На правах рукописи

Дудинец Иван Васильевич

Исследование преобразований квантовых состояний в томографическом представлении при унитарной и неунитарной эволюции в квантовой оптике и квантовой механике

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский институт)».

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф.
Манько Владимир Иванович

Ведущая организация: ООО «Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий».

Защита состоится 27.12.2019 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета ЛФИ.01.04.02.003 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) https://mipt.ru/education/post-graduate/ soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Работа представлена «17» октября 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национального исследовательского университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п.3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Состояние классической частицы определяется ее координатой и импульсом в данной координате, т.е. точкой в фазовом пространстве. При наличии флуктуаций координаты или импульса, состояние классической частицы задается функцией распределения в фазовом пространстве. Функция распределения есть неотрицательная нормированная функция, определяющая плотность вероятности нахождения частицы в некоторой области точки фазового пространства, и маргинальные распределения которой дают плотность вероятности координаты или импульса частицы.

В квантовой механике ситуация значительно меняется. В этом случае состояние квантовой системы задается волновым вектором, являющийся элементом гильбертового пространства, ассоциируемого с исследуемой системой. Если неизвестен волновой вектор системы (например, если система может находиться с некоторой вероятностью в различных состояниях) или его не существует (например, рассматриваемая система является частью некоторой большей системы), то состояние описывается оператором плотности, действующим в гильбертовом пространстве, связанным с системой. В координатном представлении волновой вектор называется волновой функцией, а оператор плотности становится матрицей плотности. Квадрат модуля волновой функции, а также диагональный элемент матрицы плотности имеют смысл плотности вероятности координаты квантовой частицы, однако ни фаза волновой функции, ни недиагональные элементы матрицы плотности такой ясной интерпретации не имеют.

Множество усилий было уделено поиску описания состояний квантовых систем, схожему с вероятностным описанием состояний в классической статистической механике. Одна из таких попыток была предложена Вигнером в 1932 году, согласно которой квантовым состояниям сопоставляется действительная функцией $W(q,p)$ [1], определенная на фазовом пространстве и равная преобразованию фурье матрицы плотности. Впоследствии функция стала называться функцией Вигнера. Ввиду обратимости преобразования фурье, матрица плотности может быть восстановлена по соответствующей функции Вигнера. Следовательно, функция Вигнера действительно определяет квантовое состояние. Схожесть функции Вигнера с классическим распределением вероятности обусловлена тем, что она нормирована и ее маргинальные распределения определяют плотности вероятности квантовой частицы по координате или импульсу. Тем не менее, функция Вигнера не является настоящей функцией распределения вероятностей ввиду возможности принимать отрицательные значения для некоторых состояний, а вероятность по определению является неотрицательной величиной. По этой причине функцию Вигнера называют функцией квазираспределения.

Хусими [2] в 1940 году ввел другую не менее известную функцию квазираспределения. Функция Хусими, определяемая как диагональный матричный элемент оператора плотности системы в когерентном состоянии, связана с функцией Вигнера интегральным преобразованием с гауссовым ядром и, таким образом, является своего рода «сглаживанием» последней. Функция Хусими, также как функция Вигнера, определена на фазовом пространстве и нормирована, однако ее маргинальные распределения не приводят к правильным плотностям вероятностей координаты или импульса. Однако, функция Хусими неотрицательна для любых состояний.

Глаубером и Сударшаном в 1963 [3; 4] была представлена еще одна функция на фазовом пространстве, используемая для описания квантового состояния. Произвольный оператор плотности можно разложить по проекционным операторам на когерентные состояния. Весовая функция такого разложение играет роль плотности вероятности в фазовом пространстве и называется функцией Глаубера-Сударшана. Функцией Глаубера-Сударшана является обобщенной и для большинства квантовых состояний она сильно сингулярна. В дальнейшем было показано, что все введенные выше функции являются представителями однопараметрического семейства. Следует подчеркнуть, что в квантовой механике не существует совместной функции распределения координаты и импульса ввиду их одновременной неизмеримости. По этой причине все упомянутые ранее функции являются функциями квазираспределений.

Дж. и П. Бертранами была представлена оптическая томограмма $w(X,\theta)$ [5], являющаяся функцией распределения координаты X квантовой частицы в системе координат, повернутой на угол θ в фазовом пространстве. Оптическая томограмма связана с функцией Вигнера преобразованием Радона. Преобразование Радона представляет собой обратимое отображение, связывающее функцию двух переменных с функцией, определенной на множестве прямых на плоскости тех же переменных и равную интегралам от исходной функции вдоль всех прямых. Результаты Радона оказали большое влияние на рождение медицинской томографии. В медицинской томографии исследуется различные патологии организма при помощи облучения интересующего объекта (органа) и последующего восстановления его послойных изображений. В квантовой механике роль исследуемого объекта служит функция Вигнера, а ее преобразованием Радона является оптическая томограмма. Оптическая томограмма применялась в экспериментах по гомодинному детектированию [6—8], в результате которых измеренная оптическая томограмма являлась инструментом для восстановления функции Вигнера, которая ассоциировалась с квантовым состоянием. Эти эксперименты оказали значительное влияние на развитие томографического представления квантовой механики и квантовой оптики.

В 1996 году Манько и другими соавторами была введена симплектическая томограмма [9], которая является обобщением оптической томограммы. Также как и оптическая томограмма, симплектическая представляет собой неотрицательную функцию распределения координаты X квантовой частицы в повернутой системе координат в фазовом пространстве. Важной отличительной особенностью симплектической томограммы является то, что в ней помимо информации о повороте системы координат необходима зависимость от взаимного взаимного масштаба (сжатия или растяжения) осей координаты и импульса. Данное обобщение позволило справиться со сложностями поиска уравнений эволюции для оптической томограммы. Уравнение эволюции, которым удовлетворят симплектическая томограмма, и являющиеся аналогом уравнения Шредингера, были получены в [10]. Интересным является тот факт, что симплектическая томограмма может быть получена через оптическую, несмотря на то, что последняя является частным случаем первой. Симплектическая томограмма чистого состояния выражается через волновую функцию этого состояния посредством интегрального преобразования, тесно связанного с интегралом Френеля.

В работах [11; 12] было предложено идентифицировать квантовые состояния с функциями распределения вероятностей — квантовыми томограммами, вместо волновых функций или матриц плотностей. Соответствующая формулировка квантовой механики была названа вероятностной (томографической) формулировкой или вероятностным представлением. Таким образом, в соответствии с вероятностной трактовкой квантовой механики состояние изначально определяется квантовой томограммой, которая может быть измерена экспериментально, при этом нет необходимости в процессе восстановления матрицы плотности или функции Вигнера. Средние значения, дисперсии, ковариации и высшие моменты физических наблюдаемых могут быть в явном виде выражены через томограммы. Поскольку томографические распределения вероятностей связаны с волновыми функциями или матрицами плотности с помощью обратимого интегрального преобразования, квантово-механические уравнения, такие как уравнение Шредингера для уровней энергии или для эволюции волновой функции могут быть переписаны как уравнения для томограмм состояний. Такие уравнения были получены как для симплектической томограммы, так и для оптической томограммы. Таким образом, томографическое представление квантовой механики с математической точки зрения является еще одним представлением квантово-механических уравнений. Основным преимуществом уравнений в томографическом представлении является то, что они написаны для истинных распределений вероятностей (fair probability distributions (англ.)) и являются альтернативой комплексным волновым функциям или матрицам плотности.

В связи с новой формулировкой квантовой механики возникает необходимость в исследовании различных квантовых систем в вероятностном представлении. Различными авторами были рассмотрены простейшие задачи, характеризуемые квадратичным потенциалом, такие как свободное движение, гармонический осциллятор, затухающий осциллятор и параметрический осциллятор. Также некоторые нестационарные системы, описывающиеся квадратичным по координате и импульсу гамильтонианом были исследованы в рамках этой новой формулировки квантовой механики. В то же время задачи, связанные с более сложными, неквадратичными потенциалами, например дельта-функцию Дирака, представляют большой интерес. Поведение квантовой частицы, движущейся в дельта-потенциале хорошо изучено и волновая функция была получена в явном виде. Одной из целей данной работы заключается в изучении движения квантовой частицы в дельта-потенциале в формализме томографического представления квантовой механики. Мы изучим связь решения уравнения Шредингера для этого потенциала с соответствующими решениями уравнений для оптической и симплектической томограмм и получим явные выражение для различных квазираспределений, определяющих связанное состояние.

Существуют другие томографические распределения вероятностей, которые могут быть отождествлены с квантовыми состояниями. Томограмма центра масс была представлена в [13; 14]. Идея введения еще одной функции распределения заключается в том, что для описания квантовых систем с N степенями свободы симплектическая томограмма использует $3N$ переменных (N-компонентного вектора координат системы, измеренных во всех возможных повернутых и подвергнутых изменению масштаба систем координат, определяемых двумя N-компонентными векторами), в то время как комплексная матрица плотности оперирует только с $2N$ переменными. На самом деле симплектическая томограмма, будучи однородной функцией, эффективно зависит от $2N$ независимых переменных и полностью определяет состояние системы. Однако описание эволюции системы в томографическом представлении возможно только при использовании всего набора из $3N$ переменных. Очевидно, что при большом N работать с $3N$ переменными значительно менее удобно, чем с $2N$, даже если подразумевается описание состояний через неотрицательную функцию. Эту сложность с возрастание количества переменных удалось преодолеть при помощи томограммы центра масс, являющейся неотрицательной функции $2N + 1$ переменных и описывающей состояние системы. Одна из целей нашей работы посвящена дальнейшему развитию формализма томограммы центра масс. Особое внимание уделено обобщению томограммы центра масс — кластерной томограмме, представляющую собой гибрид симплектической томограммы и томограммы центра масс.

Известно, что решение аналога уравнения Шредингера для уровней энергий некоторых потенциалов в томографическом представлении представляет значительные трудности. Тем не менее информационные свойства, такие как энтропия Шеннона или энтропия Реньи связанные с квантовыми состояниями легче объяснить в томографическом представлении. С другой стороны, существуют сложности с получением явного вида широко используемой в квантовой теории информации энтропии фон Неймана систем с непрерывными переменными, связанные с необходимостью диагонализовывать бесконечномерную матрицу плотности состояния системы. Примером состояний с непрерывными переменными являются когерентные состояния. Суперпозиция когерентных состояний обладает статистическими свойствами, отличными от когерентных состояний. Суперпозиция двух произвольных когерентных состояний была рассмотрена в [15]. Поскольку когерентные состояния, будучи чистыми квантовыми состояниями, интерпретируются как наиболее близкие к «классическим состояниям», суперпозиция когерентных состояний обычно рассматривается как состояния шредингеровских котов. Примером такой суперпозиции является четная и нечетная суперпозиции когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$. Четные и нечетные когерентные состояния для одномодовых систем были введены в [16]. Также состояния были обобщение на случай многих мод и подробно изучались их свойства. Четные и нечетные состояния шредингеровских котов обсуждались также в связи с использованием этих состояний для квантовых вычислений в качестве аналогов состояний кубита. Ввиду возможного применения этих состояний в квантовой теории информации, необходимо изучить различные свойства состояний, например, энтропийные или другие квантовые неравенства, и получить соответствующие соотношения в явном виде.

Для преодоления трудностей, связанных с диагонализацией матриц плотностей состояний с непрерывными переменными авторы работы [17] предложили использование метода реплик — инструмента, заимствованного из статистической физики и квантовой теории поля. В нашей работе мы используем метод реплик для нахождения явного вида энтропии фон Неймана для смеси четных и нечетных когерентных состояний. Мы также рассмотрим неравенство чистоты для смеси двухмодовых когерентных состояний.

Запутанные состояния с непрерывными переменными имеют большое значение в квантовой теории информации ввиду их различного практического применения. В этой связи, запутанные гауссовские состояния также имеют большое значение. Более того, гауссовские состояния, особенно двумодовые гауссовские состояния, являются наиболее изученными среди состояний с непрерывными переменными в том смысле, что для них существует критерий сепарабельности и явные формулы различных мер запутанности.

В реальных экспериментах взаимодействие рассматриваемой системы с окружающей средой неизбежно. Это взаимодействие приводит к деградации запутанности в системе, т.е. количество запутанности снижается. Обычно в работах изучается случай, когда начальное состояние рассматриваемой системы предполагалось запутанным. С другой стороны, изначально сепарабельное состояние может стать запутанным в присутствии диссипации. Данное явление, называемое возникновение запутанности (the emergence of entanglement (англ.)), является предметом различных исследований. Таким образом, сохранение запутанности в затухающих системах заслуживает особого внимания.

Существует множество подходов к изучению систем с диссипацией, например, основанных на квантовании через классические интегралы движения или подходы, связанные с взаимодействием рассматриваемой системы с тепловой баней. Одна из наиболее часто используемых моделей тепловой бани является набор квантовых гармонических осцилляторов. Модель осциллятора, взаимодействующего с тепловым резервуаром, который состоит из осцилляторов, являлась предметом исследования в различных работах.

В нашей работе мы изучаем два взаимодействующих квантовых осциллятора (мы его называем A осциллятор), каждый из которых взаимодействует со своей тепловой баней, характеризуемых своей собственной температурой. Каждая из бань моделируется бесконечным набором независимых гармонических осцилляторов (мы их обозначаем B осцилляторами). Мы предполагаем, что взаимодействие между рассматриваемыми осцилляторами и осцилляторами тепловых бань линейно по операторам их координат и импульсов. Наше исследование было мотивировано следующими фактами. Данная система была рассмотрена в 1984 году в работе [18]. Было показано, что во-первых, эволюция система такова, что состояние A осциллятора, будучи гауссовским в начальный момент времени, остается гауссовским в любой другой момент времени. Следовательно, система полностью интегрируема, т.е. можно найти в явном виде матрицу плотности системы, а значит можно исследовать свойство системы аналитически. Во-вторых, при больших временах A осциллятор достигает равновесного состояния, которое не является гиббсовским и характеризуется температурами обоих бань. Несмотря на то, что решение системы было найдено достаточно давно, все последствия решения полностью не исследованы до сих пор. В нашей работе мы пытаемся заполнить данный пробел. Одной из наших целей является анализ свойства запутанности данной системы (в момент написания работы [18] не было такого понятия как запутанность квантовых состояний), а именно, мы показываем, что система связанных осцилляторов остается сепарабельной в произвольный момент времени для конкретных начальных условиях. Мы также изучаем асимптотическое состояние системы в случае слабого взаимодействия системы с тепловыми банями.

Нелинейности играют важную роль в различных областях физических явлений. Нелинейные колебания актуальны для задач квантовой механики, так как, например, они могут быть связаны с деталями энергетических спектров атомов и молекул или соответствовать поведению волн в случае очень высокой плотности вещества, которая эффективно создает нелинейность колебаний, даже если изначально колебания линейны. Таким образом, нелинейные колебания являются важным аспектом как в классической, так и квантовой физики при описании физических процессов в различных экстремальных условиях.

Модели нелинейностей могут быть выбраны для выполнения некоторых требований, одним из которых может быть простота и ясная физическая интерпретация явлений. Такие модели могут быть связаны с математическими структурами, такими как деформированные алгебры или квантовые группы. Деформированные алгебры или квантовые группы проясняют математические свойства нелинейных моделей, однако они нуждаются в дополнительных физических аргументах для объяснения связи нелинейностей в физических процессах с математическими структурами, используемыми в квантовых группах и их применениях.

Одним из важных и простых примеров нелинейности в физическом процессе является процесс, вызванный так называемыми f-колебаниями. Понятие f-осциллятора, введенное в [19], связано с описанием специфических нелинейных колебаний как в классической, так и в квантовой механике. f-осциллятор представляет собой нелинейный осциллятор со специфической зависимостью частоты колебаний от амплитуды, определяемой заданной функцией f. Были подробно изучены задачи на собственные значения для гамильтонианов, описывающих различные виды f-нелинейностей. В наши дни нелинейный осциллятор привлекает внимание в связи с изучением неклассических фотонных состояний в квантовой оптике. Возможность учесть f-нелинейность колебаний в некоторых случаях лазерного излучения была исследована в работе [20].

Другой известный пример нелинейных колебаний с экспоненциальной зависимостью частоты вибраций от энергии называется q-осциллятор и является частным случаем f- осциллятора. q-осциллятор обсуждается в литературе в связи с деформациями алгебр Ли и является примером квантовой интегрируемой системы. Также были предложения описывать возможную нелинейность классической электродинамики q-осцилляторами.

Обычные когерентные состояния, определяемые как собственные состояния бозонного оператора уничтожения, играют важную роль в квантовой оптике. Разработка лазеров позволило приготовить свет, поле которого очень близко к таким состояниям. Их поведение очень схоже с поведением классической волны. Средняя амплитуда напряженности электрического или магнитного поля линейно зависит от собственного значения оператора уничтожения и соответствующая дисперсия не зависит от амплитуды, она равна дисперсии вакуумного состояния. Когерентные состояния также называют наиболее классическими состояниями света, так как минимизируют соотношения неопределенности Гейзенберга. В контексте квантовой природы света когерентные состояния представляются менее интересными. Было проведено множество экспериментов, демонстрирующих такие неклассические эффекты, как сжатие, интибанчинг (antibunching (англ.)), суб-пуассоновская статистика. Кроме того, существуют интересные квантовые эффекты и связанные с ними квантовые состояния, которые трудно приготовить и обнаружить, а именно состояния суперпозиции, демонстрирующие квантовые интерференционные эффекты. Что касается неклассических эффектов, оказывается, что когерентные состояния определяют границу между классическим и неклассическим поведением, так что они не отображают ни одну из этих интересных особенностей.

С квантовыми f-осцилляторами тесно связано понятие f-когерентных состояний — собственных значений деформированного бозонного оператора, где деформация определяется операторно-значной функцией f, называемой функцией нелинейности. Такие состояния сохраняют типичные особенности когерентных состояний, такие как локализация их распределений в фазовом пространстве вокруг их средней комплексной амплитуды. С другой стороны, они проявляют такие неклассические свойства, как сжатие, интибанчинг, суб-пуассоновская статистика и квантовая интерференция. Последние свойство возникают из-за саморазделения этих состояний на чистые подсостояния, что в конечном итоге приводит к интерференции их собственных структур. Было предложено множество теоретических схем реализации нелинейных когерентных состояний, основанных на оптомеханической микрополости, одноатомного лазера и динамики экситона в квантовой точке. Также было показано, что стационарные состояния движения центра масс захваченного иона могут являться f-когерентными состояниями. Квантовый гармонический осциллятор, помещенный в яму с непроницаемыми стенками, может рассматриваться как f-осциллятор. Кроме того квантовая частица, движущаяся в потенциале конечной дальности (finite range potential (англ.)) описывается методом f-деформированного осциллятора. Нелинейные когерентные состояния могут быть сгенерированы при вибрации графеновой мембраны. Осциллятор с пространственно изменяющейся массой можно рассматривать как f-осциллятор с особым типом функции деформации. Двумерную алгебру гармонического осциллятора на сфере можно рассматривать как деформированную одномерную алгебру гармонического осциллятора. Также были предложены различные виды генераций нелинейных когерентных состояний. Было дано обобщение суперпозиции когерентных состояний на случай нелинейных состояний. Различными авторами были предложены способы создания суперпозиции нелинейных когерентных состояний, а также запутанных нелинейных когерентных состояний. Кроме того f-осцилляторы рассматривались в рамках симплектической томографии [21]. Одной из целей настоящей работы является изучение состояний f-осцилляторов при помощи вероятностного представления, а также обобщение результатов работы [22] на случай многих мод, а также на случай томографии числа фотонов. Мы покажем, как выбор определенного вида функции нелинейности f может приводить к запутанности между модами.

Чистые состояния кубита представляются вектором в двумерном гильбертовом пространстве, в то время как смешанные состояния описываются матрицами плотности ρ — двумерными эрмитовыми положительно определенными матрицами с единичным следом. Положительная определенность значит, что все собственные значения матрицы неотрицательны. Состояния кубитов являются, например, состояния двухуровневого атома или состояния частицы со спином $1/2$. Так как матрицы плотности играют фундаментальную роль для описания физических систем, неудивительно, что множество исследований было уделено параметризации матриц плотности. Удобно выбранная параметризация может значительно упростить решение поставленной задачи, может помочь идентифицировать новые свойства системы, или она может быть использована для изучения свойств самих операторов плотности. Следовательно, желательно получить простую и интуитивно понятную параметризацию матриц плотности. Когда необходимо общее выражение для матриц плотности, условие положительности, как правило, является наиболее сложным.

Одна из наиболее известных параметризаций двумерной матрицы плотности — параметризация Блоха. Согласно этой параметризации, состояния кубита отождествляются с точками на единичном шаре, при этом точки на поверхности шара соответствуют чистым состояниям кубита. Параметризация Блоха была обобщена на размерности, большие двух. Параметризация Блоха и другие параметризации обычно используются в качестве промежуточного инструмента для решения определенных физических задач, например, квадратичная параметризация [23] была использована как для получения меры в пространстве квантовых состояний, так и для исследования геометрии пространства квантовых состояний.

Недавно была предложена параметризация матриц плотности, основанная на вероятностном представлении квантовой механики [24]. Вывод параметризации основан на следующих рассуждениях. Вероятностное представление было обобщено на случай дискретных спиновых переменных и соответствующие томограммы называются спиновыми томограммами. Спиновая томограмма $w(m,\vec{n})$ связана с состоянием спина-j системы. Переменными спиновой томограммы являются проекция спина

m, принимающая дискретные значения $-j, -j+1, \ldots, j$, на направление, определяемое единичным вектором $\vec{n}$. Количество единичных векторов, достаточных для определения системы со спином j, равняется $4j+1$. В случае систем со спином $1/2$ (кубиты), достаточно выбрать три единичных вектора, например, вдоль осей $\vec{x}, \vec{y}$ и $\vec{z}$. Таким образом, матрица плотности спина $1/2$ полностью определяется тремя вероятностями. Данное наблюдение приводит к вероятностной параметризации матрицы плотности кубита, введенной в [24]. В случае кубита вероятностная параметризация схожа с параметризацией Блоха. Однако, в отличие от последней, вероятностная параметризация может быть легко обобщена на более высокие размерности и позволяет получить различные энтропийные неравенства для элементов матрицы плотности. Основная идея вероятностной параметризации заключается в том, что матрица плотности конечной размерности может быть выражена, используя только классические вероятностные распределения, единственное отличие квантовой механики от классической заключается в существовании специфических неравенств для классических распределений вероятностей. Ввиду вышеизложенных преимуществ по отношению к другим параметризациям матриц плотности, представляет интерес дальнейшее развитие вероятностной параметризации и ее применения к конкретным задачам квантовой теории информации.

Изменение квантового состояния в результате физического процесса может быть описана линейным вполне положительным отображением $\rho \to \Phi(\rho)$, сохраняющие след. Такие отображения называются квантовыми каналами и могут быть представлены в краусовском виде (the Kraus form (англ.))

$$\Phi(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger\,,$$

где K_n — операторы Крауса, $\sum K_n^\dagger K_n = I$. Однако, существуют отображения, которые не могут быть представлены в краусовской форме. Одним из таких отображений является транспонирование: будучи положительным, но не вполне положительным, оно имеет большое значение при детектировании запутанных состояний. Более того, динамика квантовой системы, взаимодействующей с окружающей средой, может не быть вполне положительной. Следовательно, задача о исследовании отображений, которые не могут быть записаны в краусовском виде, является важной в квантовой теории информации. Одним из примеров таких отображений является нелинейное отображения матрицы плотности $\rho \to \Phi(\rho)$, для которого матрица $\Phi(\rho)$ обладает свойствами матриц плотности —так называемый нелинейный канал.

Одной из целей нашей работы является исследование нелинейного отображения Φ_α, возводящую матрицу плотности кубита в произвольную степень α, не обязательно целую, в вероятностном представлении, т.е. используя вероятностную параметризацию. Данное отображение представляет интерес по нескольким причинам. Во-первых, оно является обобщением нелинейного канала, рассмотренного в работах [25; 26]. Авторы ввели нелинейное отображение матриц плотности $\rho \to \Phi_n(\rho) = \rho^n/\mathrm{Tr}\rho^n$ с натуральным n. Можно легко видеть, что отображение Φ_n сохраняет свойства матриц плотности, а именно эрмитовость, неотрицательность и единичный след. Таким образом мы продолжаем работу авторов статей [25; 26] и обобщаем их результаты. Во-вторых, данное отображение является квантово-механическим аналогом преобразования, которое связывает классическое распределение вероятностей p_i с обобщенным эскорт распределением (the associated escort distribution (англ.)), определяемым как $P_i = p_i^\alpha / \sum_j p_j^\alpha$, где α является порядком эскорт распределения. Эскорт распределение является полезным в различных областях физики, например, в теории динамики хаотических систем и в термостатистике сложных систем (the thermostatistics of complex systems (англ.)). В действительности, отображение, которое мы будем рассматривать, преобразовывает полностью декогерентные состояния, т.е. когда матрица плотности имеет диагональный вид, в состояния, соответствующие эскорт распределению.

Целью диссертационной работы является развитие вероятностного (томографического) представления квантовой механики, изучение энтропийных и информационных свойств квантовых систем, а также их квантовых корреляций.

Для достижения целей были поставлены и решены следующие задачи:

1. Исследовать движение квантовой частицы, движущейся в дельта-потенциале в вероятностном (томографическом) представлении квантовой механики. Получить явные выражения для функций квазивероятностей и томограмм для связанного состояния частицы и исследовать их связь. Найти вероятность ионизации при изменении параметров потенциала, используя полученные функции и томограммы. Проверить выполнение энтропийного неравенства для оптической томограммы связанного состояния.
2. Получить формулу для энтропии фон Неймана смеси когерентных состояний с использованием метода реплик. Применить полученную формулу для нахождения энтропии состояния смеси шредингеровских котов.
3. Изучить состояния многомодового электромагнитного поля (multimode electromagnetic field states (англ.)) в вероятностном (томографическом) представлении центра масс, а также кластерном представлении. Использовать формализм квантайзеров и деквантайзеров для нахождения связи центра масс и кластерной томограмм. Получить формулу для ядра звездочного произведения кластерной схемы.

4. Рассмотреть нелинейные колебания (f-осцилляторы) и соответствующие f-когерентные в вероятностном (томографическом) представлении. Вывести общие выражения для симплектической, оптической томограмм, томограммы счета фотонов и функции Хусими f-когерентного состояния. Использовать известное энтропийное неравенство, а также полученное выражение для томограммы счета фотонов для вывода новых неравенств для обобщенных функций.
5. Исследовать квантовые корреляции двух связанных квантовых осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своим тепловым резервуаром, моделируемым бесконечным набором независимых квантовых осцилляторов.
6. Рассмотреть действие нелинейного канала (нелинейного отображения) на матрицы плотности кубитов в вероятностном представлении квантовой механики.

Научная новизна.

1. Впервые получена формула для функции Хусими связанного состояния частицы, движущейся в дельта-потенциале, исследованы ее свойства, связь с соответствующими функцией Вигнера, оптической и симплектической томограммами. Рассмотрена задача о вероятности ионизации частицы при изменении параметров потенциала.
2. Впервые применен метод реплик для нахождения энтропии фон Неймана смеси когерентных состояний, а также смеси шредингеровских котов. Независимым способом проверена достоверность полученных формул.
3. Найдены формулы для ядра звездочного произведения кластерной схемы, связи томограмм центра масс и кластерной томограммы. Построен пример функции, которая является обобщением томограммы центра масс и применимую для описания квантовых состояний, а также показано неоднозначность этого построения.
4. Доказана сепарабельность состояния связанных квантовых осцилляторов, каждый из которых помещен в тепловой резервуар, поддерживаемый при своей температуре. Найдены функция Вигнера и матрица плотности состояния, к которому приходят осцилляторы с течением времени (квазиравновесного состояния). Проверено, что в случае равенства температур резервуаров квазиравновесное состояние является гиббсовским.
5. Получены общие выражения для симплектической, оптической томограмм, томограммы счета фотонов и функции Хусими f-когерентного состояния. Найдены новое семейство неравенств для обобщенных полиномов Лагерра. Подробно исследованы свойства f-осцилляторов.

6. Впервые исследовано нелинейное отображение матриц плотности кубитов (нелинейный канал) и его свойства в вероятностном представлении квантовой механики. Показано, что нелинейный канал приводит либо к очищению состояния, либо к его очищению.

Практическая значимость. Полученные в данном диссертационном исследовании результаты играют важную роль для развития и формирования основ квантовой механики, в частности для совершенствования вероятностного (томографического) представления квантовой механики. Значимость развития фундаментальных аспектов квантовой механики обусловлена тем, что на ее принципах основываются различные квантовые технологии.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. оптическая и симплектическая томограммы, а также функция Хусими для частицы, движущейся в дельта потенциале, выражаются через функцию ошибок;
2. метод реплик позволяет вычислить энтропию фон Неймана произвольной смеси когерентных состояний в явном виде
3. найдены выражения для ядра звездочного произведения кластерной схемы, а также формулы для связи кластерной томограммы и томограммы центра масс;
4. состояние связанных квантовых осцилляторов, каждый из которых поддерживается при своей температуре, находящихся изначально в когерентных состояниях, является сепарабельным;
5. получены выражения для оптической, симплектической томограмм и томограммы счета фотонов для нелинейных f-осцилляторов;
6. с помощью известных энтропийных неравенств для квантовых систем можно получить новые соотношения для обобщенных полиномов Лагерра;
7. вероятностная параметризация матриц плотности позволяет установить, что нелинейное отображение, возводящее матрицы плотности кубита в произвольную степень, приводит либо к хаотизации состояния, либо к его очищению

Апробация работы.

1. 55-й, 56-й, 57-й, 58-й, 60-й научных конференциях МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе» (Долгопрудный, Московская области 2013-2017 гг.)
2. Probability Theory and Mathematical Statistics, International Conference, (Казань, 7-10 ноября, 2017)
3. MIPT (PhysTech)-QUANT, International Conference, (Москва, 9-15 сентября, 2018)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 статьях в рецензируемых журналах из перечня ведущих периодических изданий ВАК и SCOPUS.

Личный вклад. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Постановка большинства задач была выполнена научным руководителем. Обсуждения результатов работ проводилось совместно с соавторами.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 177 страниц. Библиография включает 246 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована научная актуальность диссертации, сформулированы ее цели и задачи, описана практическая значимость представленных в диссертационной работе результатов и их научная новизна. Приведен перечень всероссийских и международных конференций, на которых результаты исследования проходили апробацию, и список печатных работ, в которых были представлены результаты диссертации.

В первой главе рассмотрены такие базовые понятия квантовой механики и квантовой оптики, как вектор состояния, матрица плотности, когерентные состояния. Приведены определение и основные свойства таких понятий как шредингеровские коты, являющиеся четной и нечетной суперпозицией когерентных состояний.

Даны определения и подробный обзор свойств функций квазираспределений Вигнера и Хусими, которые активно используются в настоящей диссертационной работе. Особое внимание уделено формулировке вероятностного (томографичекого) представления квантовой механики. Введены оптическая, симплектическая томограммы и томограмма счета фотонов, и обсуждены связь томограмм с функциями квазираспределений.

Основная цель данной главы заключается в исследовании с использованием томографического представления квантовой механики частицы, движущейся в притягивающем дираковском дельта потенциале вида

$$V(x) = -k\,\delta(x),$$

где k — параметр потенциала.

Найдено явное выражения для симплектической томограммы, соответствующей единственному связанному состоянию частицы в рассматриваемом потенциале

$$M(X,\mu,\nu) = \frac{k}{4|\mu|}$$

$$\times \left| e^{-\frac{kX}{\mu}} Erfc\left\{ \sqrt{\frac{i\nu}{2\mu}} \left(\frac{iX}{\nu} + k \right) \right\} + e^{\frac{kX}{\mu}} Erfc\left\{ \sqrt{\frac{i\nu}{2\mu}} \left(-\frac{iX}{\nu} + k \right) \right\} \right|^2 . \quad (1)$$

и численно проверено условие нормировки. Одной из переменных томограммы является положение частицы X в повернутой системе координат на фазовой плоскости с измененным масштабом осей. Угол поворота θ и коэффициент изменения масштаба связаны с другими переменными томограммы формулой $\mu = e^{-r} \cos\theta$ и $\nu = e^{r} \sin\theta$. В случае, когда масштаб осей остается неизменным, $r = 1$ и симплектическая томограмма становится оптической $w(X,\theta)$, причем именно она может быть получена в результате экспериментов по гомодинному детектированию. Томограмма выражается через специальную функцию, носящую название функции ошибок, и определенную интегральным выражением

$$Erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (2)$$

Воспользовавшись асимптотическими выражениями для функции ошибок, найдены предельные значения оптической томограммы, соответствующие углам $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$, и доказано, что формула томограммы приводит к правильным выражениям для плотности вероятностей координаты и импульса частицы.

Показано, что функция Хусими, определенная на фазовом пространстве, также выражается через интеграл ошибок

$$Q(q,p) = \frac{k\sqrt{\pi}}{2} e^{-p^2+k^2}$$

$$\times \left| e^{-k(q+ip)} Erfc\left(\frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{q+ip}{\sqrt{2}} \right) + e^{k(q+ip)} Erfc\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{q+ip}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 .$$

Рассмотрена задача об ионизации частицы при внезапном изменении параметра дельта ямы. Вероятность ионизации посчитана через интегралы, содержащие квантовые томограммы. Также вероятность ионизации выражена через функцию Вигнера связанного состояния частицы. Подробно изучены интегральные соотношения между томограммами и функцией Хусими для частицы, движущейся в дельта-потенциале. Рассмотрена задача о квантовой частице, находящейся в поле двух дельта-ям и найдены томограммы, соответствующие четному и нечетному связанным состояниям.

Рассмотрена оптическая томограмма для частицы, движущейся в дельта потенциале и проверены энтропийные неравенства, которым она удовлетворяет.

Во второй главе особое внимание уделяется томографии центра масс и ее связи с другими томографическими функциями распределений, а также с функциями квазивероятностей. Приводится обзор формализма звездочного произведения, сопоставляющего операторы наблюдаемых и соответствующие функции. Со схемой звездочного произведения тесно связаны понятие семейства операторов квантайзеров и деквантайзеров.

Подробно рассмотрено отображение, являющееся дуальным по отношению к отображению центра масс. Квантайзер и деквантайзер этого отображения получается заменой квантайзера и деквантайзера схемы центра масс между собой

$$\hat{U}^d_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N} e^{i(\xi-\vec{\mu}\hat{\vec{q}}-\vec{\nu}\hat{\vec{p}})}$$
$$\hat{D}^d_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \delta(\xi-\vec{\mu}\hat{\vec{q}}-\vec{\nu}\hat{\vec{p}}),$$

где ξ имеет смысл координаты центра масс системы с N-степенями свободы. Деквантайзер отображения позволяет сопоставить произвольной наблюдаемой, описываемой оператором A, функцию $w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})$, называемую символом оператора, согласно правилу

$$w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \mathrm{Tr}\left[\hat{A}\,\hat{U}^d_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})\right].$$

Например, томограмма центра масс $w_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})$ состояния является символом оператора плотности этого состояния в схеме центра масс. Также дуальный символ оператора позволяет вычислять среднее значение оператора

$$\langle\hat{A}\rangle = \int w_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu}) w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})\,d\xi\,d\vec{\mu}\,d\vec{\nu}.$$

Так как томограмма центра масс является распределением вероятности, дуальный символ $w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})$ оператора $\hat{A}$ играет роль функции, которая идентифицируется с наблюдаемой в схеме центра-масс.

Оператор может быть восстановлен через его символ при помощи квантайзера

$$\hat{A} = \int w^d_A(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})\hat{D}^d_{cm}(\xi,\vec{\mu},\vec{\nu})\,d\xi\,d\vec{\mu}\,d\vec{\nu}.$$

Найдено ядро звездочного произведения, соответствующее дуальной схеме

$$K^d_{cm}(\xi_1,\vec{\mu}_1,\vec{\nu}_1,\xi_2,\vec{\mu}_2,\vec{\nu}_2,\xi_3,\vec{\mu}_3,\vec{\nu}_3) = e^{i\xi_3}\int\frac{dk_1dk_2}{4\pi^2}$$
$$\times\exp\left[ik_1k_2(\vec{\mu}_2\vec{\nu}_1-\vec{\mu}_1\vec{\nu}_2)/2 + i(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\right]$$
$$\times\delta(k_1\vec{\mu}_1+k_2\vec{\mu}_2+\vec{\mu}_3)\delta(k_1\vec{\nu}_1+k_2\vec{\nu}_2+\vec{\nu}_3).$$

Ядро позволяет связать символ произведения двух произвольных операторов с символами каждого из операторов.

Выведена формула, которая связывает ядро Гроневольда с ядром центра-масс

$$K_{cm}(\xi_1,\vec{\mu}_1,\vec{\nu}_1,\xi_2,\vec{\mu}_2,\vec{\nu}_2,\xi_3,\vec{\mu}_3,\vec{\nu}_3) = (2\pi)^{-3N} e^{i(\xi_1+\xi_2)} \int G(\vec{q}_1,\vec{p}_1,\vec{q}_2,\vec{p}_2,\vec{q}_3,\vec{p}_3)$$
$$\times \exp\left[-i(\vec{\mu}_1\vec{q}_1 + \vec{\mu}_2\vec{q}_2 + \vec{\nu}_1\vec{p}_1 + \vec{\nu}_2\vec{p}_2)\right] \delta(\xi_3 - \vec{\mu}_3\vec{q}_3 - \vec{\nu}_3\vec{p}_3) d\vec{q}_1 d\vec{p}_1 d\vec{q}_2 d\vec{p}_2 d\vec{q}_3 d\vec{p}_3.$$

Ядро Гроневольда представляет собой ядро звездочного произведения символов Вейля, определенных на фазовом пространстве.

Далее изучается обобщение схемы отображения центра-масс. Мы рассматриваем квантовую систему (кластер) с N степенями свободы, составленную из r подсистем, причем k-ая подсистема обладает N_k степенями свободы и $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_r$. Для каждой подсистемы мы составляем квантайзер и деквантайзер так, чтобы для составной системой квантайзер и деквантайзер были равны

$$\hat{U}_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = \prod_{k=1}^{r} \delta\left(\xi_k - \vec{\mu}_k\,\hat{\vec{q}}_k - \vec{\nu}_k\,\hat{\vec{p}}_k\right),$$

$$\hat{D}_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N} \prod_{k=1}^{r} \exp\left(\xi_k - \vec{\mu}_k\,\hat{\vec{q}}_k - \vec{\nu}_k\,\hat{\vec{p}}_k\right),$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)$ — r- компонентный вектор $\vec{\mu} = (\vec{\mu}_1,\vec{\mu}_2,\ldots,\vec{\mu}_r)$, $\vec{\nu} = (\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2,\ldots,\vec{\nu}_r)$—$N$- компонентный вектор. Кластерное отображение является гибридом центра масс и симплектической отображений, поскольку они соответствуют случаям $r = 1$ и $r = N$, соответственно. Получено ядро, соответствующее определенным выше квантайзеру и деквантайзеру,

$$K_{cl}(\vec{\xi}'',\vec{\mu}'',\vec{\nu}'',\vec{\xi}',\vec{\mu}',\vec{\nu}',\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-N-r} \exp\left[i\vec{e}\left(\vec{\xi}'' + \vec{\xi}'\right) + i(\vec{\mu}'\vec{\nu}'' - \vec{\nu}'\vec{\mu}'')/2\right]$$
$$\times \int e^{-i\vec{k}\vec{\xi}} \delta\left(\vec{\mu}'' + \vec{\mu}' - \vec{k}\circ\vec{\mu}\right) \delta\left(\vec{\nu}'' + \vec{\nu}' - \vec{k}\circ\vec{\nu}\right) d\vec{k},$$

где $\vec{k} = (k_1,k_2,\ldots,k_r)$ и $\vec{e} = (1,1,\ldots,1)$ — r-компонентные вектора и $\vec{k}\circ\vec{\mu} = (k_1\vec{\mu}_1,k_2\vec{\mu}_2,\ldots,k_r\vec{\mu}_r)$. Кластерная томограмма $w_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu})$ определяется как символ оператора плотности, соответствующей кластерной схеме. Кластерная томограмма может быть полезной для описания больших систем, каждая из которых в свою очередь состоит из систем со многими степенями свободы.

Найдена связь между центра-масс и кластерной томограммами

$$w_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu}) = (2\pi)^{-r} \int w_{cm}(Y,\vec{k}\circ\vec{\mu},\vec{k}\circ\vec{\nu}) e^{i(Y-\vec{k}\vec{\xi})} d\vec{k}dY,$$

$$w_{cm}(Y,\vec{\mu},\vec{\nu}) = \int w_{cl}(\vec{\xi},\vec{\mu},\vec{\nu})\delta(Y - \vec{e}\vec{\xi})d\vec{\xi}.$$

Здесь $\circ$ обозначает поточечное произведение векторов.

Получено выражение для томограммы центра-масс одной из подсистем (m-ой подсистемы) через томограммы центра-масс составной системы

$$w_{cm}^{(m)}(\xi_m,\vec{\mu}_m,\vec{\nu}_m) = (2\pi)^{-1}\int w_{cm}\left(Y,k\widetilde{\vec{\mu}}^{(m)},k\widetilde{\vec{\nu}}^{(m)}\right)e^{i(Y-k\xi_m)}dk\,dY,$$

где обозначение $\widetilde{\vec{\mu}}^{(m)}$ означает, что все компоненты вектора $\vec{\mu}$ равны нулю за исключением $\vec{\mu}_m$, т.е. $\widetilde{\vec{\mu}}^{(m)} = (\vec{0},\ldots,\vec{\mu}_m,\ldots,\vec{0})$. Рассмотрен пример системы с N степенями свободы, составленную из двух подсистем со степенями свободы N_1 и N_2 ($N = N_1 + N_2$).

Было отмечено в [28], что оптическая и симплектическая томограммы могут рассматриваться как условные распределения вероятностей. Применяя аналогичные рассуждения к томограмме центра масс, мы приходим к выводу, что ее также можно интерпретировать как условное распределение вероятностей. Также отмечено о неоднозначности построения обобщения томограммы центра масс.

Рассмотрен пример состояний Шредингеровских котов $|\vec{\alpha}_\pm\rangle = N_\pm(|\alpha_1,\alpha_2\rangle \pm |-\alpha_1,-\alpha_2\rangle)$, где $N_\pm$ нормировка. Получена формула для томограммы центра масс этого состояния

$$\begin{aligned}
w^{\pm}_{cm,\vec{\alpha}}(\xi,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2) = \pi^{-1/2}\sigma^{-1/2}N_\pm^2(\vec{\alpha})\times \\
\Big\{\exp\Big[-(\xi-\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\mu_1-\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\mu_2-\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\nu_1-\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big] \\
\pm\exp\left[-2|\alpha_1|-2|\alpha_2|\right]\times \\
\exp\Big[-(\xi-i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\mu_1-i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\mu_2+i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\nu_1+i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big] \\
\pm\exp\left[-2|\alpha_1|-2|\alpha_2|\right]\times \\
\exp\Big[-(\xi+i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\mu_1+i\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\mu_2-i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\nu_1-i\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big] \\
+\exp\Big[-(\xi+\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_1\,\mu_1+\sqrt{2}\,\mathcal{R}\alpha_2\,\mu_2+\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_1\,\nu_1+\sqrt{2}\,\mathcal{I}\alpha_2\,\nu_2)^2/\sigma\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle$, обозначаемая комплексным вектором $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2)$. $\mathcal{R}\alpha$ и $\mathcal{I}\alpha$ обозначает действительную и мнимую части комплексной переменной α, $\sigma = \mu_1^2+\mu_2^2+\nu_1^2+\nu_2^2$. Мы находим линейную энтропию состояний Шредингеровских котов

$$S_\pm(\alpha_1,\alpha_2) = 1-\frac{1}{2\pi}\int w^{\pm}_{cm,\vec{\alpha}}(\xi_1,\mu,0,\nu,0)w^{\pm}_{cm,\vec{\alpha}}(\xi_2,-\mu,0,-\nu,0)e^{i(\xi_1+\xi_2)}d\mu\,d\nu\,d\xi_1 d\xi_2$$

при помощи подстановки $w^{\pm}_{cm,\vec{\alpha}}$ в полученную выше формулу

$$S_\pm(\alpha_1,\alpha_2) = 0.5-0.5\left(1\pm e^{-2|\alpha_1|^2-2|\alpha_2|^2}\right)^{-2}\left(e^{-2|\alpha_1|^2}\pm e^{-2|\alpha_2|^2}\right)^2.$$

В третьей главе мы вычисляем энтропию фон-Неймана смеси когерентных состояний, воспользовавшись методом реплик. Идея метода реплик заключается в том, что энтропию фон-Неймана состояния, определяемого матрицей плотности $\hat{\rho}$, можно представить в следующем виде

$$S(\hat{\rho}) = -\lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^n.$$

Метод позволяет обойти задачу диагонализации матрицы плотности, необходимую для получения энтропии. Мы рассматриваем квантовое состояние

$$\hat{\rho} = a\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + c\,|\alpha\rangle\langle\beta| + c^*\,|\beta\rangle\langle\alpha| + b\,|\beta\rangle\langle\beta|, \tag{3}$$

представляющее собой смесь когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ общего вида. Здесь константы a и b положительные, а c комплексное. Вычисляя след реплик оператора плотности, мы получаем энтропию смеси когерентных состояний в явном виде

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}) = &-\frac{1+\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2} \\ &\times\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2}\right) \\ &-\frac{1-\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2} \\ &\times\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-4\left(ab-|c|^2\right)\left(1-e^{-|\alpha-\beta|^2}\right)}}{2}\right). \end{aligned}$$

Найденную формулу мы используем для вычисления энтропии подсистем смеси шредингеровских котов

$$\hat{\rho} = a\,|\overrightarrow{\alpha_+}\rangle\langle\overrightarrow{\alpha_+}| + b\,|\overrightarrow{\alpha_-}\rangle\langle\overrightarrow{\alpha_-}|,$$

где дмумодовые четные и нечетные когерентные состояния обозначаются

$$|\vec{\alpha}_\pm\rangle = N_\pm(|\alpha_1,\alpha_2\rangle \pm |-\alpha_1,-\alpha_2\rangle), \quad N_\pm^{-2} = (2\pm 2e^{-2|\alpha_1|^2-2|\alpha_2|^2}).$$

Мы рассматриваем неравенство для параметров чистоты смеси двухмодовых когерентных состояний, а также смеси когерентных и тепловых состояний.

В четвертой главе мы изучаем модель открытой системы, представляющую собой два связанных квантовых осциллятора (А осциллятор), каждый из которых помещен в свой тепловой резервуар (баню). Согласно нашей постановке задачи, каждая из тепловых бань описывается бесконечным набором невзаимодействующих осцилляторов (B осцилляторы). Гамильтониан всей системы равен

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) + \lambda\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right) + \sum_k \omega_k\left(\hat{b}_{1k}^\dagger\hat{b}_{1k} + \hat{b}_{2k}^\dagger\hat{b}_{2k}\right) + \sum_k\left[\lambda_k\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{b}_{1k} + \hat{a}_2^\dagger\hat{b}_{2k}\right) + \lambda_k^*\left(\hat{a}_1\hat{b}_{1k}^\dagger + \hat{a}_2\hat{b}_{2k}^\dagger\right)\right].$$

Бозонные операторы рождения и уничтожения $\hat{a}_1^\dagger$, $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2^\dagger$, $\hat{a}_2$ относятся к связанным осцилляторам одинаковой частоты ω, а операторы $\hat{b}_{1k}^\dagger$, $\hat{b}_{1k}$ и $\hat{b}_{2k}^\dagger$, $\hat{b}_{2k}$ к осцилляторам резервуаров с частотами ω_k; комплексные константы взаимодействия рассматриваемых осцилляторов с осцилляторами бань и между собой обозначены λ_k и λ, соответственно.

Предполагается, что в начальный момент времени A осциллятор находится в факторизованном когерентном состоянии $|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle$, а осцилляторы первого и второго резервуаров в тепловых состояниях, описывающихся матрицами плотности

$$\hat{\rho}_{1k} = \int \exp\left(-\frac{|\beta_{1k}|^2}{\langle n_{1k}\rangle}\right)|\beta_{1k}\rangle\langle\beta_{1k}|\frac{d^2\beta_{1k}}{\pi\langle n_{1k}\rangle},$$
$$\hat{\rho}_{2k} = \int \exp\left(-\frac{|\beta_{2k}|^2}{\langle n_{2k}\rangle}\right)|\beta_{2k}\rangle\langle\beta_{2k}|\frac{d^2\beta_{2k}}{\pi\langle n_{2k}\rangle},$$

где средние числа заполнения задаются формулами

$$\langle n_{1k}\rangle = \left(\exp\left(\frac{\omega_k}{T_1}\right)-1\right)^{-1}, \quad \langle n_{2k}\rangle = \left(\exp\left(\frac{\omega_k}{T_2}\right)-1\right)^{-1}.$$

Таким образом каждая из тепловых бань характеризуется своей температурой. Предполагается, что в исходный момент времени состояния A и B осцилляторов независимы.

Данная система обладает тем свойством, что изначально гауссовые состояния, а в нашем случае начальное состояние является гауссовым, остаются гауссовыми в процессе эволюции. Система является интегрируемой.

В работе [18] было найдено, что оператор плотности A осциллятора в произвольный момент времени дается выражением

$$\hat{\rho}_A(t) = \int |\alpha_1(t),\alpha_2(t)\rangle\langle\alpha_1(t),\alpha_2(t)|\prod_{ik}\exp\left(-\frac{|\beta_{ik}|^2}{\langle n_{ik}\rangle}\right)\frac{d^2\beta_{ik}}{\pi\langle n_{ik}\rangle},$$

где функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = -i\omega\alpha_1(t) - i\sum_k \lambda_k\beta_{1k}(t) - i\lambda\alpha_2(t),$$
$$\frac{d\alpha_2(t)}{dt} = -i\omega\alpha_2(t) - i\sum_k \lambda_k\beta_{2k}(t) - i\lambda\alpha_1(t),$$
$$\frac{d\beta_{ik}(t)}{dt} = -i\omega_k\beta_{ik}(t) - i\lambda_k^*\alpha_i(t)$$

с начальными условиями $\alpha_i(0) = \alpha_i, \quad \beta_{ik}(0) = \beta_{ik}$. Воспользовавшись сходством полученной системы уравнений с системой, рассмотренной Вайскопфом и Вигнером при рассмотрении задачи по теории излучения атомов, можно найти явный вид функций, входящих в оператор плотности связанных осцилляторов

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \alpha_1\left(u_1(t)+u_2(t)\right)/2 + \alpha_2\left(u_1(t)-u_2(t)\right)/2\\ &+\sum_k \beta_{1k}\left(v_{1k}(t)+v_{2k}(t)\right)/2 + \beta_{2k}\left(v_{1k}(t)-v_{2k}(t)\right)/2,\\ \alpha_2(t) &= \alpha_1\left(u_1(t)-u_2(t)\right)/2 + \alpha_2\left(u_1(t)+u_2(t)\right)/2\\ &+\sum_k \beta_{1k}\left(v_{1k}(t)-v_{2k}(t)\right)/2 + \beta_{2k}\left(v_{1k}(t)+v_{2k}(t)\right)/2.\end{aligned}$$

Здесь функции $u_i(t)$ и $v_{ik}(t)$ имеет вид

$$u_1(t) = \exp\left[-\varkappa_1 t - i(\Omega_1+\delta\Omega_1)t\right], \quad u_2(t) = \exp\left[-\varkappa_2 t - i(\Omega_2+\delta\Omega_2)t\right]$$
$$v_{1k}(t) = \frac{-i\lambda_k}{\varkappa_1 + i(\Omega_1+\delta\Omega_1-\omega_k)}\left\{\exp\left[-i\omega_k t\right] - \exp\left[-\varkappa_1 t - i(\Omega_1+\delta\Omega_1)t\right]\right\},$$
$$v_{2k}(t) = \frac{-i\lambda_k}{\varkappa_2 + i(\Omega_2+\delta\Omega_2-\omega_k)}\left\{\exp\left[-i\omega_k t\right] - \exp\left[-\varkappa_2 t - i(\Omega_2+\delta\Omega_2)t\right]\right\},$$

в которых $\Omega_1 = \omega+\lambda$ и $\Omega_2 = \omega-\lambda$. Константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, играющие роль коэффициентов затухания, а величины $\delta\Omega_1$ и $\delta\Omega_2$, представляющие собой смещение частот, неявно определяются выражением

$$\delta\Omega_1 - i\varkappa_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{\Omega_1-\omega_k+i\epsilon}, \quad \delta\Omega_2 - i\varkappa_2 = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{\Omega_2-\omega_k+i\epsilon}.$$

При решении данной системы уравнений предполагалось, что константы $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, а также $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, определенные выше, должны быть малы по сравнению с частотами Ω_1 и Ω_2 и константой взаимодействия осцилляторов λ.

В процессе эволюции связанные осцилляторы достигают равновесного состояния, задающегося матрицей ковариаций

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1p_1} & Q_{x_1x_2} & Q_{x_1p_2} \\ Q_{x_1p_1} & Q_{p_1p_1} & Q_{x_2p_1} & Q_{p_1p_2} \\ Q_{x_1x_2} & Q_{x_2p_1} & Q_{x_2x_2} & Q_{x_2p_2} \\ Q_{x_1p_2} & Q_{p_1p_2} & Q_{x_2p_2} & Q_{p_2p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{-1}A & 0 & \omega^{-1}B & 0 \\ 0 & \omega A & 0 & \omega B \\ \omega^{-1}B & 0 & \omega^{-1}A & 0 \\ 0 & \omega B & 0 & \omega A \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\langle n_1^{\Omega_1}\rangle + \langle n_2^{\Omega_1}\rangle + \langle n_1^{\Omega_2}\rangle + \langle n_2^{\Omega_2}\rangle\right). \\ B &= \frac{1}{4}\left(\langle n_1^{\Omega_1}\rangle + \langle n_2^{\Omega_1}\rangle - \langle n_1^{\Omega_2}\rangle - \langle n_2^{\Omega_2}\rangle\right), \\ \langle n_j^{\Omega_i}\rangle &= \left(\exp\left(\frac{\Omega_i}{T_j}\right) - 1\right)^{-1}, \quad i = 1{,}2 \end{aligned}$$

Полученная ковариационная матрица соответствует негиббсовскому состоянию и определяется температурами обеих тепловых бань.

Найденная матрица плотности осциллятора $\hat{\rho}_A$ не факторизуется, так как функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ линейно зависят от β_{1k} и β_{2k}. Это естественно ввиду того, что связанные осцилляторы взаимодействуют и, следовательно, не являются независимыми. Однако, неизвестно, кого рода корреляции возникают между рассматриваемыми осцилляторами, является ли равновесное состояние $\hat{\rho}_A(t \to \infty)$ запутанным или сепарабельным?

Равновесное состояние является двумодовыым гауссовым состоянием. Для состояний такого вида известен критерий сепарабельности — критерий Саймона. Непосредственным следствием критерия является то, что если элементы ковариационной матрицы двумодового гауссового состояния удовлетворяет неравенству

$$\det\begin{pmatrix} Q_{x_1x_2} & Q_{x_1p_2} \\ Q_{x_2p_1} & Q_{p_1p_2} \end{pmatrix} \geq 0,$$

то данное состояние является сепарабельным. Так как равновесное состояние удовлетворяет всем условиям следствия критерия Саймона, то оно является сепарабельным. В явном виде была найдена матрица плотности равновесного состояния

$$\rho_A(x_1',x_2',x_1,x_2;\infty) = \frac{\omega}{\pi\sqrt{\coth\frac{\Omega_1}{2T_1}\coth\frac{\Omega_2}{2T_2}}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\omega}{4}\left(\coth\frac{\Omega_1}{T_1}+\coth\frac{\Omega_2}{T_2}\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_1'^2+x_2'^2\right)\right.$$

$$+\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\sinh\frac{\Omega_1}{T_1}}+\frac{1}{\sinh\frac{\Omega_2}{T_2}}\right)(x_1x_1'+x_2x_2')$$

$$-\frac{\omega}{2}\left(\coth\frac{\Omega_1}{T_1}-\coth\frac{\Omega_2}{T_2}\right)(x_1x_2+x_1'x_2')$$

$$\left.+\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\sinh\frac{\Omega_1}{T_1}}-\frac{1}{\sinh\frac{\Omega_2}{T_2}}\right)(x_1'x_2+x_1x_2')\,\right].$$

а также соответствующая функция Вигнера

$$W_A(x_1,p_1,x_2,p_2;\infty) = \frac{\left(e^{\Omega_1/T_1}-1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}-1\right)}{\pi^2\left(e^{\Omega_1/T_1}+1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}+1\right)}\times$$

$$\exp\left(-\frac{e^{\Omega_1/T_1+\Omega_2/T_2}-1}{\left(e^{\Omega_1/T_1}+1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}+1\right)}\left(\omega x_1^2+\omega^{-1}p_1^2+\omega x_2^2+\omega^{-1}p_2^2\right)\right.$$

$$\left.+2\,\frac{e^{\Omega_2/T_2}-e^{\Omega_1/T_1}}{\left(e^{\Omega_1/T_1}+1\right)\left(e^{\Omega_2/T_2}+1\right)}\left(\omega x_1x_2+\omega^{-1}p_1p_2\right)\right).$$

Было показано, что в случае равных температур резервуаров равновесное состояние является гиббсовским.

В пятой главе рассматриваются нелинейные осцилляторы (f-осцилляторы) и соответствующие f-когерентные состояния, являющиеся обобщением обычных когерентных состояний на случай нелинейных колебаний.

Общий вид разложения f-когерентного состояния по фоковским состояниям, имеет вид

$$|\alpha,f\rangle = N_f(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}f(n)!}|n\rangle,$$

где введено удобное обозначение $f(n)! = f(0)f(1)f(2)\dots f(n)$, а нормировочная константа равна $N_f(\alpha) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n![f(n)!]^2}\right]^{-1/2}$. Получена формула для томограммы f-осциллятора

$$M(X,\mu,\nu) = \frac{\exp\left(-\frac{X^2}{\mu^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\mu-i\nu}{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)^n H_n\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)\right|^2,$$

которая выражается через полиномы эрмита H_n. Здесь и далее $c_n = N_f(\alpha)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}f(n)!}$.

Мы подробно изучаем f-когерентное состояние $|\alpha,f_\lambda\rangle$, соответствующее нелинейной функции

$$f_\lambda(\hat{n}) = \lambda^{-1/2}\sqrt{\hat{n}-1+\lambda}.$$

f-когерентные состояния такого типа могут представлять интерес в различных задачах, например, имеющих отношение к эффекту Керра или связанных с потенциалом Пёшль-Теллера. Данное состояние имеет вид

$$|\alpha,f_\lambda\rangle = \left[{}_0F_1\left(\lambda,\lambda|\alpha|^2\right)\right]^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sqrt{\frac{\lambda^n\Gamma(\lambda)}{n!\,\Gamma(\lambda+n)}}|n\rangle,$$

где ${}_0F_1(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\Gamma(a)/\left(n!\,\Gamma(a+n)\right)$ есть вырожденная гипергеометрическая функция. Найдена формула для симплектической томограммы состояния $|\alpha,f_\lambda\rangle$

$$M_\lambda(X,\mu,\nu) = \frac{1}{{}_0F_1\left(\lambda,\lambda|\alpha|^2\right)}\frac{\exp\left(-\frac{X^2}{\mu^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}$$
$$\times\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\sqrt{\frac{\lambda^n\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+n)}}\left(\frac{\mu-i\nu}{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)^n H_n\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)\right|^2,$$

а также получено выражение для томограммы счета фотонов через обобщенные полиномы Лагерра $L_m^{(n)}$

$$\mathcal{W}\left(n,\alpha\right) = \exp\left(-|\alpha|^2\right)\left|\sum_{m=0}^{n}c_m\sqrt{\frac{m!}{n!}}\,\alpha^{n-m}\,L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=n+1}^{\infty}c_m\sqrt{\frac{n!}{m!}}\,(-\alpha^*)^{m-n}\,L_n^{(m-n)}(|\alpha|^2)\right|^2.$$

Воспользовавшись свойствами обобщенных полиномов Лагерра, мы получаем функцию Хусими для рассматриваемого состояния

$$Q(\alpha) = \exp(-|\alpha|^2)\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}}\right|^2.$$

Далее мы используем метод, разработанный в [27], а также известные энтропийные неравенства [29] для получения неравенств для обобщенных полиномов Лагерра. Неравенство выглядит следующим образом

$$
\begin{aligned}
-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\lambda_{2m}(n,x)+\lambda_{2m+1}(n,x)\right)\ln\left(\lambda_{2m}(n,x)+\lambda_{2m+1}(n,x)\right)\\
-\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m}(n,x)\right)+x\,e^{x}\\
-\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m+1}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{2m+1}(n,x)\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{m}(n,x)\ln\lambda_{m}(n,x)\geq 0,
\end{aligned}
$$

где x положительное и введены функции

$$
\lambda_m(n,x)=\begin{cases}\frac{n!}{m!}x^{m-n}\left[L_n^{(m-n)}(x)\right]^2, & \text{for} \quad m\geq n,\\ \frac{m!}{n!}x^{n-m}\left[L_m^{(n-m)}(x)\right]^2, & \text{for} \quad m\leq n.\end{cases}
$$

Далее мы приводим общую схему, с помощью которой можно получить множество других неравенств. Так для произвольных $s\geq 2$ выполнено

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{s-1}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{l=0}^{s-1}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)\\
-\sum_{l=0}^{s-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)\ln\left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{sj+l}(n,x)\right)+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{m}(n,x)\ln\lambda_{m}(n,x)+x\,e^{x}\geq 0.
\end{aligned}
$$

Мы изучаем обобщение нелинейных когерентных состояний на случай двух мод

$$
|\alpha_1\,\alpha_2,f\rangle=N_f(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}}{\sqrt{n_1!\,n_2!}\,f(n_1+n_2)!}|n_1\,n_2\rangle,
$$

$$
N_f(\alpha_1,\alpha_2)=\left(\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{|\alpha_1|^{2n_1}|\alpha_2|^{2n_2}}{n_1!n_2![f(n_1+n_2)!]^2}\right)^{-1/2}.
$$

Мы показываем, что нелинейность, описываемая функцией f, приводит к запутанности состояний и анализируем запутанность с использованием линейной энтропии одной из мод

$$
S_f(\alpha_1,\alpha_2)=1-N_f^4(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n,m,p,k=0}^{\infty}\frac{|\alpha_1|^{2(n+p)}|\alpha_2|^{2(k+m)}}{m!\,n!\,k!\,p!f(n+m)!f(p+m)!f(p+k)!f(n+k)!}.
$$

Здесь линейная энтропия

$$
S_f=1-\mathrm{Tr}\hat{\rho}_1^2,\quad \hat{\rho}_1=\mathrm{Tr}_2|\alpha_1\,\alpha_2,f\rangle\langle\alpha_1\,\alpha_2,f|.
$$

Мы подробно изучаем полученную формулу для различных предельных случаев параметров системы.

Также рассмотрены суперпозиции двумодовых f-когерентных состояний, являющиеся обобщением состояний шредингеровских котов на нелинейный случай

$$|\psi\rangle_f^{\pm} = N_{\pm}(|\alpha\,\alpha,f\rangle \pm |-\alpha\ -\alpha,f\rangle),$$

где $N_{\pm}$ нормировочные константы. Мы исследуем запутанность этих состояний при помощи линейной энтропии.

В шестой главе мы приводим краткий обзор спиновой томограммы $w(m,\vec{n})$ системы со спином j, а также ее свойств. Далее мы рассматриваем только системы со спином 1/2 (кубиты). В главе показано, как из спиновой томограммы получается вероятностная параметризация матриц плотности спина-1/2

$$\rho = \frac{I}{2} + \left(p_k - \frac{1}{2}\right)\sigma_k\,.$$

Величины p_1, p_2 и p_3 имеют интерпретацию вероятности проекции спина $m = +1/2$ на три взаимно перпендикулярные оси. Они удовлетворяют неравенствам

$$(p_1 - 1/2)^2 + (p_2 - 1/2)^2 + (p_3 - 1/2)^2 \leq 1/4\,.$$

Основная цель данной главы заключается в исследовании с использованием вероятностной параметризации действия отображения, возводящего матрицу плотности кубита в произвольную действительную степень α. Данное отображение, сохраняющее все свойства матриц плотности —эрмитовость, неотрицательность, а также след, называется «нелинейным каналом» и является обобщением отображения, рассмотренного в работах [25; 26].

$$\rho \to \Phi_\alpha(\rho) = \frac{\rho^\alpha}{\mathrm{Tr}\rho^\alpha}.$$

Матрица состояния, полученная действием нелинейного отображения, имеет вид

$$\Phi_\alpha(\rho) = \frac{I}{2} + \left(\tilde{p}_k - \frac{1}{2}\right)\sigma_k\,,$$

где вероятности матрицы $\Phi_\alpha(\rho)$ даются выражением

$$\tilde{p}_k - \frac{1}{2} = \frac{\left(p_k - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\mu_\alpha - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)^2}}.$$

Здесь введен параметр чистоты состояния $\Phi_\alpha(\rho)$

$$\mu_\alpha = \frac{\lambda_+^{2\alpha} + \lambda_-^{2\alpha}}{(\lambda_+^\alpha + \lambda_-^\alpha)^2},$$

изменяющийся в пределах от 1/2, что соответствует максимально смешанному состоянию $I/(2j+1)$, до 1 для чистого состояния. Из полученной формулы видно, что все вероятностные параметры изменяются сходным образом, более того, каждый из $\tilde{p}_k$ зависит от α через параметр чистоты. Действие нелинейного отображения при больших значениях параметра α дает собственное состояние начальной матрицы плотности ρ, соответствующее ее максимальному собственному значению. Можно сказать, что нелинейное отображение приводит к очищению начального состояния в том смысле, что полученное состояние практически чистое. Абсолютно другая ситуация наблюдается в случае, когда собственное состояние начальной матрицы плотности равно 1/2, что соответствует максимально смешанному (хаотичному) начальному состоянию $\rho = I/2$, и нелинейное отображение для данного состояния становится тождественным единице.

Далее мы рассматриваем энтропийную меру близости (расстояния) между двумя квантовыми состояниями, матрицы плотности которых получены после действия нелинейного отображения с различными параметрами на одно и то же начальное состояние. В качестве энтропийной меры мы выбрали относительную энтропию Тсаллиса, определенную по формуле.

$$S_q(\rho \parallel \sigma) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \mathrm{Tr}\rho^q\sigma^{1-q}\right).$$

Относительная энтропия Тсаллиса является однопараметрическим обобщением относительной квантовой энтропии, основанной на энтропии фон Неймана. Получена формула для относительной энтропия Тсаллиса для состояний $\Phi_\alpha(\rho)$ и $\Phi_\beta(\rho)$

$$S_q(\Phi_\alpha(\rho) \parallel \Phi_\beta(\rho)) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \frac{\lambda_+^{\alpha q+\beta(1-q)} + \lambda_-^{\alpha q+\beta(1-q)}}{\left(\lambda_+^\alpha + \lambda_-^\alpha\right)^q \left(\lambda_+^\beta + \lambda_-^\beta\right)^{1-q}}\right).$$

Мы подробно рассматриваем квантовую энтропию Тсаллиса, являющуюся однопараметрическим обобщением энтропии фон Неймана, и обсуждаем ее классическую версию. Мы используем энтропию Тсаллиса для анализа свойств нелинейного отображения.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Список литературы

1. *Wigner, E.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium / E. Wigner // Physical Review A. — 1932. — Vol. 40, no. 5. — P. 749.
2. *Husimi, K.* Some Formal Properties of the Density Matrix / K. Husimi // Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. — 1940. — Vol. 22, no. 4. — P. 264—314.
3. *Glauber, R. J.* Photon Correlations / R. J. Glauber // Phys. Rev. Lett. — 1963. — Vol. 10. — P. 84—86. — DOI: `10.1103/PhysRevLett.10.84`.
4. *Sudarshan, E. C. G.* Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams / E. C. G. Sudarshan // Phys. Rev. Lett. — 1963. — Vol. 10. — P. 277—279. — DOI: `10.1103/PhysRevLett.10.277`.
5. *Bertrand, J.* A tomographic approach to Wigner's function / J. Bertrand, P. Bertrand // Foundation of Physics. — 1987. — Vol. 17, no. 4. — P. 397—405.
6. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum / D. Smithey [et al.] // Physical review letters. — 1993. — Vol. 70, no. 9. — P. 1244.
7. Homodyne estimation of quantum state purity by exploiting the covariant uncertainty relation / V. I. Man'ko [et al.] // Physica Scripta. — 2011. — Vol. 83, no. 4. — P. 045001.
8. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum / D. T. Smithey [et al.] // Physical Review Letters. — 1993. — Vol. 70, no. 9. — P. 1244.
9. *Mancini, S.* Wigner function and probability distribution for shifted and squeezed quadratures / S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi // Quantum and Semiclassical Optics: Journal of the European Optical Society Part B. — 1995. — Vol. 7, no. 4. — P. 615—623.
10. *Mancini, S.* Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography / S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi // Foundation of Physics. — 1997. — Vol. 27, no. 6. — P. 801—824.
11. *Mancini, S.* Symplectic tomography as classical approach to quantum systems / S. Mancini, V. Man'Ko, P. Tombesi // Physics Letters A. — 1996. — Vol. 213, no. 1/2. — P. 1—6.
12. *Mancini, S.* Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography / S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombest // Foundations of Physics. — 1997. — Vol. 27, no. 6. — P. 801—824.

13. *Arkhipov, A. S.* Tomography for several particles with one random variable / A. S. Arkhipov, Y. E. Lozovik, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. — 2003. — Vol. 24, no. 3. — P. 237—255.

14. *Arkhipov, A. S.* Quantum transitions in the center-of-mass tomographic probability representation / A. S. Arkhipov, V. I. Man'ko // Physical Review A. — 2005. — Vol. 71, no. 1. — P. 012101.

15. *Cahill, K. E.* Density Operators and Quasiprobability Distributions / K. E. Cahill, R. J. Glauber // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 177, issue 5. — P. 1882—1902. — DOI: `10.1103/PhysRev.177.1882`.

16. *Dodonov, V. V.* Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator / V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Man'ko // Physica. — 1974. — Vol. 72, no. 3. — P. 597—615.

17. Entropy generation in Gaussian quantum transformations: applying the replica method to continuous-variable quantum information theory / C. N. Gagatsos [et al.] // npj Quantum Information. — 2016. — Vol. 2. — P. 15008.

18. *Glauber, R.* Damping and fluctuations in coupled quantum oscillator systems / R. Glauber, V. Man'ko // Sov. Phys. JETP. — 1984. — Vol. 60. — P. 450—457.

19. f-Oscillators and nonlinear coherent states / V. I. Man'ko [et al.] // Physica Scripta. — 1997. — Vol. 55, no. 5. — P. 528.

20. *Kilin, S. Y.* Single-atom laser generates nonlinear coherent states / S. Y. Kilin, A. B. Mikhalychev // Physical Review A. — 2012. — Vol. 85, no. 6. — P. 063817.

21. A tomographic setting for quasi-distribution functions / V. Man'ko [et al.] // Reports on Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 61, no. 3. — P. 337—359.

22. *Man'ko, V. I.* Moyal and tomographic probability representations for f-oscillator quantum states / V. I. Man'ko, G. Marmo, F. Zaccaria // Physica Scripta. — 2010. — Vol. 81, no. 4. — P. 045004.

23. *Zyczkowski, K.* Induced measures in the space of mixed quantum states / K. Zyczkowski, H.-J. Sommers // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2001. — Vol. 34, no. 35. — P. 7111.

24. *Chernega, V. N.* Triangle Geometry of the Qubit State in the Probability Representation Expressed in Terms of the Triada of Malevich's Squares / V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. — 2017. — Vol. 38, no. 2. — P. 141—149.

25. *Man'ko, V. I.* Nonlinear channels of Werner states / V. I. Man'ko, R. S. Puzko // Journal of Russian Laser Research. — 2014. — Vol. 35, no. 4. — P. 362—368.

26. *Man'ko, V.* Entropic and information inequality for nonlinearly transformed two-qubit X-states / V. Man'ko, R. Puzko // EPL (Europhysics Letters). — 2015. — Vol. 109, no. 5. — P. 50005.

27. *Man'ko, M. A.* Properties of nonnegative Hermitian matrices and new entropic inequalities for noncomposite quantum systems / M. A. Man'ko, V. I. Man'ko // Entropy. — 2015. — Vol. 17, no. 5. — P. 2876—2894.

28. *Man'ko, M. A.* Tomographic entropic inequalities in the probability representation of quantum mechanics / M. A. Man'ko, V. I. Man'ko // AIP Conf. Proc. (Mexico). Vol. 1488. — AIP. 2012. — P. 110—121.

29. *Lieb, E. H.* Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy / E. H. Lieb, M. B. Ruskai // Journal of Mathematical Physics. — 1973. — Vol. 14, no. 12. — P. 1938—1941.

Список публикаций по теме диссертации

[1] *Dudinets, I. V.* Bound State of a Particle in the Dirac Delta Potential in the Tomographic-Probability Representation of Quantum Mechanics / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. – 2013. – Vol. 34, no. 6. – P. 593–602.

[2] *Dudinets, I. V.* Optical Tomograms and Husimi Q-Function for a Particle Moving in the Dirac Delta Potential / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. – 2014. – Vol. 35, no. 5. – P. 470–477.

[3] *Dudinets, I. V.* The replica method and entropy for a mixture of two-mode even and odd Schrödinger cat states / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // Journal of Russian Laser Research. – 2015. –Vol. 36, no. 3. –P. 251–257

[4] *Dudinets, I. V.* Center-of-Mass Tomography and Wigner Function for Multimode Photon States / I. V. Dudinets, V. I. Man'ko // International Journal of Theoretical Physics. – 2018. – P. 1–14.

[5] Tomography on f-oscillators / I. Dudinets [et al.] // Physica Scripta. – 2017. – Vol. 92, no. 11. – P. 115101.

[6] *Dudinets, I. V.* Characterization of the nonlinear qubit map using the probability parametrization / I. Dudinets, V. Man'ko // EPL (Europhysics Letters). – 2018. –Vol. 123, no. 5. –– P. 50004.

[7] *Dudinets, I. V.* Quantum correlations for two coupled oscillators interacting with two heat baths / I. Dudinets, V. Man'ko // Canadian Journal of Physics. –2019. –– DOI: 10.1139/cjp-2019-0067.

Дудинец Иван Васильевич

Исследование преобразований квантовых состояний
в томографическом представлении при унитарной
и неунитарной эволюции в квантовой оптике и квантовой механике

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.__.____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография МФТИ