Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

*На правах рукописи*

Матушко Мария Георгиевна

# Пределы интегрируемых систем типа Калоджеро-Сазерленда

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Хорошкин Сергей Михайлович

Москва – 2020

## Аннотация

Основной целью данной работы является изучение пределов системы Калоджеро-Сазерленда в скалярном и спиновом случаях, когда число частиц $N$ стремится к бесконечности. В каждом из случаев строится бозонный и фермионный предел, соответствующий симметричным и антисимметричным волновым функциям системы.

Для фермионного предела скалярной системы мы выводим предельное выражение для оператора Дункла через свободные фермионные поля, см. Теорему 2.1, которое позволяет получить семейство коммутирующих гамильтонианов в пространстве Фока, см. Предложение 2.4. В случае значения константы связи $\beta = 0$ получена явная формула для производящей функции гамильтонианов, которая отличается от известных ранее. Первая формула дана в виде нормально упорядоченного выражения в бозонном пространстве, см. Предложение 3.1. Вторая формула записана в терминах простого интегрального оператора, но не является нормально упорядоченной, см. Предложение 3.2.

Спиновая система КС обладает янгианной симметрией. Однако, действие генераторов янгиана, а также гамильтонианов в скалярном случае не образуют проективной системы. Поэтому мы изучаем проективные свойства действия янгиана и формулируем результаты в Предложении 4.1 и Предложении 4.2.

Для спиновой системы реализуется бозонный и фермионный предел в многокомпонентном пространстве Фока. Мы вводим отображения в конечные системы и строим обратный образ конечных операторов Дункла в терминах вершинных операторов в бозонном случае и в терминах свободных фермионных полей в фермионном случае, см. Предложение 5.1 и Предложение 6.1. Предел оператора Дункла позволяет построить соответствующее представление янгиана в пространстве Фока, см. Теорему 5.1 и Теорему 6.1. В бозонном случае исследуем классический предел, см. Предложения 5.3 и 5.4.

## Исторический обзор

Система одномерных частиц с попарным взаимодействие обратно-пропорциональным квадрату расстояния играет важную роль в математической и теоретической физике на протяжении последних 40 лет. Эта модель возникает и имеет приложения в различных областях физики, таких как физика конденсированного состояния, спиновые цепочки, калибровочная теория и теория струн, и является основным примером интегрируемой и точно решаемой многочастичной модели. В литературе она связана с именами Ф. Калоджеро, Б. Сазерленда и Ю. Мозера. Впервые система тождественных частиц, сосредоточенных на прямой, с потенциалом обратно пропорциональным квадрату расстояния между частицами была введена Ф. Калоджеро в 1971 году [7]. Гамильтониан этой системы задается следующим образом

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j} \frac{g}{(q_i - q_j)^2}$$

где использованы привычные обозначения импульсов и координат. Массы частиц равны единице, $g$ — константа взаимодействия. Можно рассмотреть периодическую версию системы (например, с периодом $2\pi$), считая, что взаимодействуют бесконечно много образов частиц, тогда двухчастичный потенциал преобразуется следующим образом

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g}{(x+2\pi n)^2} = \frac{g}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Это модель была введена Б. Сазерлендом в 1971 году [44]. Удобно использовать следующую параметризацию константы связи

$$g = \beta(\beta-1).$$

Тем самым мы получаем систему $N$ тождественных частиц на окружности длины $L$, которую мы будем называть квантовая система Калоджеро-Сазерленда со следующим гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)^2 + 2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i<j}^{N} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{L}(q_i-q_j)\right)}, \tag{1}$$

и являющуюся объектом нашего дальнейшего исследования. Естественно рассматривать периодические волновые состояния системы

$$\phi(q_1,\ldots,q_i+L,\ldots,q_N) = \phi(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_N).$$

Функция

$$\phi_0(\mathbf{q}) = \phi_0(q_1,\ldots,\ldots,q_N) = \prod_{i<j} |\sin(\frac{\pi}{L}(q_i-q_j))|^{\beta}$$

задает основное состояние гамильтониана с собственной энергией [18]

$$E_0 = (\pi\beta/L)^2\, N(N^2-1)/3.$$

Применяя преобразование подобия $\Phi_0(\mathbf{q})^{-1}H^{CS}\Phi_0(\mathbf{q})$ и переходя в новым "коллективным"переменным $x_i = e^{\frac{2\pi i q_i}{L}}$, получаем формулу для эффективного гамильтониана:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \beta\sum_{i<j} \frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{2}$$

Гамильтониан (2) представляет собой дифференциально-разностный оператор. Оказывается, существует семейство коммутирующих между собой дифференциально-разностных операторов, включающее в себя (2). Это семейство может быть построено с помощью операторов Хекмана-Дункла [11, 12]. Мы приведем для них выражения в форме, предложенной в [37]:

$$D_i^{(N)} = x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta\sum_{j\neq i}\frac{x_i}{x_i-x_j}\left(1-K_{ij}\right), \tag{3}$$

где $K_{ij}$ — перестановка. Симметрические многочлены от $D_i^{(N)}$ коммутируют [12] между собой. Обозначим

$$H_k^{(N)} = \mathrm{Res}_+\left(\sum_i \left(D_i^{(N)}\right)^k\right), \tag{4}$$

где $\mathrm{Res}_+$ означает ограничение на пространство симметрических многочленов. Операторы $H_k^{(N)}$ могут быть выбраны в качестве высших гамильтонианов модели Калоджеро-Сазерленда. В частности, $H = H_2^{(N)}$.

Собственными функциями коммутирующих операторов $H_k^{(N)}$ являются симметрические полиномы от $N$ переменных с параметром $\alpha = \frac{1}{\beta}$, которые называются полиномами Джека [16]. Они параметризуются разбиениями и являются обобщением полиномов Шура и частным случаем симметрических полиномов Макдональда с двумя параметрами $q, t$ [24, 25]. Устремив $q, t \to 1$ и считая, что $q = t^\alpha$, получим полиномы Джека. Известно семейство разностных операторов, для которых полиномы Макдональда являются собственными[24]. В случае полиномов Джека эти операторы были введены Ж. Секигучи [42] и А. Дебьярдом [9]. Операторы Секигучи-Дебьярда являются вырождением операторов Макдональда. Правда, они не совпадают с операторами, введенными в (4), но полиномиально выражаются через них.

Конструкция полиномов Макдональда и соответствующих коммутирующих разностных операторов известна и для произвольной системы корней [8, 26, 27]. Обобщение полиномов Джека на произвольную системы корней было введено Хекманом и Э.Опдамом, они называются полиномы Якоби, связанные с системой корней [13, 14, 15, 35]. Полиномы Джека — это случай системы корней $A_n$. Мы ограничимся только этим случаем. Заметим, что система Калоджеро-Сазерленда — интегрируемая система, соответствующая системе корней $A_{N-1}$, следуя М. Ольшанецкому и А. Переломову [34].

Естественно возникает вопрос об описании модели при стремлении числа частиц $N$ к бесконечности. Эта задача решалась, и в работах [2, 4, 5, 17, 37] конца 80-х начала 90-х годов были явно предъявлены ответы для предела второго гамильтониана (2) в бозонном пространстве Фока. Около 20 лет спустя общую конструкцию коммутирующих гамильтонианов в бозонном пространстве предъявили М. Назаров и Е. Склянин [32] и независимо А. Веселов и А. Сергеев [43]. Развивая идеи Макдональда, М. Назаров и Е. Склянин в работе [32] построили предельные выражения для операторов Секигучи-Дебьярда в пределе $N$ к бесконечности. Главным инструментом являлась теория симметрических функций. Симметрические функции можно представлять себе как симметрические многочлены от бесконечного числа переменных. Нулевой сектор бозонного пространства Фока может быть отождествлен с кольцом симметрических функций, которое формально определяется как проективный предел колец симметрических многочленов. Тем самым в работе было построено семейство операторов, собственными функциями которых уже являлись симметрические функции Джека.

В [31],[43] было предложено другое построение предельной конструкии модели Калоджеро-Сазерленда в бозонном пространстве Фока. Главной идеей было использовать семейство операторов Дункла (3) как квантовый $L$-оператор системы. Для систем Калоджеро $L$-оператор был уже известен [30] и оказался схожим с действием семейства операторов Дункла, записанном в матричном виде в подходящем базисе. Это позволило явно построить выражения для высших гамильтонианов в бозонном пространстве Фока и тем самым показать, что предельная система является интегрируемой. Полученная система может быть рассмотрена как квантовый аналог интегрируемой иерархии уравнения Бенжамина-Оно [1, 38].

В частном случае значении константы связи симметрические функции Джека становятся функциями Шура, а уравнение Бенжамина-Оно соответственно вырождается в бездисперсное уравнение КдФ (или так называемое уравнение Бюргерса). Точная конструкция коммутирующих гамильтонианов квантового бездисперсного уравнения КдФ может быть получена непосредственно из бозон-фермионного соответствия. Гамильтонианы могут быть получены рекуррентно [36] или в терминах производящей функции [33, 41].

Мы рассмотрим спиновую систему Калоджеро-Сазарленда, которая является обобщением этой модели, где вводятся дополнительные степени свободы, которые обычно интерпретируются как спиновые переменные. Интегрируемость системы Калоджеро изучалась во многих работах, например [23]. Спиновые система Калоджеро-Сазерленда являются суперинтегрируемыми согласно Н. Решетихину [39, 40]. В настоящей работе мы будем использовать специальный случай спиновой модели для системы корней $A_N$ и соответсвующий представлению старшего веса $\mathfrak{sl}_N$. В этом случае в числителе потенциала гамильтониана (1) будет стоять $\beta(\beta - K_{ij})$, где $K_{ij}$ это оператор перестановки координат $i$-ой and $j$-ой, и мы будем предполагать зависимость частиц от спина.

Спиновая система обладает янгианной симметрией, другими словами, гамильтонианы системы Калоджеро-Сазерленда коммутируют с действием янгиана, более того они выражаются через центральные элементы янгианана. Наличие янгианной симметрии непосредственно связано с операторами Дункла. Они удовлетворяют соотношениям вырожденной аффинной алгебры Гекке, что в свою очередь позволяет построить представление янгиана $\mathfrak{gl}_N$, согласно общей конструкции [3, 10]. Тем самым высшие гамильтонианы системы могут быть выбраны как центр янгиана — коэффициенты квантового детерминанта.

В симметрическом спиновом случае предельное выражение для второго гамильтониана в коллективных переменных было получено в работе [5]. Антисимметрический предел спиновой системы изучался Д. Угловым [45, 47]. Д. Углов изучал проективные свойства действия янгиана для конечной системы, а именно предложил формулу подправки трансфер-матрицы янгиана, чтобы системы стала проективной и действие стабилизировалось. Также Д. Углов разложил соответствующее пространство Фока на неприводимые компоненты по отношению к действию янгиана и нашел спектр гамильтонианов.

# 1 Бозонный предел Калоджеро-Сазерленда

В первой главе приводится обзор результатов [31, 43], касающихся построения бозонного предлела системы Калоджеро-Сазерленда, но изложение происходит на языке вершинных операторов. Используются обозначения, отличающиеся от [31, 43], но более удобные для наших целей и проясняющие дальнейшее изложение.

Мы начинаем изложение с описания конечной системы КС, ограниченной на кольцо симметрических многочленов от $N$ переменных. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать эквивариантные операторы Хекмана-Дункла как квантовый L-оператор, действующий на пространстве полиномиальных функций одной переменной с коэффициентами, являющимися симметричными полиномами от остальных $N-1$ переменных. Очевидно, что соответствующий оператор Дункла $D_i^{(N)}$ сохраняет симметрию по всем переменным кроме $x_i$, и поэтому, рассматриваем его действие на $\Lambda_+^{N,i}$ — пространстве функций симметричных во всем переменных кроме $x_i$.

Действие высших гамильтонианов (4) системы может быть посредством следующей процедуры: начинаем с симметрического полинома $f(x_1,\ldots,x_N) \in \Lambda_+^N$ и строим вектор из его $N$ копий. При действии $k$-ой степени оператора Дункла $(\tilde{D}_i^{(N)})^k$ получается семейство $N$ эквивариантных функций $f_i(x_1,\ldots;x_i;\ldots x_N) = (\tilde{D}_i^{(N)})^k f(x_1,\ldots,x_N) \in \Lambda_+^{N,i}$ таких, что

- $f_i(x_1,\ldots;x_i;\ldots x_N)$ является симметричной по всем переменным кроме $x_i$
- и переставляются симметрической группой

$$K_{ij} f_i = f_j. \tag{5}$$

Для $g(x_1,\ldots;x_i;\ldots x_N) \in \Lambda_+^{N,i}$ введем оператор симметризации

$$\mathrm{E}_N\, g = \sum_{j=1}^N K_{ij} g.$$

Затем применим $\mathrm{E}_N$ к функции $f_i$ из эквивариантного семейства (5):

$$\mathrm{E}_N\, f_i = \sum_{j=1}^N f_j$$

Эту процедуру можно проиллюстрировать следующей матричной формулой:

$$\tilde{H}_k = \big(1,1,\ldots\big) \begin{pmatrix} x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta \sum\limits_{i=2}^N \dfrac{x_1}{x_1-x_i} & -\beta\frac{x_1}{x_1-x_2} & \cdots \\ -\beta\frac{x_2}{x_2-x_1} & x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \beta\sum\limits_{i\neq 2} \dfrac{x_2}{x_2-x_i} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} f \\ f \\ \vdots \\ f \end{pmatrix},$$

матрица в которой напоминает матрицу Лакса (см. [30]) для системы КС.

Мы переформулируем процедуру в терминах многочленов Ньютона $p_k^{(N)} = x_1^k + \cdots + x_N^k$ и выразим операторы Хекмана-Дункла через конечные аналоги $V_+(z)$, $V_+'(z)$ вершинных операторов $\Phi(z)$, $\Phi^{-1}(z)$ и отрицательную часть производной бозонного поля $\varphi^-(z)$, которые задаются формулами:

$$\Phi(z) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}\right), \qquad \varphi^-(z) = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{p_n}{z^n}\right).$$

Для этого запишем симметрический многочлен в следующем виде

$$f(p_1^{(N)}, p_2^{(N)}, p_3^{(N)}, \ldots)$$

Оператор $V_+(x_i)$ заменяет каждую сумму Ньютона $p_k^{(N)}$ на $p_k^{(N-1)} + x_i^k$, тем самым $V_+(x_i) f \in \Lambda_+^{N,i}$ является разложением Тейлора полинома $f$ по переменной $x_i$.

Для того, чтобы симметризовать функцию $F(x_i, \{p_n^{(N-1)}\}) \in \Lambda_+^{N,i}$ используется формальный интеграл

$$\mathrm{E}_N\, F(\{p_n\}) = \oint \frac{d\xi}{\xi} \varphi^-(\xi) \left(V'_+(\xi) F\right)(\xi; \{p_n\}).$$

который означает взятие вычета в бесконечности. Оператор $V'_+(\xi)$ меняет каждую сумму Ньютона $p_k^{(N-1)}$ на $p_k^{(N)} - \xi^k$. Затем взятие интеграла $\oint \frac{d\xi}{\xi}\varphi^-(\xi)$ заменяет каждое вхождение $\xi^k$ на $p_k^{(N)}$.

Далее строится бозонный предел в расширенном кольце симметричных функций $\hat\Lambda$. Пусть $\hat\Lambda = \Lambda[p_0]$ — кольцо симметричные функции [24] с добавленной свободной переменной $p_0$. Пространство $\hat\Lambda$ является неприводимым представлением алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}$, порожденной элементами $p_n$ и $\dfrac{\partial}{\partial p_n}$ и может рассматриваться как полиномиальная версия пространства Фока. Оно содержит вакуумный вектор $|0\rangle_+$ такой, что

$$\frac{\partial}{\partial p_n} |0\rangle_+ = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Дуальный вакуумный вектор ${}_+\langle 0|$ удовлетворяет условиям

$${}_+\langle 0| p_n = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Мы определяем проекцию $\tilde\pi_N : \hat\Lambda \to \Lambda_+^N$, которая элементу $|v\rangle_+ \in \hat\Lambda$ сопоставляет следующий матричный элемент

$$\tilde\pi_N |v\rangle_+ = {}_+\langle 0| \Phi(x_N) \ldots \Phi(x_2)\Phi(x_1)|v\rangle_+.$$

Эта проекция переводит элемент $p_k$ в соответствующий полином Ньютона от $N$ переменных:

$$\tilde\pi_N : p_k \to p_k^{(N)} = \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad p_0 \to N.$$

Определим линейное отображение $\mathcal{S} : \hat\Lambda \otimes \mathbb{C}[z] \to \hat\Lambda$ как

$$\mathcal{S} F(\{p_n\}) = \oint \frac{d\xi}{\xi} \varphi^-(\xi) \Phi^{-1}(\xi) F(\xi, \{p_n\}).$$

и докажем, что отображение $\mathcal{S}$ является поднятием конечной симметризации $\mathrm{E}_N$ относительно $\tilde\pi_N$:

$$\mathrm{E}_N\, \tilde\pi_{N-1} F(z, \{p_n\}) = \tilde\pi_N \mathcal{S}(F(z, \{p_n\}).$$

Мы формулируем главный результат этой главы:

**Теорема 1.1** *Оператор $\tilde D : \hat\Lambda \otimes \mathbb{C}[z] \to \hat\Lambda \otimes \mathbb{C}[z]$, заданный формулой*

$$\tilde D(F(z, \{p_n\})) = z \frac{\partial}{\partial z} F(z, \{p_n\}) + \beta z \oint \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} \Phi^*(\xi)\Phi(z) F(\xi, \{p_n\}),$$

*является пределом операторов Дункла $\tilde D_i^{(N)}$.*

Другими словами, оператор $\tilde{D}$ является поднятием $\tilde{D}_i^{(N)}$ относительно отображения $\tilde{\pi}_N$. Этот результат был получен ранее в [31, 43], но в другой формулировке, здесь он приводится на языке вершинных операторов. Из данной теоремы следует следующее

**Предложение 1.2** *Операторы* $\tilde{\mathscr{H}_k} = \mathcal{S}\tilde{D}^k\Phi(z) : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}$,

$$\tilde{\mathscr{H}_k} : \hat{\Lambda} \xrightarrow{\Phi(z)} \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z] \xrightarrow{D^k} \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z] \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\Lambda},$$

*образуют коммутирующее семейство гамильтонианов предельной системы [31, 43].*

Также показывается, что в классическом пределе система переходит в иерархию Бенжамина-Оно, здесь изложение следует [31].

# 2 Фермионный предел системы КС

Вторая глава посвящена фермионному пределу модели Калоджеро-Сазарленда, где излагаются результаты статьи [19]. В этом случае частицы являются фермионами, и мы имеем дело с антисимметрическими волновыми функциями.

Как и в бозонном случае начнем описание системы КС ограниченной на пространство антисимметрических полиномов $\Lambda_-^N$ в терминах операторов Хекмана-Дункла. Выразим операторы Хекмана-Дункла через конечные аналоги $V_-(z)V_+(z)$ и $V_-'(z)V_+'(z)$ вершинных операторов $\Psi(z)$ и $\Psi^*(z)$, где

$$\Psi(z) = z^{p_0} \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p_n}{nz^n}\right) \exp\left(\sum_{n\geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}\right)$$

$$\Psi^*(z) = z^{-p_0} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{p_n}{nz^n}\right) \exp\left(-\sum_{n\geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}\right).$$

Для этого запишем антисимметрический полином от $N$ переменных в виде

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) f(p_1^{(N)}, p_2^{(N)}, p_3^{(N)}, \dots)$$

где $p_k^{(N)} = x_1^k + \ldots + x_N^k$. Оператор $V_+(x_1)$ подставляет вместо элемента $p_k^{(N)}$ элемент $p_k^{(N-1)} + x_1^k$, а оператор

$$V_-(x_1) = x_1^N \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p_n^{(N-1)}}{nx_1^n}\right)$$

является умножением на $\prod_{i=2}^N (x_1 - x_i)$, таким образом, применение $V_-(x_1)V_+(x_1)$ к антисимметрическому полиному $g(x_1, ..., x_N)$ есть разложение в ряд Тейлора по переменной $x_1$. С другой стороны, оператор $V_-'(z)V_+'(z)$ используется для полной атисимметризации функций антисимметричных по всем переменным кроме одной.

Затем мы реализуем предел в полиномиальном пространстве Фока $\hat{\Lambda}$. Каждому вектору $|v\rangle$ из $\hat{\Lambda}$ сопоставим семейство $\{\bar{\pi}_N(v)\}$ антисимметрических функций от $N$ переменных, заданное матричными элементами

$$\bar{\pi}_N(v) = \langle 0|\Psi(x_N)\cdots\Psi(x_1)|v\rangle. \tag{6}$$

Основной целью является построение операторов в пространстве $\hat{\Lambda}$, которые будут согласованы с действиями конечных гамильтонианов КС посредством отображений (6). Мы строим их, следуя подходу Склянина [31, 21]: определяем вспомогательное пространство $U \subset \mathbb{C}[z,z^{-1}]] \otimes \hat{\Lambda}$ и его отображения в пространства полиномов антисимметричных по всем переменным кроме одной. Далее предъявляем операторы, действующие на пространстве $U$, который согласованы относительно введенных отображений.

Ключевой идеей конструкции является оператор интегрального усреднения $\mathcal{A} : \mathbb{C}[z,z^{-1}]] \otimes \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}$, которой является предельным аналогом конечной антисимметризации. Пусть $F(z) \in \mathbb{C}[z,z^{-1}]] \otimes \hat{\Lambda}$, определим $\mathcal{A}F \in \hat{\Lambda}$ следующей формулой:

$$\mathcal{A}F = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{z\circlearrowleft 0} dz \int_{u\circlearrowleft z} du \frac{\Psi^*(u)F(z)}{u-z}.$$

В Лемме 2.3 показывается, что $\mathcal{A} : U \to \hat{\Lambda}$ является поднятием конечной антисимметризации.

Далее определим оператор $D : \mathbb{C}[z,z^{-1}]] \otimes \hat{\Lambda} \to \mathbb{C}[z,z^{-1}]] \otimes \hat{\Lambda}$ следующей формулой

$$DF(z) = z\frac{\partial}{\partial z}F(z) + \beta\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{w\circlearrowleft 0} dw \int_{u\circlearrowleft w} \frac{du}{(u-w)}\frac{\Psi^*(u)}{\left(1-\frac{w}{z}\right)}\left(\Psi(w)F(z) - \Psi(z)F(w)\right).$$

и доказываем

**Теорема 2.1** *Оператор $D$, действующий на вспомогательном пространстве $U$, является поднятием операторов Хекмана-Дункла $D_i^{(N)}$ относительно отображения $\bar{\pi}_N$.*

Гамильтонианы конечной системы с $N$ частицами в антисимметрическом случае могут быть записаны с помощью операторов Дункла, аналогично формуле (4):

$$\bar{H}_k^{(N)} = \mathrm{Res}_-\left(\sum_i \left(D_i^{(N)}\right)^k\right),$$

где $\mathrm{Res}_-$ означает ограничение на пространство антисимметрических полиномов $\Lambda_-^N$. Мы строим предельные гамильтонианы $\mathscr{H}_k$, которые являются поднятием гамильтонианов $\bar{H}_k^{(N)}$ конечной системы:

$$\bar{H}_k^{(N)}\bar{\pi} = \bar{\pi}\mathscr{H}_k.$$

Определим операторы

$$\mathscr{H}_k = \mathcal{A}D^k\Psi(z) : \hat{\Lambda} \to \hat{\Lambda}, \tag{7}$$

тогда верно следующее

**Предложение 2.4** *Операторы $\mathscr{H}_k$ образуют коммутативное семейство операторов в пространстве $\hat{\Lambda}$.*

Построенные гамильтонианы коммутируют в пространстве $\hat{\Lambda}$. Более того, они коммутируют в алгебре Гейзенберга и как следствие в любом ее представлении, например, в бозонном пространстве Фока. Мы можем определить проекцию $\pi_N : \mathcal{F} \to \Lambda_-^N$, похожую на формулу (6)

$$\pi_N(v) = \langle 0|\Psi(x_N)\cdots\Psi(x_1)|v\rangle.$$

В действительности оно действует не нулем только на $N$-ом секторе $\mathcal{F}_N$ пространства Фока. Теперь построенные гамильтонианы $\mathscr{H}_k$ согласованы с отображениями $\pi_N$, коммутативность $\pi_N\mathscr{H}_k = \bar{H}_k^{(N)}\pi_N$ нетривиальна только на $N$-ом секторе $\mathcal{F}_N$. Мы переформулируем нашу конструкцию в фермионном пространстве Фока, реализованном как пространство полубесконечных форм, и определяем проекцию аналогичную $\pi_N$, которая действует как "обрезание" формы.

# 3 Производящие функции коммутирующих гамильтонианов для специальных значений константы связи

В этой главе рассмотрим частный случай $\beta = 0$ антисимметрического предела (используются такие же обозначения для гамильтонианов как и в предыдущей главе, подразумевая, что $\beta = 0$). В этом случае гамильтонианы (7) могут быть записаны простой формулой в фермионном пространстве Фока

$$\mathscr{H}_n = \sum_k \vdots k^n \psi_k^* \psi_k \vdots.$$

Бозон-фермионное соответствие позволяет найти выражения для $\mathscr{H}_n$ в бозонном пространстве Фока, это было проделано А. Погребковым [36] для аддитивной версии на прямой и позже П. Росси [41] на окружности.

Здесь мы выводим две формулы для плотностей гамильтонианов $\mathscr{H}_n$, которые не были известны ранее, и излагаем результаты работы [28]. В случае $\beta = 0$ оператор Дункла становится просто дифференциальным оператором $\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)$ и гамильтонианы (7) выражаются через плотности $\mathscr{H}_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\circlearrowleft 0}\frac{dz}{z}\mathscr{W}_k(z)$, заданные формулой

$$\mathscr{W}_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u\circlearrowleft z} du \frac{\Psi^*(u)}{u-z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \Psi(z).$$

Эти гамильтонианы являются поднятиями дифференциальных операторов $\bar{H}_k^{(N)} = \sum_{i=1}^N \left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k$. Мы получаем первую формулу, вычисляя интеграл по $u$ в выражении для $\mathscr{W}_k(z)$, используя бозонное исчисление. Это приводит к следующему ответу

**Предложение 3.1** *Экспоненциальная производящая функция $\mathscr{W}(z,x)$ для плотностей $\mathscr{W}_k(z)$ задается следующей формулой*

$$\mathscr{W}(z,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\mathscr{W}_k(z) = \frac{:\exp\left(x\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \varphi(z)\right)\right):-1}{e^x - 1}$$

*и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial \mathscr{W}(x,z)}{\partial x} =: \varphi(z)\mathscr{W}(z,x) : + z\frac{\partial \mathscr{W}(x,z)}{\partial z} - \frac{e^x \mathscr{W}(z,x) - \varphi(z)}{e^x - 1}.$$

Здесь экспонента означает формальный ряд, действующий на тождественную функцию:

$$\exp\left(x\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \varphi(z)\right)\right) = 1 + x\varphi(z) + \frac{x}{2!}\left(\varphi^2(z) + z\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z)\right) + \dots$$

Вторая формула получается с помощью фермионного исчисления и выражается в виде интегрального оператора. Определим интегральный оператор $K : \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]] \to \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ следующей формулой

$$K\left[f(z)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{w\circlearrowleft z} \frac{dw}{w - z}\varphi(w)f(z),$$

здесь $f(z) \in \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$. Затем приведем явные выражения для гамильтонианов и формулируем

**Предложение 3.2** *Экспоненциальная производящая функция для гамильтонианов задается формулой*

$$\mathscr{H}(x) = \frac{1}{2\pi i(e^x - 1)}\int\limits_{z\circlearrowleft 0} dz \frac{e^{xK} - 1}{K}\left[\frac{\varphi(z)}{z}\right].$$

*Гамильтонианы выражаются следующим образом:*

$$\mathscr{H}_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z\circlearrowleft 0} dz\left(\frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n+1}{l+1}B_{n-l}K^l\left[\frac{\varphi(z)}{z}\right]\right). \tag{8}$$

Здесь $B_n$ обозначают числа Бернулли, а оператор $\frac{e^{xK}-1}{K}$ означает формальный степенной ряд по $K$:

$$\frac{e^{xK} - 1}{K} = x + \frac{x^2}{2}K + \frac{x^3}{6}K^2 + \frac{x^4}{24}K^3 + \dots.$$

Заметим, что выражения для гамильтонианов, полученные в Предложении 3.2, не являются нормально упорядоченными.

Гамильтонианы $\mathscr{H}_n$ коммутируют, тем самым можно ввести интегрируемую иерархию временных эволюций, порождаемые этими коммутирующими потоками

$$\varphi_{t_n}(z) = [\mathscr{H}_n, \varphi(z)].$$

Мы приводим точные выражения и формулируем следующее

**Лемма 3.5** *Иерархия временных эволюций порожденная коммутирующими потоками (8) задается следующим образом*

$$\varphi_{t_k}(z) = \frac{1}{2}B(x) : \int_{x\circlearrowleft 0} dx \frac{k!}{x^{k+1}} \sinh\left(xz\frac{\partial}{\partial z}\right) e^{xS(xz\frac{\partial}{\partial z})\varphi(z)} : .$$

Классическим пределом полученной иерархия является бездисперсная иерархия КдФ на окружности [36].

# 4 Операторы Дункла и представление янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_s)$

Фазовое пространство квантовой спиновой системы Калоджеро-Сазерленда (КС) состоит из функций со значениями в векторном пространстве $(\mathbb{C}^s)^{\otimes N}$, а в гамильтониане системы

$$H^{CS} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\beta(\beta - K_{ij})}{\sin^2(q_i - q_j)},$$

присутствует зависимость от спина частиц [18]. Здесь $K_{ij}$ обозначает оператор перестановки $i$-ой и $j$-ой частицы. После сопряжения на функцию $\prod_{i<j}|\sin(q_i - q_j)|^\beta$, которое задает основное состояние, и переходя к экспоненциальным переменным $x_i = e^{2\pi i q_i}$ и параметру $\alpha = \beta^{-1}$, более часто используемому в математической литературе, и после сдвига получаем эффективный гамильтониан

$$H = \alpha\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i<j}\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - 2\sum_{i<j}\frac{x_i x_j}{(x_i - x_j)^2}\left(1 - K_{ij}\right),$$

который ограничим на пространство $\Lambda_\pm^{s,N}$ полных инвариантов или, соответственно, антиинвариантов симметрической группы $S_N$ в пространстве $V^{\otimes N}$,

$$\Lambda_\pm^{s,N} = \left(V^{\otimes N}\right)^{(\pm)}.$$

Здесь $V = \mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}^s$. (Анти)инварианты берутся по отношению к диагональному действию симметрической группы, $\sigma_{ij} \mapsto K_{ij}P_{ij}$, где $K_{ij}$ определено выше, а $P_{ij}$ — оператор перестановки $i$-ой и $j$-ой тензорной копии пространства $\mathbb{C}^s$.

Далее мы используем операторы Хекмана-Дункла $\mathcal{D}_i^{(N)} : V\otimes\Lambda_\pm^{s,N-1} \to V\otimes\Lambda_\pm^{s,N-1}$ в форме, которую предложил Полихронакос [37]:

$$\mathcal{D}_i^{(N)} = \alpha x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j\neq i}\frac{x_i}{x_i - x_j}\left(1 - K_{ij}\right).$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$K_{ij}\mathcal{D}_i^{(N)} = \mathcal{D}_j^{(N)}K_{ij},$$
$$[\mathcal{D}_i^{(N)}, \mathcal{D}_j^{(N)}] = (\mathcal{D}_j^{(N)} - \mathcal{D}_i^{(N)})K_{ij},$$

которые в свою очередь совпадают с соотношениями вырожденной аффинной алгебры Гекке $H_N$. Пользуясь дуальностью, предложенной Дринфельдом [10], это представление вырожденной аффинной алгебры Гекке задает представление янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_s)$ в пространстве $\Lambda_\pm^{s,N}$, см [3, 22]

$$t_{ab}(u) = \delta_{ab} + \sum_i \frac{E_{ab,i}}{u \pm \mathcal{D}_i^{(N)}}. \tag{9}$$

Здесь $E_{ab,i}$ означает действие алгебры $\mathfrak{gl}_s$ на $i$-ой тензорной компоненте,

$$E_{ab,i}\Big(\ldots \otimes \underbrace{(e^c \otimes x^k)}_{i} \otimes \ldots\Big) = \delta_{bc}\Big(\ldots \otimes \underbrace{(e^a \otimes x^k)}_{i} \otimes \ldots\Big).$$

а $t_{ab}(u)$, $a, b = 1, \ldots s$,

$$t_{ab}(u) = \delta^{ab} + \sum_{i=0}^{\infty} t_{ab,i} u^{-i-1}$$

задает производящую функцию генераторов $t_{ab,i}$ янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_s)$. Определяющие соотношения янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_s)$ записываются следующим образом [29]

$$[t_{ab}(u), t_{cd}(v)] = \frac{t_{cb}(u)t_{ad}(v) - t_{cb}(v)t_{ad}(u)}{u - v}.$$

Высшие гамильтонианы спиновой системы КС можно выбрать как элементы квантового детерминанта

$$q \det t(u) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{sgn(\sigma)} t_{\sigma(1),1}(u) t_{\sigma(2),2}(u-1) \ldots t_{\sigma(m),m}(u-m+1).$$

который порождает центр янгиана $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_s)$ [6, 29].

Нашей основной целью является построение предела определенного выше действия янгиана, когда $N$ стремится к бесконечности. В частности, получаем пределы вышеупомянутого коммутирующего семейства гамильтонианов. Чтобы построить предел нам необходимо исследовать проективные свойства действия янгиана в фазовых пространствах $\Lambda_\pm^{s,N}$ модели КС. Такой анализ был проведен Д. Угловым в работе [46], но наше описание отличается от описания [46].

Кольцо $\Lambda_+^N$ симметрических функций образует проективную систему относительно отображений

$$\omega_N^+ : \Lambda_+^N \to \Lambda_+^{N-1}, \qquad \omega_N^+ f(x_1, \ldots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_{N-1}, 0).$$

Аналогично, пространство $\Lambda_-^N$ антисимметрических функций образует проективную систему относительно отображений

$$\omega_N^- : \Lambda_-^N \to \Lambda_-^{N-1}, \qquad \omega_N^- f(x_1, \ldots, x_N) = (x_1 \ldots x_{N-1})^{-1} f(x_1, \ldots, x_{N-1}, 0).$$

В отличие от кольца симметричных функций, пространство $\hat{\Lambda}$ не является проективным пределом пространств (анти)симметричных функций из-за наличия нулевой моды $p_0$. С другой стороны, сами гамильтонианы $H_k$ системы КС как в симметричном, так и в кососимметрическом случаях не образуют проективного семейства, поскольку они не подчиняются естественным проекциям

$$\omega_N^+ H_k^{(N+1)} \neq H_k^{(N)} \omega_N^+.$$

Пусть

$$T(u) = \sum_{a,b=1}^{s} E_{ab} \otimes t_{ab}(u) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^s) \otimes \mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_s)[u^{-1}]$$

производящая функция образующих янгиана. Введем обозначение $T_N(u)$ для транфер-матрицы, соответствующая представлению янгиана (9) , здесь индекс $N$ обозначает количество частиц. В скалярном случае ($s = 1$) трансфер-матрица $T_N(u)$ является производящей функцией гамильтонианов

$$T_N(u) = 1 + \frac{1}{u} H_0^{(N)} + \frac{1}{u^2} H_1^{(N)} + \frac{1}{u^3} H_2^{(N)} + \dots$$

Далее мы формулируем предложение о проективных свойствах $T_N(u)$ в скалярном симметрическом и кососимметрическом случаях

**Предложение 4.1** *(i) В скалярном симметрическом случае выполняется следующее соотношение для операторов $\tilde{\Lambda}_+^N[u^{-1}] \to \tilde{\Lambda}_+^{N-1}[u^{-1}]$ :*

$$\omega_N^+ T_N(u) = \frac{u+1}{u} T_{N-1}(u+1) \omega_N^+;$$

*(ii) В скалярном кососимметрическом случае выполняется следующее соотношение для операторов $\tilde{\Lambda}_-^N[u^{-1}] \to \tilde{\Lambda}_-^{N-1}[u^{-1}]$:*

$$\omega_N^- T_N(u) = \frac{u+1}{u} T_{N-1}(u - \alpha - 1) \omega_N^-.$$

Применяя соотношения из Предложения 4.1, видим, что перенормированные трансфер-матрицы $\tilde{T}_N(u)$ и $\bar{T}_N(u)$ в симметрическом и кососимметрическом случаях

$$\tilde{T}_N(u) = \frac{u-N}{u} T_N(u-N) \qquad \bar{T}_N(u) = T_N(u + \gamma N) \prod_{k=1}^{N} \frac{u + k\gamma}{u + k\gamma + 1},$$

согласуются с проекциями $\omega_N^+$ и $\omega_N^-$, соответственно:

$$\omega_N^+ \tilde{T}_N(u) = \tilde{T}_{N-1}(u) \omega_N^+ \qquad \omega_N^- \bar{T}_N(u) = \bar{T}_{N-1}(u) \omega_N^-.$$

Здесь $\gamma = \alpha + 1$. Коэффициенты перенормированной трансфер матрицы можно выбрать в качестве проективной системы гамильтонианов системы КС.

Утверждение Предложения 4.1 обобщается на кососимметрический спиновый случай. Рассмотрим элемент $f$ пространства $\Lambda_-^{s,N}$ как функцию со значениями в $(\mathbb{C}^s)^{\otimes N}$ $f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Определим линейное отображение $\omega_N : \Lambda_-^{s,N} \to \Lambda_-^{s,N-s}$ следующей формулой

$$\omega_N^-(f) = (x_1 \cdots x_{N-s})^{-1} \left(1^{\otimes (N-s)} \otimes e_1^\perp \otimes e_2^\perp \cdots \otimes e_s^\perp\right) f(x_1, \dots, x_{N-s}, 0, \dots 0).$$

**Предложение 4.2** *Выполняются следующие соотношения для операторов* $\mathbb{C}^s \otimes \tilde{\Lambda}_-^{s,Ns}[u^{-1}] \to \mathbb{C}^s \otimes \tilde{\Lambda}_-^{s,(N-1)s}[u^{-1}]$*:*

$$\omega_{Ns}^- T_{Ns}(u) = \frac{u+1}{u} T_{(N-1)s}(u-\alpha-s)\omega_{Ns}^-.$$

Положим $\gamma = \alpha + s$ и

$$\bar{T}_{Ns}(u) = T_{Ns}(u+\gamma N)\prod_{k=1}^{N} \frac{u+k\gamma}{u+k\gamma+1},$$

рассматриваемый как асимптотический ряд по $u^{-1}$. Тогда $\bar{T}_{Ns}(u)$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega_{Ns}^- \bar{T}_{Ns}(u) = \bar{T}_{(N-1)s}\omega_{Ns}^-$$

и образуют проективную систему трансфер-матриц.

# 5 Бозонной предел спиновой системы Калоджеро-Сазерленда

В этой главе мы излагаем результаты работы [21] в других формулировках.

Пусть $\mathcal{H}^s$ — алгебра Гейзенберга с образующими $a_{c,k}, c = 1,\ldots,s,\ k = 0, 1, ...$ и $(q_c)^{\pm 1}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$[a_{c,k}, a_{d,l}] = k\delta_{cd}\delta_{k,-l}, \qquad q_c a_{d,k} = (a_{d,k} + \delta_{cd}\delta_{k0})q_c.$$

Пусть $\hat{\Lambda}^{(s)}$ — представление алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}^s$ с вакуумным вектором $|0\rangle_+$ такое что

$$a_{c,k}|0\rangle_+ = 0,\ c = 1, ..., s,\ \ k > 0, \qquad q_c|0\rangle_+ = |0\rangle_+,\ c = 1, ..., s.$$

Обозначим левый вакуумный вектор как ${}_+\langle 0|$ , он удовлетворяет соотношениям

$${}_+\langle 0|a_{c,k} = 0, \qquad c = 1, ..., s,\ \ k \leq 0.$$

Для любого $|v\rangle_+ \in \hat{\Lambda}^{(s)}$ рассмотрим матричный элемент $\tilde{\pi}_N(|v\rangle_+) \in V^{\otimes N}$

$$\tilde{\pi}_N(|v\rangle_+) = {}_+\langle 0|\mathbf{\Phi}(z_N)\mathbf{\Phi}(z_{N-1})\cdots\mathbf{\Phi}(z_1)|v\rangle_+,$$

где

$$\Phi_c(z) = \exp\left(\sum_{n>0}\frac{a_{c,n}}{n}z^n\right) q_c : \qquad \hat{\Lambda}^{(s)} \to \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes \mathbb{C}[z], \qquad c = 1, ..., s,$$
$$\mathbf{\Phi}(z) = \sum_c \Phi_c(z) \otimes e_c : \qquad \hat{\Lambda}^{(s)} \to \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V,$$

обозначают вершинные операторы, и символом $\mathbf{\Phi}(z_k)$ кратко обозначается $\mathbf{\Phi}(z_k) \otimes 1^{\otimes k-1}$. Мы показываем, что $\tilde{\pi}_N(|v\rangle_+) \in \Lambda_+^{s,N}$ является симметрическим инвариантом.

Нашей целью является нахождение обратного образа действия янгиана (9) в пространстве $\Lambda_+^{s,N}$ относительно отображения $\tilde{\pi}_N$. Мы используем процедуру аналогичную скалярному случаю и строим действие образующей янгиана (9) на вектор $|w\rangle_+ \in \Lambda_+^{s,N}$ в несколько шагов. Сначала представим симметричный тензор $|w\rangle_+ \in \Lambda_+^{s,N}$ как элемент пространства $(\mathbb{C}[x_i] \otimes \mathbb{C}^s) \otimes \Lambda_+^{s,N-1}$, тем самым получив эвивариантное семейство векторов, затем применим к каждому $i$-ому вектору эквивариантного семейства соответствующий оператор Хекмана-Дункла $\mathcal{D}_i^{(N)}$, получим другое эквивариантное семейство. Последним шагов является симметризация $E_N(u)$ — сумма всех элементов эквивариантного семейства:

$$E_N(u) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{1j}(u),$$

где $\sigma_{ij} = K_{ij}P_{ij}$ — перестановка $i$-ого и $j$-ого тензорного сомножителя.

Для любого $\boldsymbol{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ определим элемента $\mathcal{S}(\boldsymbol{F}(z)) \in \hat{\Lambda}^{(s)}$ как формальный интеграл

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{F}(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \boldsymbol{\Phi}^*(z) \boldsymbol{F}(z),$$

который вычисляет нулевой член ряда Лорана. Здесь

$$\boldsymbol{\Phi}^*(z) = \sum_c \varphi_c^-(z) \cdot \Phi_c^{-1}(z) \otimes e_c^\perp : \qquad \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V \to \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes \mathbb{C}[z],$$

ряд $\varphi_c^-(z) = \sum_{n \le 0} a_{c,n} z^n$ — отрицательная часть производной бозонного поля, и оператор $e_c^\perp : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ задан следующим соотношением $e_c^\perp(e_b) = \delta_{bc}$. Ключевым местом конструкции является следующая лемма, которая устанавливает, что отображение $\mathcal{S}$ является обратным образом конечной симметризации:

**Лемма 5.2** *Для любого $\boldsymbol{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ и любого натурального $N$ выполнено следующее равенство элементов $\Lambda_+^{s,N}$:*

$$E_N(\tilde{\pi}_{N-1} \otimes 1)(\boldsymbol{F}(z)) = \tilde{\pi}_N \mathcal{S}(\boldsymbol{F}(z)).$$

Пусть $\tilde{\mathcal{D}} : \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V \to \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ — линейное отображение, переводящее элемент $\boldsymbol{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ в

$$\tilde{\mathcal{D}} \boldsymbol{F}^{(1)}(z) = \alpha z \frac{d}{dz} \boldsymbol{F}^{(1)}(z) + \frac{z}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^2 (1 - \frac{z}{\xi})} \boldsymbol{\Phi}^{*(2)}(\xi) \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(z) \boldsymbol{F}^{(1)}(\xi)$$

Здесь верхние индексы $(i)$, $i = 1, 2$ обозначают, в какой тензорной копии пространства $\mathbb{C}^s$ соответствующий вектор лежит или оператор действует. Мы утверждаем, что $\tilde{\mathcal{D}}$ является обратным образом эквивариантного семейства операторов Хекмана $\mathcal{D}_i^{(N)}$.

**Предложение 5.1** *Для любого $\boldsymbol{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ выполнено*

$$(\tilde{\pi}_{N-1} \otimes 1)\, \tilde{\mathcal{D}}(\boldsymbol{F}(x_1)) = \mathcal{D}_1^{(N)}\, (\tilde{\pi}_{N-1} \otimes 1)\, \boldsymbol{F}(x_1)$$

Пусть $E_{ab} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^s$ — матричная единица, $E_{ab}(e_c) = \delta_{bc} e_a$. Введем обозначение $\mathcal{E}_{ab}$ для оператора $1 \otimes 1 \otimes E_{ab} : \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V \to \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$:

$$\mathcal{E}_{ab} \boldsymbol{F}(z) = F_b(z) \otimes e_a.$$

Подводя итог и учитывая приведенные выше утверждения, получаем следующий результат [21]

**Теорема 5.1** *Оператор $T_{ab,n}$, заданный формулой*

$$T_{ab,n} = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \mathbf{\Phi}^*(z) \mathcal{E}_{ab} \tilde{\mathcal{D}}^n \mathbf{\Phi}(z)$$

*является обратным образом янгианных образующих $t_{ab,n}$, см (9):*

$$\tilde{\pi}_N T_{ab,n} = t_{ab,n} \tilde{\pi}_N \qquad \text{для любого} \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Используя эту конструкцию, we выводим явные выражения для первых гамильтонианов предельной системы КС.

Далее вы исследуем классический предел полученной системы. Вы вводим оператор $\mathscr{H}^{\text{cl}}$, который является пределом второго гамильтониана, правило соответствия коммутатора и скобки Пуассона следующее: $\beta^{-1}[\ ,\ ] \to \{\ ,\ \}$. В Предложении 5.3 мы предъявляем уравнения движения, заданные гамильтонианом $\mathscr{H}^{\text{cl}}$:

$$\frac{d\phi_a(z)}{dt} = \{\phi_a(z), \mathscr{H}^{\text{cl}}\}.$$

Здесь и далее $\phi_a(z)$ и $\mathcal{V}_a(z)$ — классические аналоги полей $\varphi_a(z)$ и вершинного оператора $\Phi_a(z)$, соответственно.

Квантовая система интегрируема: имеется бесконечное число интегралов движения, которые получаются из квантового детерминанта производящей функции $T_{ab}(u)$ образующих янгиана. Естественно ожидать, что классическая система также является интегрируемой. В частности, она должна допускать представление Лакса. Рассмотрим операторы $L$ и $M$, действующие на аналитические функции $f(z)$:

$$\begin{aligned} Lf &= z\frac{\partial}{\partial z} f(z) + \sum_a \mathcal{V}_a(z) \left(\phi_a^-(z) \mathcal{V}_a^{-1}(z) f(z)\right)^+, \\ Mf &= \left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(z) + 2\sum_b \left(\phi_b^+(z)\phi_b^-(z)\right)^+ f(z) + 2\sum_b \mathcal{V}_b(z) z\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_b^-(z)\mathcal{V}_b^{-1}(z) f(z)\right)^+. \end{aligned}$$

**Предложение 5.4** *Операторы $L$ и $M$ задают пару Лакса для классической системы:*

$$\frac{dL}{dt} = [M, L].$$

# 6 Фермионный предел для спиновой системы

Фермионный предел спиновой системы КС изучался Д. Угловым. Здесь мы предлагаем и развиваем другой подход, который приводит к предельной интегрируемой системе, связанной с системой, полученной в [46], но реализованной в терминах фермионных полей, изложение следует работе [20].

Начинаем с фермионного пространства Фока $\mathcal{F}^s$, которое является представление алгебры $\mathcal{H}^s_-$ $s$ свободных фермионных полей. Введем обозначения $\Psi_c(z)$ и $\Psi^*_c(z)$ для следующих производящих функций элементов алгебра $\mathcal{H}^s_-$:

$$\Psi_c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{cn} z^n, \qquad \Psi^*_c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^*_{cn} z^{n-1}.$$

Для любого $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ определим матричный коэффициент следующей формулой

$$\pi_N\left(|v\rangle\right) = \langle 0|\boldsymbol{\Psi}(z_N)\boldsymbol{\Psi}(z_2)\cdots\boldsymbol{\Psi}(z_1)|v\rangle, \qquad |v\rangle \in \mathcal{F}^s$$

где $\boldsymbol{\Psi}(z) = \sum_{c=1}^s \Psi_c(z)\otimes e_c$ и $e_c \in \mathbb{C}^s$ вновь базисные векторы пространства $\mathbb{C}^s$. Матричный элемент $\pi_N\left(|v\rangle\right)$ принадлежит пространству $\Lambda^{s,N}_-$, которое является фазовым пространством конечной системы КС. Затем систематически строится обратный образ при отображении $\pi_N$ всех операций, необходимых для построения действия янгиана в спиновой системе КС с конечным числом частиц.

Ключевым моментом конструкции является оператор, задающий обратный образ конечной антисимметризации $\mathrm{A}_N : V\otimes\Lambda^{s,N-1}_- \to \Lambda^{s,N}_-$ и заданный формулой

$$\mathrm{A}_N(u) = u - \sum_{j=2}^N \sigma_{1j}(u).$$

Для любого $\boldsymbol{F}(z) \in \mathcal{H}^s_-(z)\otimes\mathbb{C}^s$ определим элемент $\mathcal{A}(\boldsymbol{F}(z)) \in \mathcal{H}^s_-$ как интеграл

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{F}(z)) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{z\circlearrowleft 0} dz \int_{u\circlearrowleft z} du \frac{\boldsymbol{\Psi}^*(u)\boldsymbol{F}(z)}{u-z}.$$

Как и в скалярном случае введем вспомогательное пространство $U \in \mathcal{H}^s_-(z)\otimes\mathbb{C}^s$ элементов, которые удовлетворяют специальным условиям, а именно, сохраняют полиномиальное пространство и являются однородными. Эти условия уважает и обратный образ оператора Дункла, который будет введен далее. Следующая лемма устанавливает, что оператор $\mathcal{A}$ является обратным образом конечной антисимметризации:

**Лемма 6.2** *Для любого $\boldsymbol{F}(z) \in U$, любого $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ и любого натурального $N$ выполняется следующее равенство элементов пространства $\Lambda^{s,N}_-$:*

$$\mathrm{A}_N\,\pi_{N-1,1}(\boldsymbol{F}(z)\otimes|v\rangle) = \pi_N\mathcal{A}(\boldsymbol{F}(z))|v\rangle.$$

Определим оператор $\mathcal{D} : \mathcal{H}^s_-(z)\otimes\mathbb{C}^s \to \mathcal{H}^s_-(z)\otimes\mathbb{C}^s$ следующим соотношением

$$\mathcal{D}\boldsymbol{F}(z) = \alpha z\frac{d}{dz}\boldsymbol{F}(z) + \\ \frac{z}{(2\pi i)^2}\int_{\substack{w\circlearrowleft 0\\ |w|<|z|}} dw \int_{u\circlearrowleft w} du\ \boldsymbol{\Psi}^{*(2)}(u)\frac{\boldsymbol{\Psi}^{(2)}(w)\boldsymbol{F}^{(1)}(z) - \boldsymbol{\Psi}^{(2)}(z)\boldsymbol{F}^{(1)}(w)}{(u-w)(z-w)}.$$

Используя Лемму 6.2, можем отождествить оператор $\mathcal{D}$ с обратным образом эквивариантного семейства операторов Хекмана $\mathcal{D}^{(N)}_i$, действующих на пространстве частично симметричных тензоров

**Предложение 6.1** *Для любого* $\boldsymbol{F}(z) \in U$, $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *выполнено равенство*

$$\pi_{N-1,1}(\mathcal{D}\boldsymbol{F}(x_1) \otimes |v\rangle) = \mathcal{D}_1^{(N)} \pi_{N-1,1}(F(x_1) \otimes |v\rangle).$$

Как и бозонном случае введем операторы :

$$\mathrm{T}_{ab,n} = \mathcal{A}\mathcal{E}_{ab}\mathcal{D}^n \boldsymbol{\Psi}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{z\circlearrowleft 0} dz \int_{u\circlearrowleft z} du \frac{\boldsymbol{\Psi}^*(u)\mathcal{E}_{ab}\mathcal{D}^n \boldsymbol{\Psi}(z)}{u-z}.$$

Подводя итоги и резюмирую все вышеупомянутые утверждения, мы заключаем, что оператор $\mathrm{T}_{ab,n}$ является обратным образом образующих янгиана $t_{ab,n}$, действующих в пространстве $\Lambda_{-}^{s,N}$.

**Proposition 6.2** *Для любого* $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *выполнено равенство*

$$\pi_N(\mathrm{T}_{ab,n}|v\rangle) = t_{ab,n}\pi_N|v\rangle.$$

Отметим важность полиномиального свойства полной нулевой моды в построенном действии янгиана в пространстве $\mathcal{F}^s$, которое доказывается с помощью проективных свойств янгиана, действующим в фазовым пространстве модели КС; это позволяет сформулировать следующее

**Теорема 6.1** *Операторы* $\mathrm{T}_{ab,n}$ *удовлетворяют соотношениям янгиана.*

В частности, коэффициенты квантового детерминанта $q\det \mathrm{T}(u)$ образуют коммутативное семейство, которые может быть выбрано в качестве пределов гамильтонианов системы КС.

## Приложения результатов

Мы отметим некоторые возможные приложения результатов, касающихся пределов интегрируемых систем типа Калоджеро-Сазерленда:

- теория представлений
- теория симметрических функций
- теория узлов, комбинаторика чисел Гурвица

## Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

1. Khoroshkin S. M., Matushko M., Sklyanin E., *On spin Calogero–Moser system at infinity*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. Vol. 50. P. 1-26

2. S.M. Khoroshkin, M. G. Matushko, *Fermionic limit of the Calogero-Sutherland system*, Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 60. No. 7. P. 071706-1-071706-22.

# Список литературы


[1] A. G. Abanov, P. B. Wiegmann, Quantum hydrodynamics, the quantum Benjamin-Ono equation, and the Calogero model, Physical review letters, 95(7), (2005), 076402

[2] I. Andric, A. Jevicki and H. Levine, On the large-N limit in symplectic matrix models, Nucl. Phys. **B215** (1983), 307.

[3] T. Arakawa, Drinfeld functor and finite-dimensional representations of the Yangian, Commun. Math. Phys. **205** (1999), 1–18.

[4] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, Collective field theory, Calogero-Sutherland model and generalized matrix models, Physics Letters **B 347**:1 (1995), 49-55.

[5] H. Awata, Y. Matsuo and T. Yamamoto, Collective field description of spin Calogero-Sutherland models, J. Phys. **A29** (1996), 3089-3098.

[6] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, V. Pasquier, Yang-Baxter equation in spin chains with long range interactions, J. Phys. **A26** (1993), 5219.

[7] F. Calogero, Solution of the one-dimensional n-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, Journal of Mathematical Physics, 12(3), (1971), 419-436,
F. Calogero, Solution of a three-body problem in one dimension, Journal of Mathematical Physics, 10(12), (1969), 2191-2196.
F. Calogero, Exactly solvable one-dimensional many-body problems, Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985), 13(11), (1975), 411-416.

[8] I. Cherednik, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures. Annals of mathematics, 141(1), (1995), 191-216.

[9] A. Debiard, Polynômes de Tchébychev et de Jacobi dans un espace euclidien de dimension p, CR Acad. Sc. Paris, 296, (1983) 529-532.

[10] V. G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, Funct. Anal. Appl., **20**:1 (1986) 62–64.

[11] C. F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Transactions of the American Mathematical Society. **311**:1 (1989), 167-183.

[12] G. J. Heckman, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, Inventiones mathematicae **103**:1 (1991), 341-350.

[13] G. J. Heckman, A Remark on the Dunkl Differential—Difference Operators, In Harmonic analysis on reductive groups. Birkhäuser, Boston, MA. (1991), pp. 181-191.

[14] G. J. Heckman, E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions. I. Compositio Mathematica, 64(3), (1987), 329-352.

[15] G. J. Heckman, Root systems and hypergeometric functions. II., Compositio mathematica, 64(3), (1987), 353-373.

[16] H. Jack, I.—A class of symmetric polynomials with a parameter, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 69:1, (1970), 1-18.

[17] A. Jevicki, B. Sakita. Collective field approach to the large-N limit: Euclidean field theories, Nuclear Physics B 185.1 (1981): 89-100.

[18] Y. Kato and Y. Kuramoto, Exact solution of the Sutherland model with arbitrary internal symmetry Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 1222.

[19] S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, Fermionic limit of the Calogero-Sutherland system, Journal of Mathematical Physics 60, (2019).

[20] S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, Matrix elements of vertex operators and fermionic limit of spin Calogero–Sutherland system, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, arXiv:1608.00599.

[21] S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, E.K.Sklyanin, On spin Calogero–Moser system at infinity, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **50**:11 (2017), 115203.

[22] S. M. Khoroshkin, M. L. Nazarov, Yangians and Mickelsson algebras. II, Moscow Mathematical Journal **6**:3 (2006), 477-504.

[23] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation, Translations of the American Mathematical Society-Series 2, 170, (1995), 83-120.

[24] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford university press (1998).

[25] I. G. Macdonald, A new class of symmetric functions, Publ. IRMA Strasbourg, 372, (1988), 131-171.

[26] I. G. Macdonald, Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, (Vol. 157). Cambridge University Press, (2003).

[27] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems. In Orthogonal polynomials, Springer, Dordrecht,(1990), pp. 311-318.

[28] M. G. Matushko, Calogero-Sutherland system at free fermion point, to appear in Theoretical and Mathematical Physics

[29] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanski, Yangians and classical Lie algebras, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.

[30] I. Moser, Three integrable hamiltonian sysems connected with isospectrum deformations  Adv. Math., 1976, 16, 354-370.

[31] M.L. Nazarov and E.K. Sklyanin, Integrable hierarchy of the quantum Benjamin-Ono equation Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA **9** (2013), 078.

[32] M.L. Nazarov and E. K. Sklyanin, Sekiguchi-Debiard operators at infinity, Communications in Mathematical Physics **324**:3 (2013), 831-849.

[33] A. Okounkov, R. Pandharipande, Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points in the plane, Inventiones mathematicae, 179(3), (2010), 523-557.

[34] M.A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Quantum integrable systems related to Lie algebras, Physics Reports, 94(6), (1983),313-404.
M.A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, Physics Reports, 71(5), (1981), 313-400.

[35] E.M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions III, Compositio Mathematica, 67(1), (1988), 21-49.

[36] A.K. Pogrebkov, Boson-fermion correspondence and quantum integrable and dispersionless models, Russian Mathematical Surveys (2003) 58(5), 1003.

[37] A. P. Polychronakos, Exchange operator formalism for integrable systems of particles, Physical Review Letters **69**:5 (1992), 703.

[38] A. P. Polychronakos, Waves and solitons in the continuum limit of the Calogero-Sutherland model, Physical review letters, 74(26), (1995), 5153.

[39] N. Reshetikhin, Degenerate integrability of quantum spin Calogero–Moser systems, Letters in Mathematical Physics, 107(1), (2017), 187-200.

[40] N. Reshetikhin, Degenerate integrability of the spin Calogero–Moser systems and the duality with the spin Ruijsenaars systems, Letters in Mathematical Physics, 63(1), (2003), 55-71.

[41] P. Rossi, Gromov–Witten invariants of target curves via symplectic field theory, Journal of Geometry and Physics **58**:8 (2008), 931-941.

[42] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 12(Supplement), (1977), 455-459.

[43] A. N. Sergeev, A. P. Veselov, Dunkl operators at infinity and Calogero-Moser systems, International Mathematics Research Notices, **21** (2015), 10959-10986.

[44] B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension, Physical Review A, 4(5), (1971), 2019.
B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. II, Physical Review A 5.3 (1972): 1372.

[45] K. Takemura, D. Uglov, The orthogonal eigenbasis and norms of eigenvectors in the spin Calogero-Sutherland model, Journal of Physics A: Mathematical and General, 30(10), (1997), 3685.

[46] D. Uglov, Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and Basic modules of the affine Lie algebra $\hat{sl}(N)$, arXiv preprint q-alg/9705010 (1997).

[47] Uglov D. Yangian actions on higher level irreducible integrable modules of affine $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$, eprint arXiv preprint math/9802048. – 1998.