**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»**
**Физтех-школа прикладной математики и информатики**
**Кафедра дискретной математики**

На правах рукописи

УДК 519.174.7

Боголюбский Лев Игоревич

# ЗАДАЧИ О РАСКРАСКАХ И РАЗБИЕНИЯХ В КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук
Райгородский Андрей Михайлович

**Ведущая организация:** Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук»

Защита состоится «10» ноября 2020 года в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.008 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):
`https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php`

Работа представлена «11» июля 2020 г. в Аттестационную комиссию Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы исследования и степень её разработанности

В диссертации рассматривается ряд задач экстремальной комбинаторной геометрии, мотивированных такими классическими сюжетами, как *проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера* и *проблема Борсука*.

Классическая проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера, поставленная на рубеже 40-х и 50-х годов XX века, состоит в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, называемой *хроматическим числом пространства* и равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1[1][2][3][4][5][6][7]:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi:\ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_\chi,\ \ \forall\, i\ \ \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in V_i\ \ \ |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \neq 1\}.$$

Сейчас задача о хроматическом числе — одна из центральных в комбинаторной геометрии[1][2][4][5][6][8].

Для величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ получено множество различных оценок как при конкретных

---

[1] *Райгородский А.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 107—146.

[2] *Raigorodskii A.* Thirty Essays on Geometric Graph Theory // / ed. by J. Pach. Springer, 2013. Chap. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters.

[3] *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.

[4] *Raigorodskii A.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 625. P. 93–109.

[5] *Brass P.*, *Moser W.*, *Pach J.* Research problems in discrete geometry. Springer, 2005.

[6] *Székely L.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. 2002. Vol. 11. P. 649–666.

[7] *Raigorodskii A.* Combinatorial geometry and coding theory // Fundamenta Informatica. 2016. Vol. 145, no. 3. P. 359–369.

[8] *Райгородский А.* О хроматическом числе пространства // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 147—148.

значениях $n$[9][10][11][12][13][14][15][16][17][18][19][20][21], так и в асимптотике[8][22][23]. В частности, наилучшие известные асимптотические оценки имеют вид

$$(1.239\ldots + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n. \tag{1}$$

Естественным обобщением поставленной задачи служит аналогичная проблема для пространств с другими метриками, а также для случая нескольких расстояний, которым

[9] *Любимов В.*, *Райгородский А.* О нижних оценках чисел независимости некоторых графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // Доклады РАН. 2009. Т. 427, № 4. С. 458—460.

[10] *Cantwell K.* Finite Euclidean Ramsey theory // J. Combin. Theory A. 1996. Vol. 73, no. 2. P. 273–285.

[11] *Chilakamarri K.* The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results // Bull. Inst. Comb. Appl. 1993. Vol. 8, no. 39. P. C60.

[12] *Cibulka J.* On the chromatic number of real and rational spaces // Geombinatorics. 2008. Vol. 18, no. 2. P. 53–65.

[13] *Exoo G.*, *Ismailescu D.* On the Chromatic Number of $\mathbb{R}^n$ for Small Values of $n$. 2018. URL: `http://arxiv.org/pdf/1408.2002v1.pdf`.

[14] *Exoo G.*, *Ismailescu D.*, *Lim M.* On the Chromatic Number of $\mathbb{R}^4$ // Discrete Computational Geometry. 2014. Vol. 52, no. 2. P. 416–423.

[15] *Kahle M.*, *Taha B.* New lower bounds on $\chi(\mathbb{R}^d)$, $d = 8, \ldots, 12$ // Geombinatorics. 2015. Vol. 24, no. 3. P. 109–116.

[16] *Kupavskiy A.*, *Raigorodskii A.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^9$ // J. of Math. Sci. 2009. Vol. 163, no. 6. P. 720–731.

[17] *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number // Matematikai Lapok. 1972. Vol. 23, no. 301–302. P. 26.

[18] *Nechushtan O.* On the space chromatic number // Discrete mathematics. 2002. Vol. 256, no. 1–2. P. 499–507.

[19] *Черкашин Д.*, *Райгородский А.* О хроматических числах пространств малой размерности // Доклады РАН. 2017. Т. 472, № 1. С. 11—12.

[20] О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ / А. Гутерман, В. Любимов, А. Райгородский, А. Усачев // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 5. С. 794—796.

[21] *Raigorodskii A.*, *Kupavskii A.* On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2009. Vol. 34. P. 435–439.

[22] *Larman D.*, *Rogers C.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. Vol. 19. P. 1–24.

[23] *Frankl P.*, *Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. Vol. 1, no. 4. P. 357–368.

запрещено достигаться между точками одного цвета[24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43]. Одной из наиболее исследованных является ситуация, когда метрика манхэттенская. Напомним, что манхэттенской называется метрика в $\mathbb{R}^n$, задаваемая формулой

$$\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Обозначим соответствующее хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_1)$. В этом контексте

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathbb{R}^n, \ell_2),$$

где $\ell_2$ — обычная евклидова метрика.

Для метрики $\ell_1$ известны асимптотические оценки[38,39,44]:

$$(1.366\ldots + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (4 + o(1))^n.$$

[24] *Benda M.*, *Perles M.* Colorings of metric spaces // Geombinatorics. 2000. Vol. 9, no. 3. P. 113–126.

[25] *Kang J.-H.*, *Füredi Z.* Distance graphs on $\mathbb{Z}^n$ with $l_1$-norm // Theoretical Comp. Sci. 2004. Vol. 319, no. 1–3. P. 357–366.

[26] *Katznelson Y.* Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence // Combinatorica. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 211–219.

[27] *Купавский А.* О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 6. С. 83—110.

[28] *Купавский А.* О поднятии оценки хроматического числа $\mathbb{R}^n$ в большую размерность // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429, № 3. С. 305—308.

[29] *Райгородский А.* О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями // Доклады РАН. 2006. Т. 408, № 5. С. 601—604.

[30] *Мощевитин Н.*, *Райгородский А.* О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями // Математические заметки. 2007. Т. 81, № 5. С. 733—743.

[31] *Райгородский А.*, *Шитова И.* О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями // Математический сборник. 2008. Т. 199, № 4. С. 107—142.

[32] *Райгородский А.*, *Шитова И.* О хроматическом числе евклидова пространства и о проблеме Борсука // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 636—639.

[33] Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации / Е. Горская, И. Митричева, В. Протасов, А. Райгородский // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 6. С. 3—22.

[34] *Райгородский А.* О хроматических числах сфер в евклидовом пространстве // Доклады РАН. 2010. Т. 432, № 2. С. 174—177.

[35] *Raigorodskii A.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. 2012. Vol. 32, no. 1. P. 111–123.

[36] *Костина О.*, *Райгородский А.* О нижних оценках хроматического числа сферы // Доклады РАН. 2015. Т. 463, № 6. С. 639—641.

[37] *Бердников А.*, *Райгородский А.* Хроматические числа евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2014. Т. 96, вып. 5. С. 790—793.

[38] *Kupavskii A.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 6. P. 437–440.

[39] *Kupavskii A.* The chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with a set of forbidden distances // Doklady Math. 2010. Vol. 82, no. 3. P. 963–966.

[40] *Пономаренко Е.*, *Райгородский А.* Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 255—261.

[41] *Канель-Белов А.*, *Воронов В.*, *Черкашин Д.* О хроматическом числе плоскости // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29, № 5. С. 68—89.

[42] *Бердников А.* Оценка хроматического числа евклидова пространства с несколькими запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 783—787.

[43] *Berdnikov A.* Chromatic number with several forbidden distances in the space with the $\ell_q$-metric // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 227, no. 4. P. 395–401.

[44] *Райгородский А.* О хроматическом числе пространства с $l_q$-нормой // Успехи математических наук. 2004. Т. 59, № 5. С. 161—162.

Однако в «малых» размерностях никакие результаты ранее получены не были.

В то же время исключительно важную роль играет вариант задачи, в рамках которого рассматриваются только раскраски измеримыми по Лебегу цветами (множества $V_1, \ldots, V_\chi$ измеримы). В этом случае искомая величина обозначается $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ и называется *измеримым хроматическим числом пространства*. В диссертации рассматриваются как нижние оценки измеримых хроматических чисел пространств «малой» размерности, так и аналогичные оценки в случае растущей размерности.

Ситуация в «малых» размерностях следующая. Очевидно, что $\chi_m(\mathbb{R}^1) = 2$. Фалконер показал[45], что $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$. Далее[46], $\chi_m(\mathbb{R}^3) \geqslant 7$. Наконец, наилучшие известные автору нижние оценки величины $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ в размерностях $n \in \{4, \ldots, 24\}$ принадлежат[47] Башок, Пассуэлло и Тьери:

| $n$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_m \geqslant$ | 10 | 15 | 21 | 37 | 52 | 69 | 90 | 116 | 164 | 254 | 334 |
| $n$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| $\chi_m \geqslant$ | 413 | 619 | 906 | 1178 | 1341 | 2132 | 3182 | 4062 | 4712 | 5424 | – |

Отметим, что неизвестно, верно ли, что $\chi(\mathbb{R}^n) \neq \chi_m(\mathbb{R}^n)$. Однако нижние оценки этих величин сильно разнятся. Так, было показано[47] (ср. с (1)), что

$$(1.268\ldots + o(1))^n \leqslant \chi_m(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Но, возможно, это лишь временное явление?

Помимо задач о раскрасках в диссертации рассматриваются задачи о разбиениях.

*Проблема Борсука* — вопрос в комбинаторной геометрии, посвящённый исследованию справедливости следующего утверждения. Дано евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ и произвольное множество диаметра 1 в этом пространстве. Гипотеза такова: *возможно разбить это множество на не более чем $d+1$ подмножество, каждое из которых будет иметь диаметр менее* 1. Эквивалентно: *любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на не более, чем $d+1$ подмножество меньшего диаметра.*

Гипотеза, ошибочно называемая гипотезой Борсука (сам Борсук такого утверждения не делал — он лишь задал вопрос!), в действительности неверна. Это было доказано[48] Каном и Калаи в 1993 году. Интерес, однако, представляет дальнейшее изучение величины $f(d)$ — минимального числа подмножеств меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, в зависимости от размерности $d$. В этих терминах опровергнутое предположение имеет вид

$$f(d) \leqslant d + 1 \quad \forall d \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Утверждение гипотезы (2) справедливо в некоторых частных случаях, например, при

[45] *Falconer K.* The realization of distances in measurable subsets covering $\mathbb{R}^n$ // J. Combin. Theory A. 1981. Vol. 31. P. 187–189.

[46] *Oliveira Filho F. de*, *Vallentin F.* Fourier analysis, linear programming, and densities of distance avoiding sets in $\mathbb{R}^n$ // J. Eur. Math. Soc. 2010. Vol. 12. P. 1417–1428.

[47] *Bachoc C.*, *Passuello A.*, *Thiery A.* The Density of Sets Avoiding Distance 1 in Euclidean Space // Discrete Computational Geometry. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 783–808.

[48] *Kahn J.*, *Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin of the American Mathematical Society. 1993. Vol. 29, no. 1. P. 60–62.

$d = 2$ (это доказал[49] сам Борсук в 1932 г.), при $d = 3$ (Перкал[50] в 1947 г.), для выпуклых тел с гладкой границей при всех $d$ (доказано[51] Хадвигером в 1946 г.), для всех центрально-симметричных тел при всех $d$ (доказано[52] Рислингом в 1971 г.), для всех тел вращения при всех $d$ (доказано[53] Декстером в 1995 г.), для множеств, инвариантных под действием группы симметрии $d$-симплекса (доказано[54] Роджерсом в 1971 г.)

Однако же в 1993 году Кан и Калаи показали[48], что $f(1325) > 1326$, что опровергло (2). Далее события развивались следующим образом. В 1994 году Алон (под псевдонимом Нилли) нашёл[55] контрпример при $d = 946$. В 1997 году Райгородский уточнил[56] нижнюю грань размерности до 561. Затем в 2000 году Вайссбах понизил[57] её до 560. Далее, в 2002 году, последовали результаты Хинрикса[58] для $d = 323$ и Пихурко[59] для $d = 321$; в 2003 году Хинрикс и Рихтер опубликовали доказательство[60] следующего уточнениия: $f(298) > 298 + 11$. В 2014 г. Бондаренко опроверг[61] гипотезу для $d \geqslant 65$, и, наконец, в том же году Йенрихом была получена[62] наилучшая известная на текущий момент нижняя грань, $d = 64$.

Более подробно с историей проблемы можно ознакомиться в работах из библиографии[2 4 7 63 64].

Число $f(d)$ изучалось не только в «малых» размерностях, но и в асимптотике ($d \to \infty$). Известны как оценки сверху — например, показано[65], что

$$f(d) \leqslant (1.224\ldots + o(1))^d,$$

[49] *Borsuk K.* Drei Sätze über die $n$-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Mathematicae. 1933. Jg. 20, Nr. 1. S. 177–190.

[50] *Perkal J.* Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // Colloquium Mathematicum. 1947. T. 1, n° 1. P. 45.

[51] *Hadwiger H.* Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Commentarii Mathematici Helvetici. 1945. Jg. 18, Nr. 1. S. 73–75.

[52] *Riesling A.* Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature // Ukr. Geom. Sbornik. 1971. Vol. 11. P. 78–83.

[53] *Dekster B.* The Borsuk conjecture holds for bodies of revolution // Journal of Geometry. 1995. Vol. 52, no. 1–2. P. 64–73.

[54] *Rogers C.* Symmetrical sets of constant width and their partitions // Mathematika. 1971. Vol. 18, no. 1. P. 105–111.

[55] *Nilli A.* On Borsuk's problem // Contemporary Mathematics. 1994. Vol. 178. P. 209.

[56] *Райгородский А.* О размерности в проблеме Борсука // УМН. 1997. Т. 52, 6(318). С. 181—182.

[57] *Weißbach B.* Sets with large Borsuk number // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 2000. Jg. 41, Nr. 2. S. 417–423.

[58] *Hinrichs A.* Spherical codes and Borsuk's conjecture // Discrete Math. 2002. Vol. 243, no. 1–3. P. 253–256.

[59] *Pikhurko O.* Borsuk's conjecture fails in dimensions 321 and 322. 2002. URL: `https://arxiv.org/abs/math/0202112`.

[60] *Hinrichs A.*, *Richter C.* New sets with large Borsuk numbers // Discrete Mathematics. 2003. Vol. 270, no. 1–3. P. 137–147.

[61] *Bondarenko A.* On Borsuk's Conjecture for Two-Distance Sets // Discrete Computational Geometry. 2014. Vol. 51, no. 3. P. 509–515.

[62] *Jenrich T.*, *Brouwer A.* A 64-Dimensional Counterexample to Borsuk's Conjecture // The Electronic Journal of Combinatorics. 2014. Vol. 21, no. 4. #P4.29.

[63] *Райгородский А.* Вокруг гипотезы Борсука // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 147—164.

[64] *Raigorodskii A.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. 2008. Vol. 347. P. 202–248.

[65] *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1998. Vol. 35, no. 2. P. 180–189.

так и оценки снизу[48 66]:

$$f(d) \geqslant (1.203\ldots + o(1))^{\sqrt{d}} \quad \text{(Кан и Калаи, 1993)},$$

$$f(d) \geqslant (1.2255\ldots + o(1))^{\sqrt{d}} \quad \text{(Райгородский, 1999)}. \tag{3}$$

Интересен следующий факт. Наилучшая известная на текущий момент нижняя оценка (3) числа Борсука $f(d)$ в асимптотике была получена с помощью исследования серии *дистанционных графов* с вершинами на сетке $\{-1, 0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$. С другой стороны, при некоторых «малых» $d$ ($d = 561$)[56] аналогичный подход даёт лучшие результаты за счёт дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 1\}^n$ (что эквивалентно использованию $\{0, 1\}$-дистанционных графов). Кроме того, авторы последних работ, посвящённых «малым» размерностям, вовсе оперируют не дистанционными графами: в некоторых статьях[58 60] для получения результатов использовались решётки, а в других[61 62] — сильно регулярные графы.

В какой момент с ростом $d$ устанавливается «доминирование» $\{-1, 0, 1\}$-дистанционных графов над $\{-1, 1\}$-дистанционными графами? Как влияет добавление третьего возможного типа координат векторов — вершин графов — на оценки при «малых» $d > 561$, то есть какие наилучшие оценки можно получить с использованием $\{-1, 0, 1\}$-графов, $\{-1, 1\}$-графов, когда предпочтительны какие из них? В диссертации мы исследуем эти вопросы, используя методы, сходные с методами, применяемыми нами к смежной проблеме комбинаторной геометрии — задаче Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о хроматическом числе пространства.

**Цель работы и задачи исследования**

Целью настоящей работы является получение нижних оценок измеримых хроматических чисел в двух случаях: для пространств «малых» размерностей и для случая растущей размерности пространства; получение нижних оценок хроматических чисел пространств с евклидовой и манхэттенской метриками; получение нижних оценок чисел Борсука евклидовых пространств; получение верхних оценок чисел независимости некоторых конечных дистанционных графов.

**Научная новизна**

Полученные в диссертации результаты являются новыми.

**Теоретическая и практическая значимость работы**

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты дают возможность оценивать экстремальные характеристики конечных дистанционных графов и метрических пространств.

**Методология и методы исследования**

В диссертации используется классический аппарат экстремальной комбинаторики. В том числе, используется линейно-алгебраический метод. Для рассмотрения задачи об измеримых хроматических числах применяются, в том числе, методы оптимизации. Ряд численных результатов диссертации был получен с помощью компьютерных вычислений.

**Положения, выносимые на защиту**

В диссертации получены новые результаты, которые состоят в следующем:

1. Сформулирован и доказан в общем виде ряд теорем, касающихся применения линейно-алгебраического метода к оцениванию сверху чисел независимости конечных дистанционных графов в пространствах с метриками $\ell_1$ и $\ell_2$.

[66] *Райгородский А.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи математических наук. 1999. Т. 54, № 2. С. 185—186.

2. Для манхэттенской метрики получены нижние оценки хроматических чисел пространств «малой» размерности. Для евклидовой метрики получены новые оценки: $\chi(\mathbb{R}^{22}, \ell_2) \geqslant 139$, $\chi(\mathbb{R}^{23}, \ell_2) \geqslant 171$, $\chi(\mathbb{R}^{24}, \ell_2) \geqslant 209$; устранена неточность в известной оценке при $n = 16$; а также численно определён момент начала доминирования оценок, связанных с $\{-1, 0, 1\}$-векторами.

3. Сформулирован и доказан в общем виде ряд теорем, касающихся применения линейно-алгебраического метода к оцениванию сверху мощностей множеств с набором запрещённых скалярных произведений.

4. Получены оценки чисел Борсука ряда пространств $\mathbb{R}^n$, следующие из доказанных оценок чисел независимости дистанционных графов специального вида. Численно определён момент, начиная с которого устанавливается «доминирование» $\{-1, 0, 1\}$-графов над $\{-1, 1\}$-графами.

5. Указан способ уточнения нижних оценок измеримых хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n, n = 12, \ldots, 24$, путём предъявления верхних оценок чисел независимости серии конечных дистанционных графов.

**Степень достоверности и апробация результатов**

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

- научный семинар «Вероятностные и алгебраические методы в комбинаторике» на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ под руководством доктора физико-математических наук А. М. Райгородского (2015 г.);

- научный семинар «Современные проблемы теории чисел» в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук под руководством доктора физико-математических наук, академика РАН С. В. Конягина и доктора физико-математических наук, члена-корреспондента РАН И. Д. Шкредова (2015 г.);

- спецсеминар «Экстремальная комбинаторика и случайные структуры» на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством доктора физико-математических наук Д. А. Шабанова (2015 г.);

- кафедральный семинар кафедры дискретной математики МФТИ (2015–2019 гг., неоднократно);

- аспирантский коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (2018 г.).

**Публикации**

Результаты диссертации опубликованы в работах[67][68][69][70], указанных в списке литера-

[67] *Боголюбский Л., Райгородский А.* Об измеримом хроматическом числе пространства размерности $n \leqslant 24$ // Доклады РАН. 2015. Т. 7, № 3. С. 5—10.

[68] *Боголюбский Л., Райгородский А.* Об измеримом хроматическом числе пространства растущей размерности // Труды МФТИ. 2015. Т. 27, № 3.

[69] *Боголюбский Л., Райгородский А.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками $\ell_1$ и $\ell_2$ // Математические заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 187—213.

[70] *Боголюбский Л., Райгородский А.* Об оценках в проблеме Борсука // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 3. С. 20—49.

туры. Все работы представлены в журналах из перечней ВАК, RSCI и РИНЦ, две из них — в журналах из перечня Scopus. Все результаты, приведённые в диссертации, были получены её автором самостоятельно, включая результаты, опубликованные в совместных работах. А. М. Райгородский предложил сюжеты для разработки, оказал автору помощь в составлении обзоров актуальных смежных результатов и в написании введения, а также вносил правки в некоторые доказательства.

**Благодарности**

Автор глубоко признателен и благодарен своему научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Андрею Михайловичу Райгородскому за постановку задач, консультации, идеи, неоценимую помощь в работе. Также автор благодарен д.ф.-м.н. Максиму Евгеньевичу Жуковскому за множество важных замечаний и полезных предложений.

**Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 85 ссылок. Общий объём диссертации составляет 93 страницы.

**Основное содержание работы**

**Во введении** описаны релевантные теме диссертации результаты, связанные с задачей Нелсона–Эрдёша–Хадвигера и с гипотезой Борсука, сделан обзор предшествующих публикаций, а также описана структура диссертации по главам.

**В первой главе** обсуждается оценивание хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ снизу для пространств конкретных размерностей с евклидовой и манхэттенской метриками.

Сначала даются следующие необходимые определения.

Граф $G = (V, E)$ *дистанционный*, если при некотором $a > 0$

$$V \subset \mathbb{R}^n, \quad E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}.$$

*Независимым множеством* в произвольном графе $G = (V, E)$ называется набор вершин из $V$, никакие две из которых не соединены ребром.

*Числом независимости* графа $G$ называется максимальная возможная мощность такого множества. Число независимости обозначается $\alpha(G)$.

*Хроматическое число графа* $G = (V, E)$ — это минимальное возможное количество цветов, в которые так можно покрасить вершины из $V$, что никакое из рёбер из $E$ не будет соединять вершины одного цвета. Это число обозначается $\chi(G)$.

*Хроматическое число пространства* $\mathbb{R}^n$ равно по определению наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Это число обозначается $\chi(\mathbb{R}^n)$.

В случае, если рассматриваются не произвольные раскраски $\mathbb{R}^n$, а лишь такие, что все цвета (т.е. множества точек, которым был присвоен некоторый избранный цвет) измеримы по Лебегу, искомая величина (наименьшее количество цветов) обозначается $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ и называется *измеримым хроматическим числом пространства.*

Для получения оценок формулируется и доказывается в общем виде ряд результатов, связанных с линейно-алгебраическим методом.

Для метрики $\ell_1$ получена следующая

**Теорема 1.** *Пусть $p$ — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что для любого $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ верно $\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in 2\mathbb{Z}$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность*

$$\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})/2 \equiv 0 \mod p^\alpha \iff \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

*причём $n \geqslant p^\alpha - 1$. Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{m=0}^{p^\alpha - 1} 2^m \binom{n}{m}.$$

*Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{m=0}^{p^\alpha - 1} \binom{n}{m}.$$

Сходный результат сформулирован и доказан и для метрики $\ell_2$:

**Теорема 2.** *Пусть $p$ — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что для любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ верно $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно*

$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \not\equiv r \mod p^\alpha$, *где* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *— евклидово скалярное произведение векторов в* $\mathbb{R}^n$, *а* $r \in \mathbb{N}$ *— некоторая константа. Пусть также* $r \geqslant p^\alpha - 1$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{A}} \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2},$$

*где* $\mathcal{A} = \{(m_1,m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, m_1+m_2 \leqslant n, m_1+2m_2 \leqslant p^\alpha - 1\}$.

*Более того, в случае, если либо* $\Sigma \subset \{0,1\}^n$, *либо* $\Sigma \subset \{-1,1\}^n$, *а также для некоторого* $F \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *с условием* $F < n$ *первые* $F$ *координат каждого из векторов из* $\Sigma$ *фиксированы и равны* 1,

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{m=0}^{p^\alpha-1} \binom{n-F}{m}.$$

Затем мы доказываем следующие уточнения теорем 1 и 2. Для манхэттенской метрики более сильным аналогом теоремы 1 явилась

**Теорема 3.** *Пусть* $p$ *— простое число,* $n \in \mathbb{N}$. *Рассмотрим произвольную совокупность векторов* $\Sigma \subset \{-1,0,1\}^n$ *такую, что во всех векторах* $\Sigma$ *содержится ровно* $r$ *ненулевых координат, и подсовокупность* $\mathcal{F} \subset \Sigma$ *такую, что для некоторого* $\alpha \in \mathbb{N}$ *и любых* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *из* $\mathcal{F}$ *справедлива эквивалентность*

$$\ell_1(\mathbf{x},\mathbf{y})/2 \equiv 0 \mod p^\alpha \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

*Пусть также* $r \geqslant p^\alpha - 1$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{p^\alpha - 1} 2^{p^\alpha - 1}.$$

*Более того, в случае, если* $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0,1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{p^\alpha - 1}.$$

Уточнением же теоремы 2 стал следующий результат.

**Теорема 4.** *Пусть* $p$ *— простое число,* $n \in \mathbb{N}$. *Рассмотрим произвольную совокупность векторов* $\Sigma \subset \{-1,0,1\}^n$ *такую, что для любого* $\mathbf{x} \in \Sigma$ *верно* $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = r$, *и подсовокупность* $\mathcal{F} \subset \Sigma$ *такую, что для некоторого* $\alpha \in \mathbb{N}$ *и любых различных* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *из* $\mathcal{F}$ *верно* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \not\equiv r \mod p^\alpha$, *где* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *— евклидово скалярное произведение векторов в* $\mathbb{R}^n$, *а* $r \in \mathbb{N}$ *— некоторая константа. Пусть также* $r \geqslant p^\alpha - 1$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{D}} \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2},$$

*где*

$$\mathcal{D} = \{(m_1,m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, m_1+2m_2 \in \{p^\alpha - 1, p^\alpha - 2\}\}.$$

*Более того, в случае, если* $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0,1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{p^\alpha - 1}.$$

Для метрики $\rho \in \{\ell_1, \ell_2\}$ мы рассматриваем следующие серии дистанционных графов $G_1, G_2, G_3$, где

$$G_1(n, k_{-1}, k_0, k_1, \rho, \rho_{crit}) = (U_1(n, k_{-1}, k_0, k_1), E_1(n, k_{-1}, k_0, k_1, \rho, \rho_{crit})), k_1 \neq 0, k_{-1} \neq 0,$$

$$U_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |\{j : x_j = i\}| = k_i, i \in \{-1, 0, 1\}\};$$

$$G_2(n, r, \rho, \rho_{crit}) = (U_2(n, r), E_2(n, r, \rho, \rho_{crit})),$$

$$U_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |\{j : x_j = 1\}| + |\{j : x_j = -1\}| = r\};$$

$$G_3(n, k_1, \rho, \rho_{crit}) = (U_3(n, k_1), E_3(n, k_1, \rho, \rho_{crit})),$$

$$U_3 = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n : |\{j : x_j = 1\}| = k_1\};$$

$$E_i = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in U_i \times U_i : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_{crit}\}, i = 1, 2, 3.$$

В результате применения теорем 1 и 3 для оценивания сверху чисел независимости дистанционных графов из серий $G_1, G_2, G_3$ мы получаем следующие численные результаты — нижние оценки хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\ell_1$:

Таблица 1: Оценки $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_1)$, полученные с помощью $G_1, G_2, G_3$

| $n \downarrow$ | по теореме 1 | | | | | | по теореме 3 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| граф $\rightarrow$ | $G_1$ | | $G_2$ | | $G_3$ | | $G_1$ | | $G_2$ | | $G_3$ | |
| | $\chi \geqslant$ | $(k_{-1}, k_0, k_1)$ | $\chi \geqslant$ | $r$ | $\chi \geqslant$ | $k_1$ | $\chi \geqslant$ | $(k_{-1}, k_0, k_1)$ | $\chi \geqslant$ | $r$ | $\chi \geqslant$ | $k_1$ |
| 4 | 3 | (2, 2, 1) | **4** | 3 | 2 | 3 | 3 | (2, 2, 1) | **4** | 3 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | (2, 3, 1) | **8** | 3 | 3 | 4 | 5 | (2, 3, 1) | **8** | 3 | 4 | 3 |
| 6 | 7 | (2, 4, 1) | **13** | 3 | 5 | 4 | 8 | (2, 4, 1) | **14** | 3 | 5 | 4 |
| 7 | 10 | (2, 5, 1) | **19** | 3 | 7 | 5 | 11 | (2, 5, 1) | **20** | 3 | 7 | 5 |
| 8 | 14 | (2, 6, 1) | **27** | 3 | 9 | 6 | 14 | (2, 6, 1) | **28** | 3 | 10 | 6 |
| 9 | 18 | (2, 7, 1) | **36** | 3 | 11 | 7 | 18 | (2, 7, 1) | **38** | 3 | 12 | 7 |
| 10 | 22 | (2, 8, 1) | **46** | 3 | 14 | 8 | 23 | (2, 8, 1) | **48** | 3 | 15 | 8 |
| 11 | 28 | (3, 7, 2) | **61** | 5 | 17 | 9 | 30 | (3, 7, 2) | **68** | 5 | 19 | 9 |
| 12 | 38 | (3, 8, 2) | **88** | 5 | 21 | 10 | 42 | (3, 8, 2) | **96** | 5 | 22 | 10 |
| 13 | 51 | (3, 9, 2) | **122** | 5 | 25 | 11 | 55 | (3, 9, 2) | **132** | 5 | 26 | 11 |
| 14 | 67 | (3, 10, 2) | **164** | 5 | 29 | 12 | 72 | (3, 10, 2) | **176** | 5 | 31 | 12 |
| 15 | 86 | (3, 11, 2) | **214** | 5 | 33 | 13 | 91 | (3, 11, 2) | **229** | 5 | 37 | 11 |
| 16 | 114 | (4, 10, 3) | **294** | 7 | 41 | 12 | 126 | (4, 10, 3) | **327** | 7 | 46 | 12 |
| 17 | 156 | (4, 11, 3) | **414** | 7 | 50 | 13 | 171 | (4, 11, 3) | **458** | 7 | 56 | 13 |
| 18 | 209 | (4, 12, 3) | **568** | 7 | 61 | 14 | 228 | (4, 12, 3) | **624** | 7 | 68 | 14 |
| 19 | 274 | (4, 13, 3) | **762** | 7 | 74 | 15 | 298 | (4, 13, 3) | **832** | 7 | 82 | 15 |
| 20 | 354 | (4, 14, 3) | **1001** | 7 | 88 | 16 | 387 | (5, 12, 4) | **1110** | 9 | 97 | 16 |
| 21 | 481 | (5, 13, 4) | **1403** | 9 | 104 | 17 | 536 | (5, 13, 4) | **1572** | 9 | 114 | 17 |
| 22 | 657 | (5, 14, 4) | **1955** | 9 | 122 | 18 | 727 | (5, 14, 4) | **2176** | 9 | 139 | 16 |
| 23 | 880 | (5, 15, 4) | **2667** | 9 | 149 | 17 | 969 | (5, 15, 4) | **2954** | 9 | 171 | 17 |
| 24 | 1160 | (5, 16, 4) | **3574** | 9 | 184 | 18 | 1272 | (5, 16, 4) | **3938** | 9 | 209 | 18 |

Для каждой размерности были сделаны вычисления для графов трёх типов — $G_1, G_2, G_3$. В каждом случае применялась как теорема 1, так и её усиленный вариант — теорема 3, так что таблица состоит из двух частей — «наивной» и «уточнённой». Лучший результат для каждой размерности выделен **жирным** шрифтом — для двух

теорем независимо. Также мы приводим значения параметров дистанционных графов, позволяющие получить наиболее сильный результат.

Отметим, что при всех $n = 4 \dots 24$ самым сильным оказался результат для графов типа $G_2$ — присутствие минус единиц оказывается выгодным, причём оптимальнее оказывается фиксировать *суммарное* число ненулевых координат в векторах $\Sigma$.

Также в результате применения теорем 2 и 4, опять же, к графам $G_1, G_2, G_3$ мы получаем численные нижние оценки хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\ell_2$:

Таблица 2: Оценки $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_2)$, полученные с помощью $G_1, G_2, G_3$

| $n\downarrow$ | по теореме 2 | | | | | | по теореме 4 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| граф $\rightarrow$ | $G_1$ | | $G_2$ | | $G_3$ | | $G_1$ | | $G_2$ | | $G_3$ | |
| | $\chi \geqslant$ | $(k_{-1}, k_0, k_1)$ | $\chi \geqslant$ | $r$ | $\chi \geqslant$ | $k_1$ | $\chi \geqslant$ | $(k_{-1}, k_0, k_1)$ | $\chi \geqslant$ | $r$ | $\chi \geqslant$ | $k_1$ |
| 4 | **2** | (2, 2, 1) | **2** | 3 | **2** | 3 | **2** | (2, 2, 1) | **2** | 3 | **2** | 3 |
| 5 | **3** | (2, 3, 1) | 2 | 3 | **3** | 4 | 3 | (2, 3, 1) | 2 | 4 | **4** | 3 |
| 6 | 3 | (2, 4, 1) | 3 | 3 | **5** | 4 | 3 | (2, 4, 1) | 3 | 3 | **5** | 4 |
| 7 | 4 | (2, 5, 1) | 3 | 4 | **7** | 5 | 4 | (2, 5, 1) | 3 | 4 | **7** | 5 |
| 8 | 5 | (2, 6, 1) | 3 | 4 | **9** | 6 | 5 | (2, 6, 1) | 4 | 3 | **10** | 6 |
| 9 | 6 | (2, 7, 1) | 4 | 4 | **11** | 7 | 6 | (2, 7, 1) | 4 | 4 | **12** | 7 |
| 10 | 7 | (4, 6, 1) | 4 | 4 | **14** | 8 | 7 | (4, 6, 1) | 5 | 4 | **15** | 8 |
| 11 | 9 | (4, 7, 1) | 5 | 4 | **17** | 9 | 10 | (4, 7, 1) | 5 | 6 | **19** | 9 |
| 12 | 12 | (4, 8, 1) | 5 | 6 | **21** | 10 | 13 | (4, 8, 1) | 6 | 6 | **22** | 10 |
| 13 | 16 | (4, 9, 1) | 6 | 6 | **25** | 11 | 16 | (4, 9, 1) | 7 | 6 | **26** | 11 |
| 14 | 19 | (4, 10, 1) | 7 | 6 | **29** | 12 | 20 | (4, 10, 1) | 8 | 6 | **31** | 12 |
| 15 | 23 | (4, 11, 1) | 8 | 7 | **33** | 13 | 24 | (4, 11, 1) | 9 | 7 | **37** | 11 |
| 16 | 28 | (4, 12, 1) | 9 | 7 | **41** | 12 | 28 | (4, 12, 1) | 10 | 7 | **46** | 12 |
| 17 | 33 | (4, 13, 1) | 11 | 7 | **50** | 13 | 34 | (4, 13, 1) | 12 | 7 | **56** | 13 |
| 18 | 42 | (6, 12, 1) | 12 | 8 | **61** | 14 | 43 | (6, 12, 1) | 13 | 8 | **68** | 14 |
| 19 | 54 | (6, 13, 1) | 14 | 8 | **74** | 15 | 55 | (6, 13, 1) | 15 | 8 | **82** | 15 |
| 20 | 67 | (6, 14, 1) | 16 | 8 | **88** | 16 | 69 | (6, 14, 1) | 18 | 8 | **97** | 16 |
| 21 | 83 | (6, 15, 1) | 18 | 8 | **104** | 17 | 85 | (6, 15, 1) | 20 | 8 | **114** | 17 |
| 22 | 101 | (6, 16, 1) | 20 | 10 | **122** | 18 | 103 | (6, 16, 1) | 23 | 10 | **139** | 16 |
| 23 | 122 | (6, 17, 1) | 24 | 10 | **149** | 17 | 124 | (6, 17, 1) | 27 | 10 | **171** | 17 |
| 24 | 146 | (6, 18, 1) | 28 | 10 | **184** | 18 | 148 | (6, 18, 1) | 31 | 10 | **209** | 18 |
| 25 | 173 | (6, 19, 1) | 32 | 10 | **223** | 19 | 175 | (6, 19, 1) | 35 | 10 | **253** | 19 |
| 26 | 203 | (6, 20, 1) | 36 | 10 | **269** | 20 | 206 | (6, 20, 1) | 40 | 12 | **304** | 20 |
| 27 | 236 | (6, 21, 1) | 41 | 12 | **322** | 21 | 239 | (6, 21, 1) | 47 | 12 | **362** | 21 |
| 28 | 273 | (6, 22, 1) | 48 | 12 | **382** | 22 | 276 | (9, 18, 2) | 55 | 12 | **428** | 22 |
| 29 | 337 | (10, 19, 1) | 56 | 12 | **450** | 23 | 350 | (9, 19, 2) | 63 | 12 | **523** | 21 |
| 30 | 436 | (10, 20, 1) | 65 | 12 | **553** | 22 | 446 | (10, 20, 1) | 72 | 12 | **641** | 22 |
| 31 | 557 | (10, 21, 1) | 74 | 12 | **677** | 23 | 570 | (10, 21, 1) | 81 | 12 | **780** | 23 |
| 32 | 704 | (10, 22, 1) | 83 | 12 | **822** | 24 | 719 | (10, 22, 1) | 91 | 15 | **943** | 24 |
| 33 | 881 | (10, 23, 1) | 94 | 15 | **991** | 25 | 899 | (10, 23, 1) | 109 | 15 | **1131** | 25 |
| 34 | 1093 | (10, 24, 1) | 112 | 15 | **1186** | 26 | 1114 | (10, 24, 1) | 128 | 15 | **1349** | 26 |
| 35 | 1344 | (10, 25, 1) | 131 | 15 | **1412** | 27 | 1370 | (10, 25, 1) | 149 | 15 | **1599** | 27 |
| 36 | 1641 | (10, 26, 1) | 152 | 15 | **1670** | 28 | 1670 | (10, 26, 1) | 172 | 15 | **1884** | 28 |
| 37 | **1990** | (10, 27, 1) | 175 | 15 | 1965 | 29 | 2023 | (10, 27, 1) | 198 | 16 | **2209** | 29 |
| 38 | **2395** | (10, 28, 1) | 202 | 16 | 2300 | 30 | 2434 | (10, 28, 1) | 229 | 16 | **2577** | 30 |
| 39 | **2866** | (10, 29, 1) | 234 | 16 | 2679 | 31 | 2931 | (11, 27, 2) | 263 | 16 | **3135** | 27 |
| 40 | **3475** | (11, 28, 2) | 268 | 16 | 3289 | 28 | 3567 | (11, 28, 2) | 300 | 16 | **3919** | 28 |
| 41 | **4206** | (11, 29, 2) | 305 | 18 | 4103 | 29 | 4313 | (11, 29, 2) | 349 | 18 | **4865** | 29 |
| 42 | **5155** | (12, 30, 1) | 357 | 18 | 5084 | 30 | 5250 | (12, 30, 1) | 406 | 18 | **6000** | 30 |
| 43 | **6293** | (12, 31, 1) | 414 | 18 | 6259 | 31 | 6404 | (12, 31, 1) | 469 | 18 | **7355** | 31 |
| 44 | 7636 | (12, 32, 1) | 478 | 18 | **7660** | 32 | 7765 | (12, 32, 1) | 538 | 18 | **8964** | 32 |
| 45 | 9213 | (12, 33, 1) | 547 | 18 | **9322** | 33 | 9363 | (12, 33, 1) | 613 | 18 | **10865** | 33 |

Таблица 2: Оценки $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_2)$, полученные с помощью $G_1, G_2, G_3$

| $n\downarrow$ | по теореме 2 | | | | | | по теореме 4 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| граф $\rightarrow$ | $G_1$ | | $G_2$ | | $G_3$ | | $G_1$ | | $G_2$ | | $G_3$ | |
| | $\chi \geqslant$ | $(k_{-1}, k_0, k_1)$ | $\chi \geqslant$ | $r$ | $\chi \geqslant$ | $k_1$ | $\chi \geqslant$ | $(k_{-1}, k_0, k_1)$ | $\chi \geqslant$ | $r$ | $\chi \geqslant$ | $k_1$ |
| 46 | 11057 | (12, 34, 1) | 623 | 18 | **11284** | 34 | 11230 | (12, 34, 1) | 694 | 18 | **13102** | 34 |
| 47 | 13505 | (15, 31, 2) | 705 | 18 | **13590** | 35 | 13924 | (15, 31, 2) | 782 | 18 | **15722** | 35 |
| 48 | **17062** | (15, 32, 2) | 794 | 18 | 16288 | 36 | 17570 | (15, 32, 2) | 913 | 22 | **18779** | 36 |
| 49 | **21407** | (15, 33, 2) | 933 | 22 | 19434 | 37 | 22021 | (15, 33, 2) | 1080 | 22 | **22535** | 35 |
| 50 | **26687** | (15, 34, 2) | 1101 | 22 | 23377 | 36 | 27424 | (15, 34, 2) | 1267 | 22 | **27542** | 36 |
| 51 | **33065** | (15, 35, 2) | 1291 | 22 | 28538 | 37 | **33946** | (15, 35, 2) | 1477 | 22 | 33497 | 37 |
| 52 | **40731** | (15, 36, 2) | 1503 | 22 | 34669 | 38 | **41778** | (15, 36, 2) | 1710 | 22 | 40549 | 38 |
| 53 | **49898** | (15, 37, 2) | 1739 | 22 | 41924 | 39 | **51137** | (15, 37, 2) | 1969 | 22 | 48867 | 39 |
| 54 | **60809** | (15, 38, 2) | 2000 | 22 | 50473 | 40 | **62267** | (15, 38, 2) | 2255 | 22 | 58641 | 40 |
| 55 | **73737** | (15, 39, 2) | 2289 | 22 | 60511 | 41 | **76133** | (16, 37, 3) | 2610 | 24 | 70083 | 41 |
| 56 | **90601** | (16, 38, 3) | 2655 | 24 | 72254 | 42 | **93531** | (16, 38, 3) | 3035 | 24 | 84511 | 40 |
| 57 | **110839** | (16, 39, 3) | 3084 | 24 | 87296 | 41 | **114308** | (16, 39, 3) | 3509 | 24 | 103062 | 41 |
| 58 | **134921** | (16, 40, 3) | 3563 | 24 | 106359 | 42 | **139008** | (16, 40, 3) | 4036 | 24 | 125147 | 42 |
| 59 | **163451** | (16, 41, 3) | 4095 | 24 | 129037 | 43 | **168248** | (16, 41, 3) | 4619 | 24 | 151340 | 43 |
| 60 | **197113** | (16, 42, 3) | 4683 | 24 | 155914 | 44 | **202720** | (16, 42, 3) | 5373 | 26 | 182296 | 44 |
| 61 | **236673** | (16, 43, 3) | 5456 | 26 | 187656 | 45 | **243202** | (16, 43, 3) | 6235 | 26 | 218756 | 45 |
| 62 | **288637** | (19, 40, 4) | 6327 | 26 | 225017 | 46 | **300723** | (19, 40, 4) | 7199 | 26 | 261555 | 46 |
| 63 | **361244** | (19, 41, 4) | 7300 | 26 | 268849 | 47 | **375921** | (19, 41, 4) | 8272 | 26 | 311640 | 47 |
| 64 | **449736** | (19, 42, 4) | 8383 | 26 | 320112 | 48 | **467474** | (19, 42, 4) | 9491 | 28 | 370073 | 48 |
| 65 | **557086** | (19, 43, 4) | 9634 | 28 | 379884 | 49 | **578426** | (19, 43, 4) | 11051 | 28 | 438045 | 49 |
| 66 | **686734** | (19, 44, 4) | 11209 | 28 | 449379 | 50 | **712295** | (19, 44, 4) | 12803 | 28 | 523111 | 46 |
| 67 | **842643** | (19, 45, 4) | 12978 | 28 | 538550 | 47 | **873132** | (19, 45, 4) | 14765 | 28 | 645541 | 47 |
| 68 | **1029368** | (19, 46, 4) | 14957 | 28 | 664098 | 48 | **1067129** | (21, 44, 4) | 16951 | 28 | 793477 | 48 |
| 69 | **1286364** | (21, 45, 4) | 17162 | 28 | 815709 | 49 | **1336483** | (21, 45, 4) | 19546 | 30 | 971604 | 49 |

Здесь картина намного интереснее, чем в случае манхэттенской метрики: для разных размерностей разные идеи оказываются наиболее выгодными. Конечно, уточнение оценки, связанное с наличием минус единиц в координатах вершин графа, проявляется здесь с увеличением размерности, ведь наилучшие асимптотические результаты получены именно с помощью таких графов. Однако очень долгое время оценки, полученные без участия минус единиц, доминируют. Также любопытно то, что если для манхэттенской метрики оптимально фиксировать общее число неотрицательных координат, то для евклидовой полезнее отдельно фиксировать количество координат каждой величины.

Наконец, в завершение первой главы мы делаем замечание о возможности отказа от требования чётности расстояний, формулируя следующие аналоги теорем 1 и 3.

**Теорема 5.** *Пусть $p$ — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность $\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \mod p^\alpha \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$, причём $n \geqslant p^\alpha - 1$. Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{m=0}^{p^\alpha - 1} 2^m \binom{n}{m}.$$

*Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{m=0}^{p^\alpha - 1} \binom{n}{m}.$$

**Теорема 6.** *Пусть $p$ — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1,0,1\}^n$ такую, что во всех векторах $\Sigma$ содержится ровно $r$ ненулевых координат, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность $\ell_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv 0 \mod p^\alpha \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$, а также пусть $r \geqslant p^\alpha - 1$. Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{p^\alpha - 1} 2^{p^\alpha - 1}.$$

*Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0,1\}^n$,*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{p^\alpha - 1}.$$

Во **второй главе** обсуждаются оценки, связанные с проблемой Борсука. Для получения численных результатов мы используем как результаты из предыдущей главы, так и новые утверждения. Формулируется следующая теорема о двух запрещённых скалярных произведениях.

**Теорема 7.** *Пусть $p$ — нечётное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 0 \mod p^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1,1\}^n$ таких, что первые $F$ координат любого из них равны 1, где $F \in \mathbb{N}, F < n$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \notin \{r_0 = 0, r_1\} \mod p^\alpha,$$

*где $r_1 \in \{1,\dots,p^\alpha - 1\}$, причём $r_1 \not\equiv 0 \mod p$.*

*Тогда справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{k=0}^{p^\alpha - 2} \binom{n-F}{k}.$$

Полученная теорема допускает обобщение на случай ненулевого остатка $n$ по модулю $p^\alpha$. А именно, справедлива следующая (более общая)

**Теорема 8.** *Пусть $p$ — нечётное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv -\varepsilon \mod p^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1,1\}^n$ таких, что первые $F$ координат любого из них равны 1, где $F \in \mathbb{N}, F < n$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \notin \{r'_0, r'_1\} \mod p^\alpha,$$

*где $r'_i = r_i - \varepsilon, i = 0,1$, причём $r_1 \in \{1,\dots,p^\alpha - 1\}, r_0 = 0$ и выполнено условие $r_0 \not\equiv r_1 \mod p$. Тогда справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \sum_{k=0}^{p^\alpha - 2} \binom{n-F}{k}.$$

Затем мы получаем численные результаты, применяя теоремы 4, 2 и 8 к сериям конечных дистанционных графов $H_{1,2,3,4,5,6,7,8,9}$, определяемым далее:

$$H_1(n,p^\alpha,k_{-1},k_0,k_1) = (V_1(n,p^\alpha,k_{-1},k_0,k_1), E_1(n,p^\alpha,k_{-1},k_0,k_1)),$$

$$V_1 = \left\{\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \{-1,0,1\}^n : |\{j : x_j = i\}| = k_i, i \in \{-1,0,1\},\right.$$

$$k_1 + k_{-1} = p^\alpha, (x_1 = \ldots = x_{l-1} = 0, x_l \neq 0) \implies (x_l = +1)\big\},$$

$$H_2(n, p^\alpha) = (V_2(n, p^\alpha), E_2(n, p^\alpha)),$$
$$V_2 = \big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n :$$
$$|\{j : x_j = 1\}| + |\{j : x_j = -1\}| = p^\alpha, (x_1 = \ldots = x_{l-1} = 0, x_l \neq 0) \implies (x_l = +1)\big\},$$
$$E_i = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_i \times V_i : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}, i = 1, 2,$$

где $n, k_1, k_{-1}, \alpha$ — натуральные числа, $p$ — нечётное простое число.

Результаты вычислений для серий $H_1$ и $H_2$ приводятся в таблице 3. Таблица организована следующим образом: строки соответствуют верхним оценкам размерностей двойственных конфигураций, столбцы — сериям графов. В каждой ячейке таблицы указана наилучшая оценка снизу числа Борсука, которая была получена нами для данной размерности с использованием графов данной серии. В скобках указаны параметры одного из оптимальных в этом смысле графов: в случае $H_1$ — $(k_{-1}, k_0, k_1)$, а в случае $H_2$ — $(n, p^\alpha)$. Ячейки, в которых конкретный граф не указан, заполнены оценками, следующими из оценок для младших размерностей («сферическая дооценка»). Наконец, лучший результат для каждой строки в каждой из приводимых здесь и далее таблиц мы выделяем **жирным**.

Таблица 3: Оценки, полученные с помощью $H_1$ и $H_2$

| серия графов → | $H_1$ | | $H_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| размерность ↓ | $f \geqslant$ | $k_{-1}, k_0, k_1$ | $f \geqslant$ | $n, p^\alpha$ |
| 1127 | 1128 | – | **1194** | **(47, 19)** |
| 1175 | 1176 | – | **1385** | **(48, 19)** |
| 1224 | 1225 | – | **1596** | **(49, 19)** |
| 1274 | 1275 | – | **1830** | **(50, 19)** |
| 1325 | 1326 | – | **2088** | **(51, 19)** |
| 1377 | 1378 | – | **2370** | **(52, 19)** |
| 1430 | 1431 | – | **2678** | **(53, 19)** |
| 1484 | 1485 | – | **3137** | **(54, 23)** |
| 1539 | 1540 | – | **3686** | **(55, 23)** |
| 1595 | 1596 | – | **4305** | **(56, 23)** |
| 1652 | 1653 | – | **5001** | **(57, 23)** |
| 1710 | 1711 | – | **5780** | **(58, 23)** |
| 1769 | 1770 | – | **6648** | **(59, 23)** |
| 1829 | 1830 | – | **7612** | **(60, 23)** |
| 1890 | 1891 | – | **8829** | **(61, 25)** |
| 1952 | 1953 | – | **10238** | **(62, 25)** |
| 2015 | 2016 | – | **11817** | **(63, 25)** |
| 2079 | 2189 | (12, 39, 13) | **13580** | **(64, 25)** |
| 2144 | 2505 | (12, 40, 13) | **15562** | **(65, 27)** |
| 2210 | 2855 | (12, 41, 13) | **18102** | **(66, 27)** |
| 2277 | 3249 | (13, 40, 14) | **20961** | **(67, 27)** |
| 2345 | 3746 | (13, 41, 14) | **24167** | **(68, 27)** |
| 2414 | 4301 | (13, 42, 14) | **27749** | **(69, 27)** |

Таблица 3: Оценки, полученные с помощью $H_1$ и $H_2$

| серия графов $\rightarrow$ | $H_1$ | | $H_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| размерность $\downarrow$ | $f \geqslant$ | $k_{-1}, k_0, k_1$ | $f \geqslant$ | $n, p^\alpha$ |
| 2484 | 4919 | (13, 43, 14) | **31957** | **(70, 29)** |
| 2555 | 5605 | (13, 44, 14) | **37112** | **(71, 29)** |
| 2627 | 6414 | (14, 43, 15) | **42917** | **(72, 29)** |
| 2700 | 7388 | (14, 44, 15) | **49433** | **(73, 29)** |
| 2774 | 8477 | (14, 45, 15) | **56721** | **(74, 29)** |
| 2849 | 9691 | (14, 46, 15) | **65602** | **(75, 31)** |
| 2925 | 11041 | (14, 47, 15) | **76075** | **(76, 31)** |
| 3002 | 12696 | (15, 46, 16) | **87877** | **(77, 31)** |
| 3080 | 14610 | (15, 47, 16) | **101133** | **(78, 31)** |
| 3159 | 16754 | (15, 48, 16) | **115973** | **(79, 31)** |
| 3239 | 19147 | (15, 49, 16) | **132536** | **(80, 31)** |
| 3320 | 21810 | (15, 50, 16) | **150968** | **(81, 31)** |
| 3402 | 24765 | (15, 51, 16) | **171422** | **(82, 31)** |
| 3485 | 28035 | (15, 52, 16) | **194060** | **(83, 31)** |
| 3569 | 31645 | (15, 53, 16) | **220638** | **(84, 37)** |
| 3654 | 35620 | (15, 54, 16) | **260693** | **(85, 37)** |
| 3740 | 40513 | (18, 49, 19) | **306775** | **(86, 37)** |
| 3827 | 47490 | (18, 50, 19) | **359603** | **(87, 37)** |
| 3915 | 55460 | (18, 51, 19) | **419958** | **(88, 37)** |
| 4004 | 64536 | (18, 52, 19) | **488683** | **(89, 37)** |
| 4094 | 74838 | (18, 53, 19) | **566693** | **(90, 37)** |
| 4185 | 86497 | (18, 54, 19) | **654974** | **(91, 37)** |
| 4277 | 99651 | (18, 55, 19) | **754583** | **(92, 37)** |
| 4370 | 114452 | (18, 56, 19) | **866658** | **(93, 37)** |
| 4464 | 131060 | (18, 57, 19) | **992417** | **(94, 37)** |
| 4559 | 149646 | (18, 58, 19) | **1133159** | **(95, 37)** |
| 4655 | 170395 | (18, 59, 19) | **1304158** | **(96, 41)** |
| 4752 | 193500 | (18, 60, 19) | **1523731** | **(97, 41)** |
| 4850 | 222461 | (20, 57, 21) | **1774425** | **(98, 41)** |
| 4949 | 258240 | (20, 58, 21) | **2059811** | **(99, 41)** |

В таблице 4 приводятся результаты вычислений для серий $H_3$, $H_4$ и $H_5$, где

$$V_{3,4}(n) = \big\{(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \mod 2\big\},$$

$$H_3(n) = (V_3(n), E_3(n)), n = 4p^\alpha, E_3(n) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_3 \times V_3 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

$$H_4(n) = (V_4(n), E_4(n)), n = 4p^\alpha - 1, E_4(n) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_4 \times V_4 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1\},$$

$$V_5(n) = \big\{(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = x_2 = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \mod 2\big\},$$

$$H_5(n) = (V_5(n), E_5(n)), n = 4p^\alpha + 1, E_5(n) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_5 \times V_5 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\},$$

$n, \alpha$ — натуральные числа, $p$ — нечётное простое число.

Таблица 4: Оценки, полученные с помощью $H_3$, $H_4$ и $H_5$

| серия графов → | $H_3$ | | $H_4$ | | $H_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| размерность ↓ | $f \geqslant$ | $n$ | $f \geqslant$ | $n$ | $f \geqslant$ | $n$ |
| 903 | 904 | – | **1064** | **43** | 904 | – |
| 946 | **1650** | **44** | 1107 | – | 947 | – |
| 990 | **1694** | – | 1151 | – | 1650 | 45 |
| 1275 | 1979 | – | **3270** | **51** | 1935 | – |
| 1326 | **5050** | **52** | 3321 | – | 1986 | – |
| 1378 | **5102** | – | 3373 | – | 5050 | 53 |
| 2211 | 5935 | – | **30046** | **67** | 5883 | – |
| 2278 | **46106** | **68** | 30113 | – | 5950 | – |
| 2346 | **46174** | – | 30181 | – | 46106 | 69 |
| 2775 | 46603 | – | **90163** | **75** | 46535 | – |
| 2850 | **138043** | **76** | 90238 | – | 46610 | – |
| 2926 | **138119** | – | 90314 | – | 138043 | 77 |
| 4095 | 139288 | – | **800476** | **91** | 139212 | – |
| 4186 | **1221419** | **92** | 800567 | – | 139303 | – |
| 4278 | **1221511** | – | 800659 | – | 1221419 | 93 |
| 4851 | 1222084 | – | **2371962** | **99** | 1221992 | – |
| 4950 | **3614581** | **100** | 2372061 | – | 1222091 | – |
| 5050 | **3614681** | – | 2372161 | – | 3614581 | 101 |
| 5671 | 3615302 | – | **7007884** | **107** | 3615202 | – |
| 5778 | **10667226** | **108** | 7007991 | – | 3615309 | – |
| 5886 | **10667334** | – | 7008099 | – | 10667226 | 109 |
| 6555 | 10668003 | – | **20652058** | **115** | 10667895 | – |
| 6670 | **31405567** | **116** | 20652173 | – | 10668010 | – |
| 6786 | **31405683** | – | 20652289 | – | 31405567 | 117 |
| 7503 | 31406400 | – | **60726721** | **123** | 31406284 | – |
| 7626 | **92268675** | **124** | 60726844 | – | 31406407 | – |
| 7750 | **92268799** | – | 60726968 | – | 92268675 | 125 |
| 10731 | 92271780 | – | **1527357444** | **147** | 92271656 | – |
| 10878 | **2316010201** | **148** | 1527357591 | – | 92271803 | – |
| 11026 | **2316010349** | – | 1527357739 | – | 2316010201 | 149 |
| 13203 | 2316012526 | – | **13017530454** | **163** | 2316012378 | – |
| 13366 | **19718933577** | **164** | 13017530617 | – | 2316012541 | – |
| 13530 | **19718933741** | – | 13017530781 | – | 19718933577 | 165 |
| 14535 | 19718934746 | – | **37937097426** | **171** | 19718934582 | – |
| 14706 | **57441611729** | **172** | 37937097597 | – | 19718934753 | – |
| 14878 | **57441611901** | – | 37937097769 | – | 57441611729 | 173 |
| 17391 | 57441614414 | – | **321245170447** | **187** | 57441614242 | – |
| 17578 | **486029170427** | **188** | 321245170634 | – | 57441614429 | – |
| 17766 | **486029170615** | – | 321245170822 | – | 486029170427 | 189 |
| 18915 | 486029171764 | – | **933565445712** | **195** | 486029171576 | – |
| 19110 | **1411959372838** | **196** | 933565445907 | – | 486029171771 | – |
| 19306 | **1411959373034** | – | 933565446103 | – | 1411959372838 | 197 |

В таблице 5 приводятся результаты вычислений для серий дистанционных графов $H_6$, $H_7$, $H_8$ и $H_9$, где

$$H_6(n, r'_1, r'_2, F) = (V_6(n, F), E_6(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha, r'_1 = 0, r'_2 = 4, \text{ либо } n = 4p^\alpha + 4, r'_1 = 4, r'_2 = 8;$$

$$H_7(n, r'_1, r'_2, F) = (V_7(n, F), E_7(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha - 1, r'_1 = -1, r'_2 = 3, \text{ либо } n = 4p^\alpha + 3, r'_1 = 3, r'_2 = 7;$$

$$H_8(n, r'_1, r'_2, F) = (V_8(n, F), E_8(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha - 2, r'_1 = -2, r'_2 = 2, \text{ либо } n = 4p^\alpha + 2, r'_1 = 2, r'_2 = 6;$$

$$H_9(n, r'_1, r'_2, F) = (V_9(n, F), E_9(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha + 1, r'_1 = 1, r'_2 = 5, \text{ либо } n = 4p^\alpha + 5, r'_1 = 5, r'_2 = 9;$$

$$V_{6,7,8,9}(n, F) = \big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = \ldots = x_F = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \mod 2\big\},$$

$$E_{6,7,8,9}(n, r'_1, r'_2, F) = \big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_{6,7,8,9} \times V_{6,7,8,9} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{r'_1, r'_2\}\big\},$$

где $n, \alpha, F$ — натуральные числа, $p$ — нечётное простое число, $F \leqslant n - 1$.

Таблица 5: Оценки, полученные с помощью $H_6$, $H_7$, $H_8$ и $H_9$

| серия → | $H_6$ | | $H_7$ | | $H_8$ | | $H_9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dim ↓ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ |
| 561 | **759** | **(36, 2, 4, 3)** | **759** | **(35, 1, 3, 2)** | **759** | **(34, 1, 1, 1)** | **759** | **(37, 3, 5, 4)** |
| 820 | **1472** | **(44, 1, 5, 4)** | **1472** | **(43, 1, 3, 3)** | 1018 | – | **1472** | **(45, 2, 6, 5)** |
| 861 | **2321** | **(44, 2, 4, 3)** | **2321** | **(43, 1, 3, 2)** | **2321** | **(42, 1, 1, 1)** | **2321** | **(45, 3, 5, 4)** |
| 1128 | **2891** | **(52, 1, 5, 5)** | **2891** | **(55, 4, 8, 8)** | 2588 | – | **2891** | **(53, 2, 6, 6)** |
| 1176 | **4500** | **(52, 1, 5, 4)** | **4500** | **(51, 1, 3, 3)** | 2636 | – | **4500** | **(53, 2, 6, 5)** |
| 1225 | **7044** | **(52, 2, 4, 3)** | **7044** | **(51, 1, 3, 2)** | **7044** | **(50, 1, 1, 1)** | **7044** | **(53, 3, 5, 4)** |
| 2016 | **26592** | **(68, 1, 5, 5)** | **26592** | **(71, 4, 8, 8)** | 7835 | – | **26592** | **(69, 2, 6, 6)** |
| 2080 | **41044** | **(68, 1, 5, 4)** | **41044** | **(67, 1, 3, 3)** | 7899 | – | **41044** | **(69, 2, 6, 5)** |
| 2145 | **63626** | **(68, 2, 4, 3)** | **63626** | **(67, 1, 3, 2)** | **63626** | **(66, 1, 1, 1)** | **63626** | **(69, 3, 5, 4)** |
| 2556 | **79829** | **(76, 1, 5, 5)** | **79829** | **(79, 4, 8, 8)** | 64037 | – | **79829** | **(77, 2, 6, 6)** |
| 2628 | **122850** | **(76, 1, 5, 4)** | **122850** | **(75, 1, 3, 3)** | 64109 | – | **122850** | **(77, 2, 6, 5)** |
| 2701 | **189802** | **(76, 2, 4, 3)** | **189802** | **(75, 1, 3, 2)** | **189802** | **(74, 1, 1, 1)** | **189802** | **(77, 3, 5, 4)** |
| 3828 | **709181** | **(92, 1, 5, 5)** | **709181** | **(95, 4, 8, 8)** | 190929 | – | **709181** | **(93, 2, 6, 6)** |
| 3916 | **1086594** | **(92, 1, 5, 4)** | **1086594** | **(91, 1, 3, 3)** | 191017 | – | **1086594** | **(93, 2, 6, 5)** |
| 4005 | **1670378** | **(92, 2, 4, 3)** | **1670378** | **(91, 1, 3, 2)** | **1670378** | **(90, 1, 1, 1)** | **1670378** | **(93, 3, 5, 4)** |
| 4560 | **2101953** | **(100, 1, 5, 5)** | **2101953** | **(103, 4, 8, 8)** | 1670933 | – | **2101953** | **(101, 2, 6, 6)** |
| 4656 | **3215194** | **(100, 1, 5, 4)** | **3215194** | **(99, 1, 3, 3)** | 1671029 | – | **3215194** | **(101, 2, 6, 5)** |
| 4753 | **4933134** | **(100, 2, 4, 3)** | **4933134** | **(99, 1, 3, 2)** | **4933134** | **(98, 1, 1, 1)** | **4933134** | **(101, 3, 5, 4)** |
| 5356 | **6211462** | **(108, 1, 5, 5)** | **6211462** | **(111, 4, 8, 8)** | 4933737 | – | **6211462** | **(109, 2, 6, 6)** |
| 5460 | **9487651** | **(108, 1, 5, 4)** | **9487651** | **(107, 1, 3, 3)** | 4933841 | – | **9487651** | **(109, 2, 6, 5)** |
| 5565 | **14533276** | **(108, 2, 4, 3)** | **14533276** | **(107, 1, 3, 2)** | **14533276** | **(106, 1, 1, 1)** | **14533276** | **(109, 3, 5, 4)** |
| 6216 | **18308386** | **(116, 1, 5, 5)** | **18308386** | **(119, 4, 8, 8)** | 14533927 | – | **18308386** | **(117, 2, 6, 6)** |
| 6328 | **27930587** | **(116, 1, 5, 4)** | **27930587** | **(115, 1, 3, 3)** | 14534039 | – | **27930587** | **(117, 2, 6, 5)** |
| 6441 | **42723846** | **(116, 2, 4, 3)** | **42723846** | **(115, 1, 3, 2)** | **42723846** | **(114, 1, 1, 1)** | **42723846** | **(117, 3, 5, 4)** |

В таблицу 6 для наглядности собраны оценки чисел Борсука пространств «малой» размерности, полученные с помощью «самых сильных» серий графов.

Таблица 6: Сравнение оценок чисел Борсука пространств «малых» размерностей

| серия графов → | $H_2$ | | $H_3$ | | $H_4$ | | $H_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| размерность ↓ | $f \geqslant$ | $n, p^\alpha$ | $f \geqslant$ | $n$ | $f \geqslant$ | $n$ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ |
| 561 | 562 | – | 562 | – | 562 | – | **759** | **(36, 2, 4, 3)** |
| 820 | 821 | – | 821 | – | 821 | – | **1472** | **(44, 1, 5, 4)** |
| 861 | 862 | – | 862 | – | 862 | – | **2321** | **(44, 2, 4, 3)** |
| 1128 | 1195 | – | 1832 | – | 1289 | – | **2891** | **(52, 1, 5, 5)** |
| 1176 | 1386 | – | 1880 | – | 1337 | – | **4500** | **(52, 1, 5, 4)** |
| 1225 | 1597 | – | 1929 | – | 1386 | – | **7044** | **(52, 2, 4, 3)** |
| 1890 | **8829** | **(61, 25)** | 5614 | – | 3885 | – | 7709 | – |
| 1952 | **10238** | **(62, 25)** | 5676 | – | 3947 | – | 7771 | – |
| 2015 | **11817** | **(63, 25)** | 5739 | – | 4010 | – | 7834 | – |
| 2016 | 11818 | – | 5740 | – | 4011 | – | **26592** | **(68, 1, 5, 5)** |
| 2080 | 13581 | – | 5804 | – | 4075 | – | **41044** | **(68, 1, 5, 4)** |
| 2145 | 15563 | – | 5869 | – | 4140 | – | **63626** | **(68, 2, 4, 3)** |
| 2556 | 37113 | – | 46384 | – | 30391 | – | **79829** | **(76, 1, 5, 5)** |
| 2628 | 42918 | – | 46456 | – | 30463 | – | **122850** | **(76, 1, 5, 4)** |
| 2701 | 49434 | – | 46529 | – | 30536 | – | **189802** | **(76, 2, 4, 3)** |
| 3485 | **194060** | **(83, 31)** | 138678 | – | 90873 | – | 190586 | – |
| 3569 | **220638** | **(84, 37)** | 138762 | – | 90957 | – | 190670 | – |
| 3654 | **260693** | **(85, 37)** | 138847 | – | 91042 | – | 190755 | – |
| 3740 | **306775** | **(86, 37)** | 138933 | – | 91128 | – | 190841 | – |
| 3827 | **359603** | **(87, 37)** | 139020 | – | 91215 | – | 190928 | – |
| 3828 | 359604 | – | 139021 | – | 91216 | – | **709181** | **(92, 1, 5, 5)** |
| 3916 | 419959 | – | 139109 | – | 91304 | – | **1086594** | **(92, 1, 5, 4)** |
| 4005 | 488684 | – | 139198 | – | 91393 | – | **1670378** | **(92, 2, 4, 3)** |
| 4560 | 1133160 | – | 1221793 | – | 800941 | – | **2101953** | **(100, 1, 5, 5)** |
| 4656 | 1304159 | – | 1221889 | – | 801037 | – | **3215194** | **(100, 1, 5, 4)** |
| 4753 | 1523732 | – | 1221986 | – | 801134 | – | **4933134** | **(100, 2, 4, 3)** |
| 5356 | 3645551 | – | 3614987 | – | 2372467 | – | **6211462** | **(108, 1, 5, 5)** |
| 5460 | 4227501 | – | 3615091 | – | 2372571 | – | **9487651** | **(108, 1, 5, 4)** |
| 5565 | 4888126 | – | 3615196 | – | 2372676 | – | **14533276** | **(108, 2, 4, 3)** |
| 6216 | 11381100 | – | 10667664 | – | 7008429 | – | **18308386** | **(116, 1, 5, 5)** |
| 6328 | 13246846 | – | 10667776 | – | 7008541 | – | **27930587** | **(116, 1, 5, 4)** |
| 6441 | 15375505 | – | 10667889 | – | 7008654 | – | **42723846** | **(116, 2, 4, 3)** |
| 7140 | 36510771 | – | 31406037 | – | 20652643 | – | **53843925** | **(124, 1, 5, 5)** |
| 7260 | 42124522 | – | 31406157 | – | 20652763 | – | **82054071** | **(124, 1, 5, 4)** |
| 7381 | 48483212 | – | 31406278 | – | 20652884 | – | **125358495** | **(124, 2, 4, 3)** |
| 8255 | **132973944** | **(128, 53)** | 92269304 | – | 60727473 | – | 125359369 | – |
| 8384 | **153592119** | **(129, 53)** | 92269433 | – | 60727602 | – | 125359498 | – |
| 8514 | **177000680** | **(130, 53)** | 92269563 | – | 60727732 | – | 125359628 | – |
| 8645 | **203521513** | **(131, 53)** | 92269694 | – | 60727863 | – | 125359759 | – |
| 8777 | **233507010** | **(132, 53)** | 92269826 | – | 60727995 | – | 125359891 | – |
| 8910 | **267342303** | **(133, 53)** | 92269959 | – | 60728128 | – | 125360024 | – |
| 9044 | **305447594** | **(134, 53)** | 92270093 | – | 60728262 | – | 125360158 | – |
| 9179 | **348280600** | **(135, 53)** | 92270228 | – | 60728397 | – | 125360293 | – |
| 9315 | **398529295** | **(136, 59)** | 92270364 | – | 60728533 | – | 125360429 | – |
| 9452 | **466820352** | **(137, 59)** | 92270501 | – | 60728670 | – | 125360566 | – |
| 9590 | **545493701** | **(138, 59)** | 92270639 | – | 60728808 | – | 125360704 | – |
| 9729 | **635925506** | **(139, 59)** | 92270778 | – | 60728947 | – | 125360843 | – |
| 9869 | **739647011** | **(140, 59)** | 92270918 | – | 60729087 | – | 125360983 | – |
| 10010 | **858358804** | **(141, 59)** | 92271059 | – | 60729228 | – | 125361124 | – |
| 10152 | **993946100** | **(142, 59)** | 92271201 | – | 60729370 | – | 125361266 | – |
| 10295 | **1148495045** | **(143, 59)** | 92271344 | – | 60729513 | – | 125361409 | – |
| 10296 | 1148495046 | – | 92271345 | – | 60729514 | – | **1354767865** | **(148, 1, 5, 5)** |
| 10440 | 1324310123 | – | 92271489 | – | 60729658 | – | **2059341163** | **(148, 1, 5, 4)** |
| 10585 | 1523932677 | – | 92271634 | – | 60729803 | – | **3137001950** | **(148, 2, 4, 3)** |
| 11475 | **3585535973** | **(151, 61)** | 2316010798 | – | 1527358188 | – | 3137002840 | – |
| 11627 | **4108658537** | **(152, 61)** | 2316010950 | – | 1527358340 | – | 3137002992 | – |
| 11780 | **4699472449** | **(153, 61)** | 2316011103 | – | 1527358493 | – | 3137003145 | – |
| 11934 | **5365604653** | **(154, 61)** | 2316011257 | – | 1527358647 | – | 3137003299 | – |
| 12089 | **6159942008** | **(155, 67)** | 2316011412 | – | 1527358802 | – | 3137003454 | – |
| 12245 | **7201786262** | **(156, 67)** | 2316011568 | – | 1527358958 | – | 3137003610 | – |
| 12402 | **8402150920** | **(157, 67)** | 2316011725 | – | 1527359115 | – | 3137003767 | – |
| 12560 | **9782444352** | **(158, 67)** | 2316011883 | – | 1527359273 | – | 3137003925 | – |
| 12719 | **11366594042** | **(159, 67)** | 2316012042 | – | 1527359432 | – | 3137004084 | – |
| 12720 | 11366594043 | – | 2316012043 | – | 1527359433 | – | **11548841982** | **(164, 1, 5, 5)** |

Таблица 6: Сравнение оценок чисел Борсука пространств «малых» размерностей

| серия графов → | $H_2$ | | $H_3$ | | $H_4$ | | $H_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| размерность ↓ | $f \geqslant$ | $n, p^\alpha$ | $f \geqslant$ | $n$ | $f \geqslant$ | $n$ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ |
| 12879 | **13181297915** | **(160, 67)** | 2316012202 | – | 1527359592 | – | 11548842141 | – |
| 12880 | 13181297916 | – | 2316012203 | – | 1527359593 | – | **17532574162** | **(164, 1, 5, 4)** |
| 13041 | 15256295978 | – | 2316012364 | – | 1527359754 | – | **26667999195** | **(164, 2, 4, 3)** |
| 13694 | **26877571975** | **(165, 67)** | 19718933905 | – | 13017530945 | – | 26667999848 | – |
| 13860 | **30828453073** | **(166, 67)** | 19718934071 | – | 13017531111 | – | 26668000014 | – |

Также мы произвели расчёты для случая растущей размерности. Численный эксперимент показывает, что с ростом $d$ начинают поочерёдно доминировать две серии графов — $H_2$ ($\{-1, 0, 1\}$-графы с одним «запретом») и $H_6$ ($\{-1, 1\}$-графы с двумя «запретами»). В таблицу 7 мы включаем лишь те достаточно большие размерности, при переходе через которые можно наблюдать смену доминирующей серии, а также размерности, большие предполагаемой «пороговой» — как можно видеть из проведённых расчётов, начиная с $d = 22154$ устанавливается ожидаемое[66] доминирование $\{-1, 0, 1\}$-графов с ограничением на количество ненулевых координат.

Таблица 7: Сравнение оценок чисел Борсука пространств при росте размерностей

| серия графов → | $H_2$ | | $H_6$ | |
|---|---|---|---|---|
| размерность ↓ | $f \geqslant$ | $n, p^\alpha$ | $f \geqslant$ | $n, I, J, F$ |
| 14027 | **35575214838** | **(167, 71)** | 26668000181 | – |
| 14196 | 41357928108 | – | **51071503180** | **(172, 1, 5, 4)** |
| 15050 | **85452235646** | **(173, 71)** | 77633048377 | – |
| 17019 | **403613843210** | **(184, 79)** | 285068165140 | – |
| 17020 | 403613843211 | – | **432113274440** | **(188, 1, 5, 4)** |
| 17204 | **470465660729** | **(185, 79)** | 432113274624 | – |
| 17205 | 470465660730 | – | **656117737023** | **(188, 2, 4, 3)** |
| 17765 | **737438558303** | **(188, 79)** | 656117737583 | – |
| 18720 | **1514737229760** | **(193, 81)** | 1255308792435 | – |
| 18721 | 1514737229761 | – | **1905118736125** | **(196, 2, 4, 3)** |
| 19109 | **2025160588555** | **(195, 81)** | 1905118736513 | – |
| 21944 | **14903109993823** | **(209, 89)** | 10570185288769 | – |
| 21945 | 14903109993824 | – | **16027885419443** | **(212, 2, 4, 3)** |
| 22154 | **17317326505560** | **(210, 89)** | 16027885419652 | – |
| 28440 | **969776983719827** | **(238, 101)** | 389313830989796 | – |
| 28679 | **1125124376330066** | **(239, 101)** | 389313830990035 | – |
| 28919 | **1303646677247047** | **(240, 101)** | 491862065149951 | – |
| 29160 | **1508544540124909** | **(241, 101)** | 743799486168000 | – |
| 29402 | **1743424867403224** | **(242, 101)** | 1126265437348848 | – |
| 29645 | **2012347763025557** | **(243, 101)** | 1126265437349091 | – |
| 29889 | **2319878366958466** | **(244, 101)** | 1126265437349335 | – |

**В третьей главе** указан способ улучшения нижних оценок измеримых хроматических чисел некоторых евклидовых пространств «малых» размерностей, а также изучена ситуация с нижними оценками измеримых хроматических чисел евклидова пространства растущей размерности.

Известны[47] следующие нижние оценки измеримых хроматических чисел

пространств $\mathbb{R}^n$:

Таблица 8: Наилучшие известные автору нижние оценки $\chi_m(\mathbb{R}^n)$

| $n$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_m \geqslant$ | 10 | 15 | 21 | 37 | 52 | 69 | 90 | 116 | 164 | 254 | 334 |
| $n$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| $\chi_m \geqslant$ | 413 | 619 | 906 | 1178 | 1341 | 2132 | 3182 | 4062 | 4712 | 5424 | – |

Нами рассматривается серия дистанционных графов $\mathsf{G}_{2k} = (\mathsf{V}_{2k}, \mathsf{E}_{2k})$ следующего вида:

$$\mathsf{V}_{2k} = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2k}) : \ x_i \in \{-1, 0, 1\}, \ x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2 = k\right\},$$

$$\mathsf{E}_{2k} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathsf{V}_{2k} \times \mathsf{V}_{2k} : \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

В диссертации получен следующий результат, представленный таблицей 9.

Таблица 9: Возможные уточнения $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ в «малых» размерностях

| $n$ | $\chi_m \geqslant \ldots$ | $\chi_m \geqslant \ldots,$ | если $\alpha(\mathsf{G}_{2k}) = \ldots$ | оценка уточняется, если $\alpha(\mathsf{G}_{2k}) \leqslant \ldots$ |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 164 | 253 | 1428 | $2.39 \cdot 10^3$ |
| 14 | 334 | 507 | 8192 | $1.33 \cdot 10^4$ |
| 16 | 619 | 1403 | 29700 | $8.039 \cdot 10^4$ |
| 18 | 1178 | 3169 | 134420 | $4.57 \cdot 10^5$ |
| 20 | 2132 | 6812 | 635206 | $2.71 \cdot 10^6$ |
| 22 | 4062 | 14493 | 2983344 | $1.498 \cdot 10^7$ |
| 24 | 5424 | 30566 | 13929188 | $1.21 \cdot 10^8$ |

Здесь в первой колонке таблицы приведена размерность пространства, во второй – наилучшая известная автору оценка $\chi_m$ снизу, в третьей — оценка $\chi_m$, которая будет автоматически доказана в случае, если истинное значение $\alpha(\mathsf{G}_{2k})$ совпадёт со своей нижней оценкой, указанной в третьей колонке; в четвёртой колонке приведена более слабая верхняя оценка числа независимости $\alpha(\mathsf{G}_{2k})$, доказательство которой повлечёт уточнение нижней оценки $\chi_m(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение таблицы 9 представляет интерес, так как есть основания полагать, что известные верхние оценки $\alpha(\mathsf{G}_{2k})$ гораздо дальше от истины, нежели нижние. Предложенные здесь нижние оценки $\chi_m$ были получены с использованием той же техники из работы[47] Башок, Пассуэлло и Тьери, что приводит к оценкам из таблицы 8.

Что же касается случая растущей размерности, результаты третьей главы здесь состоят в следующем.

Рассмотрена следующая серия дистанционных графов: пусть $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ — граф, вершины которого — это всевозможные $(-1, 0, 1)$-векторы в $\mathbb{R}^n$, имеющие по $k_{-1}, k_0$ и $k_1$ отрицательных, нулевых и положительных координат соответственно, а рёбра — пары вершин, отстоящих друг от друга на расстояние $t$.

Известно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n$, причём эта оценка была получена[71] с помощью оценивания сверху чисел независимости указанных графов.

Также имеет место тривиальный факт $\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(\mathbb{R}^n)$.

С другой стороны, была установлена[47] справедливость *нетривиальной* асимптотической оценки измеримого хроматического числа:

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.268\ldots + o(1))^n. \tag{4}$$

В доказательстве данной оценки также использовались графы $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ — с их помощью было предъявлено решение определённой задачи оптимизации. Нижние оценки измеримых хроматических чисел здесь получаются тем точнее, чем точнее соответствующие верхние оценки чисел независимости графов $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$.

Ключевую роль в третьей главе играет гипотеза о *строгих* $\mathsf{d}$*-частных конструкциях*, сформулированная и мотивированная в работе[72] Райгородского и Харламовой.

**Определение 1.** *Пусть даны положительные целые числа* $l_1, \ldots, l_{\mathsf{d}}$*, сумма которых равна* $n$*, и тройки чисел* $l_{i,-1}, l_{i,0}, l_{i,1}$ *с суммой* $l_i$*,* $i = 1, \ldots, \mathsf{d}$*. Совокупность* $\mathcal{F}$*, состоящая из* $(-1, 0, 1)$*-векторов, является строгой* $\mathsf{d}$*-частной конструкцией, если существует такое разбиение множества всех координатных позиций на части размеров* $l_1, \ldots, l_{\mathsf{d}}$*, что каждый из векторов совокупности* $\mathcal{F}$ *имеет ровно* $l_{i,\nu}$ *координат величины* $\nu = -1, 0, 1$ *в части с номером* $i$*,* $i = 1, \ldots, \mathsf{d}$*.*

**Гипотеза 1.** *Пусть последовательность графов* $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ *подчиняется условиям*

$$k_{-1} \sim k'_{-1} n, \quad k_1 \sim k'_1 n, \quad s \sim s' n, \quad 0 < k'_{-1} \leqslant k'_1, \quad k'_{-1} + k'_1 \leqslant \frac{1}{2},$$
$$s' \in \left[-2k'_{-1}, \frac{k'_1 - k'_{-1}}{2}\right], \tag{5}$$

*где* $t$ *— расстояние, отвечающее скалярному произведению* $s$*. Тогда*

$$\alpha(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) = (c(k'_{-1}, k'_1, s') + o(1))^n, \quad c(k'_{-1}, k'_1, s') > 1,$$

*причём существует такая* $\mathsf{d}$*-частная конструкция* $\mathcal{F}$*, что в ней всегда* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > s$ *и*

$$|\mathcal{F}| = (c(k'_{-1}, k'_1, s') + o(1))^n.$$

В той же работе доказано, что если гипотеза 1 верна, то $\mathsf{d} \leqslant 3$. Это позволяет проводить оптимизацию как при отыскании нижней оценки обычного хроматического числа, так и при отыскании аналогичной оценки измеримого хроматического числа. В первом случае оптимизация проведена, опять же, в работе Райгородского и Харламовой, и там показано, что при

$$k'_{-1} = 0.145\ldots, \quad k'_1 = 0.355\ldots, \quad s' = \frac{k'_1 - k'_{-1}}{2}$$

выполнено

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) \geqslant (1.30\ldots + o(1))^n.$$

[71] *Райгородский А.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[72] *Райгородский А., Харламова А.* О совокупностях $(-1, 0, 1)$-векторов с запретами на величины попарных скалярных произведений // Труды по векторному и тензорному анализу. 2013. Т. 29. С. 130—146.

Нам удалось провести оптимизацию во втором случае. А именно, мы взяли значение числа независимости, вычисляемое за счёт гипотезы 1 и теоремы о том, что в этой гипотезе достаточно брать $\mathsf{d} \leqslant 3$. Это значение мы подставили в ту же задачу оптимизации, решение которой приводит к оценке (4). В итоге нами был установлен следующий факт.

**Утверждение 1.** *Если верна гипотеза 1 и мы применяем упомянутую технику оптимизации, то*

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.28\ldots + o(1))^n.$$

Здесь константа $1.28\ldots$ получена при

$$k'_{-1} = 0.25\ldots, \quad k'_1 = 0.25\ldots, \quad s' = -0.05585\ldots$$

Иными словами, получается, что тривиальная оценка $\chi_m \geqslant \chi$ окажется сильнее нетривиальной оценки, полученной путём решения задачи оптимизации, коль скоро верна гипотеза 1. Мы предполагаем, что это связано не с тем, что на самом деле гипотеза ошибочна, а с тем, что, по-видимому, предложенный Башок, Пассуэлло и Тьери «метод оптимизации» подлежит усилению.

В **заключении** перечисляются полученные в диссертации основные результаты, а также обсуждаются открытые вопросы, связанные с темой диссертации.

### Работы автора по теме диссертации


- *Боголюбский Л.*, *Райгородский А.* Об измеримом хроматическом числе пространства размерности $n \leqslant 24$ // Доклады РАН. 2015. Т. 7, № 3. С. 5—10.
- *Боголюбский Л.*, *Райгородский А.* Об измеримом хроматическом числе пространства растущей размерности // Труды МФТИ. 2015. Т. 27, № 3.
- *Боголюбский Л.*, *Райгородский А.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками $\ell_1$ и $\ell_2$ // Математические заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 187—213.
- *Боголюбский Л.*, *Райгородский А.* Об оценках в проблеме Борсука // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 3. С. 20—49.