113] M. V. Volkov, A general finite basis condition for systems of semigroup identities, *Semigroup Forum* **41**, № 2 (1990), 181–191.

[114] M. V. Volkov, The finite basis problem for finite semigroups: a survey, Semigroups, World Scientific, River Edge, NJ, 2000, 244–279.

[115] M. V. Volkov, The finite basis problem for finite semigroups, *Sci. Math. Jpn.* **53**, № 1 (2001), 171–199.

[116] M. V. Volkov, György Pollák's work on the theory of semigroup varieties: its significance and its influence so far, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **68**, № 3–4 (2002), 875–894.

[117] M. V. Volkov, On a question by Edmond W. H. Lee, *Изв. Урал. гос. ун-та. (Матем., механ.)* № 36(7) (2005), 167–178.

[118] S. L. Wismath, The lattices of varieties and pseudovarieties of band monoids, *Semigroup Forum* **33**, № 2 (1986), 187–198.

[119] W. T. Zhang, Existence of a new limit variety of aperiodic monoids, *Semigroup Forum* **86**, № 1 (2013), 212–220.

[120] W. T. Zhang, Y. F. Luo, A sufficient condition under which a semigroup is nonfinitely based, *Bull. Aust. Math. Soc.* **93**, № 3 (2016), 454–466.

[121] M. Jackson and E. W. H. Lee, Monoid varieties with extreme properties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **370**, № 7 (2018), 4785–4812.

[122] E. W. H. Lee, Combinatorial Rees–Sushkevich varieties are finitely based, *Internat. J. Algebra Comput.* **18**, № 5 (2008), 957–978.

[123] E. W. H. Lee, Combinatorial Rees–Sushkevich varieties that are Cross, finitely generated, or small, *Bull. Aust. Math. Soc.* **81**, № 1 (2010), 64–84.

[124] E. W. H. Lee, A sufficient condition for the non-finite basis property of semigroups, *Monatsh. Math.* **168**, № 3–4 (2012), 461–472.

[125] E. W. H. Lee, Maximal Specht varieties of monoids, *Mosc. Math. J.* **12**, № 4 (2012), 787–802.

[126] E. W. H. Lee, On certain Cross varieties of aperiodic monoids with commuting idempotents, *Results Math.* **66**, № 3–4 (2014), 491–510.

[127] E. W. H. Lee, Finite involution semigroups with infinite irredundant bases of identities, *Forum Math.* **28**, № 3 (2016), 587–607.

[128] E. W. H. Lee, Equational theories of unstable involution semigroups, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* **24** (2017), 10–20.

[129] E. W. H. Lee, A sufficient condition for the absence of irredundant bases, *Houston J. Math.* **44**, № 2 (2018), 399–411.

[130] E. W. H. Lee, Locally finite monoids in finitely based varieties, *Log. J. IGPL* **27**, № 5 (2019), 743–745.