МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Степанова Екатерина Ивановна

Бифуркации минимальных сетей и минимальных заполнений конечных подмножеств евклидовой плоскости

Специальность 01.01.04 — “геометрия и топология”

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители — **Иванов Александр Олегович**,
доктор физико-математических наук,
профессор
Тужилин Алексей Августинович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты — **Беднов Борислав Борисович,**
кандидат физико-математических наук,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет, кафедра теории функций и
функционального анализа, лаборант
Кушнер Алексей Гурьевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра физико-математических методов
управления, профессор
Фоминых Евгений Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
Санкт-Петербургский государственный
университет, факультет математики и
компьютерных наук, доцент

Защита состоится «23» октября 2020г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: РФ, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

https://istina.msu.ru/dissertations/319504001.

Автореферат разослан «15» сентября 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических
наук, профессор **Чирский Владимир Григорьевич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Диссертация посвящена теории бифуркаций кратчайших сетей и минимальных заполнений конечных множеств точек, расположенных в евклидовой плоскости, а также ее применению. Задачи о кратчайших сетях и о минимальных заполнениях конечных множеств в метрическом пространстве принадлежат классу задач о соединении таких множеств взвешенным графом минимального веса с определенными ограничениями на весовую функцию и вершины.

Одна из самых известных задач такого типа — задача о построении минимального остова, то есть о соединении данного конечного множества точек с метрикой связным графом с наименьшим весом, при условии того, что дополнительных вершин в графе нет, а весовая функция совпадает с метрикой, то есть вес каждого ребра совпадает с расстоянием между соответствующими вершинами. Из соображений минимальности понятно, что решением этой задачи является дерево. Оно называется *минимальным остовным деревом*.

Однако оказалось, что, добавляя в искомый граф новые вершины, можно уменьшить его вес по сравнению с минимальным остовным деревом. Так возникла *проблема Штейнера*, в которой исходное множество точек является подмножеством некоторого метрического пространства, новые вершины в графе также лежат в нем, а за весовую функцию, как и в случае остовного дерева, принимается метрика этого пространства. Эта задача естественно возникает в разнообразных прикладных вопросах: при построении кратчайших транспортных сетей, при построении филогенетических деревьев для определения родственных связей между организмами, при проектировании топологии микросхем и др.

Первый известный нам случай изучения проблемы Штейнера — задача[1] Пьера Ферма, которая заключается в поиске точки на евклидовой плоскости, сумма расстояний от которой до вершин лежащего в этой плоскости треугольника минимальна. Решением этого вопроса занимались итальянские математики XVII века В. Вивиани, Б. Кавальери, Э. Торричелли, а позже и другие ученые. Для того, чтобы соединить большее число различных точек плоскости кратчайшей сетью, может понадобиться добавить две и более дополнительных точек. По-

[1]Fermat P. (1643), *Oeuvres*, ed. H. Tannery, Paris. — 1891. — vol.1.

иском сети минимальной длины на плоскости для четырех точек занимались К. Бопп, К. Ф. Гаусс и Г. К. Шумахер, Б. П. Э. Клапейрон, Г. Ламе. В замечательном историческом обзоре проблемы Штейнера[2] утверждается, что впервые для любого числа точек плоскости эту задачу начал изучать Ж. Д. Жергонн в 1811 году и нашел практически тот же алгоритм решения, что и З. А. Мелзак[3] спустя 150 лет. В 1934 году В. Ярник и О. Кёсслер[4] сделали еще большее обобщение, рассмотрев сети, соединяющие произвольное число точек в евклидовом пространстве любой размерности. Однако в известной книге Р. Куранта и Г. Роббинса “Что такое математика?”[5] эта задача была названа именем Якоба Штейнера (который, на самом деле, обобщил задачу Ферма другим способом: для любого конечного числа точек на плоскости он предлагал найти одну точку, сумма расстояний от которой до данных точек минимальна), с тех пор название прочно закрепилось. В современной классической постановке рассматривается произвольное конечное множество точек в некотором метрическом пространстве и требуется построить связный граф наименьшей длины с вершинами в этом пространстве, который соединял бы все эти точки. Также как и решение задачи о минимальном остове, этот граф является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера*. Отметим, что не всегда можно соединить данное подмножество метрического пространства минимальным деревом Штейнера, в отличие от минимального остовного дерева (простейшим препятствием может служить неполнота метрического пространства).

Еще один подход к построению соединяющего графа наименьшего веса возник на стыке описанных задач и проблемы[6] М. Громова о минимальном заполнении риманова многообразия. А. О. Иванов и А. А. Тужилин предложили[7] брать конечное метрическое пространство (M, ρ) и затягивать его связным взвешенным (с неотрицательной весовой функцией) графом так, что вес пути между любыми двумя точками из M был бы не меньше расстояния между ними

[2]Brazil M., Graham R. L., Thomas D., Zachariasen M., *On the history of the Euclidean Steiner tree problem*, Archive for History of Exact Sciences. — 2014. — Vol. 68, № 3. — P. 327–354.

[3]Melzak Z. A., *On the problem of Steiner*, Canad. Math. Bull. — 1961. — № 4 — P. 143–148.

[4]Jarník V., Kössler O., *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodú*, Časopis pro Pěstování Mat. a Fys. (Essen). — 1934. — Vol. 63. — P. 223–235.

[5]Курант. Р., Робинс. Г., *Что такое математика? : Элементарный очерк идей и методов*, 3-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО. — 2001.

[6]Gromov M., *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. — 1983. — №18. — P. 1–147.

[7]Иванов А. О., Тужилин А. А., *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб. — 2012. — 203 : 5. — С. 65–118.

в метрике ρ. Взвешенный граф, затягивающий M с указанными условиями и имеющий минимальный вес, называется *минимальным заполнением метрического пространства* (M, ρ). Отметим, что в задаче о минимальном заполнении новые вершины в граф добавляются абстрактно и не обязаны лежать в объемлющем метрическом пространстве даже в случае если M рассматривается как его подмножество. Авторы концепции минимального заполнения доказали, что оно существует всегда. Помимо теоретического, минимальные заполнения представляют также и практический интерес. Например, при поиске топологии филогенетического дерева методом присоединения соседей строится дерево, являющееся минимальным заполнением в случае аддитивного пространства[8].

Из трех упомянутых видов кратчайших соединяющих графов только минимальное остовное дерево точно может быть построено за полиномиальное время. Проблема Штейнера за исключением некоторых специфических случаев метрических пространств NP-трудна, а для решения задачи о минимальном заполнении пока известен только алгоритм, основанный на переборе экспоненциального количества деревьев. Поэтому особенно важно изучать свойства минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений и их взаимосвязь.

При решении задач о построении указанных графов невозможно не затронуть вопрос об их структуре, или, как принято говорить, об их топологическом строении. Определение количества дополнительных вершин и способа соединения всех вершин в графе представляет основную сложность при построении решений. В настоящей диссертации изучаются проблемы топологического строения минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений. Большое внимание уделяется четырехточечным исходным множествам. С точки зрения топологии минимального дерева Штейнера, ранее в основном изучались выпуклые четырехточечные множества, например, в работах Поллака[9], Ду, Хванга, Сонга и Тинга[10], Оллереншоу[11]. Венг также рассматривал некоторые частные случаи невыпуклых четырехугольников[12]. Эти авторы представили некоторые

[8] Saitou N., Nei M., *The neighbour-joining method for reconstructing phylogenetic trees*, Molecular Biology and Evolution: journal. — Oxford University Press. — Vol. 4, no. 4. — P. 406–425.

[9] Pollak H. O., *Some remarks on the Steiner problem*, J. Combin. Theor., Ser. A. — 1978. — Vol. 24, № 3. — P. 278–295.

[10] Du D. Z., Hwang F. K., Song G. D., Ting G. T., *Steiner minimal trees on sets of four points*, Discr. and Comp. Geometry. — 1987.— Vol. 2.— P. 401–414.

[11] Ollerenshaw K., *Minimal networks linking four points in a plane*, Inst. Math. Appl. — 1978. — Vol. 15. — P. 208–211.

[12] Weng J. F., *Variational approach and Steiner minimal trees on four points*, Discrete Mathematics. — 1994. —

свойства множеств, позволяющие сделать выводы о специфических топологиях минимального дерева Штейнера.

Основными результатами данной диссертации являются построенные бифуркационные диаграммы, отражающие топологическое строение минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений для всех четырехточечных подмножеств плоскости. Таким образом, получен полный ответ на вопрос о том, как выглядят все минимальные сети Штейнера и все минимальные заполнения для произвольного четырехточечного подмножества плоскости, и как они меняются при изменении положения точек. Выявлены также некоторые общие свойства таких диаграмм для любого числа исходных точек. Диаграммы строятся следующим образом. Фиксируются на плоскости все граничные точки, кроме одной, положение которой служит параметром бифуркационной диаграммы. Бифуркационные диаграммы отражают, какое множество топологий и типов минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений реализуются в зависимости от параметра. Эти бифуркационные диаграммы для построения минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений играют роль диаграмм Вороного для построения минимального остовного дерева (при добавлении новой точки к фиксированному множеству, для которого уже построена диаграмма Вороного, легко понять структуру минимального остовного дерева для множества с добавленной точкой; аналогично для бифуркационных диаграмм минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений).

При исследовании вопроса о виде указанных диаграмм затрагивается вопрос о непрерывности длины минимальных сетей и веса минимальных заполнений. Непрерывность длины минимального остовного дерева и минимальной сети Штейнера при гладких деформациях множества на связных полных римановых многообразиях доказана А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным[13]. В данной диссертации доказывается аналогичный результат для веса минимального заполнения.

Для произвольного конечного подмножества метрического пространства можно определить инфимум веса каждого из рассмотренных графов и оценить, насколько различаются эти веса, с помощью их отношения. В 1968 году Э. Гил-

Vol. 132, № 1–3, P. 349–362.

[13]Иванов А. О., Тужилин А. А., *Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях*, Матем. сб. — 2001. — 192 : 6. — С. 31–50.

берт и Г. Поллак[14] определили *отношение Штейнера метрического пространства*, равное точной нижней грани отношения длины минимального дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева, взятой по всем конечным подмножествам этого пространства, содержащим хотя бы два элемента. Отношение Штейнера показывает, как сильно отличаются эти два вида кратчайших сетей в самом худшем случае для данного пространства. В той же работе Э. Гилберт и Г. Поллак выдвинули гипотезу о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, однако она до сих пор остается открытой, так как выяснилось, что опубликованное в 1992 году доказательство[15] ошибочно[16].

А. О. Иванов и А. А. Тужилин в своей первой работе о минимальных заполнениях предложили рассмотреть еще два отношения. *Суботношение Штейнера* показывает близость минимального заполнения и минимального дерева Штейнера, а *отношение Штейнера-Громова* — минимального заполнения и минимального остовного дерева. Все три отношения называются *отношениями типа Штейнера* и являются числовыми характеристиками метрического пространства.

В данной диссертации на основе построенных бифуркационных диаграмм вычислена числовая характеристика евклидовой плоскости — ее суботношение Штейнера степени 4, а также найдены все множества, на которых оно достигается. Наконец, в диссертации доказано, что суботношение Штейнера связного риманова многообразия размерности n не превышает суботношения Штейнера n-мерного евклидового пространства (аналогичные результаты о других двух отношениях типа Штейнера были доказаны в работах А. О. Иванова, А. А. Тужилина и Д. Цислика[17] и В. А. Мищенко[18]).

[14]Gilbert E. N., Pollak H. O., *Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math. — 1968. — 16 : 1 — P. 1–29.

[15]Du D. Z., Hwang F. K., *A proof of Gilbert-Pollak's conjecture on the Steiner ratio*, Algorithmica. — 1992. — Vol. 7, № 1–2. — P. 121–135.

[16]Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., *The Steiner ratio Gilbert–Pollak conjecture is still open*, Algorithmica. — 2012. — Vol. 62, № 1–2. — P. 630–632.

[17]Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. *Отношение Штейнера для многообразий*, Матем. заметки. — 2003. — 74, №3. — С. 387–395.

[18]Мищенко В. А. *Оценки отношения Штейнера–Громова римановых многообразий*, Фунд. и прикл. матем. — 2013. — 18 : 2. — С. 119–124.

Цели и задачи работы

Настоящая работа посвящена развитию теории минимальных сетей и минимальных заполнений конечных метрических пространств, изучению изменения их топологий при изменении граничного множества, а именно построению теории бифуркаций кратчайших взвешенных соединяющих графов, подробному описанию бифуркационных диаграмм для четырех граничных точек и их применению, в частности, к вычислению суботношения Штейнера степени 4 евклидовой плоскости и оценке суботношения Штейнера римановых многообразий.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Впервые построена теория бифуркаций оптимальных графов с границей. Впервые построены и использованы бифуркационные диаграммы таких графов для вычисления числовой характеристики евклидовой плоскости — ее суботношения Штейнера степени 4.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

1) Вес минимального параметрического заполнения и вес минимального заполнения, рассматриваемые как функции конечных подмножеств связного риманова многообразия, дифференцируемы по направлениям;

2) Бифуркационные диаграммы для минимальных остовных деревьев в евклидовой плоскости являются диаграммами Вороного, причем на каждом двумерном страте реализуется одно минимальное остовное дерево, на одномерном — два, а на нульмерном — столько, сколько двумерных стратов содержат его в своей границе;

3) На бифуркационных диаграммах топологий минимальных сетей Штейнера фиксированного бинарного типа $\mathcal{T}$ на евклидовой плоскости:

    - все одномерные страты являются частями прямых и окружностей;

- на одномерных стратах либо реализуется та топология из примыкающих двумерных стратов, где вырожденных ребер больше, либо (если в одном из примыкающих двумерных стратов тип $\mathcal{T}$ не реализуется) рассматриваемый тип $\mathcal{T}$ не реализуется;
- в каждой точке — нульмерном страте — реализуется топология, в которой множество вырожденных ребер является объединением множеств вырожденных ребер топологий всех входящих в эту точку одномерных стратов;

4) На бифуркационной диаграмме типов минимальных сетей Штейнера на евклидовой плоскости:

   - одномерные страты склеены из частей алгебраических кривых порядка не выше 12;
   - для четырех точек:
     - одномерные страты склеены из частей алгебраических кривых порядка не выше 8;
     - на каждом двумерном страте реализуется один тип, на каждом одномерном — два типа, на нульмерном — три;
     - если в фиксированном треугольнике все углы меньше 120°, то двумерных страта три, одномерных три, нульмерный один, иначе — двумерных два, одномерный один и нульмерных нет;

5) На бифуркационной диаграмме типов минимальных заполнений:

   - при количестве точек не больше 7 одномерные страты являются частями ветвей алгебраических кривых;
   - при четырех точках:
     - одномерные страты являются ветвями гипербол Содди фиксированного треугольника;
     - на каждом двумерном страте реализуется один тип, на каждом одномерном — два типа, на нульмерном — три;
     - если три фиксированные точки лежат на одной прямой, двумерных страта два, одномерных — два, нульмерный — один;

– если фиксированные точки не лежат на одной прямой, то при сумме тангенсов половинных углов фиксированного треугольника не больше 2 получается три двумерных страта, три одномерных и один нульмерный, иначе — три двумерных, четыре одномерных и два нульмерных;

6) Суботношение Штейнера степени 4 евклидовой плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и достигается только на множествах вершин равнобедренных трапеций, у которых основания видны из точки пересечения диагоналей под углом $60°$.

Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, математического анализа, теории графов, теории минимальных сетей, теории минимальных заполнений конечных метрических пространств, топологии, евклидовой геометрии, теории алгоритмов. Для экспериментального анализа поведения длины минимальных сетей и веса минимальных заполнений при изменении положения точек привлекается программный пакет “Wolfram Mathematica”.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области минимальных сетей, минимальных заполнений, евклидовой геометрии, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии. Построенные бифуркационные диаграммы дают представление о поведении минимальных сетей и минимальных заполнений на плоскости, могут быть использованы для эффективного построения разных видов оптимальных соединяющих графов для большого числа границ, различающихся одной точкой, а также для поиска приближенных решений задачи Штейнера.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2012” (МГУ, 9–13 апреля 2012)

- на XI международном научном семинаре “Дискретная математика и ее приложения” имени академика О. Б. Лупанова (МГУ, 18–23 июня 2012)
- на международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016” (г. Воронеж, 25–31 января 2016)
- на международном семинаре “Critical and collective effects in graphs and networks – 2016” (МФТИ, г. Москва, 25–29 апреля 2016)
- на международной конференции “Александровские чтения – 2016” (МГУ, 22–26 мая 2016)
- на III международной школе-конференции “Геометрический анализ и его приложения” (г. Волгоград, 30 мая – 3 июня 2016)
- на семинаре “Дискретная геометрия и геометрия чисел” под руководством проф. Н. К. Долбилина, проф. М. Д. Ковалева и проф. Н. Г. Мощевитина (МГУ, 9 ноября 2016)
- на семинаре “Экстремальные сети” под руководством проф. А. О. Иванова и А. А. Тужилина (МГУ, 2012–2016 гг.)
- на международной конференции “XX Geometrical Seminar” (г. Врнячка Баня, Сербия, 20–23 мая 2018)
- на международной конференции “Классическая и современная геометрия” (МПГУ, г. Москва, 22–25 апреля 2019)

Публикации автора

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях автора [1–5] и 8 тезисах международных конференций, пять статей — в журналах, удовлетворяющих пункту 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из оглавления, введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего список публикаций по теме диссертации.

В первой главе даются необходимые определения и предварительные сведения из теории минимальных сетей и минимальных заполнений.

Во второй главе рассматривается вопрос о дифференцируемости веса оптимальных соединяющих графов.

В третьей главе изучаются бифуркации оптимальных соединяющих графов в трех разных классах на плоскости: в классе остовных деревьев, в классе сетей (для двух характеристик: типа и топологии) и в целом классе заполнений.

В четвертой главе вычисляется суботношение Штейнера степени четыре для евклидовой плоскости. Оказалось, что невыпуклый случай четырех точек чрезвычайно нетривиален, и именно бифуркационные диаграммы минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений позволяют его проанализировать и получить полный ответ. Также здесь дается верхняя оценка на суботношение Штейнера римановых многообразий.

Библиография содержит 64 наименования.

Текст настоящей диссертации изложен на 103 страницах и содержит 10 иллюстраций.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации приводится историческая справка по исследуемой области, раскрывается актуальность темы диссертации, неформально вводятся определения и формулируются основные результаты диссертации. Также приведена информация о публикациях и апробации работы.

В первой главе вводятся определения оптимальных взвешенных графов с границей в трех разных классах: классе заполнений, классе сетей и классе остовных деревьев. Обсуждаются свойства минимальных сетей и минимальных заполнений. Объясняется, почему любой оптимальный соединяющий граф можно считать деревом. Также объясняются понятия типов и топологий заполнений, минимальных параметрических заполнений. Неформально, тип $\mathcal{T}(G,\omega)$ взвешенного дерева (G,ω) — это бинарное дерево (у которого степень каждой вершины равна 1 или 3), равное по весу исходному и полученное из него вклейкой ребер нулевого веса; топология взвешенного дерева (G,ω) — это пара $(\mathcal{T}(G,\omega), E_n)$, где E_n — множество ребер нулевого веса в $\mathcal{T}(G,\omega)$; минимальное параметрическое заполнение — заполнение фиксированного типа минимального возможного веса.

Также приводятся известные результаты, описывающие свойства оптимальных графов и отношений типа Штейнера, необходимые для дальнейшего изложения. Кроме того, вводится понятие планарных структур для деревьев Штейнера на плоскости, позволяющее более тонко, чем топология, описывать их строение, а также описывается алгоритм составления обозначений (кодировка) топологий и планарных структур, что значительно упрощают изложение текста диссертации.

Во второй главе обсуждается дифференцируемость веса оптимальных заполнений в разных классах.

Пусть X — связное полное риманово многообразие, $M = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset X$, $n > 1$, и $M_t = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}, t \in [0,1], p_i(0) = p_i$, — некоторая гладкая деформация множества M, то есть набор гладких кривых $p_i(t)$. Для множества M обозначим через $\mathrm{mpn}(M, G)$ длину минимальной параметрической сети типа G, через $\mathrm{smn}(M)$ — длину минимальной сети Штейнера, через $\mathrm{mst}(M)$ — длину минимального остовного дерева, а через $\mathrm{sr}(M)$ — отношение Штейнера.

А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным была доказана[19] следующая теорема о дифференцируемости по направлениям длин минимальной параметрической сети, минимальной сети Штейнера и минимального остовного дерева, а также отношения Штейнера:

Функции $\mathrm{mpn}(M_t, G)$, $\mathrm{smn}(M_t)$, $\mathrm{mst}(M_t)$ и $\mathrm{sr}(M_t)$ дифференцируемы при $t = 0+$, и

$$\left.\frac{d\,\mathrm{sr}(M_t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{1}{\mathrm{mst}(M)}\left(\mathrm{smn}'(M_0) - \mathrm{sr}(M)\,\mathrm{mst}'(M_0)\right).$$

Основным результатом второй главы является аналогичное утверждение для веса минимального заполнения и двух других отношений Штейнера. Пусть для множества M $\mathrm{mpf}(M, G)$ — вес минимального параметрического заполнения типа G, $\mathrm{mf}(M)$ — вес минимального заполнения, $\mathrm{ssr}(M)$ — суботношение Штейнера, а $\mathrm{sgr}(M)$ — отношение Штейнера–Громова.

Теорема 0.0.1 (Теорема 2.1.2 в диссертации). *Функции* $\mathrm{mpf}(M_t, G)$, $\mathrm{mf}(M_t)$,

[19] Иванов А. О., Тужилин А. А., *Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях*, Матем. сб. — 2001. — 192 : 6. — С. 31–50.

$\mathrm{ssr}(M_t)$ *и* $\mathrm{sgr}(M_t)$ *дифференцируемы при* $t = 0+$, *и*

$$\left.\frac{d\,\mathrm{ssr}(M_t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{1}{\mathrm{smn}(M)}\left(\mathrm{mf}'(M_0) - \mathrm{ssr}(M)\,\mathrm{smn}'(M_0)\right).$$

$$\left.\frac{d\,\mathrm{sgr}(M_t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{1}{\mathrm{mst}(M)}\left(\mathrm{mf}'(M_0) - \mathrm{sgr}(M)\,\mathrm{mst}'(M_0)\right).$$

Следствие 0.0.2 (Следствие 2.1.3 в диссертации)**.** *Функции* $\mathrm{mpn}(M_t, T)$, $\mathrm{smn}(M_t)$, $\mathrm{mpf}(M_t, T)$, $\mathrm{mf}(M_t)$ *и* $\mathrm{ssr}(M_t)$ *являются непрерывными по отношению к гладким деформациям граничного множества* M.

В третьей главе строится теория бифуркаций оптимальных взвешенных графов с границей.

В первом параграфе формулируются определения для построения указанной теории.

Рассмотрим произвольную границу $\{A_1, \ldots, A_n\}$ из n точек на плоскости. Все точки, кроме одной A_n, закрепим. Различные фиксированные точки не могут занимать одно и то же положение (иначе будем считать, что граница состоит из меньшего числа точек). Последней точке позволим занимать произвольное положение на плоскости, ее позицию будем называть *параметром бифуркационной диаграммы.* Мы будем рассматривать бифуркации (изменения, скачки) некоторых свойств разных оптимальных соединяющих графов. Дадим общее определение.

Определение 1. *Бифуркационной диаграммой свойства* σ *оптимальных соединяющих графов в классе* $\mathcal{K}$ мы будем называть разбиение плоскости как множества значений параметра такое, что на каждом элементе разбиения своя реализация свойства σ для оптимальных заполнений в смысле $\mathcal{K}$. Элемент разбиения будем называть *стратом бифуркационной диаграммы.*

Основная наша цель — изучить бинарные типы минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера. При изучении типов кратчайших сетей возникла необходимость рассмотреть также, какие планарные структуры сетей Штейнера реализуются при разном значении параметра в случае, когда бинарный тип фиксирован. То есть в случае минимальных сетей Штейнера в качестве свойств мы рассматриваем тип и планарную структуру сети. В случае минимальных заполнений — тип заполнения, а также формулу веса, так как именно она имеет наибольшее практическое значение.

Непрерывность веса минимального параметрического заполнения в рассматриваемых классах гарантирует, что одномерные и двумерные страты на бифуркационной диаграмме типов — открытые связные множества.

Определение 2. *Типом бифуркационной диаграммы* называется набор стратов на ней вместе с их взаимным расположением и реализацией свойства на каждом страте.

Далее изучаются бифуркационные диаграммы оптимальных соединяющих графов в разных классах.

Во втором параграфе доказывается, что бифуркационная диаграмма структуры минимального остовного дерева является диаграммой Вороного фиксированного множества.

В третьем параграфе показывается, что на бифуркационной диаграмме минимальных заполнений одномерные страты в общем случае устроены достаточно сложно, однако когда имеется не более 7 граничных точек, они являются частями алгебраических кривых. Строятся бифуркационные диаграммы типа и веса минимальных заполнений для четырех граничных точек, полностью описываются все типы таких бифуркационных диаграмм и расположение одномерных и двумерных стратов на них.

Наконец, исследуются бифуркационные диаграммы сетей Штейнера на плоскости.

В четвертом параграфе фиксируется бинарный тип, а топологии меняются. Для такой ситуации верна следующая теорема.

Теорема 0.0.3 (Теорема 3.4.1 в диссертации)**.** *Множество одномерных стратов на бифуркационной диаграмме топологий фиксированного бинарного типа содержит только следующие страты:*

(1) *дуги окружностей, на которых A_n является вершиной степени 2 в дереве Штейнера так, что угол в ней равен $120°$;*

(2) *лучи или отрезки, на которых A_n занимает такие положения, при которых угол между бинарной компонентой, содержащей A_n, и смежной бинарной компонентой равен $120°$;*

(3) *страты, на которых или вблизи которых дерево Штейнера данного типа перестает существовать:*

(a) *одна из дуг окружностей, из точек которых отрезок* A_iA_j *виден под углом* $120°$*, где точки* $\{A_i, A_j\}$ *— усы в данном бинарном типе;*

(b) *лучи или отрезки такие, что некоторая граничная точка (не* A_n*) становится вершиной степени 3 с углами в ней, равными* $120°$*;*

(c) *лучи или отрезки такие, что при построении в алгоритме Мелзака образуется внутренняя вершина степени больше 3.*

Следствие 0.0.4 (Следствие 3.4.2 в диссертации)**.** *На одномерном страте, разделяющем двумерные страты с разными топологиями, реализуется та из этих топологий, где вырожденных ребер больше. В точке пересечения одномерных стратов реализуется топология, в которой вырожденными являются те и только те ребра, которые вырождены хотя на в одном из этих одномерных стратов. На одномерных стратах, лежащих на границе двумерного страта, на котором нет дерева Штейнера данного бинарного типа, реализации этого типа также нет.*

Четырехточечные граничные множества разбиты на семейства с различными типами таких бифуркационных диаграмм. Для каждого семейства построена бифуркационная диаграмма.

В пятом параграфе рассматриваются бифуркационные диаграммы бинарных типов минимальных сетей Штейнера. Доказывается, что все одномерные страты на таких диаграммах склеены из частей ветвей алгебраических кривых порядка не выше 12, а в случае четырех граничных точек — не выше 8. В качестве вспомогательного результата доказана следующая лемма.

Лемма 0.0.5 (Лемма 3.5.5 в диссертации)**.** *Не существует четырехточечных границ, для которых одновременно два минимальных дерева Штейнера являются трехзвенными ломаными.*

Доказывается, что для четырех граничных точек существует два типа указанных бифуркационных диаграмм, приводится их описание.

В четвертой главе результаты о бифуркациях из четвертой главы применяются для вычисления одной числовой характеристики плоскости — ее суботношения Штейнера степени 4. Для этого сначала доказываются теоремы о взаимном расположении стратов на бифуркационных диаграммах типов минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений для одной и той же границы. Затем рассматриваются разные конфигурации четырехточечных множеств и показывается, что для нестрого выпуклого случая суботношение равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. В строго невыпуклом случае самыми нетривиальными оказались конфигурации, для которых минимальная сеть Штейнера содержит одну дополнительную вершину.

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема 0.0.6 (Леммы 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 и Теорема 4.2.5 в диссертации)**.** *Суботношение Штейнера степени 4 евклидовой плоскости равно* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *и достигается только на множествах вершин равнобедренных трапеций, у которых основания видны из точки пересечения диагоналей под углом* $60°$*.*

В конце четвертой главы доказана теорема об оценке суботношения Штейнера на римановом многообразии.

Теорема 0.0.7 (Теорема 4.3.1 в диссертации)**.** *Суботношение Штейнера (простое или некоторой степени k) произвольного связного риманова многообразия размерности n не превосходит суботношения Штейнера евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.*

С учетом теоремы 0.0.7 и найденного[20] З. Н. Овсянниковым примера пяти точек плоскости, для которых суботношение строго меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, получается следующее следствие.

Следствие 0.0.8. *Суботношение Штейнера связного риманова многообразия размерности по крайней мере 2 строго меньше* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*.*

Заключение

Перечислим еще раз основные результаты работы и приведем возможные направления дальнейших исследований.

В диссертации минимальные заполнения и минимальные сети Штейнера рассмотрены в качестве оптимальных взвешенных графов с границей (оптимальных заполнений в классе заполнений и в классе сетей). Благодаря этому определения и общие свойства обоих объектов формулируются для оптимальных заполнений в произвольном классе. Для сетей Штейнера на плоскости

[20] Овсянников З. Н., *Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырех точек в пространстве*, Фунд. и прикл. матем. — 2013. — 18 : 2. — С. 167–179.

введено понятие планарных структур, объединяющее в себе топологию и взаимное расположение граничных вершин; оно помогает описанию бифуркационных диаграмм в третьей главе.

Во второй главе доказана дифференцируемость по направлениям веса минимального заполнения и минимального параметрического заполнения на связном полном римановом многообразии. Этот результат дополняет аналогичный факт о минимальных деревьях Штейнера[21]. Дифференцируемость по направлениям оптимальных графов с границей позволяет сделать вывод о стратификации плоскости при построении бифуркационных диаграмм в третьей главе, а также разработать специальную технику для вычисления суботношения Штейнера в четвертой главе.

В третьей главе описана теория бифуркаций оптимальных взвешенных соединяющих графов с границей. Показано, что диаграммы Вороного являются бифуркационными диаграммами для минимальных остовных деревьев. Показано, что одномерные страты на бифуркационных диаграммах минимальных заполнений могут не являться алгебраическими кривыми, в то время как на бифуркационных диаграммах минимальных сетей Штейнера все одномерные страты составлены из алгебраических кривых не выше 12 порядка.

Далее, в третьей главе подробно рассмотрен случай четырех точек. Для всех четырехточечных конфигураций построены бифуркационные диаграммы как минимальных заполнений, так и минимальных сетей Штейнера. Оказалось, что mf-кривые, на которых реализуется по два бинарных типа минимальных заполнений, являются ветвями гипербол, а smn-кривые, на которых реализуется по два типа минимальных сетей Штейнера, склеены из частей алгебраических кривых порядка не выше 8. Найдены все точки, для которых реализуются одновременно три типа оптимальных заполнений: в классе всех заполнений их одна или две, в классе сетей — не больше одной. Для сетей Штейнера в третьей главе построены не только бифуркации типов, но и бифуркации топологий фиксированного бинарного типа.

Четвертая глава посвящена взаимоотношению минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера. Показано, как расположены друг относительно друга mf- и smn-кривые для невыпуклых четырехточечных границ, а так-

[21] Иванов А. О., Тужилин А. А., *Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях*, Матем. сб. — 2001. — 192 : 6. — С. 31–50.

же бифуркационные диаграммы применяются для вычисления суботношения Штейнера степени 4 евклидовой плоскости. Также доказано, что суботношение Штейнера римановых многообразий не больше суботношения евклидового пространства той же размерности, таким образом, дана верхняя оценка на эту числовую характеристику для римановых многообразий.

Перечислим некоторые вопросы, которые хотелось бы решить в дальнейшем.

1) Есть ли более простая формула веса минимального заполнения конечного множества точек в евклидовом пространстве, хотя бы для размерности 2? Можно ли ограничить кратность мультиобходов в этом случае? Это помогло бы сделать вывод о более простом виде одномерных стратов на бифуркационных диаграммах минимальных заполнений.

2) Построить бифуркационные диаграммы минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера для произвольного числа граничных точек плоскости.

3) Построить бифуркационные диаграммы оптимальных соединяющих графов в других пространствах.

4) Найти или оценить суботношение Штейнера больших степеней в евклидовой плоскости и других пространствах.

Благодарности

Автор искренне благодарит своих научных руководителей профессора А. А. Тужилина и профессора А. О. Иванова за постановку задачи, плодотворные обсуждения и поддержку.

Автор также признательна Д. П. Ильютко и А. Б. Жеглову за полезные обсуждения, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за доброжелательную атмосферу.

Автор благодарит всех участников семинара “Экстремальные сети” за многочисленные дискуссии.

Наконец, автор благодарна всем членам своей семьи за огромную поддержку и помощь.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1) Степанова Е. И. *Дифференцирование по направлениям веса минимального заполнения на римановом многообразии* // Вестн. Моск. Ун-та., Сер. 1, Математика. Механика. — 2015. — 70 : 1. — С. 15–20.

   Англ. пер.: Stepanova E. I. *Directional derivative of the weight of a minimal filling in Riemannian manifolds* // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2015. — 70. — P. 14–18.
   https://doi.org/10.3103/S0027132215010039
   Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,249.

2) Степанова Е. И. *Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера евклидовой плоскости* // Вестн. Моск. Ун-та., Сер. 1, Математика. Механика. — 2016 — 71 : 2. — С. 48–51.

   Англ. пер.: Stepanova E. I. *Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and Steiner subratio for the Euclidean plane* // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — 71. — P. 79–81.
   https://doi.org/10.3103/S0027132216020078
   Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,249.

3) Степанова Е. И. *Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости* // Фунд. и прикл. матем. — 2016. — 21 : 6. — С. 183–204.

   Англ. пер.: Stepanova E. I. *Bifurcations of Steiner tree topologies in the plane* // J. Math. Sci. — 2020. — 248. — P. 788–802.
   https://doi.org/10.1007/s10958-020-04913-y
   Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,198.

4) Степанова Е. И. *Бифуркации бинарных типов минимальных сетей Штейнера на плоскости* // Фунд. и прикл. матем. — 2019. — 22:6. — С. 227–252.
   Журнал индексируется РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,198.

5) Степанова Е. И. Бифуркации минимальных заполнений для четырех точек евклидовой плоскости // Фунд. и прикл. матем. — 2019. — 22:6. — С. 253–261.
   Журнал индексируется РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,198.