

*На правах рукописи*

**ВЫТОВТОВ КОНСТАНТИН АНАТОЛЬЕВИЧ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ  
ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ  
КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
доктора технических наук

Астрахань – 2020 г.

Работа прошла апробацию в институте информационных технологий и коммуникаций федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Астраханский государственный технический университет»

**Научный консультант:**

доктор технических наук,  
главный научный сотрудник  
Института проблем управления РАН  
им. В.А. Трапезникова  
Вишневецкий Владимир Миронович

**Ведущая организация:** федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита состоится 15.06.2020 в 12:00 на заседании диссертационного совета ФРКТ.05.13.18.001 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) <https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-tekhnicheskie-nauki.php>

Работа представлена «25» февраля 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п.3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность.**

Математическое описание физических процессов и явлений имеет большое значение как для расчетов и их практических приложений, так и для глубокого понимания сути этих процессов и явлений в связи с необходимостью перехода к передовым производственным технологиям, требованиями разработки новых материалов, в частности композитных и тонкопленочных структур, а также развитием 5G систем связи в рамках программы цифровой экономики. На сегодняшний день представлено множество математических моделей механических, электрических, электронных, радиофизических, оптических, информационных, социальных, биологических систем. При этом в большинстве случаев системы различной природы описываются одной и той же математической моделью. Для формирования единого подхода еще Ньютоном было введено понятие динамической системы. С тех пор исследование динамических систем различной природы и характера является актуальной темой в течение уже нескольких столетий.

На сегодняшний день, достаточно глубоко изучены системы с одной степенью свободы, в том числе и параметрические. В научной литературе рассмотрены случаи периодического и непериодического изменения параметров. Для анализа использовались аналитические, численно-аналитические и численные методы. Наиболее изученными системами с двумя степенями свободы являются системы с постоянными параметрами. Системы с изменяющимися параметрами изучались, как правило, численными методами и на сегодняшний день не существует сколько-нибудь приемлемого для практического применения аналитического метода описания динамических систем с произвольными параметрами даже в рамках линейной задачи. Но эти методы крайне необходимы для описания устройств современных систем связи и обработки информации на основе многослойных анизотропных управляемых материалов, нанопленок, метаматериалов, например, фильтров Брэгга, резонаторов СВЧ и оптического диапазона, вентилях, фазовращателей и других. Аналитические методы расчета таких структур позволили бы решать обратные задачи и проектировать СВЧ и оптические структуры в соответствии с современными требованиями.

Таким образом, разработка аналитических моделей и методов анализа систем с изменяющимися параметрами является актуальной и имеет приложения во многих областях науки, техники, в частности для перспективных систем связи в рамках программы цифровой экономики, перспективных систем искусственного интеллекта, фотонных компьютеров.

**Степень разработанности темы.** На сегодняшний день детально проанализированы динамические системы с постоянными параметрами и системы со слабой нелинейностью. Для них построено множество математических моделей на основе строгих и приближенных

аналитических методов. Для параметрических систем с одной степенью свободы и гармоническим законом изменения параметра разработан аппарат функций Матье. Системы с кусочно-непрерывными параметрами исследовались численными и численно-аналитическими методами. При рассмотрении задач исследования систем с кусочно-постоянными параметрами исследования ограничивались аналитическим исследованием систем с двумя интервалами с постоянными параметрами.

Потребность в разработке математических моделей параметрических систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами обусловлена, в частности, разработкой новых композитных материалов, устройств 5G систем связи и обработки информации, которые включены в перечень приоритетных перспективных направлений научно-технологического развития Российской Федерации.

Выполненный анализ научных работ показал, что, несмотря на значительные результаты в области математического моделирования динамических систем и разработки численных методов, а также алгоритмов и программ их расчета, на сегодняшний день отсутствуют аналитические модели для систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами даже в рамках линейной задачи. В связи с этим, **научной проблемой** диссертации является построение аналитических моделей систем с одной и двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами на основе точных аналитических методов для решения целого ряда прикладных задач в направлении разработки устройств современных систем связи, обработки информации и искусственного интеллекта.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертации является построение математических моделей линейных динамических систем с одной и двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами для расчета устройств современных систем связи и обработки информации.

**Задачи исследования.** Для достижения цели в диссертационной работе решены следующие задачи:

- разработка аналитического метода моделирования линейной параметрической системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами в аналитическом виде в элементарных функциях;
- разработка аналитического метода моделирования линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами в аналитическом виде в элементарных функциях;
- разработка аналитического метода моделирования линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и случая попарно-обратных собственных чисел на каждом интервале с постоянными параметрами в виде блочной диагональной матрицы с  $2 \times 2$  блоками без перехода в другой базис в аналитическом виде в элементарных функциях;

- разработка аналитического метода анализа условий существования неустойчивых решений для линейной параметрической системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами в элементарных функциях;
- разработка аналитического метода анализа условий существования неустойчивых решений для линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами в элементарных функциях;
- развитие приближенных аналитических методов для численного моделирования периодических электромагнитных и оптических структур;
- реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента по расчету параметров линейных параметрических систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами.

**Объектом исследования** являются линейные динамические системы с одной и двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами.

**Предметом исследования** являются математические модели, численные методы, комплексы программ для линейных динамических систем с одной и двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами.

#### **Научная новизна работы:**

1. Впервые построена аналитическая модель линейной параметрической системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами. Найдена матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы второго порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами в аналитическом виде в элементарных функциях, описывающая эволюцию данной системы и *отличающаяся* от предыдущих тем, что она представлена в виде конечной суммы гиперболических матриц. Параметры системы могут изменяться в любой момент времени на любую величину. Это позволяет, прежде всего, упрощать решение обратных задач и задач проектирования требуемых электромагнитных и оптических структур на основе фотонных кристаллов и многослойных нанопленок, разработки поглощающих и отражающих покрытий, а также прогнозирования физических свойств этих структур и систем.

2. Впервые введено новое понятие эквивалентных колебаний линейной параметрической системы второго порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами. Результирующее колебание впервые представлено в виде суперпозиции  $2^{N-1}$  эквивалентных колебаний с определенными коэффициентами вклада. Данное разложение является конечным *в отличие* от бесконечного ряда Фурье, не совпадает с существующими вейвлет-разложениями и дискретным косинусным

преобразованием. Это позволяет проводить качественное исследование соответствующих систем на фазовой плоскости, таких как фильтры Брэгга, периодические волноводы, резонаторы Фабри-Перо.

3. *Впервые доказано*, что изменение порядка чередования интервалов с постоянными параметрами системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами, не изменяющее длительности периода, не влияет на структуру областей неустойчивости решений. Это позволяет оптимизировать исследование параметрических механических систем и структур на основе фотонных кристаллов, а также классифицировать их по данному признаку.

4. Впервые построена аналитическая модель линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами. *Впервые найдена* матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами, описывающая эволюцию системы, в аналитическом виде в элементарных функциях. Решение найдено при условии непрерывности функций и их первых производных. Это позволяет, прежде всего, упрощать решение обратных задач и численное моделирование электромагнитных и оптических управляемых структур на основе анизотропных фотонных кристаллов и устройств современных систем связи и обработки информации с их использованием, а также прогнозировать физические свойства этих структур, устройств и систем.

5. Результирующее колебание линейной параметрической системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами впервые представлено в виде  $2^N$  групп колебаний по  $2^{N-1}$  колебаний в каждой группе. Данные колебания названы эквивалентными. Полученное разложение является конечным *в отличие* от бесконечного ряда Фурье, не совпадает с существующими вейвлет-разложениями и дискретным косинусным преобразованием. Результат упрощает качественное исследование таких электромагнитных структур, как управляемые фильтры, вентили, резонаторы и т.д. в фазовом пространстве.

6. Впервые построена строгая аналитическая модель линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами на основе блочных  $4 \times 4$ -матриц с  $2 \times 2$  блоками на главной диагонали. Матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с постоянными параметрами представлена в виде блочной матрицы с  $2 \times 2$  блоками без перехода в другой базис *в отличие от* существующих преобразований, требующих перехода в новый базис. Это существенно упрощает анализ механических систем, СВЧ и оптических структур на основе анизотропных фотонных кристаллов, позволяет применять к ним математический аппарат, разработанный для систем с одной степенью свободы.

7. *Впервые аналитически* доказано, что изменение порядка чередования интервалов с постоянными параметрами системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами, не изменяющее длительности периода, не влияет на структуру областей неустойчивости решений. Это позволяет провести классификацию систем с двумя степенями свободы в соответствии с данным признаком и существенно сократить число исследуемых механических систем и электромагнитных управляемых структур на основе анизотропных фотонных кристаллов и гиперболических метаматериалов.

8. Развитая модель *впервые применена* в качестве приближенного аналитического метода исследования систем с линейно-изменяющимися параметрами и систем с синусоидально изменяющимися параметрами. Особенностью его использования является то, что расчет поведения динамической системы не требует итерационных процедур.

9. *Впервые* представлены численные решения задач отражения и прохождения волн, а также нахождения запрещенных и разрешенных зон в одномерных изотропных и анизотропных фотонных кристаллах оптического и микроволнового диапазонов с произвольным числом слоев на основе разработанных моделей. Разработано новое устройство терагерцового диапазона – управляемый двухчастотный дуплексный вентиль – на основе управляемых анизотропных материалов.

10. *Впервые* разработан комплекс программ на языке C# для расчета линейных динамических систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами на основе построенных математических моделей.

**Теоретическая значимость работы.** Теоретическая значимость работы определяется представлением новых математических моделей для линейных параметрических систем с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами, а также для линейных консервативных параметрических систем с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами. Для систем с двумя степенями свободы и попарно-обратными собственными числами исходного дифференциального уравнения, описывающего систему, матрица фундаментальных решений сведена к блочной матрице с  $2 \times 2$  блоками на главной диагонали. Получены долгопериодические решения системы с одной степенью свободы. Обнаружено новое свойство, заключающееся в том, что изменение порядка чередования слоев периодической системы, не приводящее к изменению длительности периода, не приводит к изменению структуры областей устойчивых решений. Обнаружено новое физическое свойство, заключающееся в том, что волна, распространяющаяся тангенциально к границе раздела изотропной и анизотропной сред, изменяет направление своего распространения и втягивается в анизотропную среду при наличии поверхностных зарядов или поверхностных токов определенной величины.

**Практическая ценность работы.** Разработанные методы позволяют проводить анализ многослойных электромагнитных и оптических структур

как изотропных, так и анизотропных. В частности, рассчитаны разрешенные и запрещенные области фильтров Брэгга, дисперсионные отношения периодических волноведущих структур с произвольным числом слоев в периоде, коэффициенты отражения и прохождения многослойных изотропных и анизотропных плоско-параллельных структур с произвольным числом слоев, условия генерирования оптических параметрических генераторов. Рассчитан резонатор Фабри-Перо со слоистым заполнением. Эти результаты нашли свое практическое применение в современных оптических коммутационных системах, описанных в работах автора. В квантовой механике результаты могут быть использованы для исследования состояния частиц в периодическом потенциальном поле, то есть для решения одномерного и двумерного уравнения Шредингера. В электротехнике – для расчета условий неустойчивости параметрических генераторов, характеристик параметрических усилителей и цепочечных фильтров. В механике данные методы позволяют рассчитывать периодические структуры, такие как многоквартирные дома, мосты, колебания автомобиля на неровностях дороги, бортовую качку судов. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при изучении дисциплин таких как «Механика», «Оптика», «Электродинамика».

Результаты диссертационной работы использованы на практике в организациях ООО «Терра-Юг» (г.Краснодар), ПАО «Ростелеком» (г.Астрахань), ООО ПКФ «Астрахань-Телеком», ООО «Связьинформ», а также в учебном процессе Астраханского государственного технического университета и Волгоградского государственного технического университета.

**Методы исследований.** Для решения поставленных задач использованы методы построения фундаментальной матрицы решений, методы, разработанные автором, метод Ляпунова исследования условий неустойчивости решений линейных динамических систем. Моделирование проведено с помощью программного пакета Maple и языка C#. Для исследования электромагнитных и оптических структур использовались методы матрицы отражения и прохождения.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Матрица фундаментальных решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка с произвольными кусочно-постоянными коэффициентами, которая позволяет находить аналитические решения в элементарных функциях для параметрических систем любой природы при произвольных кусочно-постоянных параметрах.
2. Эквивалентные колебания линейной однородной динамической системы второго порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами.
3. Теорема об изменении порядка чередования интервалов с постоянными параметрами системы второго порядка с произвольными кусочно-

постоянными параметрами, не изменяющем длительности периода, не влияет на структуру областей неустойчивости решений.

4. Матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами в аналитическом виде в элементарных функциях.

5. Эквивалентные колебания линейной однородной динамической системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами ( $2^N$  групп колебаний по  $2^{N-1}$  колебаний в каждой группе).

6. Матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с постоянными параметрами представлена в виде блочной матрицы с  $2 \times 2$  блоками без перехода в другой базис.

7. Матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с кусочно-постоянными параметрами в аналитическом виде в виде блочной матрицы с  $2 \times 2$  блоками.

8. Теорема об изменении порядка чередования интервалов с постоянными параметрами системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами, не влияющем на структуру областей неустойчивости решений.

9. Численные решения задач отражения и прохождения волн, а также нахождения запрещенных и разрешенных зон в неоднородных изотропных и анизотропных оптических и СВЧ средах с использованием разработанных методов.

10. Комплексы программ на языке C# для расчета линейных динамических систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами с использованием разработанных методов.

**Степень достоверности** научных положений и выводов определяется тем, что все выражения получены путем тождественных преобразований, подтверждается численными расчетами в C#, сравнением с ранее полученными результатами, а также успешным внедрением результатов в различных организациях, о чем имеются соответствующие акты.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международных конференциях: International Conference Mathematical Method in Electromagnetic Theory. (2004, Украина, Днепропетровск); X Conference Complex Media and Metamaterials (2004, Гент, Бельгия); 35th European Microwave Conference (2005, Париж, Франция); XVI International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications (2006, Краков, Польша); Mediterranean Microwave Symposium (2006, Генуя, Италия); NATO ARW&META'08 (2008, Marrakesh, Morocco); 12-th international conference MMET-08 (2008, Одесса, Украина); International Conference MMET-2010 (2010, Украина, Киев); European Microwave Week (2011, Манчестер, Великобритания); The 6th

International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (2012, Санкт-Петербург); META'12, 3rd International Conference on Metamaterials, Photonic crystals and Plasmonics (2012, Париж, Франция); International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwave, Millimeter and Submillimeter Waves (2013, Краков, Польша); International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, ММЕТ (2014, Украина, Днепропетровск); the 8th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics (2017, Корея, Сеул); Актуальные проблемы электронного приборостроения (Саратов, 2014,2016,2018 годы); 21st International Conference, DCCN 2018 (Москва, 2018); IEEE Northwest Russia Conference on Mathematical Methods in Engineering and Technology (Санкт-Петербург, 2018); 12th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena – Metamaterials (Финляндия, Espoo, 2018), International Conference on Metamaterials and Nanophotonics (Сочи, 2018), 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2019 ElConRus) (Санкт-Петербург, 2019), V Международной конференции и молодежной школе (ITNT - 2019) (Самара,2019), 6th International Conference Engineering & Telecommunication – En&T-2019 (Москва, 2019).

Работа выполнена в соответствии с госбюджетной научно-исследовательской работой кафедры «Связь» Астраханского государственного технического университета по теме «Перспективные высокоскоростные инфокоммуникационные системы» №Гос.регистрации 01201450580 (2017-2019 года), научно-исследовательскими и опытно-конструкторскими работами, проводимыми ФГБОУ ВО АГТУ в рамках государственного задания учредителя (Росрыболовство) по теме «Создание банков данных и геоинформационных систем различного назначения с использованием открытой топографической информации для обеспечения потребностей рыболовства» №Гос.регистрации АААА-А18-118012390402-3 (2017г.), «Исследование средств обеспечения поддержки принятия решений в технологических процессах рыбохозяйственной отрасли» №Гос.регистрации АААА-А18-118031990036-5 (2018г), «Технологии инфокоммуникаций и связи нового поколения в рыбохозяйственной отрасли» №Гос.регистрации АААА-А19-119041990053-0 (2019 г.)

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано: 41 печатная работа SCOPUS/Web of Science; 3 статьи – в журналах ВАК; одна монография; получено 3 патента и 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Структура и объем работы.** Диссертация содержит 292 страницы машинописного текста, 70 рисунков, 4 таблицы и состоит из введения, 4 главы, заключения, списка литературы из 273 наименований и приложения на 28 листах.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулированы цель и задачи исследования, представлены основные положения и научные результаты, выносимые на защиту, дана характеристика их новизны, достоверности и практической значимости.

**В первой главе** был проведен анализ существующего состояния исследований в области динамических систем с одной и двумя степенями свободы,

**Во второй главе** рассматривается линейная однородная динамическая система с одной степенью свободы, описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} - \omega^2(t)U(t) = 0 \quad (1)$$

и произвольными кусочно-постоянными как периодическими, так и непериодическими параметрами, изменяющимися в любой момент времени на произвольную величину.

Такие системы могут иметь любую природу (Рис.1). Механическим примерами может быть математический маятник в периодическом поле (электрическом, магнитном, гравитационном).

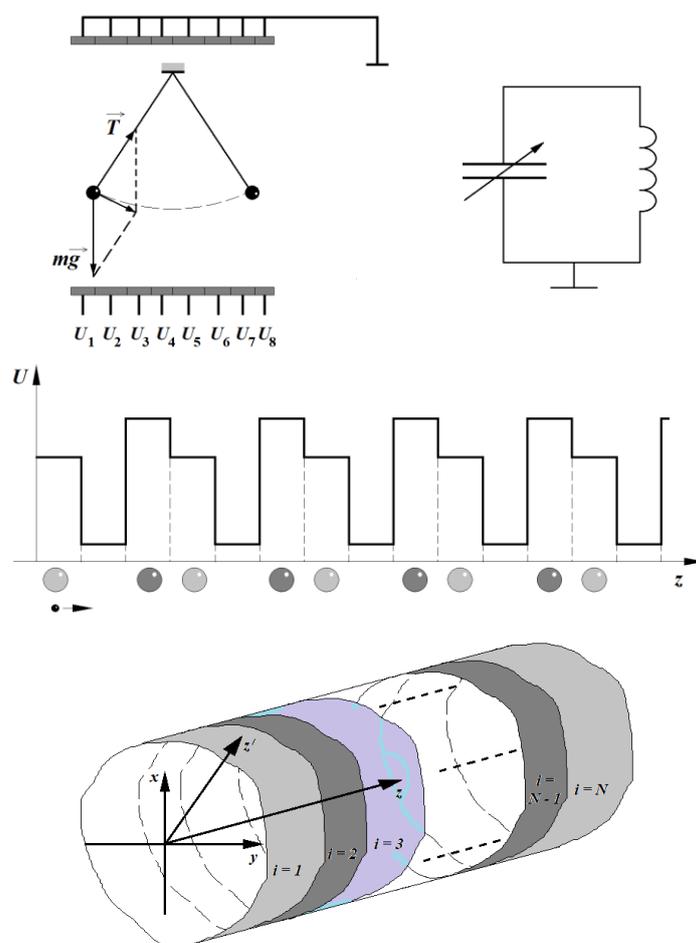


Рис.1. Примеры динамических систем с одной степенью свободы

На практике – это, например, вращающийся вал с вибрирующими опорами, водонапорная вышка, трубопровод на периодических опорах, мост на периодически установленных сваях или спутник Земли. Динамическая система электрической природы – это, например, электрический колебательный контур с переменными параметрами, параметрический одноконтурный генератор. Волновым аналогом такой системы служит плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в слоистой изотропной среде. Наиболее известными примерами такой структуры являются периодический волновод или фильтр Брэгга. Очень широко на сегодняшний день применяются и оптические параметрические усилители. В квантовой механике данная модель описывает поведение частицы в одномерной многоатомной кристаллической решетке.

Для таких систем впервые найдена матрица фундаментальных решений в аналитическом виде в элементарных функциях. Причем, решение впервые представлено в виде конечной суммы  $2^{N-1}$  унимодулярных гиперболических  $2 \times 2$ -матриц с определенными коэффициентами

$$\mathbf{L}(T) = \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \xi_p \mathbf{L}_q \quad (2)$$

На основе этого введены понятия эквивалентного колебания системы, описываемого матрицей  $\mathbf{L}_q$  и коэффициента вклада  $\xi_p$  этого эквивалентного колебания в результирующее. Здесь  $N$  – количество интервалов с постоянными параметрами.

Важно отметить, что полученное разложение не является ни Фурье преобразованием, ни вейвлет-разложением, ни дискретным косинусным разложением.

Показано аналитически, что закон изменения знаков собственных мод в эквивалентном колебании системы является двоичным. Для учета этого закона введена новая знаковая функция

$$f_{q,i} = \text{sign} \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{2^{N+1-i}} (2q - 1) \right] \right\} \quad (3)$$

Функция (3) учитывает фазы взаимодействующих мод при формировании эквивалентных мод системы.

Также рассмотрена система с произвольными периодическими кусочно-постоянными параметрами. Для такой системы впервые записано условие устойчивости решений в аналитическом виде в элементарных функциях

$$\left[ \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=i+1}^N \left[ 2 + \left( \frac{p_m f_{q,m}}{p_i f_{q,i}} + \frac{p_i f_{q,i}}{p_m f_{q,m}} \right) \right] \right\} \right] \times$$

$$\times \cos \left[ \sum_{i=1}^N (\varphi_i f_{q,i}) \right] = 2 \quad (4)$$

$p_i, p_m$  - собственные числа системы на  $i$ -м и  $m$ -м интервалах с постоянными параметрами.

Кроме определения условий существования устойчивых решений, выражение (4) имеет важное значение для теории динамических систем. Прежде всего, анализ (4) позволил впервые доказать теорему о изменении порядка чередования интервалов:

**Теорема.** *Изменение порядка чередования интервалов с постоянными параметрами в периоде, не изменяющее длительности периода, не приводит к изменению условий возникновения неустойчивости решений дифференциального уравнения (1) с периодическими кусочно-постоянными коэффициентами.*

Обобщая данный результат на случай системы с произвольными периодическими параметрами, доказана теорема об инвариантности систем.

**Теорема.** *Любые линейные однородные системы с произвольными периодическими кусочно-непрерывными коэффициентами имеют одну и ту же структуру областей неустойчивости решений, если их периоды равны и интегралы от коэффициентов исходных уравнений вида (1) по периоду равны:*

$$\int_0^T \omega_1(t) dt = \int_0^T \omega_2(t) dt = \dots = \int_0^T \omega_M(t) dt \quad (5)$$

где  $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_M(t)$  – коэффициенты (1) для этих систем.

На основе выражения (4) также получены условия существования долгопериодических решений, кратных периоду структуры и доказана теорема:

**Теорема.** *Решение уравнения (1) с произвольными периодическими кусочно-постоянными коэффициентами является периодическим с периодом кратным периоду изменения коэффициентов при выполнении условия*

$$\left[ \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=i+1}^N \left[ 2 + \left( \frac{p_m f_{q,m}}{p_i f_{q,i}} + \frac{p_i f_{q,i}}{p_m f_{q,m}} \right) \right] \right\} \right] \times$$

$$\times \cos \left[ \sum_{i=1}^N (n \varphi_i f_{q,i}) \right] = 2 \quad (6)$$

где  $n = T_{\text{решения}}/T$  – кратность решения,  $T_{\text{решения}}$  – период решения,  $T$  – период изменения коэффициентов.

Если левая часть (6) равна двум, то период колебания равен  $nT_{\text{решения}}$ , если левая часть (6) равна минус двум, то период колебания равен  $2nT_{\text{решения}}$ .

Полученные результаты применены к численному моделированию динамических систем. Прежде всего, исследованы, впервые введенные эквивалентные колебания для динамической системы, описываемой (1) с тремя равными интервалами с постоянными параметрами  $\omega_1 = 1 + \pi/3$ ,  $\omega_2 = 1 + 2\pi/3$ ,  $\omega_3 = 1 + 3\pi/3$ , на периоде  $2\pi$ . На Рис.2. представлены результаты расчетов этих колебаний.

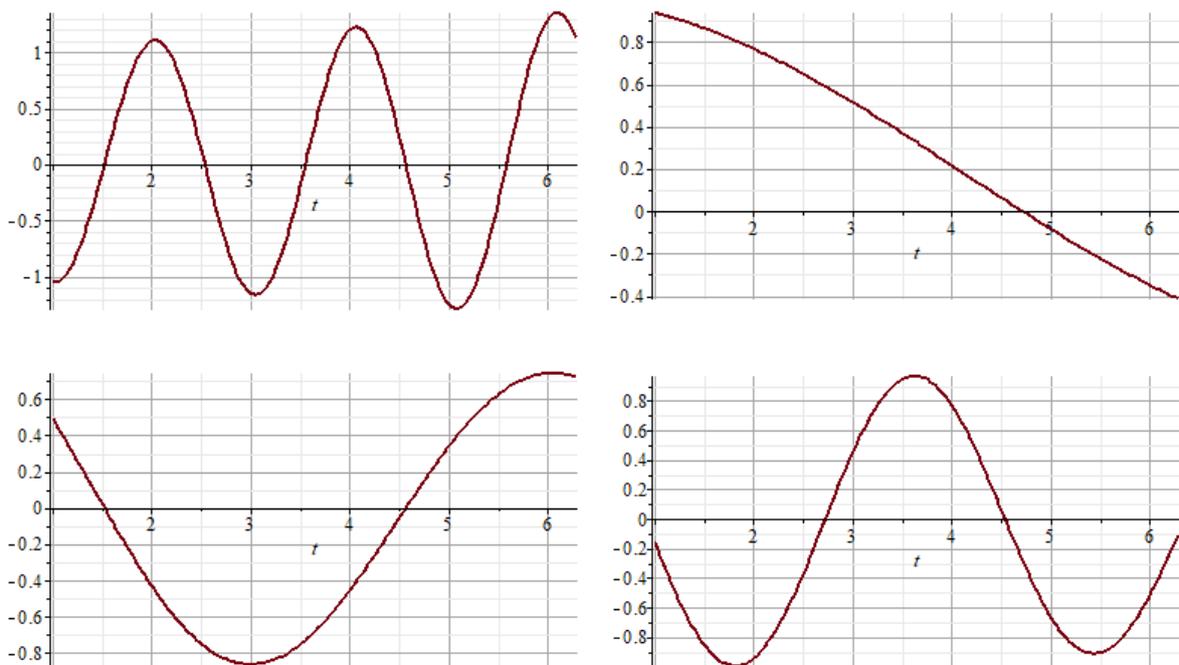


Рис.2. Эквивалентные колебания системы с тремя интервалами с постоянными параметрами

Результирующее колебание этой системы, найденное предложенным методом с учетом коэффициентов вклада, представлено на Рис.3. Из Рис.3 видно, что система является устойчивой, поскольку колебание затухает на одном периоде. Спектр результирующего колебания при разложении в ряд по эквивалентным колебаниям представлен на Рис.4. Рис.4а соответствует амплитудно-частотной характеристике, Рис.4б – фазо-частотной характеристике. Результаты расчетов показывают, что при оценке результатов, полученных данным методом, невозможно пренебрегать отдельными спектральными составляющими, аналогично разложению

Фурье, поскольку все амплитуды спектральных составляющих являются величинами одного порядка.

В этом разделе метод также применен для динамических систем с непрерывно изменяющимися параметрами. В частности, для системы, коэффициент которой в (1) изменяется по закону

$$\omega(t) = 1 + \sin t \quad (7)$$

на интервале  $t \in [0; 2\pi]$ . Это так называемое уравнение Матье. Для данного случая рассчитано результирующее колебание при разбиении исходного интервала на различное число интервалов с постоянными параметрами. На Рис.5 представлены результаты расчетов для одиннадцати, тринадцати, пятнадцати и шестнадцати интервалов с постоянными параметрами. Результаты расчетов показывают, что в данной задаче достаточно представить синусоидальную зависимость на интервале  $t \in [0; 2\pi]$  в виде ступенчатой функции с пятнадцатью ступеньками. Погрешность расчетов в данном случае не превышает 5%. Дальнейшее разбиение не приведет к увеличению точности решения, но существенно усложнит задачу. Действительно, при пятнадцати интервалах количество эквивалентных мод равно  $2^{14}$ , а при шестнадцати уже  $2^{15}$ .

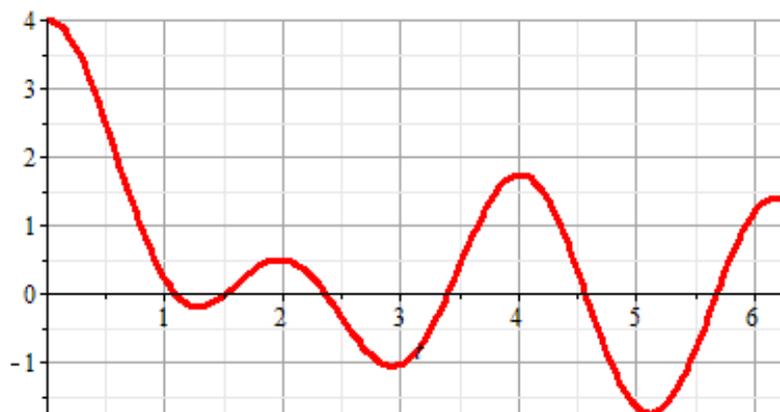


Рис.3. Результирующее колебание

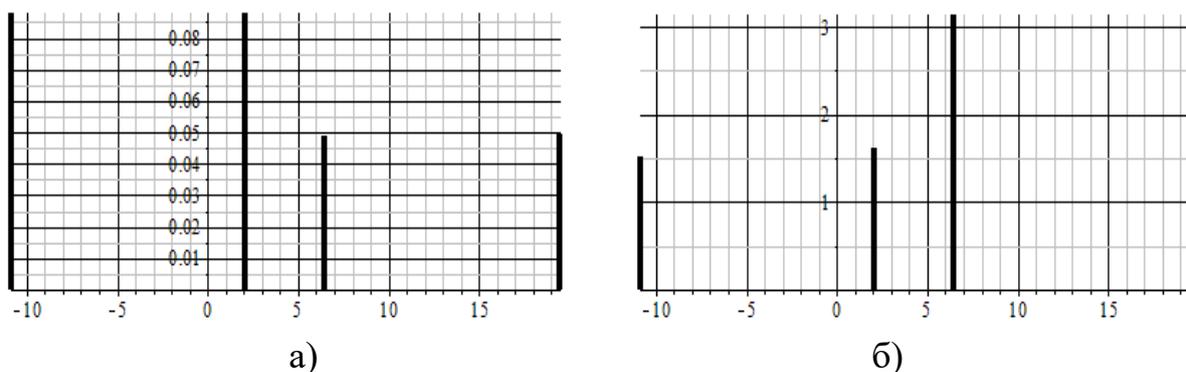


Рис.4. Спектр колебания

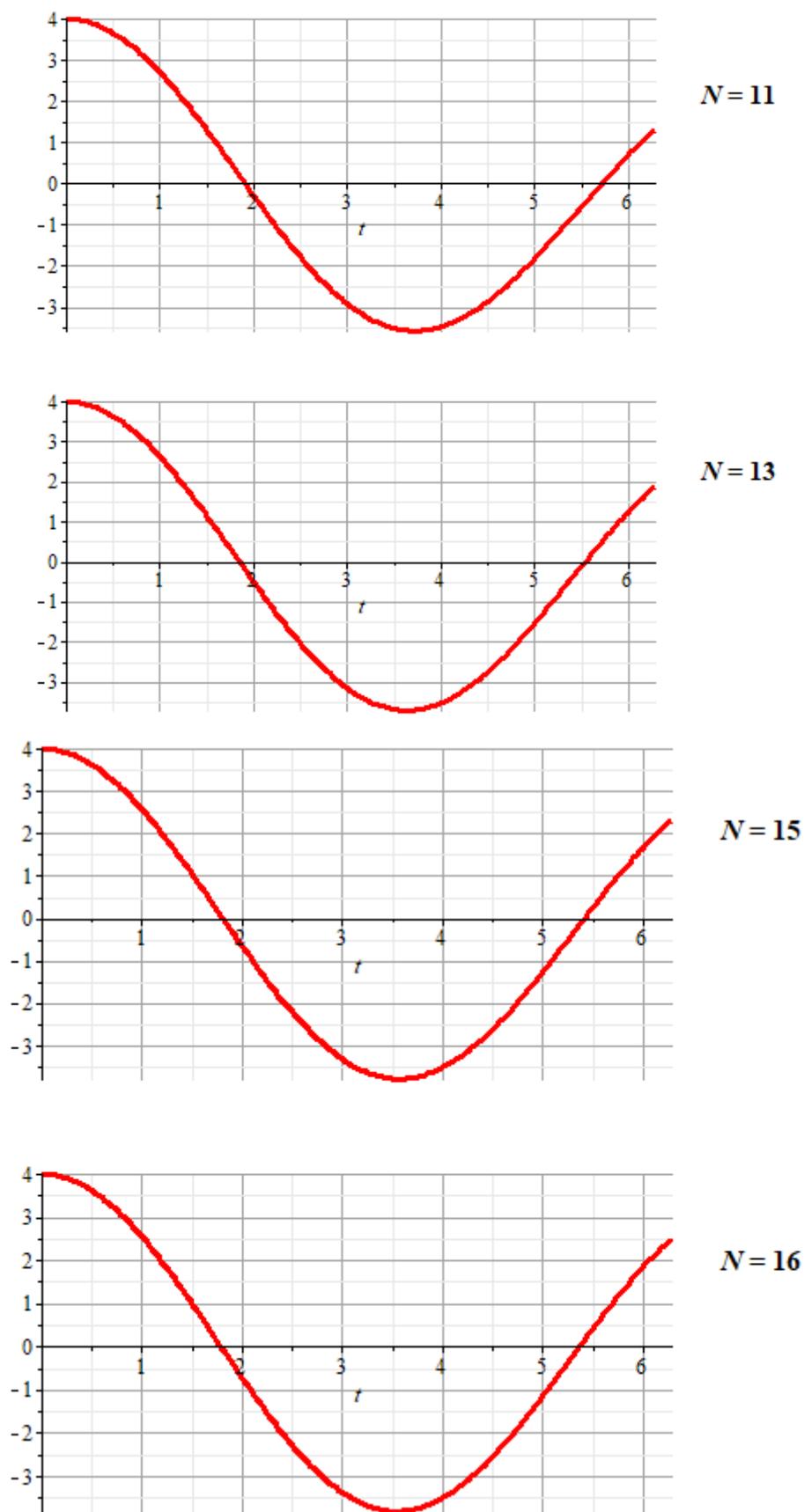


Рис.5. Вид колебания системы, описываемой уравнением Маттье  
 Аналогичные расчеты были проведены и для системы с линейно  
 изменяющимися параметрами. Показано, что количество интервалов

дискретизации зависит от наклона характеристики и лежит в пределах от тринадцати до шестнадцати.

Метод также позволяет проводить анализ устойчивости решений системы с большим числом интервалов в периоде.

На Рис.6 представлены результаты расчета для шестислойной структуры с  $p_1 = 1.1$ ,  $t_1 = 1$ ,  $p_3 = 0.3$ ,  $t_3 = 1$ ,  $p_4 = 1.4$ ,  $t_4 = 1$ ,  $p_5 = 2.1$ ,  $t_5 = 1$ ,  $p_6 = 1.9$ ,  $t_6 = 1$ . Темные области соответствуют областям неустойчивости решений системы.

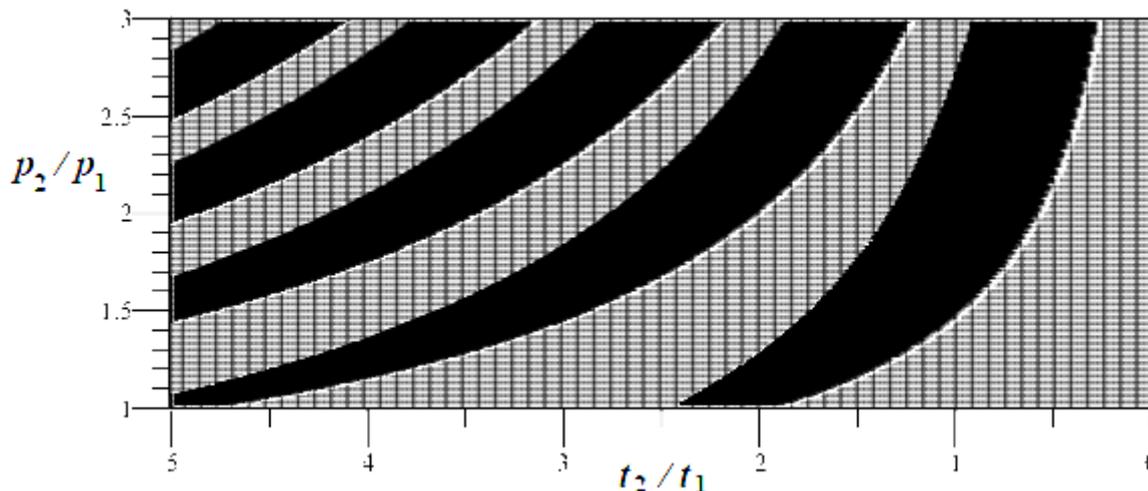


Рис.6. Диаграмма устойчивости периодической системы с шестью интервалами в периоде

Разработанный метод имеет важное значение для расчета и анализа оптических и СВЧ многослойных структур. Он, в частности, позволяет рассчитывать разрешенные и запрещенные зоны фотонных кристаллов и построенных на их основе фильтров Брэгга. Действительно, эти области являются следствием явления многократного переотражения в периодической структуре и соответствуют областям устойчивых и неустойчивых решений, соответственно. При определенных параметрах структуры, когда многократно переотраженные волны складываются в фазе, возникают разрешенные области, когда они складываются в противофазе – запрещенные зоны. При этом, диаграмма разрешенных и запрещенных областей полностью совпадает с диаграммой устойчивости решений, например, Рис.6.

Не менее важной задачей, решаемой данным методом, является задача отражения и прохождения волны в неоднородной, в частности слоистой, изотропной среде. На Рис.7 представлена геометрия задачи. Здесь  $E_{над}$ ,  $H_{над}$  – компоненты падающей линейно поляризованной волны,  $E_{отр}$ ,  $H_{отр}$  – компоненты отраженной линейно поляризованной волны,  $E_{пр}$ ,  $H_{пр}$  – компоненты прошедшей линейно поляризованной волны,  $k$  – волновой вектор в свободном пространстве.

Результаты численных расчетов для такой структуры представлены на Рис.8. Структура включает в себя четыре изотропных диэлектрических

слоя с параметрами первого слоя  $\varepsilon_1 = 1.4$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $d_1 = 50$ мкм, второго слоя,  $\varepsilon_2 = 10.82y$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $d_2 = 100$ мкм, третьего слоя  $\varepsilon_3 = 1.61$ ,  $\mu_3 = 1$ ,  $d_3 = 10$ мкм, четвертого слоя  $\varepsilon_4 = 18.7$ ,  $\mu_4 = 1$ ,  $d_4 = 50$ мкм. Расчеты проведены для угла падения  $15^\circ$ . На графике явно видны полосы пропускания и непропускания структуры, что может найти практическое применение при проектировании конкретных оптических устройств.

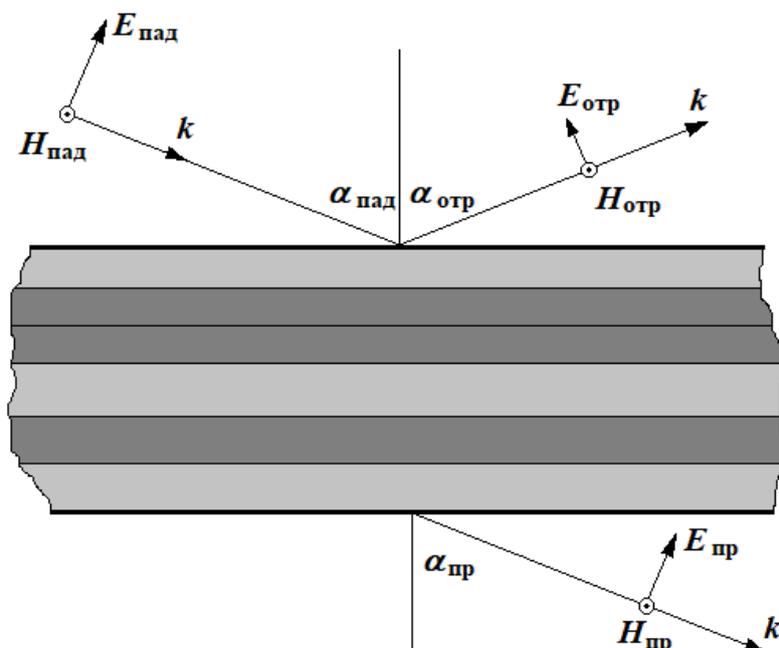


Рис.7. Многослойная диэлектрическая структура

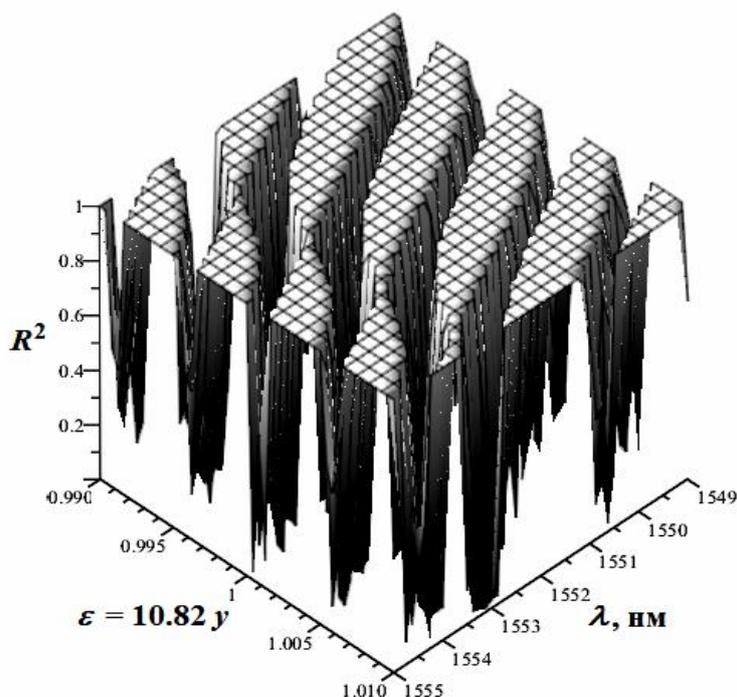


Рис.8. Зависимость коэффициента отражения от длины волны и диэлектрической проницаемости второго слоя

Таким образом, в данном разделе построена аналитическая модель параметрической системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами и применена к задаче нахождения разрешенных и запрещенных областей одномерного фотонного кристалла с произвольным числом однородных элементов в структуре, а также задаче отражения от многослойной планарной структуры с произвольным числом слоев.

**В третьей главе** рассматривается линейная динамическая система с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами, изменяющимися скачком в любой момент времени на любую величину. Поведение системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_1}{dt^2} + \omega_1^2(t)[1 - \alpha_1(t)]U_1 + \omega_1^2 \alpha_1(t)U_2 &= 0 \\ \frac{d^2 U_2}{dt^2} + \omega_2^2(t)[1 - \alpha_2(t)]U_2 + \omega_2^2 \alpha_2(t)U_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

с произвольными кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \omega_k(t) &= \begin{cases} \omega_{k,1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ \omega_{k,2} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \dots & \dots \\ \omega_{k,N} & t_{N-1} \leq t \leq (T = t_N) \end{cases} \\ \alpha_k(t) &= \begin{cases} \alpha_{k,1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ \alpha_{k,2} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{k,N} & t_{N-1} \leq t \leq (T = t_N) \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (8) с коэффициентами (9) описывает поведение двух связанных механических осцилляторов, которые являются аналогом колебания автомобиля на амортизаторах на неровной дороге, бортовой качку корабля в двух степенях свободы, работы параметрического усилителя или генератора, поведения элементарной частицы в периодическом потенциальном поле в двумерной системе, поведения акустической волны в неоднородной среде и т.д. В СВЧ и оптике аналогом такой системы является поведение электромагнитной волны в анизотропном одномерном фотонном кристалле. Такие структуры позволяют строить управляемые устройства для современных систем связи и обработки информации в рамках программы перехода к цифровой экономике. Некоторые примеры механических и электрических систем с двумя степенями свободы и кусочно-постоянными параметрами представлены на Рис.9 и Рис.10.

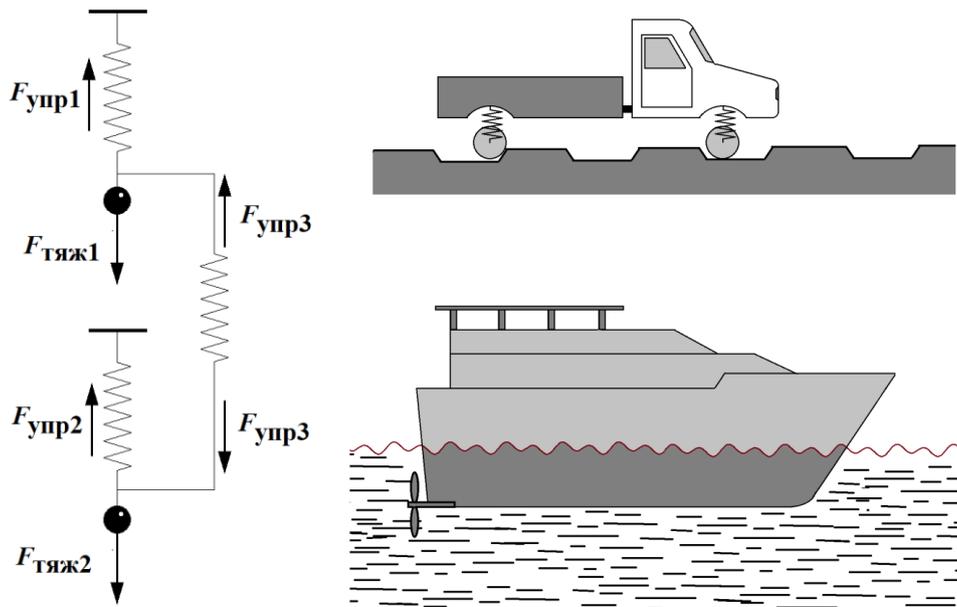


Рис.9. Система связанных осцилляторов

Для данной системы впервые найдена матрица фундаментальных решений в аналитическом виде в элементарных функциях:

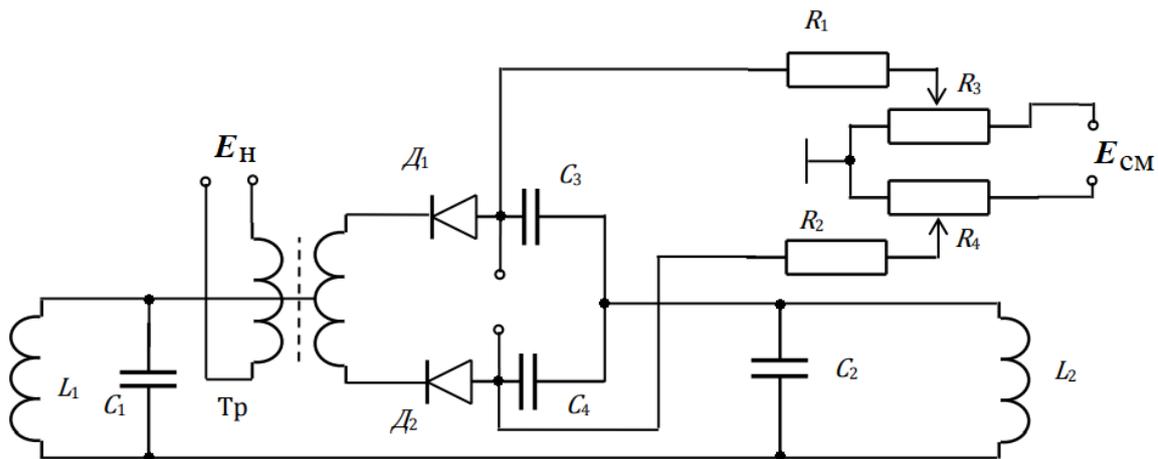


Рис.10. Пример схемы параметрического генератора со связанными контурами

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(T) = & \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{p=1}^{2^N} (-1)^{\sum_{i=1}^N (\sum_{k_i=2^{i-1}}^{2^i} k_i F_{p,i})} \times \\
 & \times \xi_p \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \varsigma_{pq} \mathbf{L}_{pq}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для нахождения общего вида матрицы введена новая знаковая функция

$$F_{p,i} = \frac{1}{2} \langle 1 + (-1)^{k_i+1} \text{sign} \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{2^{N+1-i}} (2q - 1) \right] \right\} \rangle \tag{11}$$

дополнительно к функции (3). Данная функция учитывает порядок взаимодействия собственных мод интервалов с постоянными параметрами в результирующем колебании, таким образом, чтобы собственные моды одного интервала не взаимодействовали между собой.

В соответствии с видом (10) она представляет собой конечный ряд гиперболических матриц, которые разделяются на  $2^N$  группы по  $2^{N-1}$  унимодулярной матрицы в каждой группе. На основании этого введены понятия эквивалентных колебаний системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами, групп эквивалентных колебаний этой системы и соответствующих коэффициентов вклада эквивалентных мод  $\zeta_{pq}$  и групп  $\xi_p$ . Также введены понятия характеристических показателей эквивалентных мод  $\alpha_{pq}$  и групп эквивалентных мод  $\alpha_p$ , позволяющие представить результирующее колебание, как суперпозицию гармонических колебаний

$$\mathbf{U}(T) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{p=1}^{2^N} (-1)^{\sum_{i=1}^N (\sum_{k_i=2^{i-1}}^{2^i} k_i F_{p,i})} \times \\ \times \exp(\alpha_p) \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \exp(\alpha_{pq}) \mathbf{U}_{pq} \quad (12)$$

Проведены численные расчеты динамической системы с тремя интервалами с постоянными параметрами. Здесь  $\omega_{1i} = 0.051 + 0.01 \cdot i$ ,  $\omega_{2i} = 0.1 + 0.51 \cdot i$ ,  $\alpha_{1i} = -0.000091 \cdot i$ ,  $\alpha_{2i} = 0.0000095 \cdot i$ ,  $t_i = 2\pi/3$ ,  $T = 2\pi$ ,  $i$  - номер интервала с постоянными параметрами. Результаты представлены в Таблице 1 и Таблице 2.

Таблица 1. Коэффициенты вклада эквивалентных мод

$q$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$
1	2.480	37.222	5.250	35.643	0.563	8.454	0.635	4.314
2	-0.6360	-35.635	$j4.884$	-15.349	-0.145	-8.094	$j0.591$	-1.858
3	0.175	9.807	$j4.624$	14.535	$j0.129$	$j7.201$	$j0.321$	1.009
4	-0.683	-10.244	-4.972	-33.752	$j0.501$	$j7.522$	-0.345	-2.342

Таблица 2. Коэффициенты вклада групп эквивалентных мод

$p$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi_p$	0.5503	$j0.8414$	0.3829	$j0.5855$	0.5503	$j0.8414$	0.3829	$j0.5855$

Здесь мнимые значения коэффициентов вклада означают дополнительный сдвиг фаз соответствующего колебания на  $\pi/2$ . Кроме того, из Таблицы 2 видно, что коэффициенты вклада групп являются одинаковыми для первой и пятой, второй и шестой, третьей и седьмой, четвертой и восьмой групп,

соответственно. Обобщая данный результат, получим, что коэффициенты вклада  $2^i$  и  $2^{i-1} + 1$  групп эквивалентных мод всегда равны.

Для этой системы также численно рассчитаны и представлены на Рис.11 зависимости эквивалентных колебаний от времени.

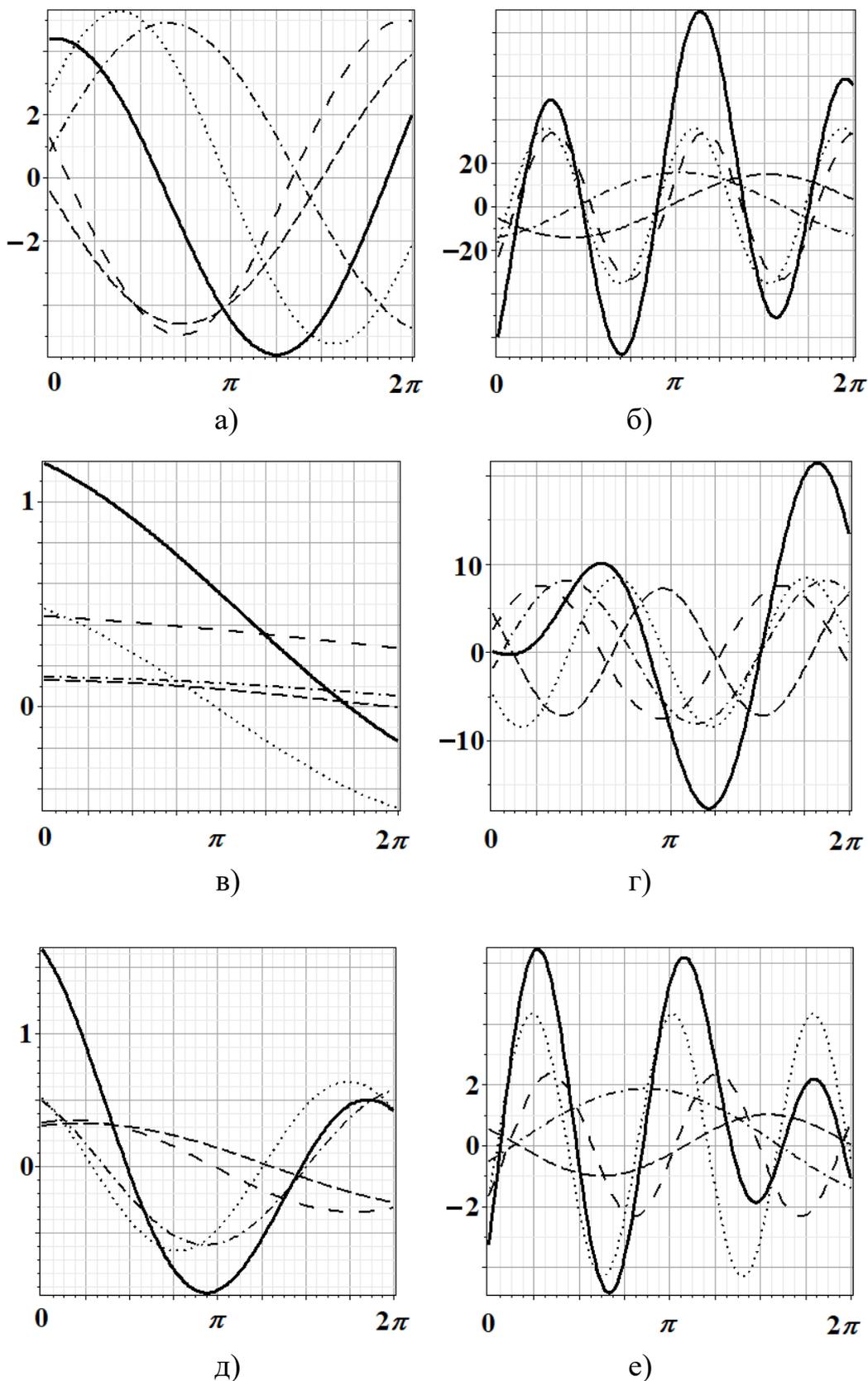


Рис.11. Эквивалентные моды системы

Также получены и проанализированы условия устойчивости системы. Аналитически они имеют вид:

$$\begin{cases} \left| C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4(C_2 - 2)} \right| \leq 4 \\ \left| C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4(C_2 - 2)} \right| \leq 4 \end{cases} \quad (13)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad (14)$$

матрицы фундаментальных решений системы. Более того, на основании теоремы Остроградского-Лиувилля показано, что данное уравнение является возвратным ( $C_3 = C_1$ ,  $C_0 = 1$ ), поскольку след матрицы коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений равен нулю. Выражение (13) также записано в терминах матрицы фундаментальных решений:

$$\begin{cases} \left| -\sum_{i=1}^4 l_{ii} + \sqrt{8 + \left(\sum_{i=1}^4 l_{ii}\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (l_{ii}l_{jj} - l_{ij}l_{ji})} \right| \leq 4 \\ \left| -\sum_{i=1}^4 l_{ii} - \sqrt{8 + \left(\sum_{i=1}^4 l_{ii}\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (l_{ii}l_{jj} - l_{ij}l_{ji})} \right| \leq 4 \end{cases} \quad (15)$$

Результаты анализа условий устойчивости (13) представлены на Рис.12.

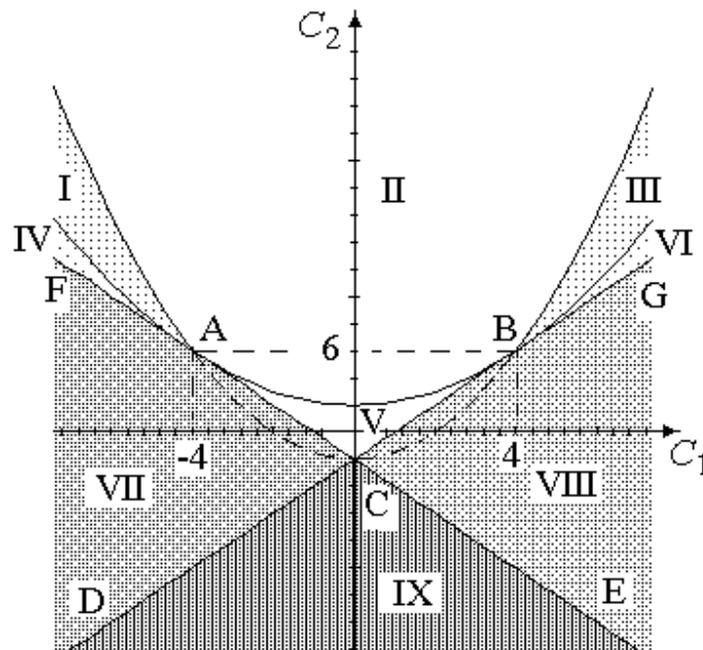


Рис.12. К анализу условий устойчивости

В областях I и III мультипликаторы системы комплексные и два из них по модулю больше единицы. В системе наблюдается параметрический резонанс, причем существует сдвиг фаз за период. Система неустойчива.

В областях IV, VI и IX все мультипликаторы действительные, два из них по модулю больше единицы. В этих областях резонанс наблюдается для обеих собственных мод, сдвиг фаз за период отсутствует. Система неустойчива.

В областях I и III мультипликаторы системы комплексные и два из них по модулю больше единицы. В системе наблюдается параметрический резонанс, причем существует сдвиг фаз за период. Система неустойчива.

В областях IV, VI и IX все мультипликаторы действительные, два из них по модулю больше единицы. В этих областях резонанс наблюдается для обеих собственных мод, сдвиг фаз за период отсутствует. Система неустойчива.

В областях VII VIII один из мультипликаторов по модулю больше единицы. Для одной моды наблюдается резонанс, в другой устойчивые колебания. Система неустойчива.

В области II мультипликаторы системы попарно комплексно-сопряженные по модулю равны единице. Система орбитно устойчива.

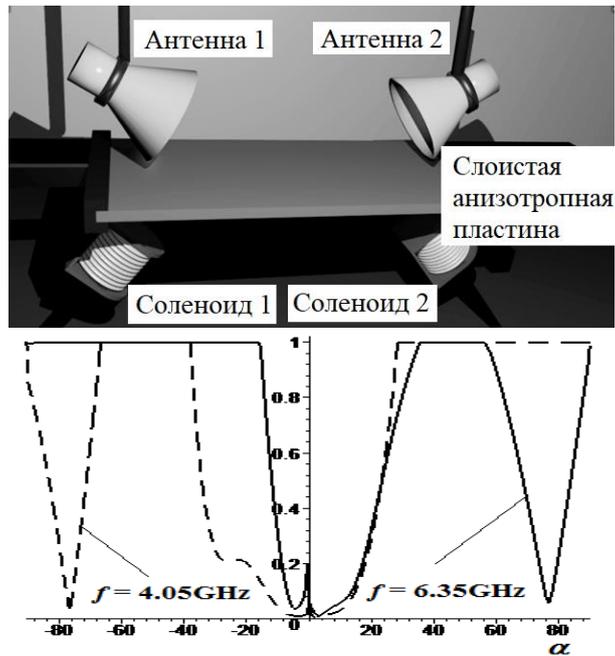
В области V мультипликаторы мнимые попарно сопряженные по модулю равны единицы. Система орбитно устойчива.

Точка А соответствует параметрам системы при которых колебания обеих мод в ней периодические с периодом  $2\Lambda$ .

Точка В соответствует параметрам системы, при которых колебания обеих собственных мод в ней периодические с периодом  $\Lambda$ .

Точка С соответствует параметрам системы, при которых колебания в ней периодические, причем для одной собственной моды период равен  $\Lambda$ , а для другой –  $2\Lambda$ .

Разработанная модель применена к расчету двухчастотного дуплексного вентиля терагерцового диапазона, построенного на основе одномерного фотонного кристалла из феррита с произвольным углом наклона оси анизотропии (Рис.13а). Данный вентиль при включенном соленоиде 1 пропускает сигнал от антенны 1 с антенне 2 на частоте 4.05ГГц и не пропускает сигнал в обратном направлении. А на частоте 6.35ГГц устройство пропускает сигнал от антенны 2 к антенне 1 и не пропускает его в обратном направлении. Амплитудно-частотная характеристика вентиля представлена на Рис.13б. При включенном соленоиде 2 направления прохождения сигнала на соответствующих частотах меняются на противоположное.



а) б)

Рис.13. Дуплексный двухчастотный вентиль а) геометрия задачи, б) амплитудно-частотная характеристика вентиля

Таким образом, в третьей главе построена аналитическая модель линейной системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами. Проведены численные расчеты эквивалентных колебаний системы, введенных в данном разделе. Результаты применены к расчету дуплексного двухчастотного вентиля на основе анизотропного фотонного кристалла.

**В четвертой главе** рассматривается однородная параметрическая система с двумя степенями свободы, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_1}{\partial t} &= a_{11}(t)V_1 + a_{12}(t)V_2 \\
 \frac{\partial U_2}{\partial t} &= a_{21}(t)V_1 + a_{22}(t)V_2 \\
 \frac{\partial V_1}{\partial t} &= b_{11}(t)U_1 + b_{12}(t)U_2 \\
 \frac{\partial V_2}{\partial t} &= b_{21}(t)U_1 + b_{22}(t)U_2
 \end{aligned} \tag{16}$$

где коэффициенты уравнения (16) в общем случае являются комплексными кусочно-постоянными функциями независимой переменной  $t$ :

$$a_{kl}(t) = \begin{cases} a_{kl}^{(1)} & 0 \leq t \leq t_1 \\ a_{kl}^{(2)} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \dots & \dots \\ a_{kl}^{(N)} & t_{i-1} \leq t \leq t_N \end{cases} \quad b_{kl}(t) = \begin{cases} b_{kl}^{(1)} & 0 \leq t \leq t_1 \\ b_{kl}^{(2)} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \dots & \dots \\ b_{kl}^{(N)} & t_{i-1} \leq t \leq t_N \end{cases} \tag{17}$$

Здесь  $i$  – номер интервала с постоянными параметрами системы,  $N$  – количество интервалов с постоянными параметрами. В данной задаче каждый из параметров может скачком изменяться на любую величину при любом значении независимой переменной  $t$ .

Система (16) описывает целый класс задач в классической и квантовой механике, теории электромагнитных волн, социологии, биологии, экономике и т.д. При этом, в большинстве случаев решение системы (16) с коэффициентами (17) находят при условии непрерывности функций и их первых производных на границах интервалов с постоянными параметрами. Однако, в целом ряде прикладных задач на границах интервалов с постоянными параметрами требуется удовлетворение условий непрерывности не для функций  $U$  и  $V$  в (16) и их первых производных, а для этих функций и величин, пропорциональных их первым производным  $h_1(z)(\partial U/\partial z)$ ,  $h_2(z)(\partial V/\partial z)$ , каждая из которых имеет конкретный физический смысл. Это, например, компоненты электромагнитного поля в электродинамике и оптике. При этом, фундаментальная матрица системы уравнений (16) на  $i$ -м интервале с постоянными параметрами представляет собой  $4 \times 4$ -матрицу, а колебания в двух степенях свободы являются связанными. Основным требованием к рассматриваемым системам является тот факт, что на каждом интервале с постоянными параметрами характеристическое уравнение исходных дифференциальных уравнений (16) должно быть биквадратным. В этом случае выделяются два собственных колебания рассматриваемой динамической системы.

Здесь предлагается преобразование  $4 \times 4$ -матрицы фундаментальных решений интервала с постоянными параметрами к блочной диагональной матрице с  $2 \times 2$ -блоками:

$$\mathbf{L}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_i(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i(z) \end{vmatrix} \quad (18)$$

При этом аналитически доказана следующая теорема:

**Теорема 4.1.** *Если исходная система линейных однородных дифференциальных уравнений четвертого порядка имеет попарно обратные характеристические числа, то матрица фундаментальных решений этой системы может быть представлена в виде  $4 \times 4$  блочной матрицы с  $2 \times 2$  блоками.*

Далее найдена матрица фундаментальных решений в аналитическом виде в элементарных функциях и доказана теорема:

**Теорема 4.2.** *Матрица фундаментальных решений линейной однородной системы с кусочно-постоянными параметрами может быть представлена в виде суммы  $2^N$  унимодулярных  $4 \times 4$  блочных диагональных матриц с  $2 \times 2$  блоками и определенными коэффициентами вклада*

$$\mathbf{L}(T) = \sum_{q=1}^{2^N} \mathbf{L}_q = \sum_{q=1}^{2^N} \begin{vmatrix} \vartheta_q \mathbf{M}_q & 0 \\ 0 & v_q \mathbf{L}_q \end{vmatrix} \quad (19)$$

Поскольку фундаментальная матрица данной системы представлена в виде блочной матрицы с  $2 \times 2$ -блоками, было выдвинуто предположение и доказана теорема об изменении порядка чередования слоев в периоде.

**Теорема 4.3.** *Условия возникновения областей неустойчивости линейной однородной системы четвертого порядка с кусочно-постоянными периодическими коэффициентами не зависят от порядка чередования интервалов с постоянными параметрами в периоде, если период в результате перестановки интервалов остается неизменным.*

Результаты данного раздела применены к анализу ферритовой слоистой периодической среды, описываемой скалярной диэлектрической проницаемостью и тензором магнитной проницаемости в виде

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & j\mu_{xy} & 0 \\ -j\mu_{xy} & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix} \quad (20)$$

В данном случае представление фундаментальной матрицы в виде блочной матрицы означает разделение результирующей волны эллиптической поляризации на волны ТЕ- и ТМ-поляризации в слоистой ферритовой среде. Численные расчеты проведены для ТЕ-волны в одномерной бесконечной периодической ферритовой среде с двумя слоями в периоде. При этом, частота волны 4 ГГц, угол падения  $50^\circ$ , параметры первого слоя  $\mu_{xx} = 2.2$ ,  $\mu_{xy} = 0.5$ ,  $\mu_{zz} = 0.999$ , второго слоя  $\mu_{xx} = 3.5$ ,  $\mu_{xy} = 1.7$ ,  $\mu_{zz} = 0.999$ ,  $d = 0.01$  м. Из Рис.14 видно, что собственные числа ТЕ-волны являются взаимнообратными.

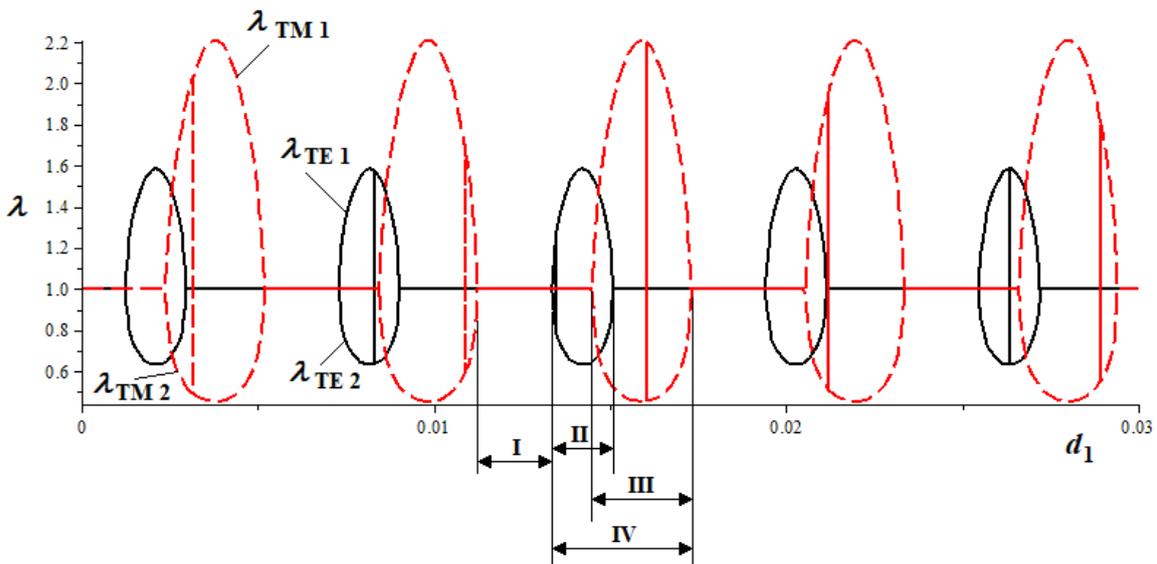


Рис. 14. Зависимость модулей собственных чисел бесконечной периодической среды от толщины первого слоя

Области, в которых собственные числа по модулю не равны единице, соответствуют запрещенным зонам, т.е. областям непрохождения волны, области в которых собственные числа равны единице соответствуют разрешенным областям.

В данном подразделе на примере электромагнитной системы также показано, что определитель матрицы фундаментальных решений является энергетической характеристикой динамической системы.

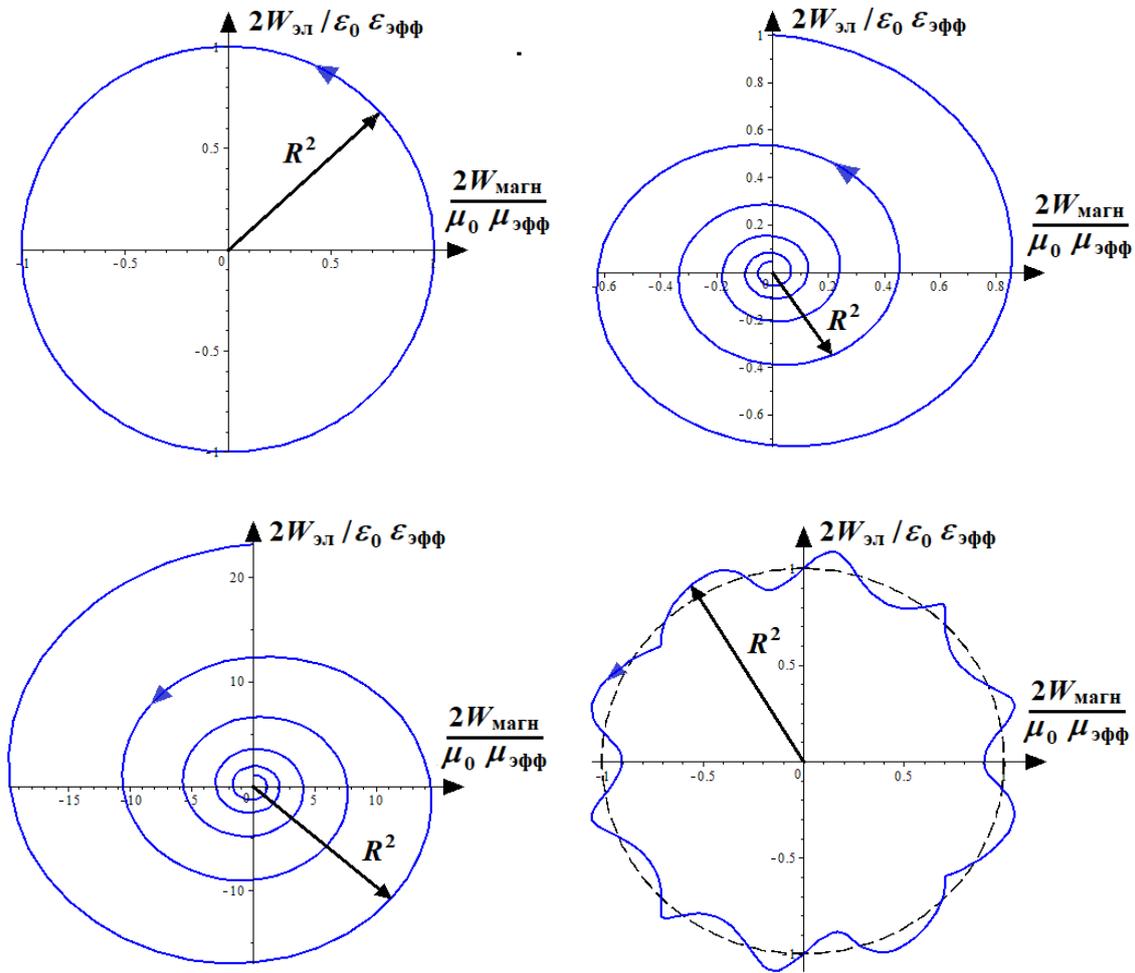


Рис.15. Иллюстрация энергетических свойства определителя матрицы фундаментальных решений

Так для ТЕ-волны если определитель матрицы  $\mathbf{M}(z)$  равен единице, то суммарная энергия системы неизменна (Рис.15а). Если определитель  $\mathbf{M}(z)$  больше единицы, то энергия системы нарастает за счет внешних источников (Рис.15б), если определитель  $\mathbf{M}(z)$  меньше единицы, то в системе существуют потери (Рис.15в). Если определитель  $\mathbf{M}(z)$  является комплексной единицей, то происходит периодическая перекачка энергии от среды к волне и обратно (Рис.15г).

Также проведены численные расчеты для трехслойной структуры и проверено путем численных расчетов свойство, состоящее в том, что изменение порядка чередования слоев не влияет на структуру

запрещенных и разрешенных волн. Физически это свойство объясняется явлением многократного переотражения в слоистой ферритовой среде.

Математическая модель, разработанная в данном разделе, применена к расчету поведения волны в многослойной анизотропной среде при эффекте втягивания, открытом автором. Эффект заключается в изменении направления распространения волны, скользящей над поверхностью раздела изотропной и анизотропной сред, при наличии на границе поверхностных зарядов или токов определенной величины. В рассматриваемом случае параметры среды для первого слоя периода  $\varepsilon_{11} = 9.5$ ,  $\varepsilon_{22} = 4.71$ ,  $\varepsilon_{33} = 1.1$ ,  $d_1 = 11 \cdot 10^{-6}$  м, для второго слоя  $\varepsilon_{11} = 12.5$ ,  $\varepsilon_{22} = 7.71$ ,  $\varepsilon_{33} = 1.11$ ,  $d_1 = 12 \cdot 10^{-6}$  м, угол наклона оси анизотропии равен  $30^\circ$ . На Рис.16 представлена зависимость собственных чисел от частоты. Результаты численных расчетов показывают, что области непрохождения волны в такой структуре в оптическом диапазоне очень узкие. Их ширина порядка  $\Delta f = 4.3 \cdot 10^9$  Гц. Очевидно, что такая структура может быть использована для создания оптических фильтров.

Зависимость модуля коэффициентов отражения от частоты двухслойной структуры с параметрами, указанными выше, представлена на Рис.17.

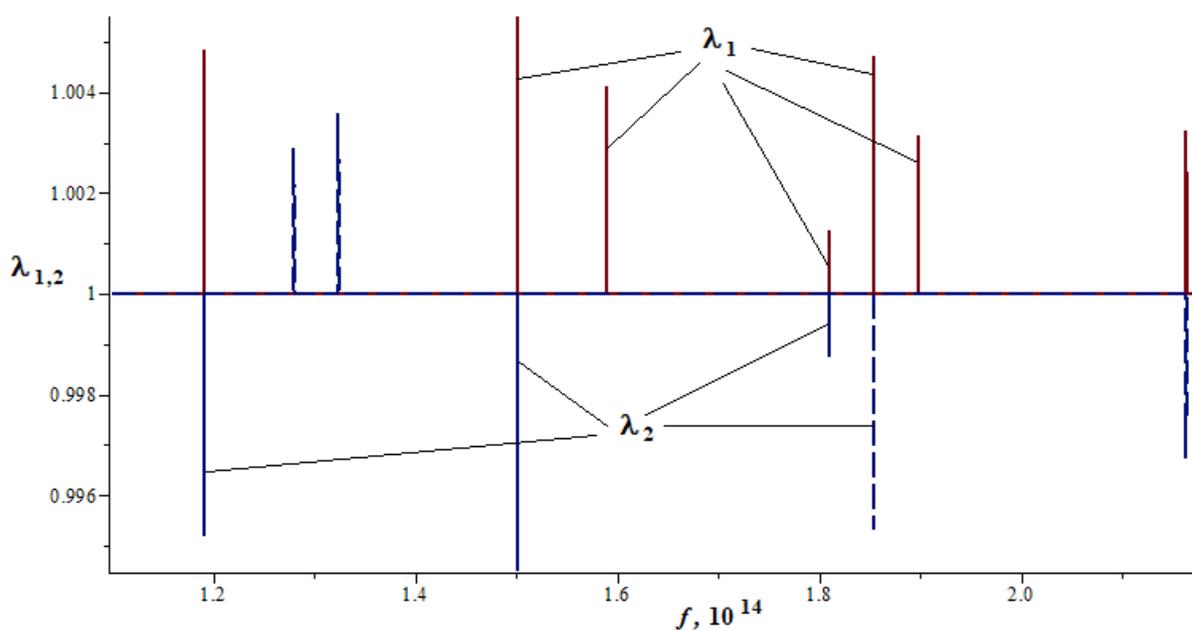


Рис.16. Зависимость модулей собственных чисел матрицы фундаментальных решений от частоты

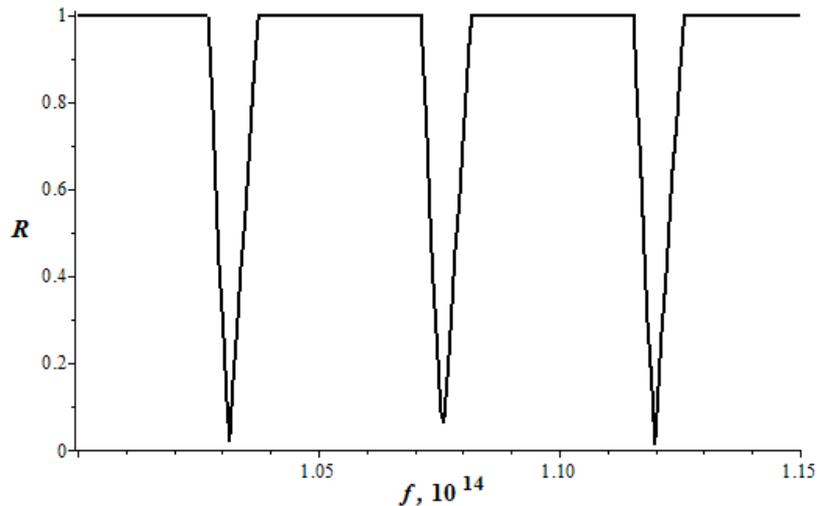


Рис.17. Зависимость модуля коэффициента отражения от толщины первого слоя в трехслойной структуре.

Амплитудно-частотная характеристика в данном случае имеет вид периодической последовательности резонансных минимумов. В этих областях наблюдается прохождение волны сквозь структуру. Увеличение числа слоев при их периодическом повторении число резонансных минимумов возрастает. На основе данного эффекта и расчетов предложено строить оптические ключи с избирательными свойствами для современных систем оптической связи и обработки информации.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертации решена крупная научно-техническая задача в области исследования линейных параметрических систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами. Построены математические модели, позволяющие решать целый класс задач в механике, электродинамике, оптике. В частности, задачи моделирования новых управляемых оптических и СВЧ устройств на основе новых материалов для систем связи 5G и 6G, а также систем искусственного интеллекта в рамках программы перехода к цифровой экономике. В рамках этой научно-технической задачи получен ряд новых результатов.

Впервые построена аналитическая модель линейной параметрической системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами. Найдена матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы второго порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами в аналитическом виде в элементарных функциях, описывающая эволюцию данной системы и отличающаяся от предыдущих тем, что она представлена в виде конечной суммы гиперболических (тригонометрических) матриц. Параметры

системы могут изменяться в любой момент времени на любую величину. Это позволяет, прежде всего, упростить решение обратных задач и проектирования требуемых структур, а также прогнозировать физические свойства структур и систем.

Впервые введено новое понятие эквивалентных колебаний линейной параметрической системы второго порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами. Результирующее колебание впервые представлено в виде суперпозиции  $2^{N-1}$  эквивалентных колебаний с определенными коэффициентами вклада. Данное разложение является конечным *в отличие* от бесконечного ряда Фурье, не совпадает с существующими вейвлет-разложениями и дискретным косинусным преобразованием. Это позволяет проводить качественное исследование соответствующих систем на фазовой плоскости.

*Впервые доказано*, что изменение порядка чередования интервалов с постоянными параметрами системы с одной степенью свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами, не изменяющее длительности периода, не влияет на структуру областей неустойчивости решений. Это позволяет сократить число исследуемых систем и структур, а также классифицировать их по данному признаку.

Впервые построена аналитическая модель линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами. *Впервые найдена* матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами, описывающей эволюцию системы, в аналитическом виде в элементарных функциях. Решение найдено при условии непрерывности функций и их первых производных. Это позволяет, прежде всего, упростить решение обратных задач и численное моделирование требуемых структур, а также прогнозировать физические свойства структур и систем.

Результирующее колебание линейной параметрической системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами впервые представлено в виде  $2^N$  групп колебаний по  $2^{N-1}$  колебаний в каждой группе. Данные колебания названы эквивалентными. Полученное разложение является конечным *в отличие* от бесконечного ряда Фурье, не совпадает с существующими вейвлет-разложениями и дискретным косинусным преобразованием. Результат позволяет проводить качественное исследование соответствующих систем в фазовом пространстве.

Впервые построена строгая аналитическая модель линейной параметрической системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами на основе блочных  $4 \times 4$ -матриц с  $2 \times 2$  блоками на главной диагонали. Матрица фундаментальных решений линейной однородной динамической системы четвертого порядка с постоянными параметрами представлена в виде блочной матрицы с  $2 \times 2$  блоками без перехода в другой базис *в отличие от* существующих

преобразований, требующих перехода в новый базис. Это существенно упрощает анализ соответствующих систем, позволяет применять к ним математический аппарат, разработанный для систем с одной степенью свободы.

*Впервые аналитически* доказано, что изменение порядка чередования интервалов с постоянными параметрами системы четвертого порядка с произвольными кусочно-постоянными параметрами, не изменяющее длительности периода, не влияет на структуру областей неустойчивости решений. Это позволяет провести классификацию систем с двумя степенями свободы в соответствии с данным признаком и существенно сократить число исследуемых систем.

Разработанный метод *впервые применен* для численного моделирования систем с линейно-изменяющимися параметрами и систем с синусоидально изменяющимися параметрами. Особенностью его использования является то, что расчет поведения динамической системы не требует итерационных процедур.

*Впервые* представлены численные решения задач отражения и прохождения волн, а также нахождения запрещенных и разрешенных зон в одномерных изотропных и анизотропных фотонных кристаллах оптического и микроволнового диапазонов с произвольным числом слоев с использованием разработанных методов. Также разработано новое устройство терагерцового диапазона управляемый двухчастотный дуплексный вентиль.

*Впервые* разработаны комплексы программ на языке C# для расчета линейных динамических систем с произвольными кусочно-постоянными параметрами на основе разработанных аналитических методов.

Результаты диссертации внедрены в проектную деятельность ООО «Терра-Юг» (г.Краснодар), в деятельность предприятия ПАО «Ростелеком», ООО ПКФ «Астрахань-Телеком», ООО «Связьинформ» и использованы на практике в учебном процессе Астраханского государственного технического университета и Волгоградского государственного технического университета, о чем имеются соответствующие акты о внедрении.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в журналах, индексируемые в SCOPUS/WEB of Science

1. **Вытовтов, К. А.** Коэффициенты прохождения и отражения плоскопараллельной пластины из фарадеева кирального материала / К.А. Вытовтов // Радиотехника и электроника. – 2004. - Т. 49, № 5. - С. 559-571. */// Transmission and reflection coefficients for a plane-parallel Faraday chiral plate.- Radiotekhnika i Elektronika.- 49(5), C.559-566.*
2. **Vytovtov, K.** Transmission and reflection coefficients for a plane-parallel faraday chiral plate / К.А. Vytovtov // Journal of Communications Technology and electronics.- 49 (5).- С.521-528.

3. **Vytovtov, K.** Analytical investigation of stratified isotropic media / K.A. Vytovtov // JOSA A.-2005.-V. 22.- Issue 4.- P.689-696.
4. **ВЫТОВТОВ, К. А.** Аналитический метод исследования электродинамических свойств периодических структур с магнитными слоями / К. А. Вытовтов, А. А. Булгаков // Радиофизика и электроника.- №1.-2005.- Том 10.- № 3. С. 428-434 /// *Analytical investigation method for electrodynamic properties of periodic structures with magnetic layers.- Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Electrosvyaz and Radiotekhnika) 65 (14).- С.1307-1321.*
5. **Vytovtov, K.** Analytical investigation of one-dimensional magnetoelectric photonic crystals. The  $2 \times 2$  matrix approach / K.A. Vytovtov, Yu. S. Tarasenko // JOSA A.-2007.- V. 24.- Issue 11.- P.3564-3572.
6. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Свойства анизотропной слоистой структуры при распространении волны параллельно границе раздела / К.А. Вытовтов, А.Д. Архипов. // Ж. нано- и электрон. физ.- 2009.– т.1, №4. – С. 31-41 // *The anisotropic layered structure properties under surface wave propagation.- Journal of Nano- and Electronic Physics.-2009.-1(4), 02028, С. 31-41.*
7. **ВЫТОВТОВ, К. А.** Угловые избирательные свойства одномерных анизотропных фотонных кристаллов/ К. А. Вытовтов, А. Д. Архипов // Радиофизика и электроника №1 2010 (86-90) /// *Angular selective properties of one-dimensional anisotropic photonic crystals.- Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Electrosvyaz and Radiotekhnika) 70 (14).- С.1305-1313.*
8. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Эффект втягивания волны в анизотропной слоистой структуре с учетом потерь и частотной дисперсии. / К.А. Вытовтов, О.А.Сидоренко // Ж. нано- и электрон. физ. - 2011.– т.3, №2. – С. 70-78 // *The penetration effect in anisotropic stratified structure with losses and frequency dispersion.- Journal of Nano- and Electronic Physics 3(2).- 02028.- С. 70-78.*
9. **Vytovtov, K., L. Mospan,** Penetration effect in gyrotropic slab: theory and applications / Journal Optical Society of America A.-2012.- Vol. 29.- №. 5.
10. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Одностороннее прохождение при распространении волны вдоль границы раздела анизотропных сред,/ К.А. Вытовтов, А.Д. Архипов// Журнал нано- та электронної фізики.-2012.-Том 4.- № 2.- 02028 // *One-way penetration of the boundary wave in anisotropic structure.- Journal of Nano- and Electronic Physics 4(2), 02028, С. 02028-1-02028-4.*
- 11., **ВЫТОВТОВ, К.А.** Эффект втягивания для тангенциального направления оси анизотропии в анизотропной среде, / К.А. Вытовтов, А.Д. Архипов, О.А. Сидоренко //Журнал нано- та электронної фізики.-2012.- Том 4.- № 2.- 02032 /// *Penetration effect for tangential direction of the anisotropy axis in anisotropic medium.- Journal of Nano- and Electronic Physics 4(2).- 02032.- С. 02032-1-02032-6.*
12. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Частотный детектор оптического диапазона на изотропной структуре. / К.А. Вытовтов//Радиофизика и электроника.- Т.5(19).-С.85-90 // *An optical band frequency detector based on isotropic*

*structures.-Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Electrosvyaz and Radiotekhnika) 73 (13) C.1191-1200*

13. **Vytovtov, K.** The Terahertz Controlled Duplex Isolator: Physical Grounds and Numerical Experiment / K. Vytovtov, S. Zouhdi, R. Dubrovka, V. Hnatushenko// International Journal of Microwave Science and Technology.- 2016.- 7 page.

14. **Vytovtov, K.** Penetration Effect: Exotic Behavior of a Wave in Anisotropic Media. / K. Vytovtov, O.Pishin, // International Journal of Microwave Science and Technology.- 2017.- Article ID 4082948.- 7 pages.

15. **Vytovtov, K.** Penetration effect in uniaxial anisotropic metamaterials / K. Vytovtov, E. Barabanova, S. Zouhdi // Applied Physics A: Materials Science and Processing.-2018.-Vol. 124, Issue 2.-137.-DOI: 10.1007/s00339-018-1563-z.

16. **Vytovtov, K.** Model of Next-Generation Optical Switching System / K. A. Vytovtov, E. A. Barabanova, V. S. Podlazov // Communications in Computer and Information Science.- 2018.- P. 377-386.

17. **Vytovtov, K.** Next-generation switching system based on 8x8 self-turning optical cell. / K. Vytovtov, E. Barabanova, I.Barabanov// International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering, APEDE.- 2018.-P.306-310.

18. **Vytovtov, K.** Unusual penetration effect in ferromagnetics. Negative refraction under tangential wave incidence./ K. Vytovtov, E. Barabanova // Journal of Physics: Conf. Series 1092 (2018) 012164 doi :10.1088/1742-6596/1092/1/012164.

19. **Barabanova, E.** Model and algorithm of next generation optical switching systems based on 8×8 elements/ E. Barabanova, K. Vytovtov, V. Podlazov. //Lecture Notes in Computer Science series. - 2019.- P. 58-70.-DOI: 10.1007/978-3-030-36614-8\_5.

20. **Barabanova, E.** Model of optical non-blocking information processing system for next-generation telecommunication networks/ E. Barabanova, K. Vytovtov, V. Podlazov, V. Vishnevskiy// Communications in Computer and Information Science. 2019.- P.188-198.-DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4\_16.

21. **Vytovtov, K.** Accurate mathematical model of two-dimensional parametric systems based on 2×2 Matrix / K. Vytovtov, E. Barabanova, V. Vishnevskiy // Communications in Computer and Information Science. - 2019. -V. 1141.-P. 199-211.-DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4\_17.

22. **Vytovtov, K.** Mathematical model of four-dimensional parametric systems based on block diagonal matrix with 2×2 blocks/ K. Vytovtov, E. Barabanova// Communications in Computer and Information Science.- 2019. - P.139-155.- DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4\_12.

23. **Barabanova, E.** The control system elements of the new generation optical switching cell / E. Barabanova, K. Vytovtov, T. Nguyen // Journal of Physics: Conference Series. -2019.-Vol. 1368, Issue 2,- 022002.

24. **Vytovtov, K.** Physical foundation of optical smart antenna based on metamaterial and lithium niobate/ K. Vytovtov, E. Barabanova, M.Igumnov// Journal of Physics: Conference Series.-2019.- Vol. 1368.- Issue 2.- 022038.

### **Публикации в материалах конференций, индексируемые в SCOPUS**

1. **Vytovtov, K.** Analytical study of Properties of Layered Periodic Metamaterials, / K. Vytovtov, Yu. S Tarasenko, A. Mareha // Proc. Int. Conf. Mathematical Method in Electromagnetic Theory, Dnepropetrovsk, Ukraine.-2004.
2. **Vytovtov, K.** Investigation of Periodic and Quasi-Periodic Layered Artificial Structure (Bianisotropic–Isotropic layers), / K. Vytovtov, A. Bulgakov // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic theory. Dnepropetrovsk, Ukraine. – 2004.
3. **Vytovtov, K.** Investigation of photonic crystals containing bianisotropic layer, / K. Vytovtov, A. Bulgakov // 35th European Microwave Conference, Paris, France. – 2005.- P.1359-1362.
4. **Vytovtov, K.** Analytical Investigation of Reflection From Photonic Crystals Containing Bianisotropic Layers / K. Vytovtov, A. Bulgakov // Frontiers in Optics, Tucson, AZ; United States; 16 - 21 October.-2005.- Код 104855.
5. **Vytovtov, K.** Investigation of Photonic crystals containing artificial metamaterial Layers, / K. Vytovtov, A. Bulgakov // Proc. of XVI International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, Krakov, Poland.-2006.-P. 797-799.
6. **Vytovtov, K.** Periodic layered media without stop bands / K. Vytovtov, A. Bulgakov, Yu.S Tarasenko // Proc. of *Int. Conf. Mathematical Method in Electromagnetic Theory*. Dnepropetrovsk, Ukraine.- 2006.- P.593-595.
7. **Vytovtov, K.** The 2x2-matrix method for two-dimensional parametric system, / K. Vytovtov // Proc. 12-th international conference MMET-08, Odessa, Ukraine.-2008.- P.460-462.
8. **Vytovtov, K.** Angle selective properties of one-dimensional anisotropic photonic crystals. / K. Vytovtov, A. Arhipov // Int. Conf. MMET.- Kiev.- 2010.
9. **Vytovtov, K.** Investigation of tangential wave propagation under a stratified anisotropic structure / K. Vytovtov, S. Volkova, Yu.S Tarasenko // *Int. Conf. MMET.-Kiev.- 2010.*
10. **Vytovtov, K.** One-Dimensional Anisotropic Photonic Crystal as a Key Element for Nonreciprocal Optical Devices Based Not on the Faraday Effect // Proc. European Microwave Week 2011, Manchester, UK.- 2011.- P.818-821.
11. **Vytovtov, K.** Frequency detector of the terahertz domain / K. Vytovtov // Proc. International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwave, Millimeter and Submillimeter Waves.- 2013.- P.265-267.
12. **Vytovtov, K.** Method of parameters optimization for terahertz anisotropic layered filter / K Vytovtov, Arhipov A. // Proc. International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwave, Millimeter and Submillimeter Waves.- 2013.- P.262-264.

13. **Vytovtov, K.** Belimenko Angle Dependence Reflection Properties of Stratified Anisotropic Structure with Arbitrary Anisotropy Axis Orientation, / K. Vytovtov // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory.-2014.- P. 61-64.
14. **Barabanova, E.** Models and algorithms of optical switching systems with decentralized control/ E. Barabanova, K. Vytovtov, N. Maltseva, O. Kravchenko, V. Kravchenko//. 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2019 ElConRus).-2019.-P. 64-68.
15. **Vytovtov, K.** Sliding Wave Propagation Over the Interface Between a Biaxial Anisotropic Medium and Vacuum/ K. Vytovtov, E. Barabanova, O. Kravchenko, V. Kravchenko.2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2019 ElConRus).- 2019.- P.890-895.
16. **Vytovtov, K.A.** Optical Switching Cell Based On Metamaterials And Ferrite Films / K. Vytovtov, E. Barabanova, S. Zouhdi // 12th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena – Metamaterials 2018, Espoo, Finland, Aug. 27th – Sept. 1st, 2018.- P.424-426.
17. **Vytovtov, K.** The accurate mathematic model based on 2x2-matrix for anisotropic photonic crystals with metamaterial layers / K. Vytovtov, E. Barabanova, V. Vishnevskiy // 13th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena- Metamaterials 2019, Rome, Italy.- 8900820.-P. X456-X458.

#### **Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:**

1. **Вытовтов, К.А.** Управляемый дуплексный клапан терагерцового диапазона / А.Н. Цыгута.// Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика.- 2018.- № 3.-С.57-64.
2. **Вытовтов, К.А.** Эффект втягивания электромагнитной волны одноосной анизотропной средой с магнитной анизотропией./ К.А. Вытовтов// Известия ВУЗов России. Радиоэлектроника. - №2. – 2017.- С.33-38.
3. **Вытовтов, К.А.** Физические основы управляемой оптической антенны на основе ниобата лития / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова, Игумнов М.А Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика.- 2019. № 3.-С.44-52.

#### **Другие публикации в журналах**

1. **Вытовтов, К.А.** Исследование собственных волн в неоднородной ферритовой среде/ К.А. Вытовтов, А. А. Булгаков, Ю. С. Тарасенко// Вестник Днепропетровского университета, серия «Физика. Радиоэлектроника».- 2007, вып. 14.- №12/1.-С. 10-13.
2. **Вытовтов, К.А.** Метод  $2 \times 2$  –матрицы преобразования для продольно намагниченной ферритовой слоистой среды /К.А. Вытовтов// Вестник

Днепропетровского университета, серия «Физика. Радиоэлектроника». -Т. 16.-Вып. 15.- 2008.- №2.-С.157-160 .

3. **ВЫТОВТОВ, К.А.**, Принцип автоматической регулировки пространственного положения объектов/ К.А. Вытовтов, А. Д. Архипов// Вісник Дніпропетровського університету. Серія Фізика. Радіоелектроніка. №2. Вип.16.- 2009.-С.108-112.

4. **Vytovtov, K.** Terahertz range double direction isolator based on stratified antiferromagnetic-dielectric structures. / K. Vytovtov, V. Gnatushenko, S. Zouhdi //Theoretical investigation, Elektronika, 2, 2015.- P.75-78.

5. **Vytovtov, K.** Investigation of the reflective properties of layered antiferromagnetic- dielectric structures / K. Vytovtov, A. Arhipov. V.Gnatushenko // Elektronika.-2014.- №2.-P.55-58.

6. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Теоретическая модель управляемого полосового фильтра терагерцового диапазона с вентиляльными свойствами. / К.А. Вытовтов А. Д. Архипов // Радиофизика и электроника т.5(19), 2.-С.86-89.

7. **Vytovtov, K.** Frequency detector of the terahertz domain based on stratified structure /K. Vytovtov, V.Gnatushenko, W. Wojcik // Elektronika.-2013.-№8.- P.58-60.

8. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Частотный детектор СВЧ диапазона на основе плоско-параллельной анизотропной структуры / К.А. Вытовтов// Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Радіофізика та електроніка. – 2012. – Вип. 20. – №1010. – С.73–78.

9. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Вентиль оптического диапазона. / К.А. Вытовтов А. Д. Архипов, С.А. Волкова// Вісник Дніпропетровського університету. Серія Фізика. Радіоелектроніка (2010) Вип.17.

10. **ВЫТОВТОВ, К.А.** Сумматор СВЧ диапазона на основе плоско-параллельной анизотропной структуры. / К.А. Вытовтов, О.А Сидоренко //Вісник харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна // «Радіофізика та електроніка» -2011.- №942 вип.17.-С. 92-95.

### Другие конференции

1. **Vytovtov, K.** Inhomogeneous waves in a Faraday chiral medium / K. Vytovtov, A. Bulgakov // *Proc. 10<sup>th</sup> Conf. Complex Media and Metamaterials*, Ghent, Belgium.- 2004.- P.58-61,

2. **Vytovtov, K.** Reflection and propagation coefficients of a layered bianisotropic slab / K. Vytovtov // *Proc. 10<sup>th</sup> Conf. Complex Media and Metamaterials*, Ghent, Belgium.-2004.-P.62-65.

3. **Vytovtov, K.** Analytical investigation of magnetoelectric photonic crystals / K. Vytovtov // *Proc. of Mediterranean Microwave Symposium 2006*, Genova, Italy.-2006.- P.242-244.

4. **Vytovtov, K.** TE- and TM-wave decomposition of a wave within bianisotropic 1D photonic crystals/ K. Vytovtov // *Proc. NATO ARW&META '08*, Marrakesh, Morocco.-2008.-P.81-85.

5. **Vytovtov, K.** Exotic reflection of plane waves by anisotropic structures/ K. Vytovtov, S. Zouhdi// Metamaterials'2012: The 6th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, St. Petersburg, Russia, 17-22 September, 2012.
6. **Vytovtov, K.**, Optical Frequency Detector Based on Stratified Isotropic Slab/ K. Vytovtov, L. Mospan, S. Zouhdi// META'12, 3rd International Conference on Metamaterials, Photonic crystals and Plasmonics, Paris, France, 19-22 April.- 2012.
7. **Vytovtov, K.** and, Penetration Effect in Uniaxial Anisotropic Metamaterials / K. Vytovtov, S. Zouhdi// Proc. of META'17, the 8th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics. – 2017.-P. 576-577.
8. **Vytovtov, K.** Translation Matrix for Anisotropic Metamaterials / K. Vytovtov, S. Zouhdi, E. Barabanova// Proc. of META'17, the 8th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics. – 2017.-P. 576-577.
9. Vytovtov, K.A. Optical Switching Cell Based On Metamaterials And Ferrite Films / K. Vytovtov, E. Barabanova, S. Zouhdi // 12th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena – Metamaterials 2018 Espoo, Finland, Aug. 27th – Sept. 1st, 2018.- P.424-426.

### **Монография**

1. **Вытовтов, К.А.** Анизотропные и бианизотропные многослойные структуры. Математическое моделирование и физические свойства / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова// Астрахань: Сорокин Роман Васильевич.- 2019.- 100с.

### **Патенты**

1. **Барабанова, Е.А.** Фотонная коммутационная ячейка./ Е.А. Барабанова, К.А. Вытовтов, Н.С. Мальцева, И.О. Барабанов.// Патент №179015 от 21.04.2018.
2. **Барабанова, Е.А.** Фотонная коммутационная ячейка на основе метаматериала. / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова // Патент №186690 от 29.01.2019.
3. **Вытовтов, К.А.** Оптическая двухкаскадная коммутационная система./ К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова// Патент №185530 от 7.12.2018.

### **Свидетельства на программы для ЭВМ**

1. **Вытовтов, К.А.** Моделирование поведения волн в гиротропных фотонных кристаллах. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019662973 / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова, И.О. Барабанов// Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 07.10.2019г.
2. **Вытовтов, К.А.** Имитационная модель оптической коммутационной системы. Свидетельство о государственной регистрации программы для

ЭВМ №2019661890 / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова, В.А. Круглов.  
//Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 03.10.2019г.

3. **Вытовтов, К.А.** Моделирование поведения элементарной частицы в кусочно-непрерывном потенциальном поле. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020611953 / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова// Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 12.02.2020г.

4. **Вытовтов, К.А.** Моделирование поля необыкновенной волны в неоднородной двухосной анизотропной среде с произвольными кусочно-непрерывными параметрами. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020611609 / К.А. Вытовтов, Е.А. Барабанова// Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 05.02.2020г.