На правах рукописи

Сенгупта Ричик

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ И МИНИМУМОВ ФУНКЦИОНАЛОВ В (q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020

Работа прошла апробацию в лаборатории № 45 “Оптимальных управляемых систем им. В.Ф.Кротова” в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской академии наук.

Научные руководители:

д.ф.-м.н., проф. Арутюнов Арам Владимирович, главный научный сотрудник Института проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской академии наук

д.ф.-м.н., доцент Жуковский Сергей Евгеньевич, ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В.А.Трапезникова Российской академии наук

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук

Защита состоится 25 июня 2020 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.004 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):
https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php.

Работа представлена «6» апреля 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона “О науке и государственной научно-технической политике”.

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию свойств точек совпадения двух операторов и проблем, связанных с минимизацией функционалов в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах.

Напомним, что, если задано множество X, то функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой, если

(i) $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X$ (неотрицательность);

(ii) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in X$ (аксиома тождества);

(iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)\, \forall\, x, y \in X$ (аксиома симметрии);

(iv) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

При этом пара (X, ρ) называется метрическим пространством.

Метрические пространства впервые появились в работах Фреше[1]. Позднее начали исследовать разные модификации метрических пространств. Например, в монографии Хаусдорфа[2] рассматривались пространства без аксиомы симметрии. Такие пространства теперь называются квазиметрическими пространствами.

Простейший пример квазиметрического пространства дает прямая Зоргенфрея,[3] определяемая на вещественной прямой $\mathbb{R}$ квазиметрикой

$$\rho_S(x, y) = \begin{cases} y - x, & x \leq y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

Очевидно, квазиметрика ρ_S не является симметрической.

[1] *Fréchet M.* Sur quelques points du calcul fonctionnel // Palermo Rend. 1906. V. 22.P. 1–74.
[2] *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre, Von Veit, Leipzig, 1914.
[3] *Engelking R.* General Topology, Heldermann, 1989.

Исследования квазиметрических пространств проводились многими авторами, среди них выделим П.С. Александрова[4], В.Уилсона[5], В.В. Немыцкого [6] и С.И.Недева[7].

Квазиметрические пространства являются частным случаем более общих f-квазиметрических пространств[8]. В них неравенство треугольника заменено более общим неравенством

$$\rho(x,z) \leq f(\rho(x,y), \rho(y,z)) \quad \forall\, x, y, z \in X.$$

Здесь f — произвольная неотрицательная функция, такая, что

$$(t_1, t_2) \to 0 \implies f(t_1, t_2) \to 0,\ t_1, t_2 \geq 0.$$

Если опустить аксиому тождества (аксиома (ii)), то соответствующие пространства принято называть псевдометрическими. Они также активно изучались[9], но в настоящей диссертации они не исследуются.

Ослабленное неравенство треугольника и соответствующие ему пространства несколько раз переоткрывались под разными названиями — квазиметрические пространства, почти-метрические пространства[10], пространства метрического типа и т.д. Койфман и Дэ Гузман[11] в связи с некоторыми проблемами гармонического анализа ввели в рассмотрение b-метрики, которые они называли "функциями расстояния". Результаты Койфмана и Дэ Гузмана были дополнены результатами Макиаса и Сеговия[12]. Они также исследовали

[4] *Александров П.С., Немыцкий В.В.* Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии // Матем. сб., 3(45):3 (1938), 663–672.

[5] *Wilson W.A.* On quasi-metric spaces// Am. J. Math. 53(3) (1931) 675–684.

[6] *Niemytzki V.* Über die Axiomedes metrischen Raumes// Math. Ann. 104(5) (1931) 666–671.

[7] *Недев С.Й.* О-метризуемые пространства // Тр. ММО, 24, Издательство Московского университета, М., 1971, 201–236

[8] *Arutyunov A.V., Greshnov A.V., Lokoutsievskii L.V., Storozhuk K.V.* Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics // Topology Appl.2017. V. 221. P. 178–194

[9] *Howes N. R.* Modern Analysis and Topology. New York, NY: Springer. p. 27. ISBN 0-387-97986-7, 1995.

[10] *Deza M.M. and Deza E.* Encyclopedia of distances, 3rd ed. Berlin.Springer.2014.

[11] *Coifman R.R. and Guzman M.de* Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces// Rev. Union Mat. Argent.25 (1970), 137–143.

[12] *Macias R. A. and Segovia C.* Lipschitz functions on spaces of homogeneous type// Adv. Math. 33 (1979), 257–270.

b-метрические пространства, рассматривали неподвижные точки и липшицевы функции в таких пространствах. И.А. Бахтин[13] назвал b-метрические пространства "квазиметрическими" и доказал принцип сжимающих отображений для таких пространств.

В работе А.В. Арутюнова и А.В. Грешнова[14] было введено понятие (q_1, q_2)-квазиметрического пространства, где q_1 и q_2 положительные числа.

Напомним, что функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется (q_1, q_2)-квазиметрикой, если

(i) $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X;$

(ii) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in X;$

(iii) $\rho(x, z) \leq q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$ ((q_1, q_2)-обобщенное неравенство треугольника).

Если ρ — (q_1, q_2)-квазиметрика, то пара (X, ρ) называется (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством. Таким образом, (q_1, q_2)-квазиметрические пространства являются частным случаем $f-$ квазиметрических пространств при

$$f(t_1, t_2) = q_1t_1 + q_2t_2.$$

Очевидно, $(1, 1)$-квазиметрические пространства являются просто квазиметрическими. Отметим, что если множество X состоит из более чем двух точек, то, как легко видеть, $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$.

Далее были исследованы многозначные отображения, которые действуют в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах[15]. Для отображений, действующих в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах, были получены условия существования неподвижной точки, аналог теоремы Банаха, а также условия существования точек совпадения, аналог теоремы Арутюнова.

[13] *Bakhtin, I.A.* The Contraction Mapping Principle in Quasi-Metric Space // Functional Analysis. 1989.V. 30. P. 26–37;

[14] *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531;

[15] *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Точки совпадения многозначных отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах// Докл. РАН, 476:2 (2017), 129–132;

В обобщении теоремы Банаха было доказано, что замкнутое сжимающее отображение, действующее в полном (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку. Обсудим свойство замкнутости сжимающего отображения. Если в квазиметрическом пространстве выполняется аксиома симметрии или аксиома q_0-симметрии (напомним, что для $q_0 > 0$, (q_1, q_2)-квазиметрика ρ называется q_0-симметрической, если $\rho(x, y) \leq q_0\rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$), то свойство замкнутости сжимающего отображения выполняется автоматически.

В связи с этим возникает естественный вопрос: существенно ли предположение замкнутости сжимающего отображения или возможно построить несимметрическое (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство, в котором сжимающее отображение не имеет неподвижных точек. Автором диссертации[16] был дан ответ на этот вопрос, а именно, было построено полное квазиметрическое пространство и действующее в нем незамкнутое сжимающее отображение, которое не имеет неподвижных точек. Тем самым была показана существенность предположения замкнутости сжимающего отображения в обобщении теоремы Банаха.

В работе Е.С.Жуковского[17] для отображений, действующих в f-квазиметрических пространствах, приведены условия, при которых обобщенно сжимающее (в смысле М.А.Красносельского) отображение, действующее в f-квазиметрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку. Эти условия слабее, чем предположения замкнутости отображения. Хотя, как показывает упомянутый выше пример, совсем отказаться от дополнительных предположений нельзя. Отметим, что в работе Е.С.Жуковского используется более общее понятие полноты пространства.

Исследование (q_1, q_2)-квазиметрических пространств при $q_1 \neq q_2$ важно как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений,

[16] *Sengupta R.* On fixed points of contraction maps acting in (q_1, q_2)-quasimetric spaces and geometric properties of these spaces// Eurasian Math. J., 8:3 (2017), 70–76

[17] *Жуковский Е.С.* Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств// Сиб. матем. журн., 59:6 (2018), 1338–1350.

поскольку такие пространства естественным образом возникают в анализе и геометрии на пространствах Карно–Каратеодори и их обобщениях, такие как Box-квазиметрики, которые являются $(1, q_2)$-квазиметриками. Они играют важную роль при доказательстве аналога локальной аппроксимационной теоремы Громова[18].

В 70-е годы прошлого века были получены вариационный принцип Бишопа-Фелпса (ВПБФ)[19][20] и вариационный принцип Экланда (ВПЭ)[21]. Они сыграли огромную роль в развитии нелинейного анализа. Сформулируем эти принципы.

Пусть (X, ρ) полное метрическое пространство, $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция, которая ограничена снизу и не равна тождественно $+\infty$. Вариационный принцип Бишопа-Фелпса гласит, что для любого $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) < \infty$, для произвольного $c > 0$ существует точка $\overline{x} \in X$ такая, что

$$U(\bar{x}) + c\rho(x_0, \bar{x}) \leq U(x_0);$$

$$U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x}) \quad \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

В свою очередь, вариационный принцип Экланда гласит, что в приведенных выше предположениях для любого $x_0 \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$U(x_0) < \varepsilon + \inf_{x \in X} U(x)$$

и для любого $\lambda >, 0$ существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что

$$U(\bar{x}) \leq U(x_0), \quad \rho(x_0, \bar{x}) \leq \lambda,$$

$$U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, \bar{x}) > U(\bar{x}) \quad \forall\, x \in X : \quad x \neq \bar{x}.$$

[18] *Gromov M.* Carnot-Caratheodory spaces seen from within // Sub-Reimannian geometry, Birkhäuser, Basel, 1996. P. 79–323.

[19] *Phelps R.* Support cones in Banach spaces and their applications // Adv. Math., 13 (1974), P. 1–19.

[20] *Granas A., Dugundji J.* Fixed Point Theory, Springer-Verlag, N.Y., (2003).

[21] *Aubin J.-P., Ekeland I.* Applied Nonlinear Analysis. J. Wiley & Sons Inc. New York. 1984.

Оказалось, что эти принципы эквивалентны[22]. Принцип Экланда является вариационной формулировкой понятия метрической полноты, т.е., если любая непрерывная функция, ограниченная снизу и определённая на метрическом пространстве, удовлетворяет ВПЭ, то пространство является полным[23].

Позже для банаховых пространств был получен вариационный принцип Борвейна-Прайса[24], который позволяет рассматривать возмущения, которые имеют сложную форму, но являются гладкими в определённом смысле. Отметим, что вариационный принцип Борвейна-Прайса и вариационный принцип Экланда не следуют друг из друга. Действительно, в ВПЭ возмущенная функция не обязательно является гладкой, и в то же время вариационный принцип Борвейна-Прайса не гарантирует существования строгого минимума возмущённого функционала.

Также был получен гладкий вариационный принцип Иоффе-Тихомирова[25]. Он позднее был развит[26]. Этот гладкий вариационный принцип и его модификация позволили получить новые необходимые условия второго порядка для различных классов задач оптимального управления[27][28] и минимизации последовательностей[29]. ВПЭ используется в исследовании многих других задач вариационного анализа. В работе А.В. Арутюнова[30] ВПЭ был применён,

---

[22]*Frigon M.* On some generalizations of Ekeland's principle and inward contractions in gauge spaces// J. Fixed Point Theory Appl. 2011.V. 10. P.279–298.

[23]*Sullivan F.* A characterization of complete metric spaces // Proc. Am. Math. Soc. 1981.V. 83. P.345–346

[24]*Borwein J.M., Preiss D.* A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions // Trans. Am. Math. Soc. 1987. V. 303. Iss. 2. P.517–527;

[25]*Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Несколько замечаний о вариационных принципах// Матем. заметки, 61:2 (1997), 305–311.

[26]*Arutyunov A., Bobylev N., and Korovin S.*, One remark to Ekeland's variational principle// Comput. Math. Appl., 34 (1997), P. 267–271.

[27]*Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю.* Необходимые условия слабого минимума в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями // Дифференц. уравнения, 41:11 (2005), 1458–1468.

[28]*Арутюнов А.В.* Необходимые условия экстремума и теорема об обратной функции без априорных предположений нормальности // Тр. МИАН, 236(2002), 33–44.

[29]*Mordukhovich B.* Variational Analysis and Generalized Differentiation II// Applications, Springer, Berlin, 2006.

[30]*Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения// Тр. МИАН, 291(2015), 30–44.

чтобы получить достаточные условия для достижения минимума полунепрерывной снизу функции без предположения компактности области определения. Недавно были получены обобщения ВПЭ и ВПБФ, которые позволили получить достаточные условия достижения минимума полунепрерывного снизу и ограниченного снизу достаточно гладкого функционала[31][32].

Актуальность диссертационного исследования обусловлена тем, что (q_1, q_2)-квазиметрические пространства являются объектами интенсивного исследования в функциональном и метрическом анализе, а также используются в приложениях. Квазиметрические пространства имеют многочисленные применения в теории оптимизации и аппроксимации, выпуклом анализе и т.д. Например, Фагин и Стокмейер[33] рассматривали расстояния, удовлетворяющие s-неравенству треугольника и другим свойствам, применимым к некоторым проблемам теоретической информатики.

Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств имеет широкий спектр приложений, включая задачи математического и функционального анализа, математического моделирования, математической биологии и т.д. Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств играет важную роль и в фундаментальных исследованиях

Диссертационная работа посвящена разработке математического аппарата для решения ряда задач математического анализа, включая задачи нахождения точек совпадения двух отображений, неподвижных точек отображений, решения нелинейных уравнений, а также исследование свойств минимумов функционалов. Она включает в себя утверждения о свойствах пространств, оснащенных функцией расстояния; теоремы о свойствах точек совпадения пар отображений, действующих в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах; теорему о существовании неподвижных точек отображений обоб-

[31]*Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение// Матем. заметки, 103:6 (2018), 948–954.

[32]*Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Variational Principles in Analysis and Existence of Minimizers for Functions on Metric Spaces// SIAM Journal on Optimization.2019. V. 29. P. 994–1016.

[33]*Fagin R. and Stockmeyer L.* Relaxing the triangle inequality in pattern matching// International J. Computer Vision 28 (1998), no. 3, 134–160

щенных (q_1, q_2)-квазиметрических пространств; теорему о существовании минимума функционала, определенного на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве; вариационные принципы для функционалов, определенных на обобщенных метрических пространствах.

Цели и задачи работы

Основной целью диссертационного исследования является изучение свойств неподвижных точек отображений обобщенных (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, точек совпадения отображений (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и минимумов функционалов, определенных на (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах и обобщенных метрических пространствах.

Задачи диссертационного исследования состоят в следующем. Исследовать свойства пространств, оснащенных функцией расстояния, необходимых для изучения нелинейных уравнений и задач минимизации. Получить аналог принципа сжимающих отображений для отображений обобщенных (q_1, q_2)-квазиметрических пространств. Для многозначных отображений (q_1, q_2)-квазиметрических пространств получить теоремы об оценках расстояния от произвольной точки до пересечения графиков двух многозначных отображений; теоремы об оценках расстояния между пересечениями графиков двух пар многозначных отображений; теоремы об оценках расстояния между двумя множествами точек совпадения двух пар многозначных отображений. Получить обобщения известных принципов нелинейного анализа для полунепрерывных снизу функционалов, определенных на обобщенных метрических пространствах, без априорного предположения ограниченности снизу.

Научная новизна

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории неподвижных точек и точек совпадения отображений, теории экстремальных задач, математической экономике и т.д.

Методология и методы исследования

В работе были применены методы функционального анализа, теории многозначных отображений, математического анализа, общей топологии и выпуклого анализа.

Положения, выносимые на защиту

Перечислим научные положения, выносимые на защиту.

- Построен пример сжимающего отображения, действующего в полном квазиметрическом пространстве, которое не имеет неподвижных точек. Таким образом, показана существенность предположения замкнутости в теореме о неподвижной точке для (q_1, q_2)-квазиметрических пространств. Получена теорема о существовании неподвижной точки сжимающего многозначного отображения, действующего в обобщенном (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве. Получены оценки расстояния от заданной точки до неподвижной точки.

- В предположениях теоремы о достаточных условиях существования точек совпадения у многозначных отображений, действующих в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах, получены: теоремы об оценках расстояния от произвольной точки до пересечения графиков двух многозначных отображений; теоремы об оценках расстояния между пересечениями графиков двух пар многозначных отображений; теоремы об оценках расстояния между двумя множествами точек совпадения двух пар многозначных отображений. В частности, получено обобщение леммы Лима для (q_1, q_2)-квазиметрических пространств.

- Получены достаточные условия существования точки минимума для полунепрерывного снизу ограниченного снизу функционала в полном (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве при $q_2 > 1$. Получены оценки расстояния от заданной точки до множества точек минимума. Построен пример, который показывает существенность предположения $q_2 > 1$.

- Получено обобщение вариационного принципа Экланда для функционалов, действующих в обобщенных метрических пространствах без априорного предположения ограниченности снизу. Получено обобщение вариационного принципа Бишопа-Фелпса. В качестве следствия для полунепрерывных снизу дифференцируемых по Гато функций, доказано существование минимизирующих последовательностей, удовлетворяющих необходимым условиям первого порядка с любой степенью точности.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты строго доказаны. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- семинар "Функциональный анализ и его приложения" под руководством проф. А.В. Арутюнова, проф. В.И. Буренкова и проф. М.Л. Гольдмана в РУДН в 2017, 2018, 2019;

- семинар "Геометрическая теория оптимального управления" под руководством чл.-корр. РАН проф. М.И. Зеликина и Л.В. Локуциевского в МГУ им. М.В. Ломоносова в 2019 году;

- общемосковский семинар "Оптимизация и нелинейный анализ" под руководством проф. А.В. Арутюнова, С.Е.Жуковского и Н.Г. Павловой в ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН в 2020 году;

- семинар кафедры высшей математики МФТИ под руководством проф. Половинкина Е.С. в 2019 году;

- конференция Ломоносовские чтения - 2017, 2019 в МГУ им. М.В. Ломоносова;
- conference on Geometric Analysis dedicated to the 90th anniversary of academician Yu. G. Reshetnyak (September 22–28, 2019, Novosibirsk);
- конференция “Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis” 17-21 июня, 2019, МФТИ, г.Долгопрудный.

Публикации

Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

1. *Sengupta R.* On fixed points of contraction maps acting in (q_1, q_2)-quasimetric spaces and geometric properties of these spaces // Eurasian Math. J., 8:3 (2017), 70–76.
2. *Sengupta R., Zhukovskiy S. E.* Minima of functions on (q_1, q_2)-quasimetric spaces // Eurasian Math. J., 10:2 (2019), 84–92.
3. *Sengupta R., Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E.* Properties of Coincidence Points in (q_1, q_2)-Quasimetric Spaces //Advances in Systems Science and Applications, 2020, Vol. 20, No 1, 91-103.
4. *Сенгупта Р.* О неподвижных точках сжимающих отображений в обобщённых (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки, 22:6 (2017), 1325–1328 .
5. *Жуковская З. Т. , Жуковский С. Е. , Сенгупта Р.* О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика, 24:125 (2019), 33–38.
6. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В., Сенгупта Р.* Теорема о неподвижных точках в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. // Ломоносовские

чтения - 2017. Тезисы докладов (г. Москва, 17-26 апреля 2017 г., МГУ им. М.В. Ломоносова): материалы конференции, 94–95.

7. *Сенгупта Р.* «О точках совпадения в обобщенных квазиметрических пространствах» // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». Материалы конференции. (2017), 173–174.

8. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Сенгупта Р.* Об условии типа Каристи в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. // Научная конференция Ломоносовские чтения. Тезисы докладов. 15-25 апреля 2019 г., секция вычислительной математики и кибернетики, Факультет вычислительной математики и кибернетики, 17–18, Москва, 2019.

9. *Sengupta R.* On fixed points and coincidence points of mappings in (q1,q2)-quasimetric spaces" Conference materials. Conference on Geometric Analysis dedicated to the 90th anniversary of academician Yu. G. Reshetnyak (September 22–28, 2019, Novosibirsk), 132-134.

10. *Sengupta R, Zhukovskiy S.E.* On the existence of minima of functions on (q_1, q_2)-quasimetric spaces // конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis», 17-21 июня, 2019, МФТИ, г. Долгопрудный, p.81.

Работы 1-3 индексируются базами Scopus и WoS, 4-5 входят в перечень ВАК, остальные работы индексируются базой РИНЦ.

Все результаты, вошедшие в диссертацию, включая результаты из работ с соавторами, получены автором диссертации самостоятельно.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 69 источников. Общий объем диссертации 91 страница. В заключении сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

2 Краткое содержание работы

Глава 1 состоит из трех параграфов. В параграфе 1.1 приводятся основные определения и свойства (q_1, q_2)-квазиметрических пространств. Обсуждаются структурные и топологические свойства (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и доказывается несколько базовых утверждений, которые позволяют лучше понять особенности этих пространств.

В параграфе 1.2 рассматриваются отображения, действующие в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах и доказываются некоторые, относящиеся к ним, простые утверждения. Построен пример сжимающего отображения, график которого не является замкнутым.

В параграфе 1.3 приведены некоторые обобщения (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, а именно обобщенные (q_1, q_2)-квазиметрические пространства и f-квазиметрические пространства, а также доказаны некоторые, касающиеся их, утверждения. Приведем теорему о выполнении точного неравенства треугольника для f-квазиметрических пространств.

Теорема 1. *Пусть функция f определена равенством*

$$f(r_1, r_2) := \inf_{(q_1', q_2') \in Q} (r_1 q_1' + r_2 q_2'), \quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{1}$$

Тогда для любой вогнутой, положительно однородной непрерывной функции $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, для которой имеет место соотношение

$$\rho(x, z) \le g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall\, x, y, z \in X, \tag{2}$$

выполняется неравенство

$$f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \le g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall\, x, y, z \in X. \tag{3}$$

Глава 2 состоит из трех параграфов. В параграфе 2.1 построен пример полного квазиметрического пространства и действующего в нем сжимающего отображения, которое не имеет неподвижных точек. Получены достаточные условия существования неподвижной точки у сжимающего отображения в обобщенном (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве. Напомним, что обобщенное (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство – это обобщение (q_1, q_2)-квазиметрического пространства, в котором функция ρ может принимать значение $+\infty$. Сформулируем это утверждение.

Пусть (X, ρ) — обобщенное (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство, $\beta \in [0, 1)$ — заданное число. Положим

$$S(j) := 1 + q_2\beta + \cdots + q_2^{j-2}\beta^{j-2} + q_2^{j-1}\beta^{j-1}q_1^{-1}, \quad j = 1, 2, ...;$$

$$m_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : q_2\beta^j < 1\}.$$

Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется *фундаментальной последовательностью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_X(x_j, x_i) < \varepsilon$ для любых $i > j > N$. (q_1, q_2)-квазиметрическое простанство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится в нем.

Теорема 2. *Пусть пространство (X, ρ) является полным, отображение $\Phi : X \to X$ является сжимающим с константой $\beta < 1$ и замкнутым.*

Тогда для любой точки $x_0 \in X$, для которой $\rho(x_0, \Phi(x_0)) < \infty$, имеют место следующие утверждения:

- *последовательность $x_{i+1} := \Phi(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ сходится к некоторой точке $\xi = \xi(x_0)$;*
- *ξ является неподвижной точкой отображения Φ, т.е. $\xi = \Phi(\xi)$;*
- *имеет место неравенство*

$$\varliminf_{\lambda \to \xi} \rho(x_0, \lambda) \leq \frac{q_1^2 S(m_0)}{1 - q_2\beta^{m_0}} \rho(x_0, \Phi(x_0)).$$

В параграфе 2.2 в предположениях теоремы о существовании точек совпадения многозначных отображений[34], действующих в (q_1, q_2)-квазиметри-

[34] *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем., 82:2 (2018), 3–32.

ческих пространствах, получены оценки расстояния от произвольной точки до точки пересечения графиков многозначных отображений. Чтобы сформулировать это утверждение, введем необходимые определения.

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Через h будем обозначать *расстояние по Хаусдорфу*, а через h^+ — *отклонение по Хаусдорфу*, т.е.

$$h_X^+(U, V) = \sup_{u \in U} \operatorname{dist}(u, V), \quad h(U, V) = \max\{h^+(U, V),\, h^+(V, U)\}, \quad U, V \subset X.$$

Многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$ называется β*-липшицевым*, если

$$h(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Если $(X, \rho_X) = (Y, \rho_Y)$ и $\beta < 1$, то β-липшицевое многозначное отображение Φ называется *сжимающим*.

Будем обозначать график многозначного отображения $\Phi : X \rightrightarrows Y$ через $\operatorname{gph}(\Phi)$, т.е. $\operatorname{gph}(\Phi) := \{(x, y) : x \in X, \quad y \in \Phi(x)\}$.

Многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ и точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ таких, что $x_i \to x_0$, $y_i \to y_0$ и $(x_i, y_i) \in \operatorname{gph}(\Phi)$ для любого i, выполняется $(x_0, y_0) \in \operatorname{gph}(\Phi)$.

Будем говорить, что график многозначного отображения $\Phi : X \rightrightarrows Y$ является *полным*, если для любых фундаментальных последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ таких, что $\{(x_i, y_i)\} \subset \operatorname{gph}(\Phi)$, существует точка $(x_0, y_0) \in \operatorname{gph}(\Phi)$ такая, что $x_i \to x_0$ и $y_i \to y_0$.

Пусть заданы числа $\alpha > 0$ и $\beta \in [0, \alpha)$. Многозначное отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ называется α*-накрывающим*, если

$$\bigcup_{y \in \Psi(x)} B_Y(y, \alpha r) \subseteq \Psi(B_X(x, r)) \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ множество всех упорядоченных пар многозначных отображений (Ψ, Φ), $\Psi, \Phi : X \rightrightarrows Y$, таких, что

- многозначное отображение Ψ является α-накрывающим;

- многозначное отображение Φ является β-липшицевым;
- либо график $\mathrm{gph}(\Psi)$ является полным и множество $\Phi(x)$ замкнуто для любого $x \in X$, либо график $\mathrm{gph}(\Phi)$ является полным, а график Ψ является замкнутым.

Положим

$$M_{\Psi,\Phi}(x,r) := \{y \in \Phi(x) : \mathrm{dist}(\Psi(x), y) < r\}, \quad x \in X, \quad r > 0, \quad (\Psi, \Phi) \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta},$$

$$S(\theta, n) := \frac{1-\theta^n}{1-\theta}, \quad \theta \in [0,1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$m_0 := \min\left\{ j \in \mathbb{N} : \, q_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j < 1 \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть заданы числа* $\alpha > 0$, $\beta \in [0, \alpha)$ *и упорядоченная пара многозначных отображений* $(\Psi, \Phi) \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$. *Тогда для любых* $x_0 \in X$, $r_0 > \mathrm{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0))$ *и* $y_1 \in M_{\Psi,\Phi}(x_0, r_0)$ *существуют такие* $\xi \in X$ *и* $\eta \in Y$, *что*

$$\eta \in \Psi(\xi) \cap \Phi(\xi),$$

и выполняются неравенства:

$$\varliminf_{\lambda \to \xi} \rho(x_0, \lambda) \le \frac{q_1^2 \alpha^{m_0 - 1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0 - 1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} r_0,$$

$$\varliminf_{\kappa \to \eta} \rho(y_1, \kappa) \le \beta \frac{q_1^2 \alpha^{m_0 - 1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0 - 1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} r_0.$$

В параграфе получены теоремы об оценках расстояния от точки $(x, y) \in X \times Y$ до пересечения графиков многозначных отображений. Сформулируем одну из них.

Для $\alpha > 0$, $\beta \in [0, \alpha)$, $(\Psi, \Phi) \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ положим

$$\Gamma(\Psi, \Phi) := \mathrm{gph}(\Psi) \cap \mathrm{gph}(\Phi), \quad K(m_0) := \frac{q_1^2 \alpha^{m_0 - 1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0 - 1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}}.$$

Для векторов $z = (x,y) \in X \times Y$, $A = (A_X, A_Y) \in \mathbb{R}^2$ и подмножества $\Gamma \subset X \times Y$ будем писать $D(z,\Gamma) \le A$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует точка $(\xi,\eta) \in \Gamma$ такая, что

$$\varliminf_{\lambda\to\xi} \rho(x,\lambda) \le A_X + \varepsilon, \quad \varliminf_{\kappa\to\eta} \rho(y,\kappa) \le A_Y + \varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \in [0,\alpha)$ и упорядоченная пара многозначных отображений $(\Psi,\Phi) \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$. Тогда множество $\Gamma(\Psi,\Phi)$ непусто и, более того, для произвольной пары $(x,y) \in X \times Y$ справедливо неравенство*

$$D\big((x,y),\Gamma(\Psi,\Phi)\big) \le A(x,y). \tag{4}$$

Здесь

$$A(x,y) = (K(m_0)(r_1+r_2), q_1r_2 + q_2\beta K(m_0)(q_1r_1+q_2r_2)),$$

$$r_1 = \mathrm{dist}(\Psi(x),y), \quad r_2 = \mathrm{dist}(y,\Phi(x)).$$

В параграфе 2.3 получены теоремы об оценках расстояния между пересечениями графиков двух пар многозначных отображений и об оценках расстояния между двумя множествами точек совпадения двух пар многозначных отображений, действующих из одного (q_1,q_2)-квазиметрического пространства в другое. В качестве следствия получено обобщение леммы Лима для точек совпадения отображений, действующих между (q_1,q_2)-квазиметрическими пространствами. Приведем это утверждение.

Определим еще одну функцию, характеризующую расстояние между подмножествами (q_1,q_2)-квазиметрических пространств. Для $U,V \subset X$ положим

$$e^+(U,V) := \sup_{v\in V} \mathrm{dist}(U,v).$$

Следствие 3. *Пусть ρ_X полунепрерывна снизу по второму аргументу, заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \in [0,\alpha)$ и упорядоченная пара многозначных отображений $(\Psi,\Phi) \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$. Тогда*

$$h^+(\mathrm{Coin}(\tilde\Psi,\tilde\Phi),\mathrm{Coin}(\Psi,\Phi)) \le K(m_0)\sup_{x\in X}\big(q_1e^+(\Psi(x),\tilde\Psi(x)) + q_2h^+(\tilde\Phi(x),\Phi(x))\big).$$

Глава 3 состоит из двух параграфов. В параграфе 3.1 приведено обобщение условия Каристи для (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и получены достаточные условия существования точки минимума полунепрерывных снизу, ограниченных снизу функционалов, действующих в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах, удовлетворяющих условию Каристи. Приведем обобщенное условие Каристи.

Пусть $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $k > 0$ — заданные числа, (X, ρ) — полное (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ собственная (т.е. $U(x) \not\equiv +\infty$) полунепрерывная снизу функция, ограниченная снизу числом γ.

Будем говорить, что функция U удовлетворяет *условию типа Каристи* с константой k, если

$$\forall\, x \in X : \ \ \gamma < U(x) \ \exists\, x' \in X : \ \ q_2 U(x') + k q_1 \rho(x, x') \leq U(x) + (q_2 - 1)\gamma.$$

Теорема 4. *Предположим, что* $q_2 > 1$ *и функционал* $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *удовлетворяет условию типа Каристи с константой* k. *Тогда для каждой точки* $x_0 \in X$ *существует точка* $\bar{x} \in X$, *такая, что функционал* U *достигает своего минимума в точке* $\bar{x}$, *и, более того, имеют место соотношения*

$$U(\bar{x}) = \gamma, \quad \bar{x} \in \mathrm{cl} B\left(x_0, \frac{U(x_0) - \gamma}{k}\right).$$

Построен пример, показывающий, что предположение $q_2 > 1$ в полученной теореме является существенным.

В параграфе 3.2 получено обобщение вариационного принципа Экланда для обобщенных метрических пространств. Сформулируем его.

Пусть (X, ρ) — полное обобщенное метрическое пространство (т.е. функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики, но может принимать значение $+\infty$; определение полноты дословно совпадает с определением полноты для метрических пространств). Для функционала $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ обозначим

$$\gamma_U(A) := \inf_{x \in A} U(x), \quad A \subset X, \quad A \neq \emptyset.$$

Мы предполагаем, что $\gamma_U(A)$ может принимать значения $-\infty$ или $+\infty$. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех функционалов $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

таких, что $\gamma_U(A) > -\infty$ для любого непустого ограниченного множества $A \subset X$. Для $U \in \Omega(X)$ положим $\mathrm{dom} U := \{x \in X : U(x) < +\infty\}$.

Теорема 5. *Пусть* $U \in \Omega(X)$. *Тогда для любой точки* $x_0 \in \mathrm{dom} U$, *для любой функции* $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ *такой, что*

$$U(x_0) < \gamma_U(B(x_0, \lambda)) + \varepsilon(\lambda) \quad \forall\, \lambda > 0$$

и для любого $\lambda > 0$, *существует точка* $\bar{x} \in X$ *такая, что*

$$U(\bar{x}) \le U(x_0), \quad \rho(x_0, \bar{x}) \le \lambda,$$
$$U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, \bar{x}) > U(\bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

В случае, когда пространство (X, ρ) является метрическим, эта теорема остается содержательной и не совпадает с вариационным принципом Экланда, поскольку, в отличие от вариационного принципа Экланда, не предполагает ограниченность снизу функционала U.

В параграфе получено обобщение вариационного принципа Бишопа-Фелпса. Сформулируем его. Обозначим через $\Omega_0(X)$ множество функционалов $U \in \Omega(X)$ таких, что

$$\frac{1}{r}\inf\{U(x) :\, x \in B(x_0, r)\} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

для любой точки $x_0 \in X$.

Теорема 6. *Пусть* (X, ρ) *— полное обобщенное метрическое пространство и* $U \in \Omega_0(X)$. *Тогда для любого* $x_0 \in \mathrm{dom} U$ *и* $c > 0$ *существует точка* $\bar{x} \in X$ *такая, что*

$$U(\bar{x}) + c\rho(x_0, \bar{x}) \le U(x_0), \quad U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x}) \ \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

В следствие теоремы приведенной выше, получено обобщение известного утверждения о существовании минимизирующих последовательностей, удовлетворяющих необходимым условиям первого порядка с любой степенью точности, для ограниченных снизу полунепрерывных снизу дифференцируемых по Гато функций[35].

[35] *Aubin J.-P., Ekeland I.* Applied Nonlinear Analysis. J. Wiley & Sons Inc. New York. 1984.

Следствие 7. *Пусть* X *— банахово пространство,* $U \in \Omega_0(X)$ *— дифференцируемый по Гато функционал. Тогда существует последовательность* $\{\bar{x}_n\} \subset X$ *такая, что* $U(\bar{x}_n) \to \inf\limits_{x \in X} U(x)$ *и* $U'(\bar{x}_n) \to 0$ *в* X^*.

В этом утверждении априорное предположение ограниченности снизу функции U отсутствует.

Заключение

В заключении были приведены основные результаты диссертации и переспективы дальнейшого развития. Результаты диссертации состоят в следующем:

- Построен пример сжимающего отображения, действующего в полном квазиметрическом пространстве, которое не имеет неподвижных точек. Таким образом, показана существенность предположения замкнутости в теореме о неподвижной точке для (q_1, q_2)-квазиметрических пространств. Получена теорема о существовании неподвижной точки сжимающего многозначного отображения, действующего в обобщенном (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве. Получены оценки расстояния от заданной точки до неподвижной точки.

- В предположениях теоремы о достаточных условиях существования точек совпадения у многозначных отображений, действующих в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах, получены: теоремы об оценках расстояния от произвольной точки до пересечения графиков двух многозначных отображений; теоремы об оценках расстояния между пересечениями графиков двух пар многозначных отображений; утверждения об оценках расстояния между двумя множествами точек совпадения двух пар многозначных отображений. В частности, получено обобщение леммы Лима для (q_1, q_2)-квазиметрических пространств.

- Получены достаточные условия существования точки минимума для полунепрерывного снизу, ограниченного снизу функционала в полном (q_1, q_2)-

квазиметрическом пространстве при $q_2 > 1$. Получены оценки расстояния от заданной точки до множества точек минимума. Построен пример, который показывает существенность предположения $q_2 > 1$.

- Получено обобщение вариационного принципа Экланда для функционалов, действующих в обобщенных метрических пространствах без априорного предположения ограниченности снизу . Получено обобщение вариационного принципа Бишопа-Фелпса. В качестве следствия для полунепрерывных снизу, дифференцируемых по Гато функций, доказано существование минимизирующих последовательностей, удовлетворяющих необходимым условиям первого порядка с любой степенью точности.

Наиболее естественным направлением дальнейшего развития в этой области является рассмотрение вопроса существования точки минимума для полунепрерывного снизу ограниченного снизу функционала в полном (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве, удовлетворяющего обобщенному условию Каристи при $q_2 = 1, q_1 > 1$. Для случая квазиметрического пространства положительный ответ на данный вопрос был дан в статье [36] с дополнительным предположением полунепрерывности снизу квазиметрики по второму аргументу. Хотя существенные трудности возникают из-за отсутствия условия симметричности (q_1, q_2)-квазиметрики в общем случае, остается возможность обобщить вариационные принципы, полученные в главе 3 для функционалов, действующих в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. Это может служить поводом для создания нового математического аппарата.

Благодарности

Автор диссертации выражает огромную благодарность научным руководителям Араму Владимировичу Арутюнову и Сергею Евгеньевичу Жуковскому за постоянную поддержку и внимание.

[36] *Ume J.Sh.* A minimization theorem in quasi-metric spaces and its applications// Int. J. Math. Math.Sci. 31 (2002), no. 7., 443–447.