На правах рукописи

Хоанг Ван Нгуен

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕПОДОБНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Воронеж – 2023

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель: **Провоторов Вячеслав Васильевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Ерусалимский Яков Михайлович**,
доктор технических наук,
профессор, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики

Тихомиров Сергей Германович,
доктор технических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», профессор кафедры информационных и управляющих систем

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»**

Защита состоится «24» ноября 2023 года в 14 часов в конференц-зале на заседании диссертационного совета 24.2.286.04, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», по адресу: г. Воронеж, Московский просп., д. 14, ауд. 216.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» и на сайте www.cchgeu.ru.

Автореферат разослан «28» сентября 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гусев Константин Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время имеется немало теоретических исследований в направлении анализа эволюционных дифференциальных систем (и математических моделей, использующих такие системы), пространственная переменная которых изменяется в сетеподобных одномерных и многомерных областях (работы А. С. Волковой, Ю. А. Гнилицкой, М. Г. Завгороднего, О. А. Махиновой, О. М. Пенкина, С. Л. Подвального, В. В. Провоторова, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, V. A. Yurko). В указанных работах основные результаты теоретического характера достаточно глубоко освящены, естественным образом возникшие при анализе сложности, связанные с неклассической структурой сетеподобных областей, преодолены. Исследования в направлении численного анализа дифференциальных систем эволюционного типа и математических моделей с их использованием, несмотря на полученную обширную теоретическую базу, имеют немало своих особенностей (и специфику технологического плана, выраженную в составлении конструктивных алгоритмов, комплексов проблемно-ориентированных программ) и пока не приобрели характера систематического изучения (например, работы А. В. Боровских, В. В. Провоторова, С. М. Сергеева, L. N. Borisoglebskaya, V. I. Ryazhskikh, S. L. Podvalny, A. P. Zhabko). Отсюда со всею очевидностью следует: история развития численных методов анализа математических моделей сетеподобных процессов находится в начальной стадии формирования. В настоящей диссертационной работе рассматривается актуальная проблема численного анализа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов. Для математического описания носителей таковых процессов используются геометрические графы (одномерные сети) и сетеподобные области (многомерные сети), в приложениях это гидро- и газонефтепроводы, волноводы, а также трубопроводные сети для переноса иных сплошных сред. Для математического описания собственно процессов применяются формализмы начально-краевых задач, построенные на основе использования классических эволюционных дифференциальных уравнениях с частными производными, а также их частичной дискретизации (полудискретизации по временной переменной). Последнее осуществляет переход от дифференциальных к соответствующим дифференциально-разностным системам. Такой переход (редукция) открывает пути численного анализа изучаемых процессов (работы А. С. Волковой, О. А. Махиновой, В. В. Провоторова). Результаты исследования позволяют более глубоко понимать и прогнозировать эволюцию процессов в сетеподобных носителях, что имеет большое практическое значение в различных областях промышленности и экономики. Актуальность выбранной тематики исследования продиктована необходимостью развития средств математического описания сетеподобных эволюционных процессов формализмами численных методов анализа (корректная аппроксимация дифференциальных систем дифференциально-разностными, устойчивость дифференциально-разностных схем), разработка и обоснование алгоритмов (сходимость, счетная устойчивость, адаптация к изучаемому типу процессов), формирование программного комплекса проблемно-ориентированных программ с достаточно простым интерфейсом.

Цель работы и задачи исследования. **Целью** диссертационного исследования является разработка, обоснование численных средств для анализа моделей эволюционных сетеподобных процессов различного типа, формирование и обоснование алгоритмов для использования в прикладных задачах, где присутствует характерная структурная специфика сложносочлененных сетеподобных объектов,

разработка проблемно-ориентированного программного комплекса, адаптированного к решению прикладных задач. Для реализации указанной цели сформулированы следующие **задачи**:

– разработка нового подхода анализа математических моделей эволюционных сетеподобных процессов, основанного на редукции дифференциальной системы к дифференциально-разностной;

– формализация достаточных условий устойчивости дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров;

– формализация достаточных условий непрерывности по исходным данным дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров, корректность дифференциально-разностных схем;

– формализация достаточных условий устойчивости многообразия дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем с весами;

– формализация достаточных условий сходимости многообразия дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем с весами, корректность дифференциально-разностных схем;

– разработка средств оптимизации применительно к дифференциально-разностным системам с пространственным переменным на сетях и сетеподобных областях;

– разработка и обоснование алгоритмов отыскания приближенных решений многомерных задач переноса сплошных сред и задач колебаний упругих континуумов;

– разработка проблемно-ориентированного программного комплекса, адаптированного к решению прикладных задач, с исчерпывающими пояснениями и рекомендациями, сертификация программной продукции для ЭВМ в установленном порядке Российской Федерации.

Объект исследования: математические модели сетеподобных эволюционных процессов и явлений, носители которых по своей структуре аналогичны структуре геометрического графа (одномерные сети) или структуре сетеподобной области (многомерные сети).

Предмет исследования: численные методы анализа различного типа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов и явлений, включающий в себя получение условий устойчивости, непрерывности по исходным данным дифференциальных систем и им соответствующих дифференциально-разностных схем указанных моделей, а также формирование условий существования и единственности решения различного типа оптимизационных задач сетеподобных эволюционных процессов и явлений.

Научная новизна диссертационной работы содержится в следующих результатах:

– разработан новый подход анализа математических моделей различного типа эволюционных сетеподобных процессов, отличительная особенность которого состоит в возможности описания как динамики и неклассических свойств перемещения многофазных сред в сложноструктурированных носителях, так и описании динамики волновых явлений, возникающих в сложноструктурированных носителях;

– разработан новый метод численного анализа дифференциальной системы, отличительной особенностью которого является используемая редукция этой системы к дифференциально-разностной системе;

– сформулированы достаточные условия, гарантирующие разрешимость дифференцальной системы в слабой постановке, отличительной особенностью

которых является сохранение свойств определенности исходных дифференциальных операторов при редукции к дифференциально-разностным для широкого класса пространств допустимых решений;

– получены достаточные условия устойчивости дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых и с весовыми параметрами, отличительная особенность которых состоит в общих принципах анализа, которые могут быть распространены на другие случаи;

– указаны достаточные условия однозначной разрешимости различного типа оптимизационных задач для дифференциально-разностных и дифференциальных систем, отличительная особенность которых состоит в решении вопроса оптимальной организации алгоритма получения решения с заданной точностью;

– разработана серия алгоритмов отыскания приближенных решений n-мерных задач переноса сплошных сред и задач колебаний упругих континуумов, проведена серия вычислительных экспериментов, отличительной особенностью которых является максимальная адаптация к задачам прикладного характера;

– разработаны проблемно-ориентированные программные комплексы для анализа и решения прикладных задач.

Практическая значимость. Разработаны новые методы численного анализа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов, учитывающие особенности как носителей сетеподобных процессов, так и сложной реологии переносимых сред. Предложенные методы в достаточной степени адекватности соответствуют изучаемым свойствам реальных процессов и имеют перспективы для широкого использования в различных прикладных направлениях, где наличествуют свойства сетевого характера. Результаты используются в качестве базовой информации для специальных курсов теории оптимизации сетевых гидродинамических процессов, читаемых магистрам математического факультета Воронежского государственного университета, Института математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета и слушателям ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж). Результаты могут быть использованы в организациях, практическая деятельность которых ориентирована на решение задач, соответствующих тематике диссертационной работы.

Теоретическая значимость. Результаты исследования являются важным вкладом в развитие теории математического моделирования эволюционных сетеподобных процессов. Разработанный программный комплекс может быть использован на предварительном этапе теоретических исследований для выявлений особенностей математического описания различного типа явлений в узловых местах сетевых носителей процессов переноса веществ в сетеподобных системах. Данный комплекс может также использоваться для тестирования моделей переноса крови по кровеносной системе живого организма, что позволяет ускорить теоретические исследования медицинского характера.

Методология и методы исследования. Используются современные разработки вычислительных методов исследования математических моделей, метод полудискретизации по временной переменной, методы теории устойчивости и оптимизации, теории графов, спектралная теория операторов, позволяющие выполнить расчеты и визуализацию полученных результатов в среде PascalABC.NET.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математические методы моделирования сетеподобных эволюционных процессов.

2. Развитие метода полудискретизапции начально-краевых задач – метод численного анализа дифференциальной системы, базирующийся на редукции этой системы к более простой для анализа дифференциально-разностной системе и обеспечивающий построение приближений решений исходной системы с любой, наперед заданной точностью.

3. Новые подходы построения устойчивых дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров и с весовыми параметрами, основанные на изучении свойств спектральных характеристик эллиптических операторов дифференциально-разностных систем в пространствах с энергетической нормой; конструктивные алгоритмы, позволяющие численно находить приближения состояний для эволюционных дифференциальных систем.

4. Методы оптимизации: выбор множества допустимых внешних воздействий на модель изучаемого процесса, формирование множеств состояний и наблюдений оптимизационной задачи, построение минимизируемого функционала; получение условий однозначной разрешимости, устойчивости по исходным данным различного типа оптимизационных задач, описываемых формализмами дифференциально-разностных систем; конструктивные алгоритмы, позволяющие численно находить приближения оптимальных внешних воздействий и состояний для эволюционных дифференциальных систем.

5. Серия алгоритмов отыскания приближенных решений многомерных задач переноса сплошных сред по сетеподобным носителям и задач колебаний сложноструктурируемых упругих конструкций. Программный комплекс, позволяющий проводить детальный анализ сетеподобных процессов с учетом структурных особенностей носителей процесса.

Достоверность научных положений, результатов и выводов диссертационного исследования обеспечивается публикациями в рецензируемых научных изданиях, (в т. ч. изданиях, рекомендуемых ВАК РФ); сопоставлением полученных результатов с данными ведущих отечественных и зарубежных ученых по научной тематике, родственной тематике диссертационной работы; сравнительным анализом теоретических результатов с результатами вычислительных экспериментов; обсуждениями полученных соискателем результатов на научных конференциях и семинарах; наличием 4 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования представлялись на научных конференциях и семинарах: Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2020, 2021, 2022, 2023 гг.), Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (Воронеж, 2021 г.), Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 2022 г.), семинар профессора А. П. Жабко (Санкт-Петербургский университет, 2021 г.), семинар профессора А. В. Глушко и В. В. Провоторова (Воронежский государственный университет, 2021, 2022 гг.).

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей, 3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий, 4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Личный вклад. В публикациях, где соискатель является соавтором, лично соискателю принадлежат следующие результаты: [1] – доказательство разрешимости оптимизационной задачи точечного воздействия на течение вязкой жидкости, [2] – доказательство разрешимости дифференциально-разностной системы, [3] – алгоритм построения решения оптимизационной задачи, анализ результатов на примере, [4] – получение условий положительности и симметричности конечномерного аналога дифференциального оператора, [5] – формулировка и анализ примера счетной устойчивости дифференциально-разностной системы с переменной, изменяющейся на графе-звезде, [6] – формулировка и анализ слабого решения параболической системы, определенной на сетеподобной области, [7] – доказательство единственности решения оптимизационной задачи для дифференциально-разностной системы, [8] – постановка оптимизационной задачи, алгоритм определения решения, [16-18] – разработан алгоритм и программа решения тестовых задач.

Публикации. Научные результаты диссертационного исследования опубликованы в 18 рецензируемых научных изданиях: 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [1-4], 4 статьи в изданиях, входящих в базу цитирования Scopus [5-8], 6 статей в материалах трудов научных конференций [9-14]; 4 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [15-18].

Структура и объем диссертационной работы. Текст диссертационного исследования включает в себя введение, четыре главы, заключение, список цитируемых источников и три приложения. Текст исследования занимает 251 страниц, содержащих 33 рисунков и 78 таблиц. Список цитируемых источников состоит из 106 работ.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит описание состояния изучаемой проблематики, ее актуальность и актуальность диссертационного исследования. Здесь же сформулирована цель исследования и представлен комплекс задач, необходимый для реализации этой цели, представлена научная новизна работы, практическая и теоретическая значимость ее результатов, а также выносимые на защиту положения.

В **первой главе** представлены подходы математического описания эволюционных процессов, использующие классические математические формализмы для описания процессов и явлений в сетевых носителях. Основная идея используемого подхода заключается в сведении исходной эволюционной задачи для дифференциального уравнения к дифференциально-разностной (краевая задача эллиптического типа) и введением априори определенных соотношений в местах ветвления носителя пространственной переменной (узловых местах). При анализе указанных дифференциальных и дифференциально-разностных систем возникла необходимость расширить класс гладких функций и использовать класс суммируемых функций, т. е. рассматривать эволюционную задачу в слабой постановке и вводить для нее понятие слабого решения, что существенно расширяет возможности численного анализа, например, физических, гидродинамических и диффузионных сетеподобных процессов. А именно, представлено математическое описание волновых процессов в сложноструктурированных упругих конструкциях и гидродинамических процессов в сетевых и сетеподобных носителях (магистральные и сетевые трубопроводы), иных процессов в сетях. Для формирования математических моделей используются классические пространства Лебега и Соболева суммируемых с квадратом функций. Распределение представляемого материала осуществлено следующим образом:

глава 2 является базовой для формирования математического инструментария численного анализа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов и содержит универсальный подход такого анализа (аппроксимация, редукция дифференциальных систем к дифференциально-разностным, устойчивость и сходимость приближений решений дифференциально-разностных систем, построение решений дифференциальных систем), **глава 3** посвящена численному анализу оптимизационных задач, возникающих при изучении сетеподобных процессов любого типа (дискретная оптимизация, оптимизация по стартовым условиям и распределенным внешним воздействиям, алгоритмы решения задач), анализ проблемно-ориентированных задач прикладного характера вместе с иллюстрирующими примерами представлен в **главе 4**; для всех приведенных примеров указаны пути формирования и анализа оптимизационных задач. **Приложение** содержит численные расчеты задач прикладного характера (таблицы числовых данных, иллюстрации, листинги ЭВМ-программ).

Вторая глава диссертации посвящена отысканию достаточных условий устойчивости по исходным данным дифференциально-разностных систем. Представлены теоретические результаты, являющиеся ***обоснованием численных методов анализа различного типа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов***. Рассматриваются дифференциально-разностные схемы без весов и с весами, которые обеспечивают аппроксимацию необходимой точности эволюционных уравнений на сетях и сетеподобных областях $\Im \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Im$, и (частный случай при $n = 1$) сетях $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$.

Пусть $\Im \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ($\partial\Im$ – граница $\Im$) имеет в своей структуре подобласти $\Im_l$ ($\partial\Im_l$ – граница $\Im_l$), $l = \overline{1, N}$, $\Im_T = \Im \times (0, T)$. Через $L_2(\Im)$ и $W_2^1(\Im)$ обозначим стандартные пространства интегрируемых на $\Im$ функций и функций $u(x) \in L_2(\Im)$, для которых $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \in L_2(\Im)$ ($\kappa = \overline{1, n}$), соответственно. Для описания математических моделей сетеподобных процессов вводится пространство $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ как замыкание в $W_2^1(\Im)$ множества непрерывных на $\overline{\Im}$ функций $u(x)$ таких, что $\int\limits_{S_j} a(x)_{S_j} \dfrac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial n_j} ds + \sum\limits_{i=1}^{m_j} \int\limits_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \dfrac{u(x)_{S_{ji}}}{\partial n_{ji}} ds = 0, \ x \in S_{ji}, \ i = \overline{1, m_j}$, в узловых местах ω_j, $j = \overline{1, M}$, на поверхностях ветвления S_j, S_{ji} ($i = \overline{1, m_j}$) области $\Im$, где $a(x) \in L_2(\Im)$ и $a(x)_{S_j}$, $u(x)_{S_j}$, $a(x)_{S_{ji}}$, $u(x)_{S_{ji}}$ являются сужениями для $a(x)$, $u(x)$ на S_j и S_{ji}; n_j и n_{ji} – внешние нормали к S_j и S_{ji}, $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, M}$, причем $u(x)\big|_{\partial\Im} = 0$. Для сети (графа) $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ ($n = 1$) указанное соотношение имеет вид $\sum\limits_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \dfrac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum\limits_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \dfrac{du(0)_\gamma}{dx}$ в любом внутреннем узле ξ, где $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – совокупности ребер $\gamma \in \Gamma$, соответственно ориентированных к ξ и от ξ; все ребра γ параметризованы отрезком $[0,1]$.

Все рассмотрения проводятся для дифференциально-разностных схем с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области $\Im \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Аналогичные рассуждения имеют место для графа (сети) $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$.

Представлен анализ совокупностей двух- и трехслойных дифференциально-разностных схем для дифференциальных систем $\frac{\partial y}{\partial t}+Ly=f(x,t)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ly=f(x,t)$, формализмами которых описываются сетеподобные эволюционные процессы, где $Ly:=-\sum_{\kappa,\iota=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right)+b(x)y$ и $f(x,t)\in L_2(\Im_T)$, $a_{\kappa\iota}(x)=a_{\iota\kappa}(x), |b(x)|\le\beta,\ x\in\Im$,

$a_*\xi^2\le\sum_{\kappa,\iota=1}^{n}a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota\le a^*\xi^2,\ \xi^2=\sum_{\kappa=1}^{n}\xi_\kappa^2,\ a_*>0,\quad a^*>0,\quad \beta>0.$ Пусть $\omega_\tau=\left\{t_k=k\tau,\ k=\overline{0,K}\right\}$ – равномерная сетка с шагом $\tau=T/K$.

1. Для дифференциальной системы $\frac{\partial y}{\partial t}+Ly=f(x,t)$ в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ рассмотрена дифференциально-разностная двухслойная схема с весом σ, σ – вещественное число (однопараметрическая совокупность схем) с $y^{(\sigma)}=\sigma y+(1-\sigma)\breve{y}$:

$$y_{\bar t}+Ly^{(\sigma)}=f(k),\quad k=1,2,\ldots,K,\quad y(0)=\varphi(x)\in\widetilde{W}_0^1(\Im), \tag{1}$$

$$y(k)\,|_{x\in\partial\Im}=0,\quad k=1,2,\ldots,K, \tag{2}$$

где $y(k):=y(x;k)$, $f(k):=f(x;k)=\frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau}f(x,t)dt$, $y=y(k)$, $\breve{y}=y(k-1)$, $y_{\bar t}=(y-\breve{y})/\tau$.

Определение 1. *Совокупность* $\{y(1),y(2),\ldots,y(K)\}$, $y(k)\in\widetilde{W}_0^1(\Im)$ $(k=\overline{1,K})$ *называется слабым решением для* (1), (2)*, если* $y(k)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\int\limits_{\Im}y_{\bar t}\eta(x)dx+\ell(y,\eta)=\int\limits_{\Im}f(k)\eta(x)dx,\quad k=\overline{1,K},\quad y(0)=\varphi(x)\quad\forall\eta(x)\in\widetilde{W}_0^1(\Im),$$

здесь $\ell(y,\eta)=\int\limits_{\Im}\left(\sum_{\kappa,\iota=1}^{n}a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_\kappa}+b(x)y\eta(x)\right)dx.$

Система (1), (2) при достаточно малых τ однозначно слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\Im)$. Введем понятие устойчивости схемы (1) как свойство непрерывности по задаваемым $\varphi(x)$ (начальная функция) и $f(k)$, $k=\overline{1,K}$ (функции внешних влияний на систему (1), (2)).

Определение 2. *Схема* (1) *является устойчивой*:

1) *по* $\varphi(x)$, *если слабое решение задачи* $y_{\bar t}+Ly^{(\sigma)}=0,\quad y(0)=\varphi(x),$ *обладает свойством* $\|y(k)\|_{(1)}\le C_1\|\varphi\|_{(1)},\quad k=\overline{1,K}\quad\forall\varphi(x)\in\widetilde{W}_0^1(\Im),$

2) *по* $f(k)$, *если слабое решение задачи* $y_{\bar t}+Ly^{(\sigma)}=f(k),\quad y(0)=0,$ *обладает свойством* $\|y(k)\|_{(1)}\le C_2\|f(k)\|_{(2)},\quad k=\overline{1,K}\quad\forall f(k)\in L_2(\Im),$

$C_1>0$, $C_2>0$ – const, *не зависящие от* τ, $\varphi(x)$, $f(k)$; $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ – *нормы в* $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ *и* $L_2(\Im)$.

Установлены достаточные условия устойчивости схемы (1): *если параметр* $\sigma\ge\sigma_0$, $\sigma_0=-(1/2)-1/(\tau\|L\|)$, *то схема* (1) *устойчива по* $\varphi(x)$ *и* $f(k)$. Достаточно часто используемый в приложениях случай $\sigma=1$ рассмотрен отдельно.

Рассмотрена дифференциально-разностная трехслойная схема с вещественными весами σ, σ_1 и σ_2 (трехпараметрическая совокупность схем):

$$y_t^{(\sigma)}+Ly^{(\sigma_1,\sigma_2)}=f(k),\ k=\overline{1,K-1},\ y(0)=\varphi_0(x)\in\widetilde{W}_0^1(\Im),\ y(1)=\varphi_1(x)\in\widetilde{W}_0^1(\Im), \tag{3}$$

где $\hat{y} = y(k+1)$, $y_t^{(\sigma)} = \sigma y_t + (1-\sigma) y_{\bar{t}}$, $y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1-\sigma_1-\sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}$, и

$$y(k+1)|_{x\in\partial\Im} = 0, \quad k = \overline{1, K-1}. \tag{4}$$

Определение слабого решения системы (3), (4) вводится аналогично определению 1 с той лишь разницей, что следует указать в записи интегрального тождества два соотношения $y(0) = \varphi_0(x)$, $y(1) = \varphi_1(x)$ и изменение параметров индекса k: $k = \overline{1, K-1}$. Понятие устойчивости схемы (3) аналогично определению 2 ($\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ – начальные функции). Как и выше для системы (3), (4), показывается, что при достаточно малых τ система (3), (4) однозначно слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\Im)$.

Условия устойчивости схемы (3): *если* $\sigma \ge 1/2$, $\sigma_1 \ge \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 1/2$, *тогда схема* (3) *устойчива по* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $f(k)$, $k = \overline{1, K-1}$, *для составных норм* $\| Y(k+1) \|$, $\| Y(1) \|$ *имеют место оценки*: $\|Y(k+1)\| \le \|Y(1)\| + \|f(k)\|_{2,1}$, $\|Y(1)\|^2 \le \frac{1}{4}\|\varphi_1 + \varphi_0\|_L^2 + \tau^2 \| y_{\bar{t}}(0) \|^2_{R-\frac{1}{4}L} + \tau \| y_{\bar{t}}(0) \|_C^2$, *где* $y_{\bar{t}}(0) = [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)]/\tau$, $\|f(k)\|_{2,1}^2 = (1/\sqrt{2}) \sum_{k'=1}^{k} \tau \|f(k')\|^2$, $Cy = \frac{1}{2}(2\sigma - 1) Iy$, $Ry = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) Ly$, I – *единичный оператор*; *неравенства в определении* 2 *для* (3):

$$\|y(k+1)\|_{(1)} \le C_1 \|\varphi_0\|_{(2)} + C_2 \|\varphi_1\|_{(3)}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall \varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\Im),$$

$$\|y(k+1)\|_{(1)} \le C_3 \|f(k)\|_{(4)} \quad \forall f(k) \in L_2(\Im), \quad k = \overline{1, K-1}, \quad C_1 > 0,\ C_2 > 0,\ C_3 > 0 \ - \text{const},$$

$\| \cdot \|_{(1)}$, $\| \cdot \|_{(2)}$, $\| \cdot \|_{(3)}$ и $\| \cdot \|_{(4)}$ – *нормы в* $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ *и* $L_2(\Im)$.

Рассмотрены часто используемые в приложениях случаи при фиксированных σ, σ_1, σ_2.

2. Для дифференциальной системы $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ly = f(x,t)$ в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ рассмотрена дифференциально-разностная трехслойная схема с вещественными весами σ_1 и σ_2 (двухпараметрическая множество схем) с $y_{\bar{t}t} = [\hat{y} - 2y + \check{y}]/\tau^2$, $y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1-\sigma_1-\sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}$

$$y_{\bar{t}t} + Ly^{(\sigma_1,\sigma_2)} = f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \quad y(0) = \varphi_0(x), \quad y_t(0) = [y(1) - y(0)]/\tau = \varphi_1(x), \tag{5}$$

для каждого k, $k = \overline{1, K-1}$, при $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\Im)$, $f(k) \in L_2(\Im)$ существует слабое решение $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\Im)$ уравнения (5), удовлетворяющее краевому условию

$$y(k+1)|_{x\in\partial\Im} = 0, \quad y(1) = \varphi_0(x) + \tau\varphi_1(x). \tag{6}$$

Аналогично определениям 1 и 2 для системы (5), (6) и схемы (5) формулируются понятия слабого решения и устойчивости в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\Im)$, соответственно. В терминах операторных норм $\| \cdot \|_L$ и $\| \cdot \|_D$, где $Du = (I + (\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\tau^2}{2} L)u$, условия устойчивости схемы (5) определяются следующим утверждением: *если* $\sigma_1 - \sigma_2 \ge \sigma$ ($\sigma > 0$), $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ *и* $D \ge \frac{1+\varrho}{4}\tau^2 L$ ($\varrho > 0$ *не зависит от* τ), *то схема* (5) *устойчива по* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ *и* $f(k) \in L_2(\Im)$ ($k = \overline{1, K-1}$), *для решения* (5), (6) *в* $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ *имеют место оценки*:

$$\|y(k+1)\|_L \le \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}}\left(\|\varphi_0\|_L + \|\varphi_1\|_D + \sum_{k'=1}^{k}\tau\|f(k')\|\right),$$

$$\|y(k+1)\|_L + \|y_t\|_D \le \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}}\left(2\|\varphi_0\|_L + 2\|\varphi_1\|_D + \sum_{k'=1}^{k}\tau\|f(k')\|\right),$$

неравенства в пунктах 1 *и* 2 *определения* 2 *для схемы* (5) *принимают вид*

$$\|y(k+1)\|_{(1)} \le C_1\|\varphi_0\|_{(2)} + C_2\|\varphi_1\|_{(3)}, \quad k=\overline{1,K-1}, \quad \forall\,\varphi_0(x),\ \varphi_1(x)\in \widetilde{W}^1_0(\Im),$$

$$\|y(k+1)\|_{(1)} \le C_3\|f(k)\|_{(4)}, \quad k=\overline{1,K-1}, \quad \forall f(k)\in L_2(\Im).$$

Рассмотрены часто используемые в приложениях случаи при фиксированных σ_1 и σ_2.

Третья глава исследования ориентирована на численные методы анализа оптимизационных задач математических моделей сетеподобных эволюционных процессов: представлены достаточные условия существования оптимальных управляющих воздействий на дифференциально-разностные системы для различного типа внешних воздействий и алгоритмы определения этих воздействий.

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы

$$\frac{1}{\tau}\big(y(k)-y(k-1)\big) - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k)}{dx}\right) + b(x)y(k) = f(k), \quad y(k)\big|_{x\in\partial\Gamma}=0,\ y(0)=\varphi(x), \tag{7}$$

где $\tau = T/M$, $k=\overline{1,M}$. Обозначим через I и J множество индексов и число внутренних узлов, соответственно. Пусть $\xi_i\in J(\Gamma)$ и $\gamma^{\xi_i}\in R\big(\xi_i\big)$ – фиксированный узел и к нему примыкающее ребро $(i\in I)$. Для каждого k $(k=1,2,\ldots,M)$ точечное воздействие $v(k)$ на систему (7) формируется набором чисел $v(k)$, где $v(k)=\{v_i(k),\ i\in I\}\in U$ $(k=1,2,\ldots,M)$, $U\subset\mathbb{R}^J$ задано и определяется потребностями приложений; $f(k)=\sum_{i\in I}v_i(k)\delta(x-x^i)\big|_{x^i=1\in\gamma^{\xi_i}}$, $k=\overline{1,M}$ ($\delta(x-x^i)-$ функция Дирака), $y(x,k;v(k))$, $k=\overline{1,M}$, – состояние (7), удовлетворяющее системе

$$\frac{1}{\tau}[y(k;v(k))-y(k-1;v(k-1))] - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k;v(k))}{dx}\right) + b(x)y(k;v(k)) = \sum_{i\in I}v_i(k)\delta(x-x^i)\big|_{x^i=1\in\gamma^{\xi_i}}, \tag{8}$$

$$y(0;v(0)) := y(0)=\varphi(x), \quad y(k;v(k))\big|_{x\in\partial\Gamma}=0, \quad k=\overline{1,M}. \tag{9}$$

Определение 3. *Совокупность* $\{y(k;v(k)):\ y(k;v(k))\in W_0^1(a,\Gamma),\ k=\overline{1,M}\}$ *определяет слабое решение* (8)*,* (9)*, если*:

$$\int_\Gamma y(k;v(k))_t\eta(x)dx + \ell(y(k;v(k)),\eta) = \sum_{i\in I}v_i(k)\eta_i \quad \forall\,\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma),\ \ \eta_i=\eta(x)\big|_{x=1\in\gamma^{\xi_i}},$$

$$\xi_i\in J(\Gamma), i\in I;\ y(k;v(k))_t = [y(k;v(k))-y(k-1;v(k-1))]/\tau,\ k=\overline{1,M}.$$

Для определенности считаем, что наблюдение за состоянием (8), (9) ведется на всей сети (графе) Γ, минимизируемый функционал $\Psi(v):=\Psi(v(1),v(2),\ldots,v(M))$ имеет вид

$$\Psi(v) := \tau\sum_{n=1}^{M}\Psi_k(v(k)),\ \ \Psi_k(v(k)) = \|y(k;v(k))-w_0(k)\|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),v(k))_{\mathbb{R}^J},\ \ k=\overline{1,M},$$

$w_0(k):=w_0(x;k)\in L_2(\Gamma)$ – заданная функция, оператор N: $(Nv(k),v(k))_{\mathbb{R}^J}\ge\varsigma\|v(k)\|^2_{\mathbb{R}^J}$, $\varsigma>0$, $\forall v(k)\in U$, $k=\overline{1,M}$; $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^J}$ – скалярные произведения в $L_2(\Gamma)$ и $\mathbb{R}^J$, соответственно.

Задача дискретной оптимизации системы (8), (9) определяется поиском $\inf\limits_{v\in U_\partial}\Psi(v)$ на ограниченном множестве $U_\partial\subset U$, где $v=\{v(k),\ k=\overline{1,M}\}$. Управляющее

воздействие $v^* \in U_\partial$ есть оптимум для (8), (9), если $\inf\limits_{v \in U_\partial} \Psi(v) = \Psi(v^*)$. Имеют место следующие утверждения.

1. *Система* (8), (9) *имеет единственное слабое решение в* $W_0^1(a,\Gamma)$ *при малых* τ.

2. *Задача дискретной оптимизации системы* (8), (9) *имеет единственное решение* (*оптимум*) $v^* = \left\{ v^*(k),\ \ k = \overline{1,M} \right\} \in U_\partial$.

3. *Оптимальное управляющее воздействие* (*оптимум*) $u(k) \in U_\partial$ *совместно с состояниями* $y(k;u(k)) \in W_0^1(a,\Gamma),\ k = \overline{1,M}$, *системы* (8), (9) *и сопряженным состоянием* $p(k;u(k)) \in W_0^1(a,\Gamma),\ \ k = \overline{1,M}$, *для системы* (8), (9) *определяются из соотношений*

$$\int\limits_\Gamma y(k;u(k))_t \eta(x)dx + \ell(y(k;u(k)),\eta) = \sum_{i \in I} u_i(k)\eta_i, \quad k = \overline{1,M} \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a,\Gamma),$$

$$\int\limits_\Gamma p(k;u(k))_t \eta(x)dx + \ell(p(k;u(k)),\eta) = \int\limits_\Gamma \big(y(k;u(k)) - w_0(k) \big)\eta(x)dx, \quad k = \overline{0,M-1},$$

$$\forall \eta(x) \in W_0^1(a,\Gamma),$$

$$\sum_{i \in I} p_i(k;u(k))\big(v_i(k) - u_i(k)\big) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} \ge 0 \quad \forall v(k) \in U_\partial, \ \ k = 0,1,\ldots,M,$$

где $\eta_i = \eta(x)\big|_{x = 1 \in \gamma^{\xi_i}}$ $(\xi_i \in J(\Gamma),\ \ i \in I)$, $y(0;u(0)) = \varphi(x),\ \ p(M;u(M)) = 0$; *сопряженное состояние* $\left\{ p(k;u(k)) \in W_0^1(a,\Gamma), \quad k = \overline{1,M} \right\}$ *определено слабым решением краевой задачи*

$$-\frac{1}{\tau}[p(k+1;u(k+1)) - p(k;u(k))] - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dp(k;u(k))}{dx} \right) + b(x)p(k;u(k)) = y(k;u(k)) - w_0(k),$$

здесь $p(M;u(M)) = 0, \quad p(k;u(k))\big|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 0,1,\ldots,M-1.$

Рассмотрим оптимизационную задачу по распределенным внешним воздействиям для дифференциально-разностной системы на графе (сети) Γ. Как и выше, $U = L_2(\Gamma)$ и вводится оператор $B : U \to L_2(\Gamma)$, устанавливающий связь распределенного по сети внешнего управляющего воздействия с закономерностями осуществляемого в сети процесса, сохранены введенные выше обозначения. Для $y(k;v(k)) \in W_0^1(a,\Gamma)$ $(k = \overline{1,M})$, $\{v(k),\ \ k = \overline{1,M}\} \in U_\partial \subset U$, рассматривается система

$$\frac{1}{\tau}[y(k;v(k)) - y(k-1;v(k-1))] - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k;v(k))}{dx} \right) + b(x)y(k;v(k)) = f(k) + Bv(k), \quad (10)$$

$$y(0;v(0)) := y(0) = \varphi(x), \quad y(k;v(k))\big|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = \overline{1,M}. \quad (11)$$

Определение слабого решения для (10), (11) аналогично определению 3 (правая часть заменяется на $f(k) + Bv(k)$), задан минимизируемый функционал $\Psi(v)$.

Оптимизационная задача по распределенным внешним воздействиям системы (10), (11) состоит в определении $\inf\limits_{v \in U_\partial} \Psi(v)$. Имеют место все утверждения, аналогичные представленным выше для задача дискретной оптимизации. Как и выше существенно используется сопряженное состояние для системы (10), (11).

Полученные результаты оптимизационных задач для сети (графа) Γ переносятся на случай оптимизационных задач для дифференциально-разностной системы в сетеподобной области $\Im$. Рассмотрим это на примере задачи по распределенным внешним воздействиям. Пусть $U = L_2(\Im)$, вводится оператор $B : U \to L_2(\Im)$, сохранены обозначения $y(k;v(k)) := y(x,k;v(k)),\ \ v(k) := v(x;k) \in U \quad (k = 0,1,\ldots,K)$. Для $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\Im)$ $(k = 1,2,\ldots,K)$ рассматривается дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}[y(k;v(k))-y(k-1;v(k-1))]-\sum_{\kappa,t=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa t}(x)\frac{\partial y(k;v(k))}{\partial x_t}\right)+b(x)y(k;v(k))= \tag{12}$$

$$=f(k)+Bv(k),\quad y(0;v(0))=\varphi(x),\quad y(k;v(k))|_{x\in\partial\Im}=0,\quad k=1,...,K.$$

Постановка и анализ оптимизационной задачи для системы (12) повторяет почти дословно рассуждения, используемые для систем (8), (9) и (10), (11). Устанавливаются аналогичные соотношения, определяющие достаточные условия существования и единственности оптимальных внешних воздействий на систему (12).

Для каждой из представленной оптимизационной задачи сформирован универсальный алгоритм отыскания решения оптимизационной задачи:

Шаг 1. Определение типа оптимизационной задачи, установление структуры сетеподобной области, соответствующей типу изучаемого процесса.

Шаг 2. Формирование пространства состояний изучаемого процесса, включающее выбор класса функций для количественного и качественного описания свойств процесса.

Шаг 3. Формирование пространства внешних воздействий совместно с множеством допустимых внешних воздействий, определяемого для выбранного пространства состояний.

Шаг 4. Формирование математической модели изучаемого процесса с учетом выбранных пространств состояний и внешних воздействий, установление оператора (операторов), представляющего управляемую модель (дифференциальные или дифференциально-разностные операторы); установление условий, гарантирующих разрешимость того или иного типа операторных систем, представляющих управляемую модель.

Шаг 5. Формирование пространства наблюдений, содержащее наблюдения, как точно известные состояния изучаемого процесса.

Шаг 6. Выбор типа и построение минимизируемого функционала («функции стоимости»), определенный некоторым отображением множества допустимых внешних воздействий на пространство наблюдений, причем минимизируемый функционал должен обладать свойством, гарантирующим существование оптимального внешнего воздействия (единственного в зависимости от преследуемых целей и если это соответствует идеологии изучаемого процесса).

Шаг 7. Получение необходимых, или достаточных, или необходимых и достаточных условий существования инфимума минимизируемого функционал.

В **четвертой главе** представлены алгоритмы определения приближенного решения для серии задач прикладного характера. Алгоритмы универсальные и базируются на определении спектральных характеристик (собственных значений и собственных функций) дифференциального оператора L дифференциальных систем $\frac{\partial y}{\partial t}+Ly=f(x,t)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ly=f(x,t)$. Приведем алгоритм на примере построения приближений решения дифференциально-разностной двухслойной схемы типа (1), (2) для случая $\sigma=1$ и для $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Im\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. Система обобщенных собственных функций $\{\phi_i(x)\}$ оператора L является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\Im)$ и $L_2(\Im)$. Обозначим через $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ множество собственных значений. Для $f(k)$, $\varphi(x)$ имеют место разложения по базису $\{\phi_i(x)\}$: $f(k)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i^k\phi_i(x)$, $f_i^k=\left(f(k),\phi_i(x)\right)$, $k=\overline{1,K}$, $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\phi_i(x)$, $\varphi_i=\left(\varphi(x),\phi_i(x)\right)$. Решение определяется рядом

$u(k)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\varphi_i+\tau\sum_{n=0}^{k-1}\left(1+\tau\lambda_i\right)^n f_i^{n+1}\right)/\left(1+\tau\lambda_i\right)^k\phi_i(x),\ k=\overline{1,K},$ устанавливающий алгоритм формирования приближений $u^N(k)$ для $u(k)$:

шаг 1) при $k=1$ $u^N(1)=\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_i+\tau f_i^1\right)/\left(1+\tau\lambda_i\right)\phi_i(x),$

…

шаг K) при $k=K$ $u^N(K)=\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_i+\tau\sum_{n=0}^{K-1}\left(1+\tau\lambda_i\right)^n f_i^{n+1}\right)/\left(1+\tau\lambda_i\right)^K\phi_i(x),$

шаг $K+1$) процесс формирования приближения $u^N(k)$ завершается выполнением соотношения $\sum_{k=1}^{K}\left\|u^N(k)-u^{N-1}(k)\right\|_{\widetilde{W}_0^1(\Im)}<\varepsilon$ в соответствии с заданным значением числа ε.

Приведем описание структуры программного комплекса. Программный комплекс для реализации алгоритмов задач переноса сплошных сред и задач колебаний сплошных сред сформирован на базе алгоритмического языка PascalABCNET, структура которого указана на рис. 1. Комплекс состоит из пяти разделов, содержащих восемь модулей.

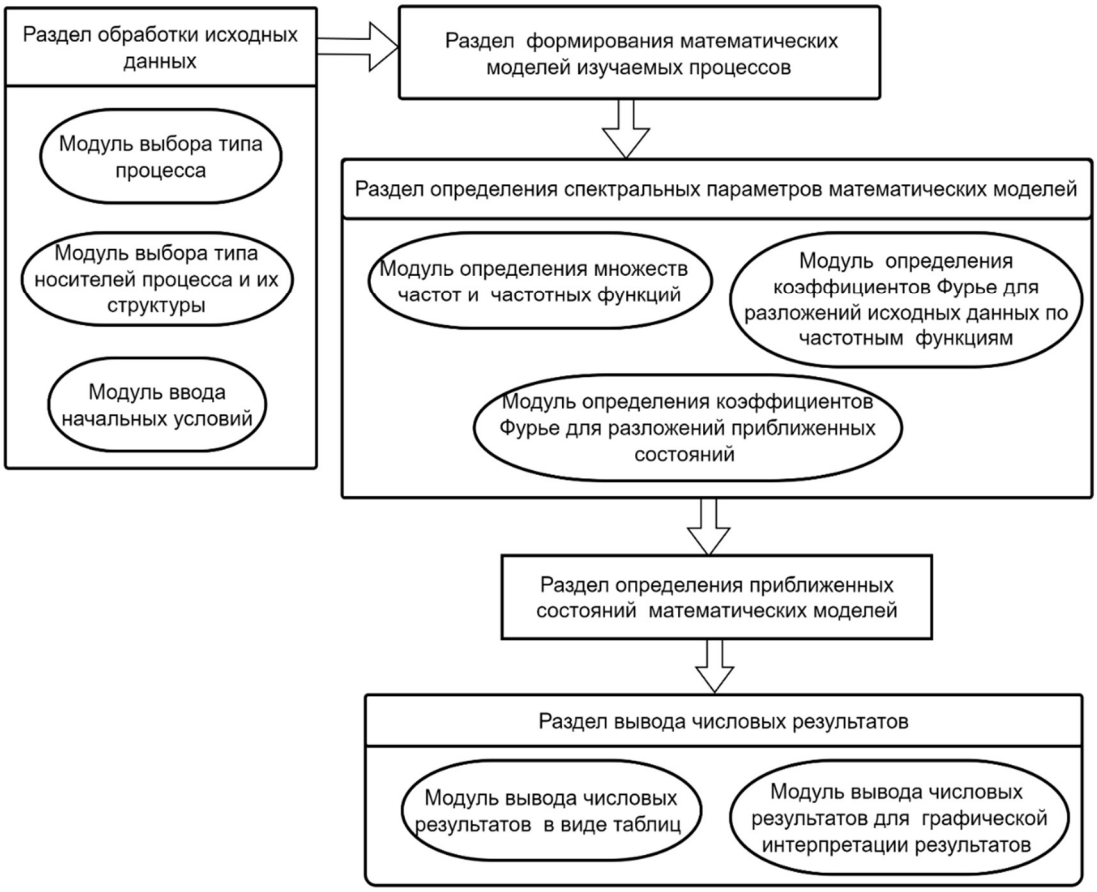

Рис. 1. Структура программного комплекса для анализа процессов переноса сплошных сред и волновых процессов в сетевых носителях

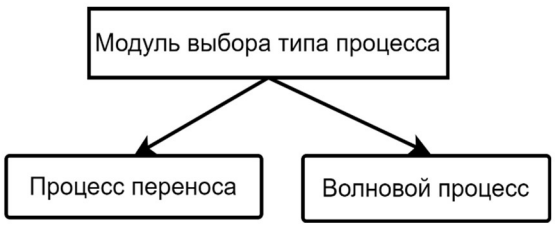

Рис. 2. Модуль выбора типа процесса

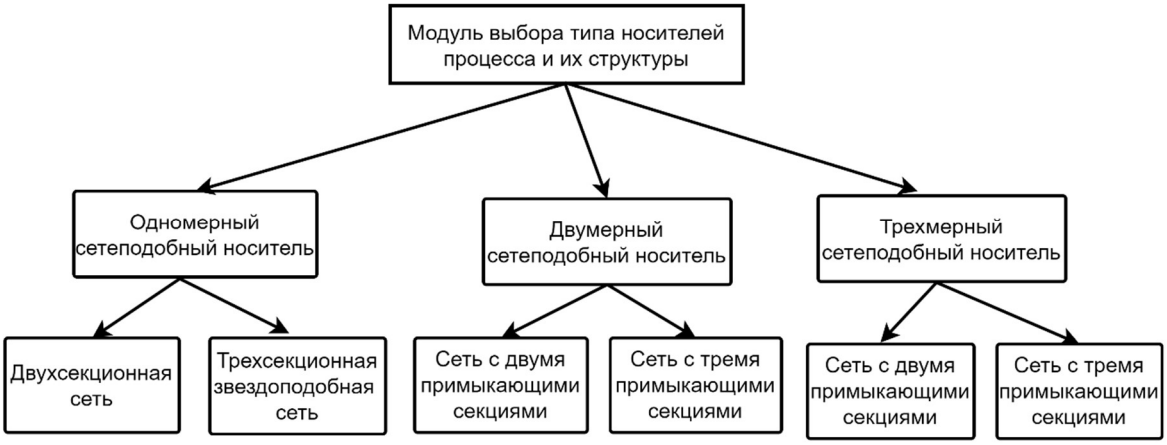

Рис. 3. Модуль выбора типа носителей процесса и их структуры

Рис. 4. Модуль определения множеств частот и частотных функций

Рис. 5. Раздел вычисления приближенных состояний математических моделей

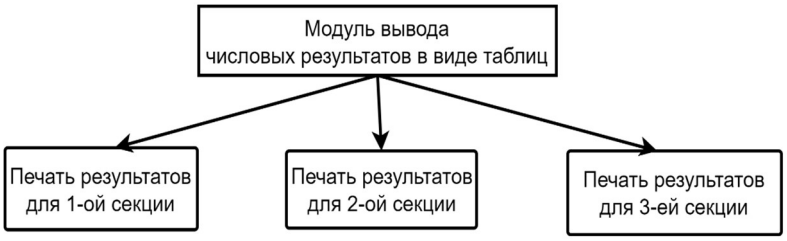

Рис. 6. Модуль вывода числовых результатов в виде таблиц

Рис. 7. Модуль вывода числовых результатов для графической интерпретации результатов

Ниже приведены примеры для иллюстрации работы программного комплекса в части построения приближенных решений различных задач численного анализа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов.

Пример 1. Задача переноса по звездоподобной трехсекционной сети. Пусть Γ – трехсекционная звездоподобная сеть с тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; γ_1 и γ_2 соответствуют отрезку $[0,\frac{1}{2}]$, γ_3 – отрезку $[\frac{1}{2},1]$. Функция $u(x,t)$, характеризующая количественные характеристики процесса переноса сплошной среды, подчиняется уравнению переноса по ребрам графа (секциям сети)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)u(x,t)=f(x,t),\quad x\in\Gamma_0,\quad t\in(0,T],$$

условиям в месте сочленения секций (узле) ξ

$$u(x,t)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1}=u(x,t)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}=u(x,t)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3},\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3},$$

и условиям $$u(x,0)=\varphi(x),\ u(x,t)\big|_{x=0}=\ u(x,t)\big|_{x=1}=0.$$

Для этой начально-краевой задачи определена дифференциально-разностная схема

$$\frac{1}{\tau}\big(u(k)-u(k-1)\big)-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(k)}{dx}\right)+b(x)u(k)=f(k),$$

$$u(k):=u(x;k),\ f(k):=f(x;k),\quad \tau=T/K,\quad k=1,2,\ldots,K,$$

$$u(k)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1}=u(k)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}=u(k)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3},\quad \frac{du(k)}{dx}\bigg|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3}=\frac{du(k)}{dx}\bigg|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1}+\frac{du(k)}{dx}\bigg|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2},$$

$$u(0)=\varphi(x),\quad x\in\Gamma;\ u(k)\big|_{x=0}=u(k)\big|_{x=1}=0.$$

Рассмотрим случай, когда $a(x)=1,\ b(x)=0,\ f(x,t)=0,$

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^2+2x, x\in\gamma_1,\\ -x^2+2x, x\in\gamma_2,\\ -7x^2+9x-2, x\in\gamma_3.\end{cases}$$

Шаг по переменной x: $h=0.05$ шаг по t: $\tau=0.01,\ K=100,\ N=99$. На рис. 8 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x,t)$, описывающей тепловые характеристики для различных значений временной переменной t: [1] $t=0$; [2] $t=0.02$; [3] $t=0.04$; [4] $t=0.06$; [5] $t=0.08$.

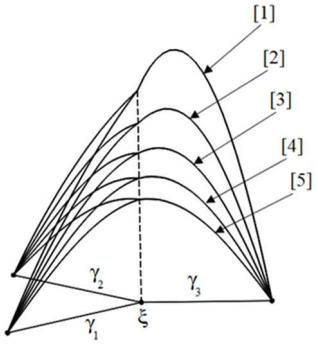

Рис. 8. Графическая интерпретация переноса теплоты по трехсекционной сети

Пример 2. Задача переноса на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями.

Пусть трехмерная сеть $\Im \subset \mathbb{R}^3$ с тремя примыкающими секциями $\Im_1, \Im_2, \Im_3$: $\Im_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) : 0 \le x_1 \le \frac{1}{3},\ 0 \le x_2, x_3 \le 1\right\}$, $\Im_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{3} \le x_1 \le \frac{2}{3},\ 0 \le x_2, x_3 \le 1\right\}$, $\Im_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) : \frac{2}{3} \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2, x_3 \le 1\right\}$ и поверхностями примыкания $S_1,\ S_2$.

Пусть функция $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, определяющая процесс переноса теплового потока, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Bu = f(x_1, x_2, x_3, t),\ \ x_1, x_2, x_3 \in \Im,\ \ t \in (0, T],$$

где
$$Bu = -\sum_{\kappa, \iota = 1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right) + b(x_1, x_2, x_3)u,$$

условиям в поверхностях примыкания $S_1,\ S_2$

$$u\big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_1} = u\big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_2},\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_2},$$

$$u\big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_2} = u\big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_3},\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_2} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_3},$$

начальными
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

и граничным условиям $u\big|_{x_1=0} = u\big|_{x_1=1} = 0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0,\ u\big|_{x_2=1} = 0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = 0,\ u\big|_{x_3=1} = 0.$

Данную начально-краевую задачу аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}\big(u(k) - u(k-1)\big) + Bu(k) = f(k),\ \ u(k) := u(x_1, x_2, x_3; k),\ \ u(0) = \varphi(x_1, x_2, x_3),\ \ \tau = T/K,\ k = \overline{1, K},$$

$$u(k)\big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_1} = u(k)\big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_2},\ \ \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_1} = \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \Im_2},$$

$$u(k)\big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_2} = u(k)\big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_3},\ \ \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_2} = \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \Im_3},$$

$$u(k)\big|_{x_1=0} = u(k)\big|_{x_1=1} = 0,\ \ \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0,\ \ u(k)\big|_{x_2=1} = 0,\ \ \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = 0,\ \ u(k)\big|_{x_3=1} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1\ (\kappa = \overline{1,3})$, $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0\ (1 \le \kappa, \iota \le 3,\ \kappa \ne \iota)$, $b(x_1, x_2, x_3) = 0$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 4x_1 \cos\frac{\pi x_2}{2}\cos\frac{\pi x_3}{2},\ x_i \in \Im_1,\ i = \overline{1,3}, \\ (-9x_1^2 + 10x_1 - 1)\cos\frac{\pi x_2}{2}\cos\frac{\pi x_3}{2},\ x_i \in \Im_2,\ i = \overline{1,3}, \\ (-9x_1^2 + 10x_1 - 1)\cos\frac{\pi x_2}{2}\cos\frac{\pi x_3}{2},\ x_i \in \Im_3,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Шаг по x_1: $h1 = 1/30$, шаг по x_2: $h2 = 0.1$, шаг по x_3: $h3 = 0.1$ и шаг по t: $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. На рис. 9 ($\Im_l^c (l = \overline{1,3})$, S_1^c, S_2^c – сечение x_3 и $\Im$) представлена графическая интерпретация перенос тепла $u(x_1, x_2, x_3, t)$ при различных значениях t, x_3: [1]: $t = 0$, $x_3 = 0$; [2]: $t = 0$, $x_3 = 0.5$; [3]: $t = 0.05$, $x_3 = 0$; [4]: $t = 0.05$, $x_3 = 0.5$.

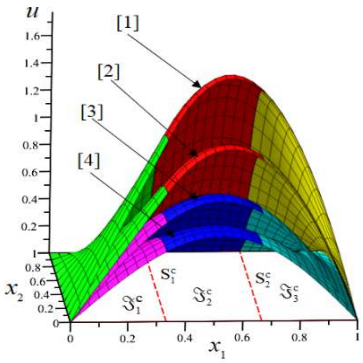

Рис. 9. Графическая интерпритация переноса теплоты при фиксированных x_3, t на трехмерной сети с тремя примыкающими

Пример 3. Колебания трехсекционной сети. Пусть Γ – трехсекционная звездоподобная сеть, которая моделируется графом-звездой (здесь также остается для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 и γ_2 соответствуют отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_3 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. Пусть функция $u(x,t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T],$$

условиям согласования в узле ξ

$$u(x,t)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} = u(x,t)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2} = u(x,t)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3}, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} + \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3},$$

со следующими начальными и граничным условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \alpha(x), \quad x \in \Gamma; \quad u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=1} = 0.$$

Для этой начально-краевой задачи определена дифференциально-разностная схема

$$\frac{1}{\tau^2}\big(u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)\big) - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(k+1)}{dx}\right) + b(x)u(k+1) = f(k),$$

$$u(0) = \varphi(x), \quad u(1) = \varphi(x) + \tau\alpha(x), \quad f(k) := f(x;k), \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \ldots, K-1,$$

$$u(k)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} = u(k)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2} = u(k)\big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3}, \quad \left.\frac{du(k)}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_3} = \left.\frac{du(k)}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} + \left.\frac{du(k)}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2},$$

$$u(k)\big|_{x=0} = u(k)\big|_{x=1} = 0.$$

Рассмотрим случай при $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x,t) = 0$, и

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2x^3 + x^2, & x \in \gamma_1, \\ -2x^3 + x^2, & x \in \gamma_2, \\ 2x^2 - 3x + 1, & x \in \gamma_3, \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} -2x^2 + x, & x \in \gamma_1, \\ -2x^2 + x, & x \in \gamma_2, \\ 4x^2 - 6x + 2, & x \in \gamma_3. \end{cases}$$

Шаг по переменной x: $h = 0.05$, шаг по t: $\tau = 0.01$; $K = 100$, $N = 99$. На рис. 10 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x,t)$ для различных значений временной

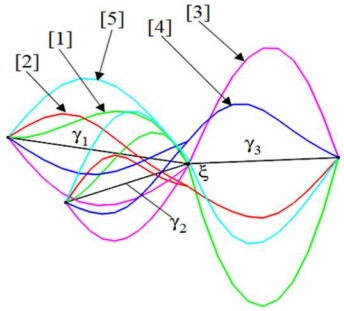

Рис. 10. Геометрическая интерпретация колебания трехсекционной сети

переменной t: [1] $t=0$; [2] $t=0.25$; [3] $t=0.5$; [4] $t=0.75$; [5] $t=1$.

Пример 4. Колебание трехмерной сети с тремя примыкающими секциями. Пусть трехмерная сеть $\Im\subset\mathbb{R}^3$ с тремя примыкающими секциями $\Im_1,\Im_2,\Im_3$: $\Im_1=\left\{(x_1,x_2,x_3):0\le x_1\le\frac{1}{3},\ 0\le x_2,x_3\le 1\right\}$, $\Im_2=\left\{(x_1,x_2,x_3):\frac{1}{3}\le x_1\le\frac{2}{3},\ 0\le x_2,x_3\le 1\right\}$, $\Im_3=\left\{(x_1,x_2,x_3):\frac{2}{3}\le x_1\le 1,\ 0\le x_2,x_3\le 1\right\}$ и поверхностями примыкания S_1, S_2.

Функция $u=u(x_1,x_2,x_3,t)$, определяющая характеристики волнового процесса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Bu=f(x_1,x_2,x_3,t),\quad x_1,x_2,x_3\in\Im,\quad t\in(0,T],$$

условиям в поверхностях примыкания S_1, S_2 :

$$u\big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1}=u\big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2},\quad u\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2}=u\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3},$$

начальным

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x_1,x_2,x_3),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\alpha(x_1,x_2,x_3),$$

и граничным условиям

$$u\big|_{x_1=0}=u\big|_{x_1=1}=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=0,\quad u\big|_{x_2=1}=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}=0,\quad u\big|_{x_3=1}=0.$$

Данную начально-краевую задачу аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau^2}\big(u(k+1)-2u(k)+u(k-1)\big)+Bu(k+1)=f(k),\quad u(0)=\varphi(x_1,x_2,x_3),\quad u(1)=u(0)+\tau\alpha(x_1,x_2,x_3),$$

$$u(k):=u(x_1,x_2,x_3;k),\quad f(k):=f(x_1,x_2,x_3;k),\quad \tau=T/K,\quad k=1,2,\ldots,K-1,$$

$$u(k)\big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1}=u(k)\big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2},\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1}=\left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2},$$

$$u(k)\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2}=u(k)\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3},\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2}=\left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3},$$

$$u(k)\big|_{x_1=0}=u(k)\big|_{x_1=1}=0;\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=0,\quad u(k)\big|_{x_2=1}=0;\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}=0,\quad u(k)\big|_{x_3=1}=0.$$

Рассмотрим случай, когда $a_{\kappa\kappa}(x_1,x_2,x_3)=1$ $(\kappa=\overline{1,3})$, $a_{\kappa\iota}(x_1,x_2,x_3)=0$ $(\kappa,\iota=\overline{1,3},\kappa\ne\iota)$, $b(x_1,x_2,x_3)=0$, $f(x_1,x_2,x_3,t)=0$,

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}(27x_1^3-9x_1^2)\cos\frac{\pi x_2}{2}\cos\frac{\pi x_3}{2}, & x_i\in\Im_1,\ i=\overline{1,3},\\ (-9x_1^2+9x_1-2)\cos\frac{\pi x_2}{2}\cos\frac{\pi x_3}{2}, & x_i\in\Im_2,\ i=\overline{1,3},\\ (9x_1^2-15x_1+6)\cos\frac{\pi x_2}{2}\cos\frac{\pi x_3}{2}, & x_i\in\Im_3,\ i=\overline{1,3},\end{cases}$$

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}(-9x_1^2+3x_1)\cos\dfrac{\pi x_2}{2}\cos\dfrac{\pi x_3}{2}, & x_i\in\Im_1,\ i=\overline{1,3},\\ (9x_1^2-9x_1+2)\cos\dfrac{\pi x_2}{2}\cos\dfrac{\pi x_3}{2}, & x_i\in\Im_2,\ i=\overline{1,3},\\ (-9x_1^2+15x_1-6)\cos\dfrac{\pi x_2}{2}\cos\dfrac{\pi x_3}{2}, & x_i\in\Im_3,\ i=\overline{1,3}.\end{cases}$$

Шаг по переменной x_1: $h1=1/30$, шаг по x_2: $h2=0.1$, шаг по x_3: $h3=0.1$ и шаг по t: $\tau=0.01$; $K=N=100$. На рис. 11 ($\Im_l^c$ $(l=\overline{1,3})$, S_1^c, S_2^c – сечения x_3 и $\Im$) приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x_1,x_2,x_3,t)$ для различных значений временной переменной t, x_3: [1]: $t=0, x_3=0$; [2]: $t=0, x_3=0.5$, [3]: $t=0.25, x_3=0$; [4]: $t=0.25, x_3=0.5$.

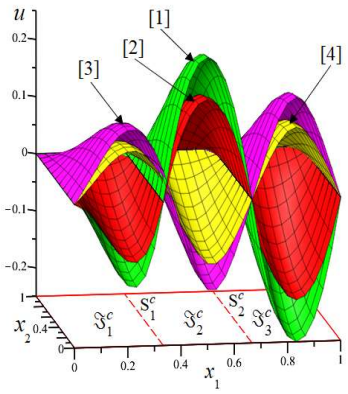

Рис. 11. Графическая интерпритация волнового процесса трехмерной сети с тремя примыкающими секциями при фиксированных x_3, t

В приложении представлены подробные результаты работы программного комплекса в форме таблиц, описаний и листингов программ, что позволяет более полно ознакомиться с полученными данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе диссертационного исследования были получены следующие основные результаты:

1. Представлен новый подход анализа математических моделей различного типа эволюционных сетеподобных процессов, описывающих как динамику и свойственные ей особенности перемещения многофазных сред по сложноструктурированным носителям, так и динамику волновых явлений, возникающих в сложноструктурированных носителях.

2. Разработан новый метод численного анализа дифференциальной системы параболического или гиперболического типа, базирующийся на редукции этой системы к дифференциально-разностной системе (полудискретизация по временной переменной) и основанный на интегральных тождествах, проведен детальный анализ устойчивости, непрерывности по исходным данным дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров и многообразия указанных схем с весовыми параметрами.

3. Разработан новый подход, основанный на интегральных тождествах, к решению оптимизационных задач для сетеподобных процессов переноса сплошных многофазных сред и процессов колебаний сложноструктурированных упругих конструкций, отличительной особенностью которых является использование математических моделей указанных процессов в классах интегрируемых функций, что существенно расширяет возможности приложений полученных результатов.

4. Разработана серия алгоритмов отыскания приближенных решений многомерных задач сетеподобных процессов переноса сплошных многофазных сред и процессов колебаний сложноструктурированных упругих конструкций, проведена серия вычислительных экспериментов.

5. Сформирован программный комплекс, позволяющий проводить детальный численный анализ сетеподобных процессов с учетом структурных особенностей носителей процессов. Программный комплекс ориентирован на решение различного типа прикладных задач, отличительной особенностью которых является использование неклассических математических формализмов при описании этих процессов.

6. Представлена серия решений прикладных задач сетеподобных процессов переноса многофазных сред и процессов колебаний сложноструктурированных упругих конструкций, отличительной особенностью которых является использование дифференциально-разностных схем с разрывными исходными данными.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Подвальный, С. Л. Точечная оптимизация ламинарного течения вязкой жидкости в сетевом носителе / С. Л. Подвальный, В. В. Провоторов, В. Н. Хоанг, З. Тран // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18, № 5. – С. 7-16.

2. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной / В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 116-138.

3. Хоанг, В. Н. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах / В. Н. Хоанг, А. А. Парт, И. В. Перова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11. – № 2. – URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1326.

4. Хоанг, В. Н. Конечномерные аналоги дифференциальных операторов переноса с носителями на пространственных сетях / В. Н. Хоанг, О. А. Махинова, В. В. Тимошенко // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11. – № 2. – URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1363.

Публикации в изданиях, индексируемых в 1 квартиле базы РИНЦ, базах «Scopus» и «Web of Science»

5. Provotorov, V. V. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2020. – Vol. 16, No 4. – P. 402-414.

6. Sergeev, S. M. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas processes / S. M. Sergeev, L. B. Raijhelgauz, V. N. Hoang, I. N. Panteleev // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1679: 022015.

7. Provotorov, V. V. Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. – 2021. – Vol. 17, No 3. – P. 277-286.

8. Podvalny, S. L. The Problem of Optimal Control of the Laminar Flow of a Viscous Liquid in a Network Carrier / S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, V. N. Hoang // 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).IEEE, 2022. – С. 125-128.

Статьи и материалы конференций

9. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2020. – Т. 7, № 1. – С. 127-132.

10. Хоанг, В. Н. Приближенное решение дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг //Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. между-нар. конф. «ПМТУКТ-2021». – Воронеж: Изд-во «Научная книга». – 2021. – С. 179-182.

11. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностное уравнение с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 155-160.

12. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностная система в соболевском пространстве функций с носителями на сетеподобной области / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость: Труды 53-й Международной научной конференции аспирантов и студентов / науч. редакторы тома Н. В. Смирнов, А. С. Еремин, Т. Е. Смирнова. – СПб.: Изд-во «Дом Федоровой Г. В.», 2022. – Т. 9, № 1. – С. 113-117.

13. Хоанг В. Н. Счетная устойчивость слабого решения дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна. – Воронеж: Изд-во «Дом ВГУ», 2022. – С. 168-172.

14. Хоанг, В. Н. Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2023. – Т. 10, № 1. – С. 161-165.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021669023. Программный комплекс для решения задач нестационарного переноса сплошных сред с распределенными параметрами на сетеподобных областях / В. Н. Хоанг; заявл. 11.11.21; регистр. 23.11.21.

16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022661479. Программный комплекс для моделирования сетеподобных процессов переноса с использованием двухслойных и трехслойных дифференциально-разностных схем / О. Р. Балабан, В. Н. Хоанг; заявл. 30.05.22; регистр. 22.06.22.

17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023617568. Программный комплекс для качественного описания характеристик волнового процесса в упругих конструкциях сетеподобного типа / О. Р. Корчагина, В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов; заявл. 5.04.23; регистр. 11.04.23.

18. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №.2023618051. Программный комплекс для анализа математических моделей процесса переноса теплового потока на трехмерной сети / О. Р. Корчагина, В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов; заявл. 5.04.23; регистр. 18.04.23.

Подписано в печать 25.08.2023. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать трафаретная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 1,37.
Уч.-изд. л. 1,27. Заказ 188. Тираж 90 экз.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет».
Отпечатано в издательско-полиграфическом центре ВГПУ.
394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86. Тел. (473) 255-58-32, 255-61-83.