Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

На правах рукописи

Турилова Екатерина Александровна

ПОРЯДОК И КВАНТОВЫЕ СИММЕТРИИ В СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2020

Работа прошла апробацию на совместном семинаре научно-образовательного центра "Физика сложных систем" и кафедры общей физики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Научный консультант - доктор физико-математический наук, профессор РАН

Печень Александр Николаевич.

Ведущая организация - Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук".

Защита состоится 3 июля 2020 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.01.003 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технический института (национального исследовательского университета)" https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie- nauki.php

Работа представлена 24 марта 2020 г. в Аттестационную комиссию Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)" для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона "О науке и государственной научно-технической политике".

Общая характеристика работы

Актуальность и степень проработанности темы исследования. Упорядоченные структуры и преобразования, их сохраняющие, играют важную роль в общей теории операторных алгебр на протяжении всей истории ее существования, отправной точкой которой является классическая теперь работа Дж. фон Неймана[1], посвященная математическим основам квантовой механики. И в настоящее время операторные алгебры можно, в определенном смысле, считать оптимальным инструментом для описания классического и квантового взаимодействия, которое активно обсуждается с математической и физической точек зрения под общим термином "борификация"[2]. Интересным представляется исследование симметрий изучаемых объектов как обратимых преобразований, полностью сохраняющих структуру объекта. Основными объектами, для которых изучаются квантовые симметрии (симметрии в контексте квантовой теории), являются множество чистых нормальных состояний на алгебре всех ограниченных линейных операторов, действуюших в гильбертовом пространстве, самосопряженная часть алгебры всех ограниченных линейных операторов $\mathcal{B}(H)$, действующих в гильбертовом пространстве H, как йорданова алгебра, семейство ортопроекторов, действующих в гильбертовом пространстве H, как решетка с ортодополнением, алгебра эффектов для алгебры $\mathcal{B}(H)$ как выпуклое множество. Нас же в большей степени интересуют симметрии в алгебраической квантовой теории. Особое внимание уделяется симметриям Йордана C^*-алгебры (йордановым изоморфизмам на самосопряженной части C^*-алгебры, снабженной

[1]von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* – Berlin: Springer-Verlag, 1932.

[2]Landsman N.P. *Foundation of Quantum Theory: From Classical Concepts to Operator Algebras*/ N. P. Landsman. – SpringerOpen, 2017. - 881 p.

йордановым произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$), симметриям типа Людвига на алгебре эффектов, симметриям фон Неймана (изоморфизмам ортомодулярного частично упорядоченного множества ортопроекторов операторной алгебры), симметриям типа Бора (порядковых изоморфизмах на системах коммутативных или ассоциативных подалгебр), а также связям между ними.

Исследование симметрий квантовых структур, снабженных отношением порядка, проводимое в данной работе, изучение связей и комбинаций между ними, влияние этих связей не только на структурные свойства алгебр, но и на полноту соответствующего унитарного пространства, дает возможность объединить характеризации типов алгебр фон Неймана в терминах инвариантных относительно коммутанта этой алгебры подпространств, описание полноты пространства представления Гельфанда-Наймарка-Сигала различных типов алгебр, преобразования, сохраняющие порядок на эффект-алгебрах и системах подалгебр, упорядоченные по Шоке ортогональные меры на пространствах состояний, а также позволяет взглянуть под необычным углом на структурную теорию операторных алгебр в целом.

Система подпространств унитарного пространства представляет собой аппарат, необходимый для программы аксиоматизации квантовой механики. Исследования в этой области с той или иной степенью интенсивности проводятся с момента появления математических основ квантовой теории. В отличие от замкнутых подпространств унитарного пространства, ортозамкнутые и расщепляющие подпространства могут выделяться прозрачными алгебраическими условиями, отражающими основные физические аксиомы. И.Амемия и Х.Араки доказали[3], что уни-

[3] Amemiya I. *A remark on Piron's paper*/I.Amemiya and H.Araki// Publ. Res. Inst. Math. Sci. A. –

тарное пространство является полным тогда и только тогда, когда система ортозамкнутых подпространств является ортомодулярным множеством. Этот результат, получивший название теоремы Амемия-Араки, послужил сигналом для дальнейшего изучения взаимодействия алгебраической и метрической структур унитарного пространства. Система расщепляющих подпространств унитарного пространства в этом контексте исследовалась П. Птаком и Х. Вебером[4] [5], Ж. Каттанео и Дж. Марино[6], А. Двуреченским[7] [8], Х. Гроссом и Х. Келлером[9], С. Гаддером[10]. Также были получены алгебраические критерии полноты унитарного пространства в терминах других выделенных семейств подпространств. Например, класс квазирасщепляющих подпространств рассматривался Д. Бухаджаром и Э. Кеткути[11]. Среди критериев полноты в терминах меры следует выделить исследования П. Птака и Я. Хамхалтера[12].

В рамках данного научного исследования развивается идея изуче-

---

1957. – Vol. 2, № 3. – P. 423–427.

[4]Ptak P. *Two remarks on the subspace poset of an inner product space*/P.Ptak, H.Weber// Contributions to General Algebra, 10, Proceedings of the Klagenfurt Conference, May 1997. – Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 1998.

[5]Ptak P. *Lattice properties of subspace families in an inner peoduct space*/ P.Ptak, H.Weber// Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. - Vol. 129, №7. – P. 2111-2117.

[6]Cattaneo G. *Completeness of inner product spaces with respect to splitting subspaces*/ G.Cattaneo and G.Marino// Lett. in Math. Phys. – 1986. – Vol. 11.– P.15-20.

[7]Dvurecenskij A. *Regular measures and inner product spaces* / A.Dvurecenskij// Inter. Journ. of Theor. Phys. – 1992. – Vol. 31, № 5. – P. 889-905.

[8]Dvurecenskij A. *A new algebraic criterion for completeness of inner product spaces*/ A.Dvurecenskij// Lett. in Math. Phys. – 2001. – Vol. 58. – P. 205-208.

[9]Gross H. *On the definition of Hilbert space*/ H.Gross and A.Keller// Manuscripta Math. – 1977. – Vol.23.– P.67-90.

[10]Gudder S.P. *Inner product spaces*/ S. P. Gudder// Amer. Math. Monthly. – 1974. – Vol. 81. – P. 29 - 36.

[11]Buhagiar D. *Quasi-splitting subspaces in a pre Hilbert space*/ D. Buhagiar, E. Chetcuti// Math. Nachr. – 2007. – Vol. 280, № 5–6. –P. 479–484.

[12]Hamhalter J. *A completeness criterion for inner product spaces*/ J. Hamhalter, P.Ptak// Bull. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 19. – P. 259-263.

ния инвариантных подпространств, инициированная автором совместно с А.Н. Шерстневым[13]. Важным инструментом этого исследования является модулярная теория Томиты-Такесаки, а также конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала пространства представления некоторой алгебры, ассоциированного с отображением на этой алгебре. Особое внимание уделяется алгебрам фон Неймана, которые в разное время изучались в работах Х. Дая, Ж. Диксемье, Ш. Сакаи, Ф. Комба и А. Конна, а также йордановым банаховым алгебрам (JB-алгебрам), исследовавшимся в работах Д. Топпинга, Э. Штёрмера, Е. Альфсена, Ф. Щульца и других авторов. Также интересным объектом для изучения представляются и AW^*-алгебры, введенные И. Капланским[14] как алгебраические обобщения алгебр фон Неймана. Нас такие алгебры интересуют с точки зрения "квантовых спектральных симметрий". В основе теории квантовых симметрий лежит теорема Вигнера[15], описывающая вероятности перехода квантовой системы. Математическая версия этой теоремы описывает преобразования решетки ортопроеторов, сохраняющие порядок и ортогональность, с помощью унитарного/антиунитарного оператора. В случае алгебр фон Неймана такие преобразования описываются в теореме Дая[16] с помощью йордановых $*$-изоморфизмов. Обобщение версии теоремы Вигнера для ортопроекторов на самосопряженные операторы непродуктивно, поскольку стандартный порядок превращает самосопря-

[13]Sherstnev A.N. *Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra*/ A.N.Sherstnev and E.A.Turilova// Russ. Journ. of Math. Phys. – 1999. – Vol. 6, № 4. – P. 420-434.

[14]Kaplansky I. *Projections in Banach algebras*/ I. Kaplansky// Ann.of Math. – 1951. – Vol. 53, № 2. – P. 235-249.

[15]Wigner E.P. *Group Theory and Its Applications to the Quantum Theory of Atomic Spectra*/ E.P.Wigner. – New York: Academic Press Inc, 1959. – 372 p.

[16]Dye H.A. *On the geometry of projections in certain operator algebras*/ H.A. Dye// Ann Math. – 1955. – Vol. 61. – P. 73-89.

женную часть алгебры всех ограниченных линейных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве, в антирешетку. В этой связи актуальным становится рассмотрение понятия спектрального порядка, который, по всей видимости, переоткрывался несколько раз и изучался в работах М.Ф. Олсона[17], У. Арвесона[18], Ч. Акемана и Н. Вивера[19], Т. Като[20] и Х. де Гроота[21]. Отметим, что спектральный порядок для AW^*-алгебр вводится автором данной работы впервые. Описание общих спектральных автоморфизмов для алгебры всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, было получено Л. Молнаром и П. Шермлом[22]. Но с точки зрения структурной теории операторных алгебр эта алгебра весьма специфична. Настоящее исследование позволяет переформулировать указанную теорему и найти адекватное обобщение для алгебр фон Неймана, AW^*-алгебр и семейств самосопряженных операторов (не обязательно ограниченных).

Активно развавающийся в последние годы топос-подход[23] [24] к изучению квантовой теории породил появление новых математических инструментов, самым интересным из которых является семейство абеле-

---

[17] Olson M.P. *The Selfadjoint Operators of a Von Neumann Algebra Form a Conditionally Complete Lattice*/ M.P. Olson// Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 28, № 2. – P. 537-544.

[18] Arveson W. *On groups of automorphisms of operator algebras*/ W. Arveson// Journ. of Func. Anal. – 1974. – Vol. 15, № 3. – P. 217-243.

[19] Akemann C.*Minimal upper bounds of commuting operators* / C. Akemann, N. Weaver// Proc. Amer.Math. Soc. – 1996. – Vol. 124, № 11. – З. 3469-3476.

[20] Kato T. *Spectral order and a matrix limit theorem*/ T. Kato//Linear and Multilinear Algebra. – 1979. – Vol. 8. – P. 15-19.

[21] de Groote H. F. *On the canonical lattice structure on the effect algebra of a von Neumann algebra*/ H. F. de Groote// arXiv: math-ph/0410018v1. – 2004.

[22] Molnar L. *Spectral Order Automorphisms of the Spaces of Hilbert Space Effects and Observables*/ L. Molnar, P. Semrl// Lett. in Math. Phys. – 2007. – Vol. 80. – P. 239-255.

[23] Heunen C. *A topos for algebraic quantum theory*/ C. Heunen, N.P. Landsman, B. Spitters// Commun. Math. Phys. 2009. – Vol. 291. – P. 63–110.

[24] Döring A. *A topos foundations for theories of physics: I, Formal languages for physics*/ A. Döring, C. J. Isham// Journ. Math. Phys. – 2008. – Vol. 49. – P. 534-515.

вых подалгебр алгебры фон Неймана или ассоциативных подалгебр JB-алгебры, исследуемое с точки зрения изоморфизмов. Одним из важных вопросов здесь является возможность восстановление алгебры по упорядоченному семейству ее подалгебр. Для алгебр фон Неймана этот вопрос изучался А. Дёрингом и Дж. Хардингом[25], но был исследован не полностью. Настоящая работа позволяет ответить на вопрос об условиях восстановления алгебры фон Неймана и JB-алгебры по системе ее подалгебр. Также эти результаты позволили выявить связи между двумя объектами, которые до сих пор изучались независимо в контексте квантовой теории: разложения состояний на операторных алгебрах, которые имеют важные приложения в квантовой статистической механике при описании равновесия квантовых систем и к выпуклому подходу к квантовой теории как таковой[26], и абелевы подалгебры операторной алгебры, упорядоченные по включению.

Таким образом, настоящее исследование с помощью описания квантовых симметрий объединяет различные упорядоченные объекты операторно-алгебраической теории, что демонстрирует внутреннее единство различных точек зрения на природу квантовых структур.

Цель и задачи работы. Целью диссертационного исследования является изучение упорядоченных структур, связанных с операторными алгебрами, и их изоморфизмов с точки зрения квантовой теории. Для достижения этой цели решения требуют следующие задачи:

- Исследовать классы подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, с точки зрения полноты простран-

[25] Döring A. *Abelian subalgebras and the Jordan structure of von Neumann algebras*/ A. Döring, J. Harding// Houston Journ. Math. – 2016. – Vol. 42, № 2. – P. 559 - 568.

[26] Bratteli O. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, 1*/ O. Bratteli, D. W. Robinson. – Berlin: Springer, 1997. – 500 p.

ства и существования мер в контексте структурной теории алгебр фон Неймана;

- Изучить унитарное пространство представления Гельфанда-Наймарка-Сигала, порожденного состоянием на алгебре фон Неймана и классов инвариантных подпространств;

- Проанализировать полноту унитарного пространства представления Гельфанда-Наймарка-Сигала, порожденного состоянием на йордановой алгебре;

- Ввести и исследовать понятие спектрального порядка на AW^*-алгебрах;

- Описать квантовые спектральные симметрии - автоморфизмы, сохраняющие спектральный порядок, на алгебрах фон Неймана и AW^*-алгебрах;

- Установить связи между изоморфизмами упорядоченных структур ассоциативных подалгебр йордановых алгебр с изоморфизмами на самих алгебрах;

- Исследовать порядковые изоморфизмы между упорядоченными по Шоке множествами ортогональных мер на пространстве состояний.

Научная новизна. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми и получены автором лично.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В рамках диссертационного исследования получены новые критерии полноты унитарных пространств различных типов, предложен способ структурной характеризации алгебр фон Неймана в терминах инвариантных подпространств, введено и изучено понятие спектрального порядка для AW^*-алгебры, описаны квантовые спектральные симметрии, предложен новый математический аппарат для основ топос-теории, выявлены и описаны связи между упорядоченными по Шоке ортогональными мерами на пространстве состояний и семействами подалгебр, а также получены новые йордановы инварианты для алгебр фон Неймана. Эти результаты могут найти дальнейшее применение при изучении общей теории операторных алгебр и математических аспектов квантовой теории, в исследовании отдельных проблем математической физики и квантовой информатики в научных и образовательных организациях Великобритании, Италии, Нидерландов, Словакии, Чехии и Российской Федерации.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории операторных алгебр, спектральной теории, теории упорядоченных множеств и функционального анализа в целом. Отдельные методы, приемы и понятия разработаны автором лично.

Положения, выносимые на защиту

1. Изучены связи между структурными свойствами алгебр фон Неймана и порядковыми свойствами классов подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, в контексте полноты унитарного пространства. Получены новые характеризации алгебр фон Неймана в терминах совпадения (несовпадения) классов инвариантных подпространств. Доказаны критерии полноты унитарного пространства в терминах ортомодулярных мер на классах подпространств.

2. Доказана равносильность полноты пространства представления Гельфанда-Наймарка-Сигала, порожденного состоянием на йордановой банаховой алгебре, полноте пространства представления второго сопряженного. Сформулирован и доказан критерий полноты указанного унитарного пространства представления в терминах состояний.

3. Введена и описана структура спектрального порядка на эффектах

AW^*-алгебр. Описаны квантовые спектральные симметрии - автоморфизмы, сохраняющие спектральный порядок, для алгебр эффектов алгебры фон Неймана, AW^*-алгебры и положительной части множества самосопряженных операторов (возможно, неограниченных), действующих в гильбертовом пространстве.

4. Доказано, что любой порядковый изоморфизм между упорядоченными структурами унитальных ассоциативных JB-подалгебр JBW-алгебр порождается йордановым изоморфизмом исходных алгебр, что означает, что JBW-алгебра полностью определяется структурой своих унитальных ассоциативных JB-подалгебр. Для структуры всех ассоциативных JB-подалгебр найдены дополнительные условия, при которых утверждение справедливо. Показано, что в случае JB-алгебры порядковый изоморфизм подалгебр порождается квази-йордановым изоморфизмом.

5. Описана структура порядковых изоморфизмов на семействах конечномерных абелевых подалгебр алгебр фон Неймана, не имеющих прямых слагаемых типа I_2. Доказано, что структура конечномерных абелевых подалгебр является полным йордановым инвариантом.

6. Получен "конечномерный" аналог теоремы Томиты об изоморфизме множества ортогональных мер с конечным носителем на пространстве состояний, упорядоченного по Шоке, и множества конечномерных абелевых подалгебр алгебры фон Неймана в пространстве представлений. Доказано, что порядковый изоморфизм между упорядоченными по Шоке ортогональными мерами описывается с помощью йорданова изоморфизма между соответствующими множествами подалгебр. Установлено, что в случае σ-конечных алгебр фон Неймана упорядоченные по Шоке ортогональные меры являются полным йордановым инвариантом.

Степень достоверности и апробация результатов. Полная достоверность представленных в работе утверждений и выводов обеспечивается строгостью математических доказательств.

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались автором на семинаре "Бесконечномерный анализ" механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова (руководитель О.Г.Смолянов), семинаре Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН (руководитель Ю.Н.Орлов), семинаре кафедры высшей математики МФТИ, семинаре кафедры математики электро-инженерного факультета Чешского Технического Университета в Праге (Чехия), семинаре института больших данных колледжа компьютерных наук и программной инженерии университета Шеньчженя (Китай), семинаре отдела математической физики МИАН им. В.А. Стеклова (руководитель И.В. Волович), на XI, XII и XIII Международных Казанских летних школах-конференциях "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2013, 2015, 2017 гг.), Уфимской международной математической конференции (Уфа, 2016 г.), Международная научной конференции "Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии" (Казань, 2016 г.), конференции "Квантовая динамика и функциональные интегралы" (Москва, 2017 г.), Международной Казанской конференции "Теория вероятностей и математическая статистика" (Казань, 2017 г.), 11-ой Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, Литва, 2014г.), конференции "Некоммутативный гармонический анализ" (Бедлево, Польша, 2012 г.), 9-14 съездах международной ассоциации квантовых структур (Сопот, Польша, 2008 г.; Бостон, США, 2010 г.; Кальяри, Италия, 2012 г.; Оломоуц, Чехия, 2014 г.; Лестер, Великобритания, 2016 г.; Казань, 2018 г.), конференции "Объединенная точка зрения на квантовую теорию" (Эдинбург, Великобритания, 2018 г.), Международной конференции "Квантовая информация, статистика и вероятность" со специальной сессией, посвященной 75-летию А.С.Холево (Москва, 2018 г.), конференции "Квантовая вероятность и ее приложения" (Лодзь, Польша, 2018 г.), международной конференции "Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ" (Долгопрудный, 2019 г.), международном семинаре "Wireless Communication Workshop" московского исследовательского центра компании "Huawei" (Сочи, 2019 г.)

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 27 печатных работах в рецензируемых научных изданиях, в том числе 20 работ - в журналах, индексируемых реферативными базами данных «Scopus» и «Web of Science». В публикациях с соавторами вклад автора данной работы является определяющим.

Содержание работы

Работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы.

Во введении содержится краткий обзор литературы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования, описаны основные результаты и представлены положения, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена изучению структурной теории алгебр фон Неймана с точки зрения классов инвариантных подпространств. Различные классы подпространств унитарного пространства стали интенсивно изучатся после появления в 60-х годах прошлого века ряда работ, в которых устанавливались связи между порядковыми свойствами классов подпространств и метрической полнотой самого пространства. Кроме этого, в классических работах Дж. фон Неймана возникала идея, интересная как с математической, так и с физической точек зрения, которая состояла в замене решетки всех замкнутых подпространств гильбертова пространства подрешеткой, состоящей из элементов, соответствующих ортопроекторам из некоторого подмножества алгебры $\mathcal{B}(H)$ (алгебры фон Неймана), что фактически означает инвариантность подпространства относительно коммутанта этой алгебры фон Неймана. Таким образом возникла идея совмещения этих двух направлений исследования.

Пусть далее $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H. Через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ будем обозначать множество всех ортопроекторов (самосопряженных идемпотентов) из $\mathcal{M}$, а через $\mathcal{M}' = \{ y \in B(H) \,|\, yx = xy$ для всех $x \in \mathcal{M} \}$ - коммутант $\mathcal{M}$. Линеал $S \subseteq H$ называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$ (обозначается $S\eta\mathcal{M}$), если $x'S \subseteq S$ для любого $x' \in \mathcal{M}'$. Для линеала S, присоединенного к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, разумно рассмотреть структуру подпространств S, которые также в свою очередь присоединены к $\mathcal{M}$. Пусть далее S - некоторое унитарное пространство. Поскольку вместе с любым унитарным пространством всегда можно рассматривать гильбертово пространство, являющееся его пополнением, то на S можно смотреть как на некоторый плотный линеал в соответствующем гильбертовом пространстве H, в котором действует алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$. Через $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S)$ будем обозначать множество всех линеалов в S, присоединенных к $\mathcal{M}$. Структура присоединенных линеалов связана со структурой ортопроекторов $\mathcal{M}$ следующим естественным образом: если $X \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S)$, то его замыкание $[X]$ в H является присоединенным к $\mathcal{M}$ и, таким образом, ортопроектор p, являющийся ортопроектором на $[X]$ - замыкание X в H, принадлежит $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Следовательно, $X \subseteq pH \cap S$, и, если X замкнуто, то $X = pH \cap S$. С другой стороны, задавая ортопроектор

$p \in \mathcal{M}^{pr}$, можно легко убедиться, что $pH \cap S \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S)$. Следовательно, все присоединенные подпространства (замкнутые) пространства S задаются ортопроекторами из $\mathcal{M}$. Однако различные ортопроекторы из $\mathcal{M}$ могут иметь одинаковые пересечения областей значений с S и, таким образом, соотношение между ортопроекторами из алгебры фон Неймана и присоединенными к алгебре фон Неймана подпространствами пространства S может оказаться не взаимно однозначным. Рассмотрим следующие классы присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ подпространств пространства S:

$L_{\mathcal{M}}(S) = \{\, X \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S) \,|\, X \text{ замкнуто в } S \,\}$ - класс всех подпространств пространства S, присоединенных к $\mathcal{M}$;

$F_{\mathcal{M}}(S) = \{\, X \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S) \,|\, X = X^{\perp\perp} \,\}$ - класс всех *ортозамкнутых подпространств* S, присоединенных к $\mathcal{M}$;

$E^q_{\mathcal{M}}(S) = \{\, X \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S) \,|\, \overline{X \oplus X^{\perp}} = S \,\}$ - класс *квазирасщепляющих подпространств* S, присоединенных к $\mathcal{M}$;

$E_{\mathcal{M}}(S) = \{\, X \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S) \,|\, X \oplus X^{\perp} = S \,\}$ - класс *расщепляющих подпространств* S, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Имеет место следующая цепочка включений:

$$E_{\mathcal{M}}(S) \subseteq E^q_{\mathcal{M}}(S) \subseteq F_{\mathcal{M}}(S) \subseteq L_{\mathcal{M}}(S) \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S).$$

В некоторых случаях в эту цепочку целесообразно добавлять класс $C_{\mathcal{M}}(S)$ всех *полных подпространств* S, присоединенных к $\mathcal{M}$, $C_{\mathcal{M}}(S) \subseteq E_{\mathcal{M}}(S)$.

Как известно, в случае гильбертова пространства любое подпространство является расщепляющим. В общем случае (неполного пространства) все рассматриваемые включения являются строгими. Более того, в "классическом случае" $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$ совпадение классов подпространств равносильно полноте унитарного пространства. Однако условие присоединенности подпространств к алгебре фон Неймана позволяет получить совпадающие классы подпространств и в случае унитарного (неполного) пространства. Так, учитывая доказанное взаимно однозначное соответствие между расщепляющими подпространствами, присоединенными к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, и ортопроекторами из этой алгебры, оставляющими S инвариантным, легко заметить, что для любой абелевой (коммутативной) алгебры $\mathcal{M}$ имеет место равенство $E_{\mathcal{M}}(S) = L_{\mathcal{M}}(S)$. Однако, когда алгебра $\mathcal{M}$ выбирается на "противоположной стороне" классификационной шкалы алгебр фон Неймана, то все включения в рассматриваемой цепочке подпространств являются строгими.

Теорема 1.(1.2 в тексте диссертации) *Пусть $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такой плотный присоединенный к $\mathcal{M}$ линеал $\mathcal{L} \subseteq H$, что*

$$C_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) \neq E_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) \neq E^q_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) \neq F_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) \neq L_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}).$$

Конструкция плотного в гильбертовом пространстве линеала, присоединенного к алгебре фон Неймана, возникает в пространстве представления Гельфада-Наймарка-Сигала (далее, ГНС), ассоциированного с состоянием или весом на алгебре фон Неймана. Пусть φ - точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{N}_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \,|\, \varphi(x^*x) < +\infty\}$. Множество $\mathcal{N}_\varphi$, снабженное скалярным произведением $\langle x, y \rangle_\varphi = \varphi(y^*x)$, $x, y \in \mathcal{N}\varphi$, становится унитарным пространством, пополнение которого по указанному скалярному произведению будем обозначать через $\mathcal{H}_\varphi$. Если $x \in \mathcal{N}_\varphi$ рассматривается как элемент унитарного пространства $(\mathcal{N}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$, то мы будем обозначать его $\tilde{x}$. Вес φ задает точное нормальное представление

$\pi_\varphi:\ \mathcal{M}\to\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$, такое что $\pi_\varphi(x)\tilde{y}=\widetilde{xy}$, $x\in\mathcal{M},\ y\in\mathcal{N}_\varphi$. В рамках описаннной конструкции мы будем отождествлять в дальнейшем $\mathcal{M}$ с $\pi_\varphi(\mathcal{M})$, считая, что элемент $\pi_\varphi(x)$ совпадает с элементом x с точностью до изоморфизма. Другими словами, $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$, и коммутант $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$ берется в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$. Пусть φ_π — вес, полученный переносом веса φ на алгебру $\pi_\varphi(\mathcal{M})$: $\varphi_\pi(\pi_\varphi(x))\equiv\varphi(x)\,(x\in\mathcal{M}^+)$. Через D_{φ_π} обозначим линеал веса φ_π. С алгеброй фон Неймана $\mathcal{M}$ связана левая гильбертова алгебра $\mathfrak{A}_\varphi=\{\tilde{x}\mid x\in\mathcal{N}_\varphi\cap\mathcal{N}_\varphi^*\}$ с произведением $(\,x,\,y\,)\to xy$ и инволюцией $x\to x^*$. Замыкание оператора $x\to x^*$ представимо в виде $J_\varphi\,\Delta_\varphi^{1/2}$, где J_φ есть антилинейная изометрия на $\mathcal{H}_\varphi$, а Δ_φ - положительный самосопряженный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, называемый модулярным. В соответствии с модулярной теорией Томиты-Такесаки $J_\varphi\,\mathcal{M}\,J_\varphi=\mathcal{M}'$. Символом j_φ мы будем обозначать канонический изоморфизм между $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ $j_\varphi:\ x\to J_\varphi\,x\,J_\varphi$. В дальнейшем $x'=j_\varphi(x)$ для $x\in\mathcal{M}$. Множество ограниченных (непрерывных) справа элементов относительно левой гильбертовой алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$

$$\mathfrak{A}'_\varphi=\{f\in\mathcal{H}_\varphi\mid \text{отображение}\quad \tilde{x}\to\pi_\varphi(x)f\quad(x\in\mathcal{N}_\varphi)\ \text{непрерывно}\}$$

является плотным в $\mathcal{H}_\varphi$ линеалом, присоединенным к $\mathcal{M}$, совпадающим с линеалом веса φ_π.

В случае представления, ассоциированного с точным нормальным состоянием, ситуация упрощается, поскольку $\mathcal{N}_\varphi=\mathfrak{A}_\varphi=\mathcal{M}$. Пусть $\xi_\varphi=\tilde{\mathbf{1}}\in\mathcal{H}_\varphi$. Это вектор является бициклическим, то есть циклическим и разделяющим как для $\mathcal{M}$, так и для $\mathcal{M}'$, и $\varphi(x)=\langle\,x\xi_\varphi,\,\xi_\varphi\,\rangle_\varphi=\omega_{\xi_\varphi}(x)$. В этом случае $S=\mathcal{M}'\xi_\varphi=\{\,u\xi_\varphi\,|\,u\in\mathcal{M}'\,\}$. Тогда каждый присоединенный линеал $X\in\mathcal{A}_\mathcal{M}(S)$ имеет вид $X=\{\,u\xi_\varphi\,|\,u\in\mathcal{J}'_X\,\}=\mathcal{J}'_X\xi_\varphi$, где $\mathcal{J}'_X$ -

левый идеал в $\mathcal{M}'$. Другими словами, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S)$ отождествляется (с точностью до изоморфизма) с семейством левых идеалов в $\mathcal{M}'$ (и $\mathcal{M}$). Каждому подпространству $X \in L_{\mathcal{M}}(S)$ соответствует некоторый левый идеал, замкнутый в сильной операторной топологии, а именно $X = \mathcal{M}'p'\xi_\varphi = \{\, x'p'\xi_\varphi \,|\, x' \in \mathcal{M}' \,\}$, где $p' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$. Такое представление мотивировало введение нового класса линеалов в S: линеал $X = \mathcal{J}'_X\xi_\varphi \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}(S)$ *операторно замкнут*, если соответствующий левый идеал $\mathcal{J}'_X$ в $\mathcal{M}'$ замкнут в сильной операторной топологии. Через $H_{\mathcal{M}}(S)$ будем обозначать множество всех операторно замкнутых линеалов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Очевидно, что $L_{\mathcal{M}}(S) \subseteq H_{\mathcal{M}}(S)$. $L_{\mathcal{M}}(S) \neq H_{\mathcal{M}}(S)$, если только $\mathcal{M}$ представляет собой бесконечномерный фактор типа I с сепарабельным преддвойственным, но $L_{\mathcal{M}}(S) = H_{\mathcal{M}}(S)$ в случае следового состояния φ. Кроме этого, имеет место

Предложение 1.(1.3) *Пусть Δ_φ ограничен, тогда $E_{\mathcal{M}}(S) = E^q_{\mathcal{M}}(S) = F_{\mathcal{M}}(S) = L_{\mathcal{M}}(S) = H_{\mathcal{M}}(S)$.*

Отсюда, в частности, снова можно получить совпадение классов в случае коммутативной алгебры фон Неймана. Также справедливо

Предложение 2.(1.4) *Предположим, что $\mathcal{M}$ есть собственно бесконечная алгебра фон Неймана и φ - точное нормальное состояние на $\mathcal{M}$. Тогда существует такой оператор $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что пространство $\mathcal{M}'p'\xi_\varphi$ не является замкнутым в S, что означает $L_{\mathcal{M}}(S) \subsetneq H_{\mathcal{M}}(S)$.*

Интересна и следующая характеризация конечных алгебр среди всех σ-конечных.

Теорема 2.(1.5) *Пусть $\mathcal{M}$ - σ-конечная алгебра фон Неймана. Следующие условия являются эквивалентными:*

(i) *$\mathcal{M}$ не является конечной.*

(ii) $L_{\mathcal{M}}(S) \neq H_{\mathcal{M}}(S)$ *для каждого точного нормального состояния* φ *на* $\mathcal{M}$.

Обобщая полученные результаты, можно сделать следующий "структурный" вывод: если на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ существует точное нормальное состояние с ограниченным модулярным оператором, то $\mathcal{M}$ конечна. Также получена характеризация класса полных подпространств, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Теорема 3.(1.6) *Пусть* p *- ненулевой ортопроектор из* $\mathcal{M}$ *и* $X = \mathcal{M}'p'\xi_{\varphi}$. *Подпространство* $X \in C_{\mathcal{M}}(S)$ *тогда и только тогда, когда* p *- конечная сумма атомических ортопроекторов.*

Таким образом, само пространство S полно тогда и только тогда, когда φ - выпуклая комбинация конечного числа чистых состояний.

Одним из инструментов, в общем случае связывающим структурную теорию алгебр фон Неймана с цепочкой классов подпространств, являются меры, заданные на этих классах. Под мерой (конечно-аддитивной, вполне аддитивной) на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$ (через $K_{\mathcal{M}}(S)$ обозначается один из следующих классов $\{E_{\mathcal{M}}(S),\, E^q_{\mathcal{M}}(S),\, F_{\mathcal{M}}(S),\, L_{\mathcal{M}}(S)\}$) понимается отображение $\mu : K_{\mathcal{M}}(S) \to \mathbb{C}$, такое что $\mu\big(\bigvee_i X_i\big) = \sum_i \mu(X_i)$ для счетного (конечного, произвольного) семейства попарно ортогональных множеств $\{X_i\} \subseteq K_{\mathcal{M}}(S)$ при условии существования $\bigvee_i X_i$. Это "ортомодулярное" определение неинформативно в классическом случае $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$, поскольку существование меры на одном из классов обеспечивает полноту пространства. Но для алгебры фон Неймана, отличной от $\mathcal{B}(H)$, ситуация может и измениться. Так, в случае конечномерной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ на $F_{\mathcal{M}}(S)$ существует много нетривиальных мер.

Теорема 4.(1.10) *Пусть* $\mathcal{M}$ *- конечномерная алгебра фон Неймана. Про-*

странство состояний на классе $F_{\mathcal{M}}(S)$ аффинно изоморфно пространству состояний на решетке ортопроекторов $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ алгебры $\mathcal{M}$.

Но с другой стороны в некоторых случаях получены полные обощения "стандартного" случая.

Теорема 5.(1.11) *Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ - бесконечномерный фактор типа I с конечномерным коммутантом. Тогда на $F_{\mathcal{M}}(S)$ вполне аддитивная ненулевая мера существует тогда и только тогда, когда S полно.*

Приведенная теорема не может быть ослаблена за счет отказа от условия на коммутант: если $\mathcal{M}$ имеет бесконечномерный коммутант, то может найтись много нетривиальных вполне аддитивных мер на инвариантных ортозамкнутых подпространствах даже в случае, когда пространство S не является полным. Существует и более общая формулировка теоремы 3, которая не ограничивается только классом ортозамкнутых подпространств.

Теорема 6.(1.12) *Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ - бесконечномерный фактор типа I с конечномерным коммутантом. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *S полно;*

(ii) *На классе $E_{\mathcal{M}}(S)$ существует ненулевая вполне аддитивная мера;*

(iii) *На классе $E^q_{\mathcal{M}}(S)$ существует ненулевая вполне аддитивная мера;*

(iv) *На классе $F_{\mathcal{M}}(S)$ существует ненулевая вполне аддитивная мера.*

Эта теорема содержит в себе "стандартный" случай, поскольку алгебра $\mathcal{B}(H)$ представляет собой фактор типа I с одномерным коммутантом.

Как уже упоминалось, ГНС-пространство, ассоциированное с состоянием на алгебре фон Неймна, полно тогда и только тогда, когда это состояние - выпуклая комбинация конечного числа чистых состояний.

Аналогичный результат получен в **Главе 2**, которая посвящена исследованию ГНС-конструкции, порожденной состоянием на JB-алгебре. Такая конструкция является в некотором смысле мостом между абстактно определенными C^*-алгебрами, AW^*-алгебрами и йордановыми банаховыми алгебрами, рассматриваемыми в следующих главах, и конкретными операторными структурами на гильбертовых пространствах, исследованных в предыдущей главе. Это обстоятельство послужило мотивом для детального изучения метрических свойств ГНС-пространства, являющегося важным примером унитарного пространства. Кроме того, глава 2 дополняет результаты главы 1 в части получения новых критериев полноты в терминах дуальных структур и геометрических свойств состояний.

Модель квантовой системы, основанная на йордановых структурах, в определенном смысле обобщает операторно-алгебраический подход, который основан на C^*-алгебрах или алгебрах фон Неймана. Но в контексте ГНС-конструкции обычный перенос известных фактов и алгоритмов на йордановы структуры не работает, поскольку не все состояния на йордановых алгебрах порождают гильбертово пространство представлений. Так фактор M_3^8 эрмитовых матриц размерности три на три над числами Кэли (октонионами) непредставим никаким гильбертовым пространством. Использование структуры канонического вложения $\mathcal{A}$ во второе сопряженное $\mathcal{A}^{**}$ позволяет решить проблему. Пусть $\mathcal{A}$ - JB-алгебра (вещественная банахова алгебра с коммутативной операцией $\circ$, удовлетворяющей следующим условиям: $a \circ (a^2 \circ b) = a^2 \circ (a \circ b)$; $\|a \circ b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$; $\|a^2\| = \|a\|^2$; $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$.) Для заданного элемента $a \in \mathcal{A}$ определим отображение T_a: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ как $T_a(x) = a \circ x$. Элементы $a, b \in \mathcal{A}$ операторно коммутируют, если $T_a T_b = T_b T_a$. Центр алгебры состоит из элементов, операторно коммутирующих с любым другим элементом заданной алгебры. JB-алгебра называется фактором, если ее центр имеет размерность нуль или единица. Под JBW-алгеброй мы понимаем JB-алгебру, которая является дуальным (сопряженным) банаховым пространством. Пусть далее φ - состояние (положительный нормированный функционал) на JB-алгебре $\mathcal{A}$, такое что $\varphi(a^2) \geq 0$ для $a \in \mathcal{A}$. Зададим $\mathcal{L}_\varphi = \{a \in \mathcal{A} \,|\, \varphi(a^2) = 0\}$ и φ^{**} - каноническое нормальное продолжение φ на второе сопряженное $\mathcal{A}^{**}$. Пусть $s(\varphi) \in \mathcal{A}^{**}$ – носитель проектора на φ^{**}, а $c(\varphi)$ - центральный носитель проектора $s(\varphi)$ (наименьший центральный проектор, мажорирующий $s(\varphi)$). Если φ является чистым, то $c(\varphi)\mathcal{A}^{**}$ есть фактор. Для состояния φ на $\mathcal{A}$ $\langle\, a,\, b\,\rangle_\varphi = \varphi(a \circ b)$ задает на фактор-пространстве $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}/\mathcal{L}_\varphi$ структуру унитарного пространства.

Предложение 3.(2.2) *Унитарное пространство $\mathcal{A}^{**}_{\varphi^{**}}$ является полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_\varphi$ полно.*

Отсюда следует, что конечная размерность $c(\varphi)$ обеспечивет полноту $\mathcal{A}_\varphi$. Для чистого состояния φ множество $c(\varphi)\mathcal{A}^{**}$ непредставимо в гильбертово пространство только в случае изоморфности алгебре M_3^8 эрмитовых матриц размерности 3 на 3 над числами Кэли. Таким образом, в силу конечной размерности, $\mathcal{A}_\varphi$ полно.

Пусть далее φ - состояние на JB-алгебре $\mathcal{A}$, которое является выпуклой комбинацией чистых состояний $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, для которых носители проекторов $s(\varphi_1), s(\varphi_2), \ldots, s(\varphi_k)$ имеют одинаковый центральный носитель $c(\varphi)$ и фактор $c(\varphi)\mathcal{A}^{**}$ имеет тип I_n, $n \geq 4$. В этом случае $\mathcal{A}_\varphi$ также полно.

Еще один интересный объект для изучения - это ГНС-пространство снин-фактора. Пусть $(\, H, \langle\, \cdot,\, \cdot\,\rangle\,)$ вещественное гильбертово пространство. Спин-фактор представляет собой прямую сумму $V = H \oplus \mathbb{R}$, наделенную произведением $(x\oplus\lambda\mathbf{1})\circ(y\oplus\mu\mathbf{1}) = (\mu x+\lambda y)\oplus\langle\, x,\, y\,\rangle\mathbf{1},\ x, y \in H,\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, и нормой $\|\, x \oplus \lambda\mathbf{1}\,\| = \|\, x\,\| + |\,\lambda\,|$, $x \in H,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Спин-факторы играют важную роль в структурной теории JBW-алгебр. Они представляют собой факторы типа I_2, рефлексивны и могут иметь бесконечную размерность в отличии от алгебр фон Неймана, для которых рефлексивность автоматически означает конечномерность. Если состояние φ на спин-факторе V не является чистым, то φ есть точное состояние, представляющее собой выпуклую комбинацию двух чистых состояний. Показано, что в любом из этих случаев пространство представления V_φ полно. Это утверждение является инструментом, который позволяет доказать следующую теорему

Теорема 7.(2.3) *Пусть φ – состояние на JB-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}_\varphi$ является полным тогда и только тогда, когда φ есть выпуклая комбинация конечного числа чистых состояний.*

Глава 3 продолжает исследования алгебр фон Неймана и их алгебраических обобщений AW^*-алгебр с точки зрения так называемых "квантовых спектральных симметрий". С формальной точки зрения в предыдущих главах исследовались порядковые структуры множеств (подпространств), связанных с операторными алгебрами. Мы вернемся к этому подходу в следующих главах, где исследуются теоретико-множественные структуры абелевых и ассоциативных подалгебр. В настоящей главе "точечный порядок" изучается на элементах алгебр как таковых. На AW^*-алгебре вводится и изучается отношение спектрального порядка, определяющего на ограниченной положительной части алгебры структуру полной решетки. Алгебра фон Неймана может быть определена как C^*-алгебра, имеющая преддвойственную. Другой подход состоит в рассмотрении алгебры фон Неймана как $*$-подалгебры алгебры $\mathcal{B}(H)$ с единицей, совпадающей со своим вторым коммутантом. Существуют и альтернативные топологические определения алгебры фон Неймана. Но, тем не менее, не существует никакой характеристики, относящейся только к внутренним свойствам алгебры (без использования структуры двойственности или представления гильбертова пространства). Это побудило И. Капланского определить алгебраическое обобщение алгебр фон Неймана, AW^*-алгебры, как такие C^*-алгебры, для которых каждая максимальная абелева C^*-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ порождается ортопроекторами, и каждое непустое подмножество попарно ортогональных ортопроекторов обладает точной верхней гранью. Заметим, что любая алгебра фон Неймана является AW^*-алгеброй, а обратное в общем случае неверно. Для любого элемента a из AW^*-алгебры $\mathcal{A}$ существует семейство $\{(E_\lambda(a)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ортопроектов из $\mathcal{A}$, называемое *спектральным разложением*, для которого выполняются условия:

1. $\lambda \le \mu \Longrightarrow E_\lambda(a) \le E_\mu(a)$;
2. $E_\lambda(a) = \inf_{\mu>\lambda} E_\mu(a)$;
3. $E_\lambda(a) = 0$, если $\lambda < -\|a\|$; $E_\lambda(a) = 1$, если $\lambda > \|a\|$.

Спектральный порядок на AW^*-алгебре $\mathcal{A}$ определяется следующим образом:

$$a \le_S b, \quad \text{если} \ \ E_\lambda(b) \le E_\lambda(a) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Далее спектральный порядок рассматривается на положительной части единичного шара алгебры $\mathcal{A}$, так называемой операторной эффект-алгебре или алгебре эффектов: $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \,|\, 0 \le a \le 1\}$. Показано, что сравнение двух эффектов AW^*-алгебры в спектральном смысле означает сравнение в стандартном смысле, а стандартное сравнение двух перестановочных элементов означает спектральное сравнение, но при этом сравнение двух элементов в спектральном смысле не означает их перестановочность.

Теорема 8.(3.2) *Пусть* $\mathcal{A}$ *-* AW^**-алгебра. Тогда* $(\mathcal{E}(\mathcal{A}), \leq_S)$ *представляет собой полную решетку.*

При этом решетка ортопроекторов, снабженная стандартным порядком, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \leq)$ является подрешеткой в $(\mathcal{E}(\mathcal{A}), \leq_S)$. Под спектральным центром $\mathcal{Z}(\mathcal{E}(\mathcal{A}))$ (центром спектральной решетки) понимается множество элементов, удовлетворяющих закону дистрибутивности с любой выбранной парой элементов. В случае конечной AW^*-алгебры получено описание спектрального центра.

Далее для алгебры фон Неймана и AW^*-алгебры рассматриваются преобразования, сохраняющие спектральный порядок. Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ множество ортопроекторов алгебры $\mathcal{M}$, а через $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ - множество эффектов алгебры $\mathcal{M}$. Биекция $\varphi : \mathcal{E}(\mathcal{M}) \to \mathcal{E}(\mathcal{M})$, сохраняющая спектральный порядок в двух направлениях называется *спектральным порядковым автоморфизмом*, а биекция $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$, сохраняющая стандартный (спектральный) порядок в двух направлениях - *проекторным порядковым автоморфизмом.* Аналогично можно определить *спектральный ортоморфизм* (соответственно, *порядковый ортоморфизм*) как спектральный порядковый автоморфизм (соответственно, проекторный порядковый автоморфизм) φ, сохраняющий ортогональность в двух направлениях.

Нас будут интересовать два "классических" примера спектральных порядковых автоморфизмов: отображение $a \to f(a)$, где $f : [0,1] \to [0,1]$ строго возрастающая биекция, и преобразование φ_τ, которое каждому оператору a ставит в соответствие оператор со спектральным разложением $\{\tau(E_\lambda(a))\}_\lambda$, где τ - проекторный порядковый автоморфизм на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ назовем каноническим, если $\varphi(a) = \varphi_\tau(f(a)), a \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$. Не каждый спектральный порядковый автоморфизм является каноническим, то есть не все квантовые симметрии описываются подобным образом. Было найдено дополнительное условие на автоморфизмы, при выполнении которого они автоматически канонические.

Для ортопроектора $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ определим $[p] = \{\lambda p \,|\, 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ *сохраняет операторы, кратные ортопроекторам,* если для любого $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует $q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, такой что $\varphi([p]) \subseteq [q]$.

Теорема 9.(3.4) *Спектральный порядковый автоморфизм $\varphi : \mathcal{E}(\mathcal{M}) \to \mathcal{E}(\mathcal{M})$ является каноническим тогда и только тогда, когда сохраняет операторы, кратные ортопроекторам.*

Естественно возникает вопрос об ослаблении условия сохранения ортопроекторов. Это удалось сделать в случае спектральных ортоморфизмов. Будем говорить, что спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ *сохраняет скалярные операторы*, если $\varphi([\mathbf{1}]) \subseteq [\mathbf{1}]$.

Теорема 10.(3.5) *Спектральный ортоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ сохраняет скалярные операторы, тогда и только тогда, когда существует проекторный ортоморфизм τ на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ и строго возрастающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что $\varphi(A) = \varphi_\tau(f(A))$, $A \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$.*

В силу замечательной теоремы Дайя, утверждающей, что проекторный ортоморфизм на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ порождается некоторым йордановым $*$-изоморфизмом, справедливо следующее

Следствие. *Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, не содержащая прямых слагаемых типа I_2, φ - спектральный ортоморфизм на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, сохраняющий скалярные операторы. Тогда существует единственный йор-*

данов $*$-изоморфизм J и единственная строго возрастающая биекция $f:[0,1]\to[0,1]$, такие что $\varphi(A)=J(f(A))$, $A\in\mathcal{E}(\mathcal{M})$.

Возвращаясь к алгебре эффектов $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ AW^*-алгебры $\mathcal{A}$, аналогично вводятся понятия спектрального порядкового автоморфизма, спектрального ортоморфизма и канонического спектрального порядкового автоморфизма. Показано, что спектральный порядковый автоморфизм на $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ канонический тогда и только тогда, когда он сохраняет кратные ортопроекторы. Используя версию теоремы Дайя для AW^*-алгебр, полученную Я. Хамхалтером, доказаны аналоги теорем 9 и 10 для алгебры эффектов AW^*-алгебры. Отметим, что условие сохранения скалярных операторов неулучшаемо. С другой стороны, справедлива

Теорема 11.(3.9) *Пусть AW^*-алгебра $\mathcal{A}$ представляет собой фактор, не являющийся фактором типа I_2 или III. Тогда любой спектральный ортоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ является каноническим. В частности, если $\mathcal{A}$ не является алгеброй матриц размерности 2×2, то существуют такие единственная строго возрастающая биекция $f:[0,1]\to[0,1]$ и единственный йордановский $*$-изоморфизм $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$, что для всех $a\in\mathcal{E}(\mathcal{A})$ $\ \varphi(a)=J(f(a)$.*

В заключении этой главы спектральный порядок и преобразования его сохраняющие рассматриваются на множестве положительных самосопряженных линейных операторов (не обязательно ограниченных), действующих в гильбертовом пространстве.

В **Главе 4** мы снова оперируем такими понятиями как изоморфизмы, сохраняющие порядок, йордановы изоморфизмы, ключевыми моментами рассуждений являются ортогональность и сохранения $\mathbf{1}$, но в несколько ином контексте. Другими словами, мы продолжаем изучение квантовых симметрий, следуя "скандинавскому" подходу Бора к основам квантовой теории. Йордановское произведение, заданное на JB-алгебрах или JBW-алгебрах в общем случае неассоциативно, поэтому изучение частично упорядоченного множества $(\mathcal{V}(\mathcal{A}), \subseteq)$ всех ассоциативных унитальных JB-подалгебр JBW-алгебры или JB-алгебры $\mathcal{A}$, упорядоченное по включению, вполне оправдано. Если две JB-алгебры изоморфны, то существует изоморфизм, сохраняющий порядок, между указанными семействами ассоциативных подалгебр, и, таким образом, мы получаем некоторый порядковый инвариант JB-алгебр. Но интересно другое: будет ли частично упорядоченное множество ассоциативных подалгебр полностью определять структуру JB-алгебры? Фактически в этой главе решается следующая задача: пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - JBW-алгебры или JB-алгебры, $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ - множества ассоциативных JB-подалгебр, упорядоченных по включению, $\varphi : \mathcal{V}(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}(\mathcal{B})$ - порядковый изоморфизм. Существует ли такой единственный йорданов изоморфизм $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, что $\varphi(C) = \psi(C)$ для всех $C \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$? Положительный ответ на этот вопрос означает, что сложная структура алгебр может быть закодирована в "дискретную алгебраическую упорядоченную структуру", не имеющую топологии. Рассмотрим сначала задачу в случае унитальных подалгебр JBW-алгебры. Пусть $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ - семейство всех ассоциативных JB-подалгебр с $\mathbf{1}$ JBW-алгебры $\mathcal{A}$, упорядоченное по включению, Пусть B – другая JBW-алгебра. Биекция $\varphi : \mathcal{V}(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}(\mathcal{B})$ называется *порядковым изоморфизмом*, если она сохраняет порядок в обоих направлениях. Порядковый изоморфизм φ *порождается йордановым изоморфизмом* $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, если $\varphi(C) = \psi(C)$ для всех $C \in \mathcal{V}(\mathcal{A})$.

Теорема 12.(4.2) *Пусть $\mathcal{A}$ - JBW-алгебра, не содержащая прямых слагаемых типа I_2, которая не изоморфна $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ - другая JBW-алгебра. Тогда для любого порядкового изоморфизма $\varphi : \mathcal{V}(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}(\mathcal{B})$ существу-*

ет единственный йорданов изоморфизм $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, порождающий φ.

В случае общих JB-алгебр эта теорема имеет следующий вид:

Теорема 12'.(4.4) *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - JB-алгебры. Предположим, что $\mathcal{A}$ не является спин-фактором. Тогда любой порядковый изоморфизм $\varphi : \mathcal{V}(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}(\mathcal{B})$ порождается некоторым квази-йордановым изоморфизмом $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Более того, если $\mathcal{A}$ не изоморфна $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, то ψ определяется однозначно.*

Далее рассматривается задача реконструкции алгебры по структуре всех ее неунитальных ассоциативных подалгебр. Обозначим через $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A})$ структуру всех ассоциативных JB-подалгебр алгебры $\mathcal{A}$. В этом общем случае порядковый изоморфизм между упорядоченными множествами ассоциативных подалгебр не всегда порождается йордановыми изоморфизмами. Таким образом, для получения аналога теоремы 12 необходимы некоторые дополнительные условия. Первая идея состояла в рассмотрении понятия ортогональности. Подалгебры $C, D \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A})$ *ортогональны* ($C \perp D$), если $x \circ y = 0$ для всех $x \in C$ и $y \in D$.

Теорема 13.(4.3) *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - такие JBW-алгебры, что $\mathcal{A}$ не имеет прямых слагаемых типа I_2. Пусть $\varphi : (\mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}), \subseteq, \perp) \to (\mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}), \subseteq, \perp)$ – порядковый изоморфизм, сохраняющий ортогональность в обоих направлениях. Тогда существует такой единственный йорданов изоморфизм $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, что $\varphi(C) = \psi(C)$ для всех $C \in \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A})$.*

Возникает естественная идея об ослаблении условия ортогональности. Было высказано предположение о "сохранении" единицы, и была получена следующая

Теорема 14.(4.5) *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – унитальные JB-алгебры. Предположим, что $\mathcal{A}$ не изоморфна спин-фактору,* $\dim \mathcal{A} \geq 3$. *Пусть $\varphi : \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B})$ - такой изоморфизм, что $\varphi(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$. Тогда существует* *единственный квази-йорданов изоморфизм* $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, *порождающий* φ.

Заметим, что условие сохранения единицы слабее условия ортогональности в том смысле, что любой порядковый изоморфизм $\varphi: \ \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B})$, который сохраняет ортогональность, сохраняет также единицу. Также справедливы аналоги теоеремы 14 для C^*-алгебр и алгебр фон Неймана, причем в случае справедливости утверждений типа теоремы Глисона, квази-йорданов изоморфизм становится йордановым. Также в этой главе рассматриваются семейства абелевых подалгебр фон Неймана алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. При этом символом $\mathcal{V}^{fin}(\mathcal{M})$ обозначается множество всех конечномерных абелевых подалгебр фон Неймана для $\mathcal{M}$. Наиболее интересными являются следующие результаты:

Теорема 15. *Пусть* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *– алгебры фон Неймана, причем* $\mathcal{M}$ *не имеет прямых слагаемых типа* I_2, *а* $\varphi : \mathcal{V}^{fin}(\mathcal{M}) \to \mathcal{V}^{fin}(\mathcal{N})$ *– порядковый изоморфизм. Тогда существует едиственный йорданов* $*$*-изоморфизм* $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, *такой что* $\varphi(C) = \psi(C)$ *для любого элемента* $C \in \mathcal{V}^{fin}(\mathcal{M})$.

Теорема 16.(4.7) *Пусть* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *– алгебры фон Неймана. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ *и* $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ *изоморфны;*

(ii) $\mathcal{V}^{fin}(\mathcal{M})$ *и* $\mathcal{V}^{fin}(\mathcal{N})$ *изоморфны;*

(iii) $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *и* $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ *ортоизоморфны;*

(iv) $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *изоморфны как йордановы алгебры.*

Результаты, связанные с описанием порядковых изоморфизмов на множествах подалгебр, нашли свое приложение в **Главе 5**, которая посвящена ортогональным мерам на пространстве состояний, снабженным порядком Шоке. Таким образом выявляются связи между современным топос-подходом и стандартным "выпуклым" подходом к квантовой теории. Комбинируя полученные результаты, относящиеся к изоморфизмам частично упорядоченных множеств всех абелевых подалгебр алгебр фон Неймана, с классической теоремой Томиты из теории Шоке, мы описываем порядковые изоморфизмы между множествами ортогональных мер (ортогональных мер с конечными носителями) на пространствах состояний, наделенных порядком Шоке, в терминах йордановых $*$-изоморфизмов между соответствующими алгебрами.

Пусть K – компактное выпуклое множество в локально выпуклом топологическом пространстве X. Символ $C(K)$ будет означать C^*- алгебру всех непрерывных комплексных функций на K. Пусть $A(K)$ и $P(K)$ представляют множества всех непрерывных аффинных функций на K и всех непрерывных выпуклых функций на K соответственно. Под мерой Радона μ на K мы подразумеваем элемент $C(K)^*$, канонически идентифицируемый с регулярной борелевской мерой $d\mu$ на K в соответствии с формулой $\mu(f) = \int_K f(\omega)\, d\mu(\omega)$, $f \in C(K)$. Множество всех вероятностных мер Радона на K будет обозначаться как $M_1^+(K)$. Пусть $\mu \in M_1^+(K)$. Точка $b(\mu) \in K$ называется барицентром μ, если для каждого $a \in A(K)$ $a(\, b\,(\,\mu\,)\,) = \int_K a(\omega)\, d\mu(\omega)$. Мера μ называется *представляющей* для заданного $x \in K$, если x есть барицентр μ. Множество всех представляющих мер x будет обозначаться как $M_x^+(K)$. Пусть μ и ν – положительный радоновские меры. Порядок Шоке определяется следующим образом: $\mu \prec \nu$, если $\mu(f) \prec \nu(f)$ для всех $f \in P(K)$. Пусть далее $S(\mathcal{A})$ - множество всех состояний на $\mathcal{A}$, наделенное $*$-слабой топологией. Для фиксированного состояния φ на $\mathcal{A}$ тройка $(\pi_\varphi, \xi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ задает конструкцию представления Гельфанда-Наймарка-Сигала алгебры $\mathcal{A}$, ассоциированного с φ. Через $\mathcal{M}_\varphi$ мы будем обозначать алгебру фон Неймана, порожденную $\pi_\varphi(\mathcal{A})$. Тогда $\mathcal{M}'_\varphi = \pi_\varphi(\mathcal{A})'$. Определим $C_\varphi = lin\{\psi \in \mathcal{A}^{*+} \,|\, 0 \le \psi \le \varphi\}$. Существует биективное положительное отображение между C_φ и $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$, сопоставляющее каждому элементу $\psi \in C_\varphi$ оператор $a'_\psi \in \mathcal{M}'_\varphi$, такой что для любого $a \in \mathcal{A}$ $\psi(a) = \langle a'_\psi \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$. Пусть $\mu \in M^+_\varphi(S(\mathcal{A}))$ и $f \in L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$. Тогда существует единственный элемент $\theta_\mu(f) \in \mathcal{M}'_\varphi$, такой что для любого $a \in \mathcal{A}$ $\langle \theta_\mu(f)\pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle = \int\limits_{S(A)} f(\omega)a(\omega)\,d\mu(\omega)$. Мера $\mu \in M^+_\varphi(S(\mathcal{A}))$ называется *ортогональной*, если для любого борелевского множества $E \subset S(\mathcal{A})$ положительные функционалы φ_E and φ_{E^c} на $\mathcal{A}$, определяемые равенствами $\varphi_E(a) = \int\limits_E a(\omega)\,d\mu(\omega), \qquad \varphi_{E^c}(a) = \int\limits_{E^c} a(\omega)\,d\mu(\omega)$, ортогональны, что эквивалентно тому, что θ_μ является $*$-изоморфизмом между $L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$ и абелевой подалгеброй фон Неймана $C_\mu = \theta_\mu(L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu))$ алгебры $\mathcal{M}'_\varphi$. Обозначим через $O_\varphi(\mathcal{A})$ множество всех ортогональных мер в $\mathcal{P}(S(\mathcal{A}))$, имеющих барицентр φ, а $O(\mathcal{A})$ множество всех ортогональных вероятностных мер Радона на $S(\mathcal{A})$. Кроме того, через Θ_φ мы будем обозначать отображение $\Theta_\varphi : O_\varphi(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}(\mathcal{M}'_\varphi) : \mu \to C_\mu$. С использованием теоремы Томиты показано, что для точного состояния φ на $\mathcal{A}$ частично упорядоченное множество $(O_\varphi(\mathcal{A}), \prec)$ изоморфно частично упорядоченному множеству $(\mathcal{V}(\mathcal{M}'), \subset)$. Более того, если φ есть точное нормальное состояние на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, то $(O_\varphi(\mathcal{M}), \prec)$ изоморфно $(\mathcal{V}(\mathcal{M}'), \subseteq)$. В рамках этой конструкции интерес представляет описание мер, соответствующих конечномерным абелевским подалгебрам. Обозначим через $O^{fin}_\varphi(\mathcal{A})$ множество всех элементов $O_\varphi(\mathcal{A})$, которые имеют конечный носитель. Пусть Θ^{fin}_φ ограничение отображения Θ_φ к $O^{fin}_\varphi(\mathcal{M})$. Получена "конечномерная" версия результата Томиты.

Теорема 17.(5.1) *Пусть φ - состояние на $\mathcal{A}$. Тогда отображение*

$$\Theta_{\varphi}^{fin}: \mu \to C_{\mu}$$

есть порядковый изоморфизм между $(O_{\varphi}^{fin}(\mathcal{A}), \prec)$ и $(\mathcal{V}^{fin}(\mathcal{M}'_{\varphi}), \subseteq)$.

Используя эти результаты показано, что порядковый изоморфизм между упорядоченными по Шоке ортогональными мерами описывается с помощью йорданова изоморфизма между соответствующими множествами подалгебр.

Теорема 18.(5.3) *Пусть φ и ψ – состояния на C^*-алгебрах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, соответственно. Пусть также верно одно из двух: либо $\mathcal{M}'_{\varphi}$ – алгебра фон Неймана, не содержащая прямых слагаемых типа I_2, либо $\mathcal{M}_{\varphi}$ не содержит прямых слагаемых типа I. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Для любого порядкового изоморфизма $\Phi : O_{\varphi}(\mathcal{A}) \to O_{\psi}(\mathcal{B})$ существует единственный йорданов $*$-изоморфизм $\Psi : \mathcal{M}'_{\varphi} \to \mathcal{M}'_{\psi}$, такой что $\Phi(\mu) = \Theta_{\psi}^{-1}\Psi(\Theta_{\varphi}(\mu))$ для любой меры $\mu \in O_{\varphi}(\mathcal{A})$;*

(2) *Для любого порядкового изоморфизма $\Phi : O_{\varphi}^{fin}(\mathcal{A}) \to O_{\psi}^{fin}(\mathcal{B})$ существует единственный йорданов $*$-изоморфизм $\Psi : \mathcal{M}'_{\varphi} \to \mathcal{M}'_{\psi}$, такой что $\Phi(\mu) = \Theta_{\psi}^{-1}\Psi(\Theta_{\varphi}(\mu))$ для любой меры $\mu \in O_{\varphi}^{fin}(\mathcal{A})$.*

Показано, что в случае σ-конечных алгебр фон Неймана рассматриваемые конструкции является полным йордановым инвариантом. Среди результатов можно выделить следующие:

Теорема 19.(5.5) *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – σ-конечные алгебры фон Неймана, причем $\mathcal{M}$ не имеет прямых слагаемых типа I_2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ *изоморфны как йордановы алгебры;*

(ii) *существуют такие точные нормальные состояния φ и ψ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, что $(O_\varphi^{fin}(\mathcal{M}), \prec)$ and $(O_\psi^{fin}(\mathcal{M}), \prec)$ изоморфны как частично упорядоченные множества;*

(iii) *для любых точных нормальных состояний φ и ψ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно $(O_\varphi^{fin}(\mathcal{M}), \prec)$ и $(O_\psi^{fin}(\mathcal{M}), \prec)$ изоморфны как частично упорядоченные множества.*

Теорема 20.(5.6) *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сепарабельные C^*-алгебры, φ и ψ – состояния типа III на C^*-алгебрах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $O_\varphi(\mathcal{A})$ *и* $O_\psi(\mathcal{B})$ *изоморфны;*

(ii) $O_\varphi^{fin}(\mathcal{A})$ *и* $O_\psi^{fin}(\mathcal{B})$ *изоморфны;*

(iii) $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ *и* $\pi_\psi(\mathcal{B})''$ *изоморфны как йордановы алгебры.*

Таким образом, результаты этой главы снова связываются со структурной теорией алгебр, "зацикливая" исследования.

Публикации автора по теме диссертации

1. Турилова Е.А. О некоторых классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления алгебры $\mathcal{B}(H)$, ассоциированного с весом/ Е.А.Турилова// Изв. вузов. Матем. - 2006. - № 9. - С. 58–66; Russian Math. (Iz. VUZ). - 2006. - 50:9. - P. 55–62.

2. Turilova E. Measures on classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra/E. Turilova// Int. J. Theor. Phys. - 2009. - V. 48. - № 11. - P. 3083–3091.

3. Turilova E. Subspace Structures in Inner Product Spaces and von Neumann Albebras/E. Turilova//Int. J. Theor. Phys. - 2011. - V. 50. - № 12. - P.3812-3820.

4. Turilova E. Structure of associative subalgebras of Jordan operator algebras/ J. Hamhalter, E. Turilova// Quart. J. of Math. - 2013. - V. 64. - № 2. - P. 397-408.

5. Turilova E. Affiliated subspaces and structure of von Neumann Albebras/J. Hamhalter, E. Turilova// J. Oper. Theory. - 2013. - V. 69. - № 1. - P. 101-115.

6. Turilova E. Affiliated subspaces and infiteness of von Neumann albebras/J. Hamhalter, E. Turilova// Math. Nachr.- 2013. - V. 286. - № 10. - P. 976-985.

7. Turilova E. Automorphisms of Order /tructures of Abelian Parts of Operator Algebras and Their Role in Quantum Theory/J. Hamhalter, E. Turilova// Int.J. Theor. Phys. -2014. - V. 53. - № 10. - P. 3333-3345.

8. Turilova E. Classes of Invariant Subspaces for Some Operator Algebras/J. Hamhalter, E. Turilova// Int. J.Theor. Phys. - 2014. - V. 53.- № 10. - P. 3397-3408.

9.Turilova E. Automorphisms of spectral lattices of unbounded positive operators/E. Turilova// Lobachevskii J. of Math. - V. 35. - № 3. - P. 259 - 263.

10. Turilova E. Automorphisms of spectral lattices of positive contractions on von Neumann Albebras/E. Turilova// Lobachevskii J. of Math. - V. 35. - № 4. - P. 354 – 358.

11. Turilova E. Probability structures in subspace lattice approach to foundations of quantum theory/E. Turilova//Lith. Math. J. - 2015. - V. 55. - № 2.- P. 263-269.

12. Turilova E. Completeness of Inner Product Spaces Induced by States on Jordan and C*-Algebras/E. Turilova// Int. J. Theor. Phys. - 2015. - V. 54. - № 12. - P. 4229 - 4236.

13. Turilova E. Spectral order on AW*-algebras and its preservers / J. Hamhalter, E. Turilova//Lobachevskii J. of Math. - 2016. - V. 37. - № 4. - P.439-448.

14. Turilova E. Completeness of Gelfand-Neumark-Segal inner product space on Jordan algebras/J. Hamhalter, E. Turilova//Math. Slov. - 2016. - V. 66. - № 2. - P.459-468.

15. Turilova E. Orthogonal Measures on State Spaces and Context Structure of Quantum Theory/J. Hamhalter, E. Turilova//Int. J. Theor. Phys. - 2016. - V. 55. - № 7. - P.3353-3365.

16. Turilova E. Quantum Spectral Symmetries/J. Hamhalter, E. Turilova//Int. J. Theor. Phys. - 2017. - V. 56. - № 12. - P.3807-3818.

17. Turilova E. A. Spectral Order on Unbounded Operators and their Symmetries/ J. Hamhalter, E.A. Turilova//Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta-Seriya Fiz.-Mat. Nauki. - 2018. - V. 160 - № 2. - P.293-299.

18. Turilova E. Choquet Order and Jordan Maps/J. Hamhalter, E. Turilova// Lobachevskii J. of Math. - 2018. - Vol.39, Is.3. - P.340-347.

19. Turilova E. Jordan invariants of von Neumann algebras given by abelian subalgebras and Choquet order on state spaces/J. Hamhalter, E. Turilova//

Int. J. Theor. Phys. - 2019. DOI: 10.1007/s10773-019-04157-w (опубликовано on-line)

20. Turilova E.A, Hamhalter J., Choquet Order and Jordan Morphisms of Operator Algebras//J. Math. Scien. (United States). - 2019. - Vol.241, Is.4. - P.501-506.

21. Турилова Е.А. Упорядоченные структуры абелевских подалгебр операторных алгебр/ Е.А. Турилова, Я. Хамхалтер// Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского. - Казань: Казан. ун-т, 2013. - Т. 46. - С. 438 - 440.

22. Турилова Е.А. Классы подпространств унитарного пространства, присоединенного к собственно бесконечной алгебре фон Неймана/ Е.А. Турилова, Я. Хамхалтер// Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского. - Казань: Казан. ун-т, 2013. - Т. 46. - С. 436 - 438.

23. Turilova E. Spectral order for positive contraction in operator algebras/J. Hamhalter, E. Turilova// Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского. - Казань: изд-во Казан. математ. общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. - Т. 51. - С. 516 - 519.

24. Turilova E. Orthogonal Measures on State Spaces and Context Structure of Quantum Theory/ J. Hamhalter, E. Turilova//Уфимская математическая конференция с международным участием: сборник тезисов. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. - С. 176-178.

25. Turilova E. Choquet order of orthogonal measures and abelian subalgebras/ J. Hamhalter, E. Turilova// Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям А.П.

Широкова и П.А. Широкова.- Казань, Казан. ун-т, изд-во Академии наук РТ, 2016. - С. 50 - 51.

26. Е. А. Турилова, Я. Хамхалтер, “Порядок Шоке и йордановы морфизмы операторных алгебр”, Дифференциальные уравнения. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 140, ВИНИТИ РАН, М., 2017. - С. 119–124.

27. Турилова Е. Преобразования, сохраняющие спектральный порядок /Е. Турилова, Я. Хамхалтер // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. - Казань, 2017. - том 54. - С. 367-369.