

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Жила Александра Игоревна

**Топологические инварианты системы: «Шар
Чаплыгина с ротором на плоскости»**

Специальность 01.01.04 —
геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители:

Фоменко Анатолий Тимофеевич

доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН

Ошемков Андрей Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты:

Соколов Сергей Викторович,

доктор физико-математических наук, ФГАОУ
ВО «Московский физико-технический институт
(национально-исследовательский университет)»,
заведующий кафедрой теоретической механики.

Рябов Павел Евгеньевич,

доктор физико-математических наук, доцент,
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации»,
Факультет информационных технологий и анализа
больших данных, Департамент анализа данных
и машинного обучения, профессор.

Цветкова Анна Валерьевна,

кандидат физико-математических наук,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
РАН, Лаборатория механики природных катастроф,
младший научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 23 октября 2020 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а так же со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС "ИСТИНА": <https://istina.msu.ru/dissertations/319501481>

Автореферат разослан 23 сентября 2020 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ МГУ,
д.ф.-м.н., доцент



Чирский В. Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

В диссертации исследуется топология слоения Лиувилля системы “шар Чаплыгина с ротором”. В работе находят активное практическое применение ранее предложенные методы вычисления инвариантов, а также теория топологической классификации, построенная А.Т.Фоменко и Х.Цишангом, а затем развитая в работах А.В.Болсинова и многих других математиков.

В симплектической геометрии и классической механике обнаружено большое количество интересных систем с неголономными связями. Изучение динамики неголономных систем было выделено в независимую область исследования симплектической топологии и теоретической механики, когда стало понятно, что стандартный формализм Лагранжа неприменим к системам с неголономными связями. Однако, некоторые неголономные системы, называемые конформно–гамильтоновыми, сохраняют интеграл энергии и другие тензорные инварианты. Таким образом, для их анализа применимы методы обычной гамильтоновой механики, в том числе и новые топологические.

В настоящей диссертации изучается топология слоения Лиувилля, то есть пространство замыканий решений системы. С помощью топологических инвариантов можно выявлять эквивалентные и неэквивалентные интегрируемые системы. Все исследования проводятся в рамках теории Фоменко классификации интегрируемых систем, основанной на инвариантах Фоменко, использующих бифуркационные комплексы.

В данной диссертации исследуются топологические инварианты одной конформно – гамильтоновой системы, а именно, рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по горизонтальной шероховатой плоскости. Эту систему называют также шаром Чаплыгина с ротором. Ранее в работе А.Ю. Москвина¹ для исследования динамики системы и нахождения особых решений были построены бифуркационная диаграмма отображения момента и бифуркационный комплекс. Отметим, что частным случаем данной системы является случай Жуковского, который хорошо изучен и подробно описан, например, в книге Интегрируемые гамильтоновы системы². Естественное продолжение исследований А.Ю. Москвина — это проведение тонкого лиувиллевого анализа системы. В настоящей диссертации проверена невырожденность особенностей, описано слоение Лиувилля в окрестности особых точек отображения момента, построены разделяющие кривые для определения типов изоэнергетических поверхностей, найдены инварианты Фоменко и исследована грубая лиувил-

¹Москвин А.Ю., *Топология особенностей дробно-рациональных интегрируемых систем*, Кандидатская диссертация 2010.

²Болсинов А.В. Фоменко А.Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Ижевск: РХД, 1999.

лева эквивалентность данной системы с системой Жуковского.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Исследовать невырожденность особых точек системы шар Чаплыгина с ротором.
2. Вычислить все инварианты Фоменко системы шар Чаплыгина с ротором и среди найденных слоений Лиувилля найти слоения, которые эквивалентны ранее изученной системе Жуковского.
3. Найти топологические типы изоэнергетических поверхностей системы шар Чаплыгина с ротором.
4. Для системы шар Чаплыгина с ротором построить такие разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, c)$ при различных значениях параметров системы, что меченные молекулы системы будут совпадать для всех точек из одной области.
5. Классифицировать матрицы склейки круговых молекул точки типа центр–центр.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Для шара Чаплыгина с ротором невырожденность точек ранга 1 и 0, а также типы невырожденных особенностей системы, полностью определяются бифуркационной диаграммой отображения момента. А именно, в случае, когда у ротора нет нулевых компонент, для всех допустимых значений параметров системы верно следующее: все точки ранга 0, лежащие в прообразах точек трансверсального пересечения двух или трех дуг бифуркационной диаграммы, невырождены и имеют тип центр–центр или центр–седло; все вырожденные точки ранга 0 лежат в прообразе точек, в которых пересекаются больше трех дуг бифуркационной диаграммы; все вырожденные точки ранга 1 лежат в прообразе точек возврата и точек касания дуг бифуркационных диаграмм.
2. Существуют такие значения параметров системы Чаплыгина, что для малых уровней энергии возникают молекулы, не встречающиеся в случае Жуковского. При этом на высоких уровнях энергии данные системы грубо лиувиллево эквивалентны.

3. В системе шар Чаплыгина с ротором встречаются 3 топологических типа изоэнергетических поверхностей: $\mathbb{R}P^3$, $S^1 \times S^2$, S^3 . Кривые, разделяющие указанные топологические типы изоэнергетических поверхностей и являющиеся множеством критических значений отображения $H \times C : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, c)$, описаны явными формулами и построены при различных значениях параметров системы.
4. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, c)$, разделяющие области с различными типами меченых молекул, описаны явными формулами. Получен полный, возможно избыточный, список возможных грубых молекул и топологических типов трехмерных поверхностей для всех возможных 39 допустимых кривых. Если верна гипотеза о реализуемости только 6 типов бифуркационных диаграмм для системы шар Чаплыгина с ротором, то разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, c)$ задают ровно 27 различных областей с типами меченых молекул для всех значений девяти параметров системы, т.е. каждое из трехмерных многообразий, соответствующих допустимым кривым на этих 6 типах диаграмм, реализуется как изоэнергетическая поверхность при некоторых значениях параметров K, I, d .
5. Матрицы склейки круговых молекул точки типа центр-центр классифицированы в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы в окрестности такой точки. В частности, для каждого из возможных расположений этих дуг определено значение ε -метки: +1 или -1.

Объект и предмет исследования

Объектом исследований является интегрируемая гамильтонова система: шар Чаплыгина с ротором.

Предмет исследования — топологические инварианты и топология слоений Лиувилля данной системы.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно, и её новизна заключается в следующем:

1. Исследована невырожденность особых точек системы шар Чаплыгина с ротором.
2. Вычислены все инварианты Фоменко системы шар Чаплыгина с ротором и изучена эквивалентность данной системы и системы Жуковского.

3. Найдены топологические типы изоэнергетических поверхностей системы шар Чаплыгина с ротором.
4. Для системы шар Чаплыгина с ротором построены такие разделяющие криевые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, c)$ при различных значениях параметров системы, что меченные молекулы системы совпадают для всех точек из одной области.
5. Классифицированы матрицы склейки круговых молекул точки типа центр-центр.

Методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенные А.Т.Фоменко и Х.Цишангом, а затем развитые в работах А.В.Болсинова, А.А.Ошемкова и многих других математиков. При проверке невырожденности положений равновесия используются методы линейной алгебры и классической дифференциальной геометрии с привлечением компьютерных пакетов символьных вычислений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем. Полученная классификация матриц склейки особенностей типа центр-центр может быть применима для вычисления инвариантов Фоменко—Цишинга интегрируемых гамильтоновых систем.

Апробация работы

Результаты опубликованы в четырёх статьях [1-4] (см. стр. 18) из которых четыре опубликованы в журналах, удовлетворяющие положению о присуждении учёных степеней в МГУ. Результаты диссертации были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019 МГУ», Россия, 9-12 апреля 2019
- 2018 International Conference on Topology and its Applications, Нафпактос, Греция, 7-11 июля 2018

- Международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», г.Воронеж, Россия, 13-16 ноября 2017
- Молодежная Международная научная конференция «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения», г. Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет, Россия, 23-25 декабря 2016
- Международная конференция «Аналит, вероятность и геометрия», Москва, Россия, 25 сентября - 2 октября 2016
- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (26 июня - 2 июля 2016г., Казань), Казань, Россия, 26 июня - 2 июля 2016
- Александровские чтения-2016, г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова,
- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, Россия, 11-15 апреля 2016
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016, Воронеж, Россия, 25-31 января 2016
- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015», Москва, Россия, 13-17 апреля 2015

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре «Современные геометрические методы» (мех-мат МГУ) и на семинаре «Алгебра и топология интегрируемых систем» (мех-мат МГУ).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст работы изложен на 88 страницах. Список литературы содержит 15 наименований.

Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной механике твердого тела.

Содержание главы 1

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые теоремы топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Описаны фазовое пространство и конформно-гамильтоновы дифференциальные уравнения на пуассоновых многообразиях, которые возникают в задачах неголономной механики.

Определение. Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, f_2, \dots, f_n .

В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматривают несколько типов их изоморфизмов.

Определение. Две интегрируемые гамильтоновы системы (v_1, M_1) и (v_2, M_2) лиуvilleво эквивалентны, если существует дiffeоморфизм $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ переводящий слои Лиувилля одной системы в слои другой.

Это отношение можно немного ослабить, тогда получаем понятие *грубой лиувиллевой эквивалентности*:

Определение. Две интегрируемые гамильтоновы системы (v_1, M_1) и (v_2, M_2) грубо лиуvilleво эквивалентны, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

В главах 2 и 3 рассмотрены гамальтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть такие, у которых фазовое симплектическое многообразие M имеет размерность 4, а интегрируемость гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом H дополнительного интеграла F . Изоэнергетической поверхностью называется поверхность уровня гамильтониана $Q_h^3 = \{x \in M | H(x) = h\}$. Полным инвариантом слоения Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности является *инвариант Фоменко-Цишанга*, также называемый *меченой молекулой*. Он представляет собой граф, ребра которого отвечают однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — критическим слоям, в которых происходят бифуркции. Ребра и некоторые группы вершин этого графа снабжены числовыми метками.

Определение (А. Т. Фоменко). Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется *3-атомом*.

С конструктивной точки зрения, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой слоения Лиувилля. Это многообразие содержит ровно один сингулярный слой. Граница состоит из конечного числа торов. Количество критических

окружностей на сингулярном слое называется *сложностью атома*. В книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко приводится классификация возможных 3-атомов в зависимости от их сложности. В данной работе встречаются только атомы A и B .

Если каждой вершине графа, отвечающего слоению Лиувилля, сопоставить подходящий 3-атом, то получим *грубую молекулу (инвариант Фоменко)* слоения Лиувилля. Грубая молекула несет информацию о слоении Лиувилля и позволяет локально восстановить структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев.

Теорема (А. Т. Фоменко). *Две интегрируемые гамильтоновы системы (v_1, Q_1^3) и (v_2, Q_2^3) грубо лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

Способ склейки глобального изоэнергетического многообразия из 3-атомов задается числовыми метками трех типов: r , ε и n . Вместе с грубой молекулой они и составляют инвариант Фоменко-Цишанга. Имеет место следующий результат

Теорема (Фоменко-Цишанг). *Две интегрируемые гамильтоновы системы (v_1, Q_1^3) и (v_2, Q_2^3) лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченные молекулы совпадают.*

Содержание главы 2

Во **второй главе** рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, называемая случаем шара Чаплыгина с ротором. В таком случае скорость точки контакта равна нулю. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{M} = (M + K) \times \omega, & M = J\omega - d(\gamma, \omega)\gamma, & J = I + dE, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, & d = mr^2 \geq 0, & E = \|\delta_{ij}\|. \end{cases}$$

где ω — вектор угловой скорости, γ — орт вертикали, $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, m — масса шара, r — его радиус. Вектор M имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта, вектор K — постоянный вектор момента ротора.

Система обладает четырьмя первыми интегралами:

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega), \quad N = (M + K, M + K), \quad C = (M + K, \gamma), \quad G = (\gamma, \gamma).$$

Согласно работе Борисова А.В. и Мамаева И.С.³, рассматриваемая система

³Борисов А.В. & Мамаев И.С., *Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении Шара*, Мат. заметки 1987. **70**, №. 5. с. 793–795.

является конформно-гамильтоновой (то есть вида $\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x})\text{sgrad } H(\mathbf{x})$) с гамильтонианом H и приводящим множителем

$$\mu(M, \gamma) = 1/\sqrt{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}$$

относительно скобки Пуассона, которая в координатах (M, γ) задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk}\rho(M_k + K_k - g\gamma_k), \\ \{M_i, \gamma_j\} &= \varepsilon_{ijk}\rho\gamma_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= 0, \end{aligned}$$

где ε_{ijk} — тензор Леви-Чивитта. При этом были введены следующие обозначения:

$$\rho = \sqrt{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)},$$

$$g = d(\omega, \gamma) = \frac{d(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}.$$

Для указанной скобки Пуассона интегралы C и G являются функциями Казимира. Они расслаивают фазовое пространство $\mathbb{R}^6(M, \gamma)$ на четырехмерные симплектические листы

$$\mathcal{M}_{c,a}^4 = \{C = c, G = a\}.$$

Замечание. Система шар Чаплыгина зависит от 7 параметров: d , трех компонент K_i ротора $K = (K_1, K_2, K_3)$ и трех компонент I_i тензора инерции $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Молекулы системы зависят от 9 параметров: к перечисленным выше семи добавляются значения интегралов $C = c$ и $H = h$.

В дальнейшем будем считать, что ротор не имеет нулевых компонент, т.е. $K_i \neq 0$, а главные моменты инерции упорядочены $0 < I_1 < I_2 < I_3$. Параметр d не отрицателен. Отметим, что в случае $d = 0$ система уравнений, задающая систему шар Чаплыгина с ротором, совпадает с уравнениями для случая Жуковского (см., например, в работе ⁴ Борисова А.В. и Мамаева И.С.). В силу определения H и C , значения H всегда будут больше или равны 0.

Рассмотрим *отображение момента*, определяемое следующим образом:

$$H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f).$$

Критическими точками называют точки, в которых ранг дифференциала отображения момента меньше двух. Образ критических точек отображения момента называют *бифуркационной диаграммой*. Обычно она состоит из набора гладких кривых, имеющих конечное число точек возврата, точек касания и точек транс-

⁴Борисов А.В. & Мамаев И.С., *Динамика твердого тела*, РХД, Ижевск 2005.

версального пересечения дуг (будем называть эти точки особыми для бифуркационной диаграммы).

Для задачи шар Чаплычина с ротором на плоскости найдены координаты особых точек бифуркационной диаграммы системы и проверена невырожденность этих особенностей. Следующая теорема является одной из основных в диссертации.

Теорема. Для шара Чаплыгина с ротором невырожденность точек ранга 1 и 0, а также типы невырожденных особенностей системы полностью определяются бифуркационной диаграммой отображения момента. А именно, в случае, когда у ротора нет нулевых компонент, для всех допустимых значений перечисленных выше параметров системы выполнены следующие утверждения:

1. Все критические точки в прообразе неособых точек бифуркационных диаграмм являются невырожденными точками ранга 1. При этом, в системе присутствуют только два типа перестроек: эллиптические точки ранга 1 соответствуют перестройке типа A, а все гиперболические точки ранга 1 – перестройке типа B.
2. В прообразе любых особых точек бифуркационной диаграммы (то есть в прообразе точек возврата, точек касания и точек трансверсального пересечения дуг) лежит либо вырожденная точка ранга 1, либо точка ранга 0.
3. Все вырожденные точки ранга 1 лежат в прообразе точек возврата и точек касания дуг бифуркационных диаграмм.
4. Точки ранга 0 лежат в прообразе точек трансверсального пересечения дуг бифуркационных диаграмм.
5. Вырожденные точки ранга 0 лежат в прообразе точек, в которых одновременно пересекаются больше трех дуг бифуркационных диаграмм.
6. Все невырожденные точки ранга 0 лежат в прообразах точек трансверсального пересечения двух или трех дуг бифуркационных диаграмм.
7. В системе шар Чаплыгина с ротором из невырожденных особенностей ранга 0 присутствуют только точки типа центр–центр и центр–седло. Все особые точки типа центр–седло соответствуют прямому произведению атомов A и B.

Тип особых точек ранга 0 однозначно определяется видом бифуркационных диаграмм (и типом перестроек торов Лиувилля) в окрестности образа этой точки. Точнее, точка имеет тип центр–седло тогда и только тогда, когда в ее окрестности существует перестройка типа B.

Далее в диссертации автором найдены случаи грубой лиувиллевой эквивалентности системы Жуковского и системы шар Чаплыгина с ротором. Приведены примеры грубых молекул, которые присутствуют в обеих системах, а также найдена молекула, которая присутствует в системе шара Чаплыгина с ротором, но не встречается в случае Жуковского.

Теорема. 1) При значениях параметров системы “шар Чаплыгина с ротором” без нулевых компонент, таких, что $c^2 \geq d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$, каждому уровню $H = \text{const}_1$ можно поставить в соответствие уровни $H = \text{const}_2$ случая Жуковского так, что отвечающие этим уровням грубые молекулы совпадут.

2) Существуют такие значения параметров системы Чаплыгина при $c^2 < d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$, что для малых уровней энергии возникают молекулы, не встречающиеся в случае Жуковского.

Изоэнергетические 3-поверхности $Q_{h,c}^3 = \{H = h, C = c, G = 1\}$ задаются двумя параметрами h и c , то есть значениями интегралов H и C , так как $G = 1$. Для описания топологического типа $Q_{h,c}^3$ мы рассмотрим множество критических значений отображения $H \times C : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, c)$, которое является объединением кривых, разбивающих плоскость $\mathbb{R}^2(h, c)$ на области так, что для всех точек (h, c) , принадлежащих одной области, тип соответствующих изоэнергетических поверхностей $Q_{h,c}^3$ будет одним и тем же. В дальнейшем такие кривые мы будем иногда называть *кривыми, разделяющими топологический тип изоэнергетических поверхностей*.

Теорема. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, c)$, разделяющие области с различным топологическим типом изоэнергетических 3-поверхностей, состоят из следующих множеств:

1. набор кривых $\tilde{\sigma}$

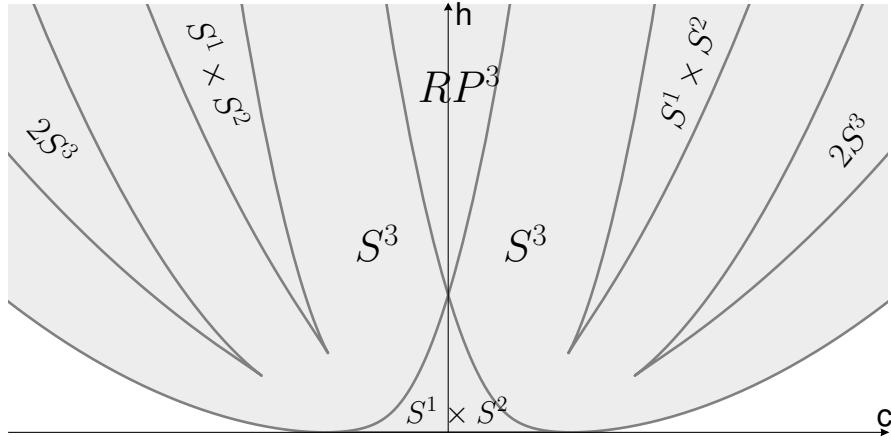
$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right) (d - \lambda)^2} \\ h = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right), \end{cases} \quad (1)$$

$$z \partial e \lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, d) \cup (d, J_1) \cup (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3) \cup (J_3, \infty)$$

2. отрезок \tilde{t}_0

$$\left[\left(0; -\sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right), \left(0; \sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right) \right]$$

Кривые $\tilde{\sigma}$, отрезок \tilde{t}_0 и топологические типы изоэнтергетических поверхностей для каждой области указаны на рисунке ниже.



Чтобы описать все возможные виды меченых молекул W^* нужно определить, каким образом прямая $h = \text{const}$ пересекает бифуркационную диаграмму.

Теорема. Кривые, разделяющие области с различными типами меченых молекул, состоят из объединения следующих множеств:

1. набор кривых $\tilde{\sigma}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right) (d - \lambda)^2} \\ h = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right), \end{cases}$$

$$2\partial e \quad \lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, d) \cup (d, J_1) \cup (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3) \cup (J_3, \infty)$$

2. отрезок \tilde{t}_0

$$\left[\left(0; -\sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right), \left(0; \sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right) \right]$$

3. кривая \tilde{s}

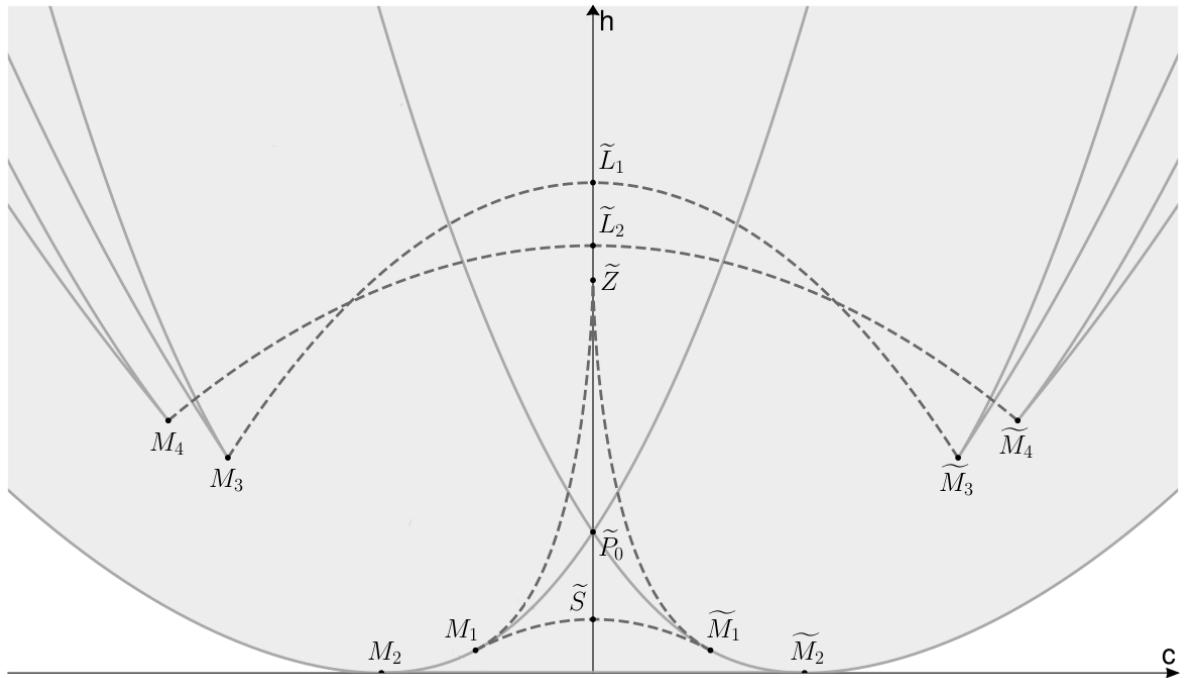
$$h = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} - \frac{c^2}{d} \right)$$

4. набор кривых \tilde{l}

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right) \frac{(d - \lambda)^3}{d}} \\ h = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right), \end{cases}$$

где λ изменяется на некоторых отрезках: $[a_1, b_1] \subset (J_1, J_2)$ (эта часть кривой \tilde{l} соответствует точке L_1 на бифуркационной диаграмме), $[a_2, b_2] \subset (J_2, J_3)$ (эта часть кривой \tilde{l} соответствует точке L_2 на бифуркационной диаграмме), $[a_3, b_3] \subset (0, d)$ (эта часть кривой \tilde{l} соответствует точке L_3 на бифуркационной диаграмме). При этом в концах отрезка $[a_1, b_1]$ кривая \tilde{l} соответствует точкам возврата M_3 и \tilde{M}_3 , в концах отрезка $[a_2, b_2]$ — точкам возврата M_4 и \tilde{M}_4 , а в концах отрезка $[a_3, b_3]$ — точкам M_1 и \tilde{M}_1 .

Приведем пример набора кривых, разделяющих области с различными типами меченых молекул, полученный компьютерным анализом для значений параметров системы $K = (3.34, 1.12, 2.82)$, $I = (0.87, 2.43, 4.44)$, $d = 1.79$.

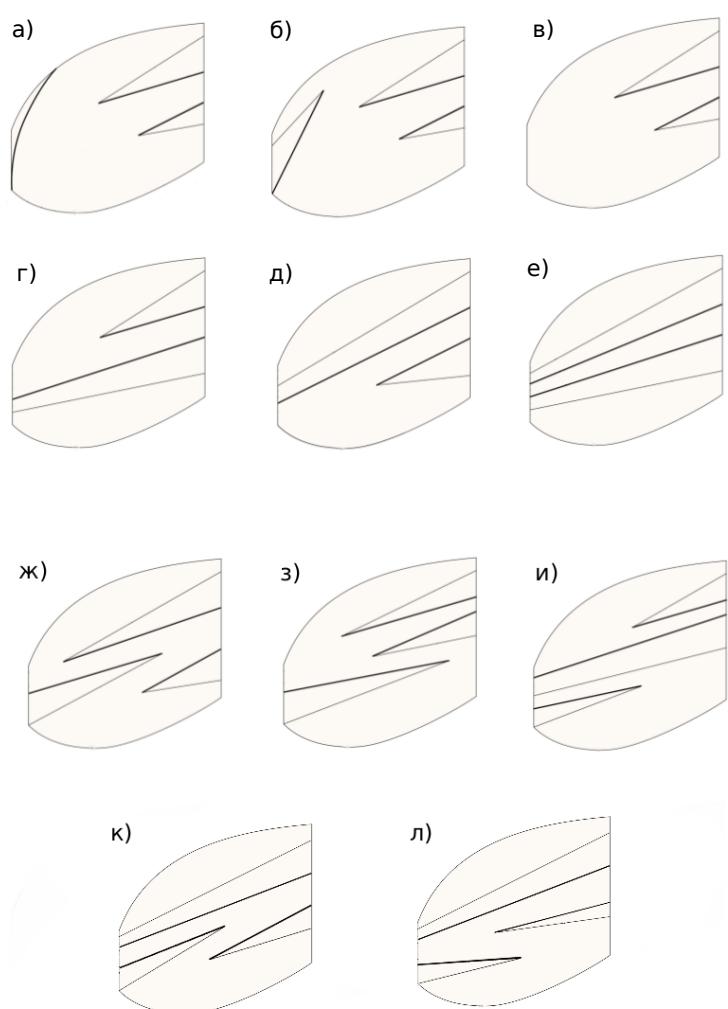


Отметим, что для точек $\tilde{Z}, \tilde{S}, \tilde{P}_0$ порядок их координат на оси h зафиксирован для любых значений параметров системы шар Чаплыгина с ротором, а именно: $H(\tilde{S}) < H(\tilde{P}_0) < H(\tilde{Z})$. Это легко видно из значений координат данных точек. При этом точки \tilde{L}_1 и \tilde{L}_2 могут находиться на любых интервалах, на которые точки $\tilde{Z}, \tilde{S}, \tilde{P}_0$ делят ось $h > 0$.

Замечание. В зависимости от взаимного расположения точек $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{Z}, \widetilde{S}, \widetilde{P}_0$ относительно их координат на оси h можно получить как минимум 20 качественно различных диаграмм.

Исходя из формул бифуркационных диаграмм в теореме А.Ю. Москвина⁵, единственны точки, чье взаимное положение друг относительно друга на $\mathbb{R}(h, n)$ мы не можем точно определить, это точки возврата L_1, L_2, L_3 . Следовательно, если кроме указанных на рисунках ниже а) – е) могли бы существовать еще типы бифуркационных диаграмм, то это были бы только диаграммы ж) – л) с рисунков ниже. При этом в процессе многочисленных компьютерных экспериментов было замечено, что при увеличении значения параметра c от точки L_3 стремится к прямой $n = c^2$ со значительно большей скоростью, чем точки L_1 и L_2 . На основе данного наблюдения была сформулирована гипотеза:

На рисунках ниже приведены 6 бифуркационных диаграмм а) – е), обнаруженных в результате компьютерных экспериментов. Диаграммы типов ж) – л) не были обнаружены в результате компьютерных экспериментов.



⁵Москвин А.Ю., Топология особенностей дробно-рациональных интегрируемых систем, Кандидатская диссертация 2010.

Гипотеза. Перечисленные на рисунке шесть типов обнаруженных в результате компьютерных экспериментов диаграмм $a) - e)$ исчерпывают все возможные типы бифуркационных диаграмм для всех значений параметров общего положения. В том числе, ни при каких значениях параметров системы не реализуются бифуркационные диаграммы $ж) - л)$.

В силу данной гипотезы в системе реализуются только 6 типов бифуркационных диаграмм. Для этих 6 типов нами получена классификация грубых молекул и многообразия Q^3 .

Теорема. 1. Для каждой из допустимых кривых для бифуркационных диаграмм из гипотезы (см пункт 2.7 второй главы диссертации) грубая молекула и топологический тип соответствующих трехмерных многообразий указаны в таблице в пункте 2.7 второй главы диссертации.

2. Каждое из трехмерных многообразий, соответствующих допустимым кривым из пункта 1 данной теоремы реализуется как изоэнергетическая поверхность при некоторых значениях параметров K, I, d .
3. Если гипотеза верна, то существует ровно 27 различных областей с типами меченых молекул для всех значений девяти параметров системы шар Чаплыгина с ротором.

Отметим, что если и существуют бифуркационные диаграммы, не попадающие под классификацию типов диаграмм из гипотезы, то это диаграммы из списка пяти типов бифуркационных диаграмм ($ж) - (л)$), которые не были обнаружены в результате компьютерных экспериментов. Мы пока не знаем, существуют ли такие значения параметров системы, для которых эти диаграммы действительно реализуются. Но, тем не менее, мы вычислили молекулы и топологические типы трехмерных поверхностей для допустимых кривых 28 – 39 (см пункт 2.7 второй главы диссертации) на этих бифуркационных диаграммах. Они указаны в таблице в пункте 2.7 второй главы диссертации.

Содержание главы 3

В третьей главе предложен способ явного задания ориентации базисных циклов и найдены матрицы склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр, в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы. Этот способ помогает в дальнейшем быстро вычислять ε -метки некоторых молекул для различных интегрируемых гамильтоновых систем.

Разные авторы часто в своих работах подходят к выбор ориентации различными способами, а значение ε -метки напрямую зависит от выбора ориентации.

Поэтому в данной работе предлагается введение единого подхода к выбору ориентации, согласующееся с теорией из книги⁶ Интегрируемые гамильтоновы системы.

Пусть две кривые на бифуркационной диаграмме, каждая из которых отвечает перестройкам типа A , пересекаются в точке, прообраз которой содержит точку ранга 0 типа центр-центр. Проведем допустимую кривую, соединяющую эти кривые на бифуркационной диаграмме, и рассмотрим тор T , лежащий в прообразе одной из ее точек. На этот тор приходят базисные циклы с торов, расположенных около двух описанных выше кривых.

Рассматривая пары циклов $(\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1})$ и $(\lambda_{\alpha_2}, \mu_{\alpha_2})$, приходящие на тор T , как базисы в группе одномерных гомологий, мы получаем матрицу склейки:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \mu_{\alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \mu_{\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

На граничном торе полнотория в качестве первого базисного цикла λ берется меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а в качестве второго цикла μ — произвольный цикл, дополняющий λ до базиса. Ориентация цикла μ задается потоком $sgrad H$, после чего ориентация цикла λ однозначно определяется ориентацией на граничном торе. Зафиксируем правила, с помощью которых мы будем задавать ориентацию на граничном торе полнотория.

Пусть H — гамильтониан, а F — дополнительный интеграл гамильтоновой системы на симплектическом многообразии M^4 . Рассмотрим отображение момента $\mathcal{F} = H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$. Образ отображения момента в окрестности точки типа центр-центр на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ выглядит как “угол”, ограниченный двумя дугами бифуркационной диаграммы. Прообраз кривой с концами на этих дугах является трехмерным многообразием $Q_\gamma^3 = \{x \in M^4 | \mathcal{F}(x) \in \gamma\}$, гомеоморфным трехмерной сфере S^3 . При этом прообразами концов данной кривой являются критические окружности (на которых $sgrad H$ и $sgrad F$ зависят), а прообразами внутренних точек кривой — торы Лиувилля. Любой такой тор T^2 разбивает Q_γ^3 на два полнотория, т.е. является граничным тором для каждого из них. Ориентация на торе T^2 зависит от того, для какого из двух полноторий мы рассматриваем его как граничный тор, и определяется следующим образом.

1. На симплектическом многообразии M^4 ориентация задана формой $\omega \wedge \omega$.
2. Ориентация на многообразии Q_γ^3 задается нормалью к Q_γ^3 в M^4 , т.е. тройка векторов e_1, e_2, e_3 в касательном пространстве к Q_γ^3 будет положительно ориентирована, если четверка векторов e_1, e_2, e_3, \bar{n} положительно ориенти-

⁶Болсинов А.В. Фоменко А.Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Ижевск: РХД, 1999.

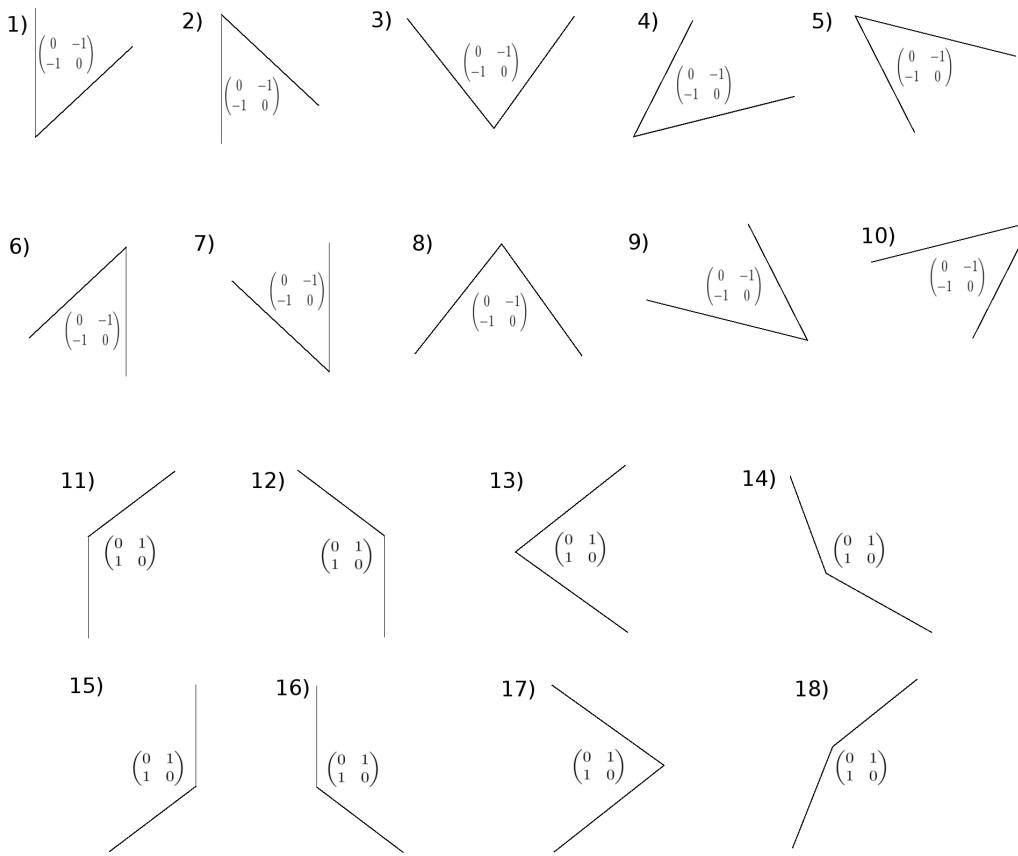
рована в M^4 . При этом нормаль \bar{n} будем выбирать так, чтобы при отображении момента она переходила в нормаль к кривой γ , направленную во внешнюю сторону по отношению к треугольнику, образованному двумя дугами бифуркационной диаграммы и кривой γ .

3. Ориентация на торе $T^2 \subset Q_\gamma^3$ задается нормалью \bar{N} к тору T^2 в Q_γ^3 , т.е. пара векторов e_1, e_2 в касательном пространстве к T^2 будет положительно ориентирована, если тройка векторов e_1, e_2, \bar{N} положительно ориентирована в Q_γ^3 . При этом нормаль \bar{N} будем выбирать так, чтобы она была внешней нормалью для полнотория, граничным тором которого является рассматриваемый тор T^2 .

Итог: положительная ориентированность пары векторов e_1, e_2 на торе T^2 задается условием

$$\omega \wedge \omega(e_1, e_2, \bar{N}, \bar{n}) > 0.$$

Матрицы склейки для точки центр-центр:



Теорема. Матрицы склейки для круговых молекул точки типа центр-центр в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы (при задании положительной ориентации условием $\omega \wedge \omega(\lambda, \mu, \bar{N}, \bar{n}) > 0$ и подходящем выборе базисных циклов λ и μ) приведены на рисунке ниже. В частности, ε -метка равна -1 для случаев 1–10 и 1 для случаев 11–18.

Вопрос о виде матриц склейки в случае точек типа центр-центр также поднимался в работе В.А. Кибкало⁷. В его работе ориентация базиса (u, v) в $T_x T^2$ задавалась условием $\omega \wedge \omega(\text{grad } H, N, u, v) > 0$, где N - вектор внешней нормали 3-атома, лежащего в изоэнергетическом многообразии, т.е. множестве $H = h$.

В явном виде матрицы склейки на ребре круговой молекулы такой особой точки в указанной выше работе найдены не были. Результат В.А. Кибкало задает соотношения на допустимые базисы, применимые для задач, аналогичных решенной в работе⁸ Болсинова А.В., Рихтера П.Х., Фоменко А.Т.: выражение допустимых базисов для дуг бифуркационной диаграммы в терминах однозначно определенных λ -циклов всех этих дуг, т.е. элементов целочисленных решеток на плоскости.

Заключение

В диссертации были получены результаты о топологических свойствах системы шар Чаплыгина с ротором. Полностью исследована невырожденность особенностей данной системы. Вычислены все инварианты Фоменко данной системы и изучена эквивалентность данной системы и системы Жуковского. Сформулирована гипотеза о существовании только шести типов бифуркационных диаграмм для данной системы. В рамках этой гипотезы показано, что существует ровно 27 различных областей с одинаковым типом инвариантов системы (для всех значений девяти параметров системы). Изучены все возможные допустимые кривые, и получен, возможно избыточный, список возможных грубых молекул и топологических типов трехмерных поверхностей для допустимых кривых. Следующими перспективными шагами в теме изучения системы шар Чаплыгина с ротором может быть построение инвариантов Фоменко-Цишанга данной системы и подробное изучение того, верна ли гипотеза о шести типах бифуркационных диаграмм. Отдельным направлением в диссертации является классификация матриц склейки круговых молекул точки типа центр-центр. Это исследование носит теоретический характер, и может быть полезно для будущих вычислений ε -меток для некоторых молекул в различных системах.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководителям академику РАН проф. А.Т. Фоменко и д-ру физ.-мат. наук проф. А.А. Ошемкову за постановку

⁷V. Kibkalo, *Topological Analysis of the Liouville Foliation for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra so(4)* , Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. **39**, No. 9. p. 1331–1334.

⁸Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т., *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской* , Матем. сб. 2000. **191**, No.2, с. 3–42

задачи и ценные обсуждения в ходе работы над диссертационной работой. Также автор благодарен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за вдохновляющую атмосферу и поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. Жила А.И., *Топологические типы изоэнергетических поверхностей системы “шар Чаплыгина с ротором”*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2020. — N.3. — с.52–56.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
Импакт-фактор 0.348 (за 2018 год)

2. Жила А.И., *Классификация матриц склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр*, Фундаментальная и прикладная математика. — 2019. — **22**, No.6. — с.85–94.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
Импакт-фактор 0.240 (за 2009 год)

3. Zhila A.I., *Comparison of the system “chaplygin ball with a rotor” and the zhukovskii system from the rough liouville equivalence point of view*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2017. — Vol. 72, no. 6. — P. 245–250.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
Импакт-фактор 0.348 (за 2018 год)

4. Zhila A.I., *Chaplygin’s ball with a rotor: Non-degeneracy of singular points*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — Vol. 71, no. 2. — P. 45–54.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS
Импакт-фактор 0.348 (за 2018 год)