

На правах рукописи



**Харчева Анна Александровна**

**Исследование нелинейных систем со случайными  
возмущениями различной природы в приложении к  
аномальной диффузии, динамике популяций и мемристорам**

Специальность 1.3.4. —  
«Радиофизика»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент, РФФ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского  
**Дубков Александр Александрович**

Официальные оппоненты: **Ряшко Лев Борисович**,  
доктор физико-математических наук,  
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,  
профессор кафедры теоретической и математической физики

**Бутусов Денис Николаевич**,  
кандидат технических наук,  
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»,  
профессор кафедры систем автоматизированного проектирования

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита состоится 21 декабря 2022 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета 24.2.340.03 при Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского по адресу: 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 1, ауд. 420.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского и на сайте: <https://diss.unn.ru/1309>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 1, ауд. 420, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.340.03.

Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 2022 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
24.2.340.03,  
д. ф.-м. н., доцент



Клюев Алексей Викторович

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

В теории неравновесных систем, где макропеременные подчиняются некоторым нелинейным уравнениям движения, шум играет ключевую роль. В мультистабильных системах он определяет время распада метастабильных состояний, вызывает индуцированные переходы из одного состояния в другое и т. д. По этой причине изучение нелинейных систем, управляемых шумом, с последующими междисциплинарными приложениями привлекает быстро растущий интерес.

Получение строгих аналитических результатов в данной области сопряжено с серьезными трудностями: исходные уравнения являются нелинейными, а источники флуктуаций могут иметь самую разнообразную природу. В большинстве случаев удается ограничиться гауссовыми белыми или цветными шумами, но часто случайные воздействия должны рассматриваться как принципиально негауссовские. Например, в целом ряде экспериментов было обнаружено явление аномальной диффузии, отличающееся от обычного броуновского движения более быстрым, либо более медленным разбеганием облака частиц. Один из видов аномальной диффузии – сверхбыстрая диффузия в форме полетов Леви, активно изучается в связи с прикладными задачами оптимизации времени случайного поиска целей. Решение таких задач, наряду с мощным аппаратом марковской теории случайных процессов, требует применения специальных математических методов, таких как дробное исчисление, расщепление корреляции стохастических функционалов, метод обратного дифференциального оператора и т.д. Несмотря на большой интерес к изучению мультистабильности и метастабильности, проблема, связанная с детальным пониманием процессов, происходящих в нелинейных динамических системах в условиях шума все еще остается открытой.

Актуальным остается вопрос о влиянии случайных возмущений различной природы на поведение нелинейных систем в задачах экологии и генетики. Экологические модели находят все большее применение не только в различных естественнонаучных сферах (физике, химии и т.д.), но и играют важную роль для понимания механизмов применения нелинейной динамики к социальным и экономическим задачам. Заметим, что многие стохастические процессы, происходящие в популяционной динамике, нейродинамике и экологии демонстрируют мгновенные скачки, и поэтому не могут быть описаны возмущениями в виде гауссова шума.

Мемристивные устройства и системы на их основе как элементы памяти в последнее время активно исследуются как мультистабильные системы, обладающие большим потенциалом для расширения фундаментальных основ теории нелинейной динамики. Наибольший интерес вызывают такие подходы и модели, которые учитывают стохастичность поведения мемристивных систем. Стохастичность мемристоров, наблюдаемая во многих экспериментах, проявляется в значительных флуктуациях величин сопротивлений состояний при каждом переключении и в недостаточной предсказуемости отклика на импульсы управляющего напряжения. Стохастичное поведение мемристоров в значительной степени имитирует биологические среды в мозге. Поэтому

использование мемристивных структур для обучения нейронных сетей является очень перспективным. Разработка адекватной физической модели мемристора, учитывающей его стохастичность, позволит выработать рекомендации по повышению управляемости и предсказуемости его поведения.

### **Степень разработанности темы.**

Аналитическое исследование корреляционных и спектральных свойств установившихся полетов Леви в удерживающих потенциалах остается открытой проблемой. В последнее время наибольшее внимание в литературе уделяется анализу временных характеристик полетов Леви, таких как среднее время первого достижения границ, среднее время прихода, время пребывания в заданной области [1–7]. Стоит отметить, что большинство результатов, полученных в данной области, являются либо приближенными аналитическими, либо численными.

Активно изучаются и известные нелинейные флуктуационные явления, в которых явно проявляется конструктивная роль шума: стохастический резонанс и резонансная активация при диффузии в форме полетов Леви [8; 9], явление бимодальности [5] и мультимодальности [10; 11], двойной стохастический резонанс [12]. Наконец, особенности однонаправленного переноса частиц вдоль периодической структуры (рэтчет-эффект) при наличии полетов Леви анализировались в работах [3; 13]. Хорошо разработанная теория полетов Леви нашла приложение в задачах глобальной оптимизации [14–17].

Развитие методов статистической радиофизики применительно к задачам нелинейной динамики и аномальной диффузии нашло свое отражение в работах последних лет ведущих отечественных и зарубежных ученых (Barkai E., Chechkin A.V., Dybiec B., Gudowska–Nowak E., Hänggi P., Klafter J., Metzler R., Sokolov I.M., Spagnolo B., Агудов Н.В., Башкирцева И.А., Вадивасова Т.Е., Дубков А.А., Панкратов А.Л., Руденко О.В., Ряшко Л.Б., Учайкин В.В. и другие).

Хотя исследования в области мемристивных систем интенсивно ведутся на протяжении последнего десятилетия, большинство работ носят эмпирический характер и ограничиваются качественными модельными соображениями. Количественные расчеты, описывающие процессы, происходящие в мемристивных структурах, можно разделить на две категории. В работах первой категории предложены и реализованы численные (компьютерные) модели, а в работах второй категории использован аналитический (феноменологический) подход. Для исследования свойств стохастичности мемристоров, наблюдаемой во многих экспериментах, и понимания того, как она влияет на динамику системы, важно построить соответствующую теоретическую модель, отражающую фундаментальные свойства мемристора.

Среди значимых работ в этой области можно выделить труды зарубежных и отечественных исследователей (Демин В.А., Михайлов А.Н., Chua L., Strukov D.B., Ielmini D., Kim S., Savel'ev S.E., Waser R., Pershin Yu.V., Patterson G.A. и другие).

**Целью** данной работы является дальнейшее развитие аппарата статистического анализа нелинейных динамических систем со случайными воздействиями

негауссовой природы и его применение для исследования вероятностных, временных и спектрально-корреляционных характеристик аномальной диффузии в форме полетов Леви, некоторых распространенных моделей экологии и генетики, а также мемристивных систем.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы статистического анализа систем с негауссовыми источниками шума.
2. Получить новые точные результаты для установившихся вероятностных и временных характеристик аномальной диффузии в форме полетов Леви в различных потенциальных профилях.
3. Исследовать вероятностные характеристики в эволюционных моделях с негауссовыми случайными воздействиями.
4. На основе ранее развитых стохастических моделей исследовать конструктивную роль внутренних и внешних шумов в мультистабильных мемристивных системах.

**Научная новизна** полученных результатов:

1. Впервые получено точное аналитическое выражение для времени корреляции установившейся аномальной диффузии в форме полетов Леви с единичным индексом Леви ( $\alpha = 1$ ) в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени, на основе которого проведена ревизия формулы Крамерса для темпа преодоления потенциального барьера броуновской частицей.
2. Впервые найдены точные аналитические соотношения для установившихся вероятностных распределений координаты частицы при полетах Леви с индексом ( $\alpha = 1$ ) в симметричном степенном потенциале вида  $U(x) \propto x^{2m}$  с одним устойчивым состоянием, подтвердившие их бимодальность. В предельном переходе к бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме результат стыкуется с ранее полученным в литературе.
3. Впервые найдено и подтверждено результатами численного моделирования асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности координаты частицы при установившейся супердиффузии Леви в симметричных степенных потенциальных профилях для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$ .
4. Впервые исследована эволюция вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой обобщенной моделью Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме белого негауссова шума с односторонним устойчивым распределением. Впервые обнаружена немонотонная релаксация средней плотности популяции к стационарному значению для шума с односторонним устойчивым распределением Леви—Смирнова.
5. На основе интегро-дифференциального уравнение Колмогорова—Феллера впервые получена точная формула для установившегося

вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой уравнением Ферхюльста с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме одностороннего пуассоновского белого шума, моделирующего быстрое уменьшение численности популяции в результате эпидемий или катастроф.

6. Впервые показано, что в генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами происходят индуцированные шумом переходы при изменении средней частоты появления импульсов, а также их амплитуды. Трансформация плотностей вероятности от унимодальности к бимодальности свидетельствует о наличии мутаций в рассматриваемой системе.
7. Впервые установлено, что в стохастической модели мемристивной системы, в которой управляющим параметром выступает концентрация вакансий, время релаксации концентрации вакансий к стационарному состоянию демонстрирует немонотонную зависимость от интенсивности шума с характерным минимумом.
8. В стохастической модели мемристивной системы, в которой переменной состояния является длина проводящего филамента, формирующегося внутри мемристора, впервые аналитически обнаружено индуцированное шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения длины филамента.

**Практическая значимость** Предложенные в работе идеи и методы могут иметь большое значение для понимания взаимовлияния флуктуаций, диссипации и нелинейности в различных системах, а также при решении практических задач, связанных с правильным учетом воздействия шумов с негауссовой статистикой на поведение нелинейных динамических систем. Результаты для статистических характеристик времени резистивного переключения позволят глубже понять физику происходящих внутри мемристора процессов и выработать рекомендации по оптимизации работы этих устройств.

Результаты работы могут представлять интерес для ряда научно-исследовательских учреждений таких как Институт прикладной физики РАН (ФИЦ ИПФ РАН, г. Нижний Новгород), Московский государственный университет (МГУ), Московский физико-технический институт (МФТИ), Казанский федеральный университет (КФУ), Саратовский государственный университет (СГУ), Уральский федеральный университет (УрФУ). часть полученных результатов внедрены в содержание курса “Конструктивная роль шума в нелинейных неравновесных системах”, читаемого аспирантам радиофизического факультета.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных в диссертационной работе задач применялись методы статистической радиофизики, основанные на аппарате теории марковских случайных процессов и функциональном подходе к анализу стохастических систем, а также методы

теории вероятностей и теории случайных процессов, выполнялось сравнение результатов аналитических расчетов с результатами численного моделирования.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Развита математический аппарат анализа нелинейных динамических систем с негауссовыми случайными воздействиями различной природы.
2. Установлена новая форма закона Крамера для темпа преодоления потенциального барьера частицей при аномальной диффузии в форме полетов Леви на примере симметричного бистабильного потенциала.
3. Определены эволюции вероятностного распределения и среднего значения плотности биологической популяции, описываемой обобщенной моделью Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли с негауссовыми флуктуациями темпа воспроизводства и объема жизненных ресурсов.
4. Показано, что в генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами происходят индуцированные шумом переходы при изменении параметров шума.
5. Обнаружено индуцированное шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения в стохастической модели мемристивной системы, где переменной состояния служит длина филамента.

**Достоверность** научных положений и выводов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата. Обоснованность большинства результатов работы следует из получаемых точных соотношений в рамках рассматриваемых моделей и их стыковки с ранее известными результатами, а в случае приближенных расчетов подтверждается результатами численного моделирования.

**Апробация работы.** Основные результаты работы были представлены на 9-ти российских и 12-ти международных научных конференциях в 2013-2022 гг. в форме секционных и стендовых докладов:

- XIX-XXIV научные конференции по радиофизике (Н.Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского)
- XX-XXII Нижегородские сессии молодых ученых (естественные, математические науки)
- International Conference on Statistical Physics – SigmaPhi (Greece, 2014, 2017)
- 27th Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics (Poland, 2014)
- 23rd (China, 2015) and 25th (Switzerland, 2019) International Conferences on Noise and Fluctuations
- 7th International Conferences “Unsolved Problems on Noise” (Spain, 2015)
- Summer school on Lévy processes (France, 2016)
- Summer School on Stochastic Processes with Applications to Physics and Biophysics (Israel, 2017)
- International Conference “New Trends in Nonequilibrium Statistical Mechanics: Classical and Quantum Systems” (Italy, 2018)

- 2nd International Workshop “From ReRAM and Memristors to new Computing Paradigms (MEM-Q)” (Greece, 2018)
- International Conference “New Trends in Nonequilibrium Stochastic Multistable Systems and Memristors” (Italy, 2019)

Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры “Математические методы в радиофизике” радиофизического факультета ННГУ и лаборатории стохастических мультистабильных систем, организованной в рамках гранта Правительства Российской Федерации (договор № 074-02-2018-330 (2)), а также на заседаниях междууниверситетской аспирантской комиссии на факультете физики и химии университета г. Палермо (Италия).

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в диссертационной работе, выполнены при непосредственном активном участии соискателя либо получены им лично. В большинстве совместных работ автором выполнены аналитические расчеты. Постановка задач, разработка подходов, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены совместно с соавторами научных работ, опубликованных соискателем.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 21 печатном издании: 7 – в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 14 – в тезисах докладов.

## Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована ее цель и задачи, указана научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводятся положения, выносимые на защиту, описана структура и приведено краткое содержание диссертации. Введение содержит сведения о достоверности и апробации результатов.

**Первая глава** посвящена анализу статистических характеристик аномальной диффузии в форме полетов Леви.

Передемпфированное движение в потенциале  $U(x)$  под действием негауссового белого шума  $\xi(t)$  описывается следующим уравнением Ланжевена для координаты частицы  $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + \xi(t). \quad (1)$$

Соответствующее уравнение Колмогорова для плотности вероятности марковского процесса  $x(t)$  было получено в работе [18] и имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(z)}{z^2} \left[ \exp \left\{ -z \frac{\partial}{\partial x} \right\} - 1 + \sin z \frac{\partial}{\partial x} \right] dz P, \quad (2)$$

где функция  $\rho(z) \geq 0$ .

В частности, для белого гауссова шума  $\xi(t)$  с нулевым средним и интенсивностью  $2D$  функция  $\rho$  является сингулярной  $\rho(x) = 2D\delta(x)$ . Тогда уравнение (2) переходит в известное уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (3)$$

описывающее броуновскую диффузию.

В то же время, для негауссовой сторонней силы  $\xi_\alpha(t)$  с симметричным устойчивым вероятностным распределением Леви ( $0 < \alpha < 2$  – индекс Леви), функция  $\rho$  является степенной  $\rho(x) = Q_\alpha |x|^{1-\alpha}$ . В результате, уравнение (2) превращается в интегро-дифференциальное уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + D_\alpha \frac{\partial^\alpha P}{\partial |x|^\alpha} \quad (4)$$

с дробной пространственной производной

$$D_\alpha \frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial |x|^\alpha} = Q_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x-z,t) - P(x,t)}{|z|^{1+\alpha}} dz, \quad (5)$$

где параметр  $D_\alpha$  характеризует интенсивность воздействующего шума  $\xi_\alpha(t)$

$$D_\alpha = \frac{\pi Q_\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha/2)}. \quad (6)$$

Уравнение (4) описывает так называемую аномальную диффузию в форме полетов Леви. Большим плюсом для описания аномальной диффузии в форме полетов Леви является то, что здесь применим хорошо разработанный аппарат марковских случайных процессов.

В **разделе 1.1** изложены общие соотношения марковской теории для расчетов характеристик установившегося движения. Выведено замкнутое интегральное уравнение для распределения вероятностей времени пребывания в заданной области для произвольного однородного по времени марковского процесса.

**Раздел 1.2** посвящен эффекту задержки шумом распада нестабильных состояний (ЗРШ) в полностью неустойчивой системе, а именно в обратном симметричном параболическом потенциале  $U(x) = -bx^2/2$  ( $b > 0$ ) при диффузии в форме полетов Леви. Впервые получена точная формула для среднего времени пребывания частицы в симметричном интервале  $(-L;L)$  как функции начального положения частицы  $x_0$ , параметров системы и шума Леви

$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\sin kL}{k} \exp\left\{ \frac{(\sigma k)^\alpha}{\alpha b} \right\} dk \times \int_k^\infty \frac{\cos(qx_0)}{q} \exp\left\{ -\frac{(\sigma q)^\alpha}{\alpha b} \right\} dq. \quad (7)$$

Нормированное среднее время пребывания  $\tau(x_0) = \langle T(x_0) \rangle / T_{dyn}$  как функция параметра интенсивности шума  $\sigma$  для различных значений индекса Леви  $\alpha$  изображено на Рисунке 1. Здесь  $T_{dyn}$  – динамическое время пребывания частицы, т.е. при отсутствии шума  $\xi_\alpha(t)$  ( $\sigma = 0$ ). Точки на рисунке соответствуют численному моделированию уравнения Ланжевена (1) методом Монте–Карло, в то время как сплошные линии – численному интегрированию точной аналитической формулы (7). Видно, что метод Монте–Карло прекрасно подтверждает точные результаты.

На Рисунке 1 наблюдается немонотонное поведение с максимумом нормированного среднего времени пребывания частицы в интервале  $(-L,L)$  как функции параметра  $\sigma$ . Это признак эффекта задержки шумом распада нестабильных состояний, поскольку шум увеличивает средний срок нахождения частицы в определенной области потенциального профиля [19; 20]. Более того, порядок величины параметра  $\sigma$ , при котором наблюдается максимум, равен  $\sigma \approx (\Delta U)^{(1/\alpha)}$ , где  $\Delta U$  – высота потенциального барьера и максимум потенциального профиля.

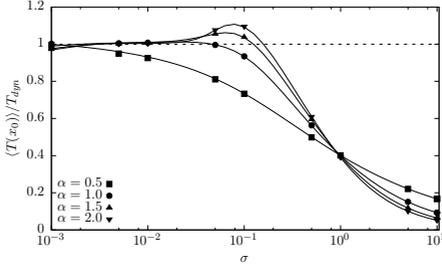


Рис. 1 — Нормированное среднее время пребывания  $\langle T(x_0) \rangle / T_{dyn}$  как функция параметра интенсивности  $\sigma$ . Значения параметров:  $x_0 = 0.1$ ,  $L = 1$ ,  $b = 1$

Это находится в согласии с тем, что было найдено для броуновской диффузии в метастабильных системах (см. работы [20–22]).

Проблема выхода из метастабильного состояния в случае броуновской диффузии была исследована Крамерсом [23]. Для случайных процессов, существенно отличающихся от гауссова, поведение времени Крамерса будет отличаться от обычного экспоненциального закона. Раздел 1.3 посвящен отысканию времени корреляции установившихся полетов Леви, которое определяется переходами частицы из одного устойчивого состояния в другое и поэтому имеет очевидную аналогию со временем Крамерса. Рассматривается движение частицы в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени

$$U(x) = \Delta U \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2, \quad (8)$$

где  $\Delta U$  – высота потенциального барьера, разделяющего два устойчивых состояния в точках  $\pm a$ .

На основе ранее развитой техники была получена точная формула для времени корреляции ограниченных полетов Леви с единичным индексом  $\alpha$

$$\tau_c = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma(p^2 - q^2)} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{p+q}{p-q}\right), \quad (9)$$

где  $\gamma = 4\Delta U/a^4$ ,  $p$  и  $q$  – параметры, зависящие от системы и шума Леви.

Показано, что для достаточно высокого потенциального барьера время корреляции не зависит от его высоты, что может быть интерпретировано как ревизия закона Крамерса для супердиффузии в форме полетов Леви. Кроме того, обнаружена интересная степенная зависимость с показателем  $4/3$  времени корреляции от положения потенциальных ям.

В разделе 1.4 теоретически и численными методами исследуются установившиеся корреляционные характеристики супердиффузии в форме полетов Леви в симметричном удерживающем степенном потенциале ширины  $L$

$$U(x) = \frac{\gamma}{2m} \left( \frac{x}{L} \right)^{2m}. \quad (10)$$

Для данного потенциального профиля впервые получено общее аналитическое выражение для установившегося вероятностного распределения

координаты частицы

$$P_{st}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\beta} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\cos\frac{\pi k}{2m-1}} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{2k} \right\}, & |x| \leq \beta, \\ \frac{1}{\pi\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{2m} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\cos\frac{\pi k}{2m-1}} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{2k} \right\}, & |x| > \beta, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\beta = L^{2m-1} \sqrt{D_1 L / \gamma}$ , а  $D_1$  – параметр интенсивности шума с устойчивым распределением Коши.

В предельном переходе  $m \rightarrow \infty$  к бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме результат стыкуется с ранее полученным в литературе, а именно установившееся вероятностное распределение (11) переходит в известное распределение арксинуса [24].

Для рассматриваемого потенциального профиля впервые установлено, что поведение корреляционной функции установившихся полетов Леви вблизи 0, а следовательно и асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности координаты частицы, отличается от случая обычного броуновского движения.

В разделе 1.5 рассматриваются установившиеся вероятностные характеристики диффузии на плоскости.

Диффузия частицы в произвольном двумерном потенциальном профиле  $U(x,y)$  под воздействием белых шумов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  описывается следующей системой уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -U'_x(x,y) + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -U'_y(x,y) + \xi_2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Впервые получено общее интегро-дифференциальное уравнение Колмогорова для совместной плотности вероятности координат частицы  $P(x,y,t)$  для произвольных статистически независимых источников белого шума в двумерном потенциале произвольного вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} P(x,y,t) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} P(x,y,t) \right) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(z)}{z^2} \left( e^{-z \frac{\partial}{\partial x}} - 1 + z \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x,y,t) dz + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(z)}{z^2} \left( e^{-z \frac{\partial}{\partial y}} - 1 + z \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x,y,t) dz, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\rho_i(z)$  – функции, определяющие статистику белых шумов  $\xi_i(t)$ .

Рассмотрен случай двух идентичных источников шума с симметричным  $\alpha$ -устойчивым распределением Леви:  $\rho_1(z) = \rho_2(z) = Q_\alpha |z|^{1-\alpha}$ . Впервые получено выражение для установившегося совместного вероятностного распределения в потенциале с радиальной симметрией  $U(x,y) = \gamma(x^2 + y^2)/2$  для произвольного индекса Леви

$$P_{st}(x,y) = \left( \frac{\gamma\alpha}{D_\alpha} \right)^{2/\alpha} \cdot P_{\alpha,0} \left( \left( \frac{\gamma\alpha}{D_\alpha} \right)^{1/\alpha} x \right) \cdot P_{\alpha,0} \left( \left( \frac{\gamma\alpha}{D_\alpha} \right)^{1/\alpha} y \right). \quad (14)$$

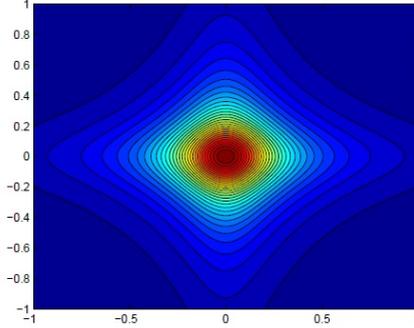


Рис. 2 — Топограмма стационарной совместной плотности вероятности координат частицы в гармоническом потенциале  $U(x,y)=\gamma(x^2+y^2)/2$  в случае шумов Коши ( $\alpha=1$ ). Значения параметров:  $D_1=0,5$ ,  $\gamma=2$

Здесь использован тот факт, что весь класс устойчивых вероятностных распределений  $P_{\alpha,\beta}(x)$  имеет характеристическую функцию вида [25]

$$\vartheta_{\alpha,\beta}(k) = \exp\{-|k|^\alpha e^{\frac{i\pi\beta}{2}\text{sgn}k}\}, \quad (15)$$

где  $\alpha$  — индекс Леви,  $\beta$  — параметр асимметрии ( $|\beta| \leq 1 - |\alpha - 1|$ ). В симметричном случае ( $\beta=0$ ) соответствующее устойчивое вероятностное распределение может быть вычислено с помощью обратного преобразования Фурье характеристической функции (15)

$$P_{\alpha,0}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|^\alpha - ikz} dk. \quad (16)$$

Топограмма стационарной совместной плотности вероятности координат (14) в гармоническом потенциале  $U(x,y)=\gamma(x^2+y^2)/2$  в случае шумов Коши представлены на Рисунке 2. Видно, что полеты Леви на плоскости не обладают свойством симметрии из-за независимости полетов в перпендикулярных направлениях, что отличается от случая гауссовых шумов.

Материалы первой главы изложены в работах [A1–A10].

Во **второй главе** рассматривается влияние шумов различной природы в некоторых задачах популяций и генетики.

В последнее время исследователи проявляют растущий интерес к более глубокому пониманию эффектов флуктуаций в биологических системах, начиная от неврологии и заканчивая биологической эволюцией и динамикой популяций [26–32]. Поэтому для описания сложных экосистем принципиально важно понимать взаимосвязь между шумом, параметрами окружающей среды и внутренней нелинейностью моделей экосистем. Даже небольшие стохастические возмущения в биологических системах могут резко изменить их динамику [33–35]. Следует отметить, что многие стохастические процессы проявляют мгновенные дискретные скачки и поэтому не могут быть адекватно представлены возмущением в виде белого гауссова шума, что затрудняет аналитический

анализ таких нелинейных динамических систем [36]. В этой связи понимание роли шума в динамике нелинейных систем является ключевым в изучении и дальнейшем моделировании сложных систем.

Поведение некоторых нелинейных динамических систем в присутствии случайных возмущений может быть описано уравнением Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли (МФБ)

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x - \beta(t)x^{\mu+1}, \quad (17)$$

которое является обобщением широко известной модели Ферхюльста [37] или логистического уравнения ( $\mu=1$ ). Применительно к динамике популяции  $x(t)$  – плотность популяции,  $r(t)$  – это темп роста изолированной популяции, а нелинейный член с положительными параметрами  $\mu$  и  $\beta(t)$  отвечает за ограничение роста, связанное с конечным количеством пищевых ресурсов, наличием хищников и т.д.

В разделе 2.1 аналитически исследуются два обобщенных уравнения Ферхюльста с негауссовскими флуктуациями темпа воспроизводства и объема ресурсов.

Проанализирована модель МФБ, в которой оба параметра в уравнении (17) флуктуируют одинаково, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = [r + \xi(t)]x(1 - x^\mu), \quad (0 < x < 1), \quad (18)$$

где  $\xi(t)$  – негауссов шум с нулевым средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и ненулевым временем корреляции  $\tau_c$ .

С помощью центральной предельной теоремы (ЦПТ) найдено приближенное поведение вероятностного распределения плотности популяции для произвольного негауссового шума с конечным временем корреляции

$$P(x, t) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi S_\xi(0)} t x (1 - x^\mu)} \exp \left\{ - \frac{[rt + \ln(x^{-\mu} - 1) - \ln(x_0^{-\mu} - 1)]^2}{2S_\xi(0)t} \right\}, \quad (19)$$

где  $S_\xi(\omega)$  – спектральная плотность мощности случайного процесса  $\xi(t)$ .

В качестве примера цветного негауссова шума рассматривается марковский дихотомический шум, переключающийся между двумя значениями  $\pm\Delta$  ( $\Delta < r$ ) со средней частотой  $\nu$ . Этот шум, имеющий экспоненциально убывающую корреляционную функцию  $K[\tau] = \Delta^2 e^{-2\nu|\tau|}$ , дает хорошее понимание самой простой и наиболее распространенной физической ситуации: переходов между двумя конфигурациями системы. Например, он может описывать сезонные скачкообразные колебания рождаемости и смертности в биологических системах.

Впервые найдена эволюция момента  $n$ -го порядка плотности популяции в случае марковского дихотомического шума

$$\begin{aligned} \langle x^n(t) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1 - x_0^\mu}{x_0^\mu} \right)^k \frac{\Gamma(k + n/\mu)}{\Gamma(n/\mu) k!} e^{-(kr + \nu)t} \times \\ &\times \left( \text{ch} \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2}} \text{sh} \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Анализ выражения (20) показывает, что время релаксации увеличивается с увеличением показателя  $\mu$  при фиксированном начальном значении плотности

популяции  $x_0$ , а средняя плотность популяции ( $n=1$ ) монотонно релаксирует к установившемуся ненулевому значению, что свидетельствует о выживании биологической популяции.

Для модели МФБ (17) для плотности популяции  $x(t)$  с флуктуирующим объемом ресурсов, имеющим одностороннее устойчивое вероятностное распределение

$$\frac{dx}{dt} = rx - \xi(t)x^{\mu+1} \quad (21)$$

впервые найдена эволюция вероятностного распределения плотности биологической популяции

$$P(x,t) = \frac{1}{x^{\mu+1}\sigma(t)} P_{\alpha,-\alpha} \left( \frac{1}{\mu\sigma(t)} \left( \frac{1}{x^\mu} - \frac{e^{-\mu rt}}{x_0^\mu} \right) \right), \quad (22)$$

где  $P_{\alpha,-\alpha}(x)$  – устойчивое вероятностное распределение, соответствующее характеристической функции  $\theta_{\alpha,-\alpha}(k)$  (см. (15)).

Выражение (22) определяет переходную динамику вероятностного распределения из начального состояния  $P(x,0) = \delta(x-x_0)$  к установившемуся  $P_{st}(x)$  в асимптотике ( $t \rightarrow \infty$ ), которое, имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{(\mu r \alpha)^{1/\alpha}}{x^{\mu+1}\sigma} P_{\alpha,-\alpha} \left( \frac{(\mu r \alpha)^{1/\alpha}}{\mu x^\mu \sigma} \right). \quad (23)$$

Полученные точные результаты (22) и (23) могут быть проанализированы только в некоторых частных случаях, так как устойчивые распределения  $P_{\alpha,\beta}(x)$  имеют сложное представление в виде рядов. В качестве примера в работе рассмотрен белый негауссов шума  $\xi(t)$  с односторонним устойчивым распределением Леви–Смирнова ( $\alpha = 1/2$ ) (см., например, [25])

$$P_{1/2,-1/2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}} e^{-1/(4x)} \quad (x > 0). \quad (24)$$

Впервые найдена эволюция средней плотности популяции для общего случая в виде

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^\infty \frac{P_{\alpha,-\alpha}(z) dz}{[\mu\sigma(t)z + e^{-\mu rt}/x_0^\mu]^{1/\mu}}. \quad (25)$$

Релаксация средней плотности популяции, полученная численным вычислением интеграла (25) для устойчивого распределения Леви–Смирнова (24) и различных начальных значений плотности популяции  $x_0$ , изображена на Рисунке 3. В отличие от первой рассмотренной модели (18), наблюдается немонотонная релаксация средней плотности популяции к установившемуся значению.

В разделе 2.2 на основе уравнения Колмогорова–Феллера получена точная формула для установившегося вероятностного распределения плотности популяции, подчиняющейся уравнению Ферхюльста с флуктуациями параметра насыщения в форме одностороннего пуассоновского белого шума. Это распределение оказывается унимодальным, и положение его максимума сдвигается к нулю с увеличением средней частоты пуассоновских импульсов.

Для генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами обеих полярностей продемонстрировано наличие индуцированных шумом переходов

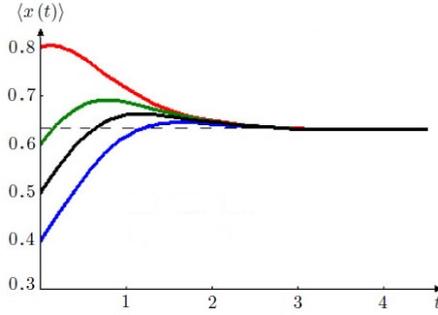


Рис. 3 — Немонотонная релаксация средней плотности популяции к установившемуся значению для различных начальных значений  $x_0 = 0.4, 0.5, 0.6, 0.8$ . Значения параметров:  $\mu = 3$ ,  $r = 1$ ,  $\sigma = \pi$

от унимодальности к бимодальности и даже тримодальности в установившемся вероятностном распределении при изменении параметров шума. Впервые показано, что в модели Хонглера переход от унимодальности к бимодальности вероятностного распределения с увеличением средней частоты появления пуассоновских импульсов происходит через тримодальную фазу, а прямой переход от унимодальности к тримодальности наблюдается при изменении среднего квадрата амплитуд импульсов.

В разделе 2.3 рассматривается передемпфированное движение частицы с координатой  $x(t)$  во внешнем потенциале  $U(x)$  под воздействием процесса Орнштейна—Уленбека  $\eta(t)$  [38; 39]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -U'(x) + \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{\tau_c} \eta(t) + \sqrt{2D} \xi(t),\end{aligned}\tag{26}$$

где  $\tau_c$  — время корреляции процесса Орнштейна—Уленбека,  $\xi(t)$  — белый гауссовский шум с нулевым средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и единичной интенсивностью. Проанализировано, при каких условиях воздействие шума Орнштейна—Уленбека индуцирует мультимодальность стационарных состояний в фиксированных одноямных степенных и экспоненциальных потенциалах. В частности, показан переход от унимодальности к бимодальности для фиксированных одноямных потенциалов при увеличении показателя степени.

Исследования и результаты второй главы опубликованы в работах [A11—A17].

**Третья глава** имеет прикладной характер и посвящена анализу стохастических моделей мемристов.

Мемристор — это пассивный элемент электрических цепей, способный изменять свое внутреннее сопротивление в зависимости от приложенного напряжения и, что наиболее важно, запоминать свое состояние при отключении питания [40]. Это свойство делает мемристоры и мемристивные структуры наиболее перспективными кандидатами для следующего поколения устройств энергонезависимой памяти RRAM (Resistive Random Access Memory) и нейроморфных

системах [41–43]. Среди преимуществ мемристора можно также выделить его превосходящую масштабируемость до нанометров, быстрое переключение, низкое энергопотребление и простую структуру [44–48].

**Раздел 3.1** посвящен обзору основных моделей мемристивных систем.

В **разделе 3.2** проведен анализ двух макромоделей идеального мемристора с внешним гауссовым шумом. Для обоих случаев получены точные аналитические выражения для плотности вероятности сопротивления мемристора. Показано, что для управляемого зарядом мемристора форма вероятностного распределения сопротивления зависит от того, что прикладывается в качестве гауссова шума – напряжение или ток. Проанализированы различные шумовые воздействия в виде белого и цветного гауссова шума. На конкретном примере физически обоснованной экспоненциальной зависимости сопротивления от протекающего заряда анализировалось влияние среднего значения и интенсивности гауссова шума на переключения мемристора между двумя состояниями. Главным недостатком рассмотренной модели является неспособность обеспечить свойства реального мемристора: обнаружено отсутствие установившегося вероятностного распределения сопротивления мемристора.

В **разделе 3.3** рассмотрена обобщенная стохастическая модель мемристивной системы, в которой управляющим параметром выступает концентрация вакансий. Впервые установлено, что время релаксации концентрации вакансий к стационарному состоянию демонстрирует немонотонную зависимость от интенсивности шума с характерным минимумом (см. Рисунок 4). Диапазон, в котором время уменьшается с интенсивностью колебаний  $\theta < E_a$ , является наиболее интересным с практической точки зрения, т. к. он обеспечивает возможность ускорения процесса релаксации посредством шума. Как видно из вставки на Рисунке 4, существует оптимальное значение интенсивности шума, для которого время релаксации минимально. Дальнейший рост времени релаксации с интенсивностью шума является эффектом задержки шумом распада нестабильного состояния. В мемристивной системе данный эффект будет играть негативную роль, поскольку он приведет к замедлению переключений. Также установлено, что выбор конкретного потенциального профиля порождает дополнительную возможность ускорения процесса релаксации (см. сплошную и пунктирную линии на Рисунке 4).

В **разделе 3.4** рассмотрена новая стохастическая модель, где переменной состояния является длина проводящего филамента или координата границы легированной области. Данная модель описывается довольно простыми уравнениями броуновской диффузии, не требует значительных вычислительных ресурсов для численного моделирования и позволяет в некоторых случаях получать точные аналитические решения.

В основе модели лежит уравнение Фоккера–Планка для функции плотности вероятности  $P(y,t)$  координаты границы проводящего филамента  $y(t)$

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ P(y,t) \frac{\partial U_{eff}(y,V)}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} D_{eff}(y,V) \frac{\partial P(y,t)}{\partial y}, \quad (27)$$

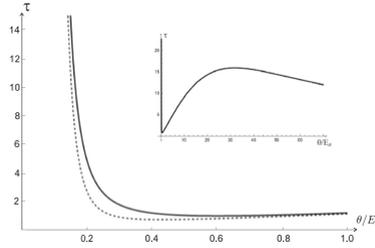


Рис. 4 — Время релаксации как функция безразмерной интенсивности шума  $\theta/E_a$  для потенциального профиля с одинаковыми размерами барьеров и ям  $a=b=0,5l$  (сплошная линия) и потенциального профиля с широкими ямами  $a=0,8l$  и узкими барьерами  $b=0,2l$  (пунктирная линия). Вставка: время релаксации как функция безразмерной интенсивности шума для больших значений  $\theta/E_a$

и соответствующее стохастическое уравнение Ланжевена [49]:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U_{eff}(y, V)}{\partial y} + \xi(t) \quad (28)$$

с аддитивным белым гауссовским источником шума  $\xi(t)$ , имеющим нулевое среднее значение и интенсивность, равную  $2D_{eff}$ .

На Рисунке 5 показана эволюция нестационарного распределения из начальной точки  $y_0 = L$ , когда к системе прикладывается постоянная разность потенциалов  $V = V_0 < 0$ . Появление двух сосуществующих пиков известно как переходная бимодальность, и было исследовано ранее для других физических систем [50; 51]. Для мемристивной системы это означает, что в процессе переключения граница филамента находится достаточно длительное время в областях расположения пиков (состояния СНС и СВС соответственно). При этом переход между этими состояниями происходит за относительно короткое, но случайное время. Таким образом, наблюдается индуцированный шумом эффект, который не проявляется в чистой динамической системе.

Материалы третьей главы изложены в работах [A18—A21]. Настоящая работа поддержана Правительством Российской Федерации, договор № 074-02-2018-330 (2).

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы, которые заключаются в следующем:

1. Впервые получено и проанализировано точное аналитическое выражение для времени корреляции установившейся аномальной диффузии в форме полетов Леви с единичным индексом Леви ( $\alpha = 1$ ) в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени, на основе которого проведена ревизия формулы Крамерса для темпа преодоления потенциального барьера броуновской частицей.
2. Впервые найдены точные аналитические соотношения для установившихся вероятностных распределений координаты частицы при полетах Леви с индексом ( $\alpha = 1$ ) в симметричном степенном потенциале вида  $U(x) \propto x^{2m}$  с одним устойчивым состоянием, подтвердившие их бимодальность.

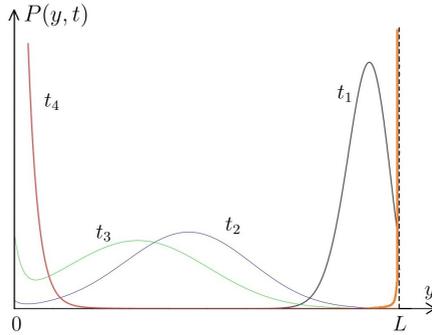


Рис. 5 — Нестационарное вероятностное распределение  $P(y, t)$  расположения границ проводящего филамента с начальным условием  $y_0 = L$  (соответствующее СРС) и постоянной разностью потенциалов  $V < 0$  в различные моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

В предельном переходе к бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме результат стыкуется с ранее полученным в литературе.

3. Впервые найдено и подтверждено результатами численных расчетов асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности координаты частицы при установившейся супердиффузии Леви в симметричных степенных потенциальных профилях для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$ .
4. Впервые выведено общее уравнение Колмогорова для совместной плотности вероятности координат частицы в двумерном потенциале произвольного вида при диффузии, вызванной статистически независимыми источниками белого шума. Проведено сравнение установившихся вероятностных характеристик броуновской диффузии и аномальной диффузии в форме полетов Леви в потенциале с радиальной симметрией.
5. Впервые исследована эволюция вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой обобщенной моделью Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме белого негауссова шума с односторонним устойчивым распределением. Впервые обнаружена немонотонная релаксация средней плотности популяции к стационарному значению для шума с односторонним устойчивым распределением Леви—Смирнова.
6. На основе интегро-дифференциального уравнение Колмогорова—Феллера впервые получена точная формула для установившегося вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой уравнением Ферхюльста с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме одностороннего пуассоновского белого шума, моделирующего быстрое уменьшение численности популяции в результате эпидемий или катастроф.

7. Впервые показано, что в генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами индуцированный шумом переход от унимодальности к бимодальности вероятностного распределения с увеличением средней частоты появления импульсов происходит через тримодальную фазу, а прямой переход от унимодальности к тримодальности наблюдается при изменении среднего квадрата амплитуд импульсов.
8. Исследовано влияние коррелированных шумов на вероятностные свойства нелинейных динамических систем. Проанализировано, при каких условиях воздействие шума Орнштейна—Уленбека индуцирует мультимодальность стационарных состояний в фиксированных одноямыных степенных и экспоненциальных потенциалах. В частности, показан переход от унимодальности к бимодальности для фиксированных одноямыных потенциалов при увеличении показателя степени. Кроме того, изучено, что дополнительное воздействие симметричного марковского дихотомического шума может индуцировать динамическую мультимодальность в потенциалах четвертой степени.
9. Проведено исследование двух макромоделей идеального мемристора с внешним гауссовым шумом. Для обоих случаев получены точные аналитические выражения для плотности вероятности сопротивления мемристора. Показано, что для управляемого зарядом мемристора форма вероятностного распределения сопротивления зависит от того, что прикладывается в качестве гауссова шума – напряжение или ток. На конкретном примере физически обоснованной экспоненциальной зависимости сопротивления от протекающего заряда анализировалось влияние среднего значения и интенсивности гауссова шума на переключения мемристора между двумя состояниями. Главным недостатком рассмотренной модели является неспособность обеспечить свойства реального мемристора: обнаружено отсутствие установившегося вероятностного распределения сопротивления мемристора.
10. Впервые установлено, что в стохастической модели мемристивной системы, в которой управляющим параметром выступает концентрация вакансий, время релаксации концентрации вакансий к стационарному состоянию демонстрирует немонотонную зависимость от интенсивности шума с характерным минимумом.
11. В стохастической модели мемристивной системы на основе длины филамента в качестве переменной состояния впервые аналитически обнаружено индуцированный шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения длины филамента. Рассматриваемая модель описывается довольно простыми уравнениями броуновской диффузии, не требует значительных вычислительных ресурсов для численного моделирования и позволяет в некоторых случаях получать точные аналитические решения.

## Список литературы

- [1] Chechkin, A. Bifurcation, bimodality, and finite variance in confined Lévy flights / A. Chechkin [et al.] // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 67. — 010102(R).
- [2] Chechkin, A. Barrier crossing of a Lévy flight / A. Chechkin [et al.] // *Europhysics Letters*. — 2007. — Vol. 72. — P. 348.
- [3] Bao, J.-D. Cancellation phenomenon of barrier escape driven by a non-Gaussian noise / J.-D. Bao [et al.] // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 72. — P. 051105.
- [4] Imkeller, P. Lévy flights: transitions and meta-stability / P. Imkeller, I. Pavlyukevich // *Journal of Physics A*. — 2006. — Vol. 39. — P. L237.
- [5] Dybiec, B. Escape driven by  $\alpha$ -stable white noises / B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, P. Hänggi // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75. — P. 021109.
- [6] Padash, A. First-passage properties of asymmetric Lévy flights / A. Padash [et al.] // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2019. — Vol. 52. — P. 454004.
- [7] Padash, A. First passage time moments of asymmetric Lévy flights / A. Padash [et al.] // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2020. — Vol. 53.
- [8] Dybiec, B. Levy stable noise-induced transitions: stochastic resonance, resonant activation and dynamic hysteresis / B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2009. — Vol. 2009. — P05004.
- [9] Zeng, L. Effects of Lévy noise in aperiodic stochastic resonance / L. Zeng, R. Bao, B. Xu // *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical*. — 2007. — Vol. 40. — P. 7175.
- [10] Capała, K. Multimodal stationary states in symmetric single-well potentials driven by Cauchy noise / K. Capała, B. Dybiec // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2019. — Vol. 99. — P. 033206.
- [11] Ciesla, M. Multimodal stationary states under Cauchy noise / M. Ciesla, K. Capała, B. Dybiec // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 99. — P. 052118.
- [12] Dybiec, B. Levy noises: double stochastic resonance in a single-well potential / B. Dybiec // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 80. — P. 041111.
- [13] Ai, B. Competition between ac driving forces and Lévy flights in a nonthermal ratchet / B. Ai, Y. He // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2010. — P04010.
- [14] Yang, X. Firefly algorithm, Lévy flights and global optimization / X. Yang // *SGAI Conf*. — 2009.
- [15] Ling, Y. Lévy flight trajectory-based whale optimization algorithm for global optimization / Y. Ling, Y. Zhou, Q. Luo // *IEEE Access*. — 2017. — Vol. 5. — P. 6168.
- [16] Sharma, H. Lévy flight artificial bee colony algorithm / H. Sharma [et al.] // *International Journal of Systems Science*. — 2016. — Vol. 47. — P. 2652.

- [17] Ewees, A. Improved seagull optimization algorithm using Lévy flight and mutation operator for feature selection / A. Ewees [et al.] // *Neural Computing and Applications*. — 2022. — Vol. 34. — P. 1.
- [18] Dubkov, A. Generalized Wiener process and Kolmogorov’s equation for diffusion induced by non-Gaussian noise source / A. Dubkov, B. Spagnolo // *Fluctuation and Noise Letters*. — 2005. — Vol. 5. — P. L267.
- [19] Agudov, N. V. Escape from a metastable state with fluctuating barrier / N. V. Agudov, A. A. Dubkov, B. Spagnolo // *Physica A*. — 2003. — Vol. 325. — P. 144.
- [20] Dubkov, A. A. Noise-enhanced stability in fluctuating metastable states / A. A. Dubkov, N. V. Agudov, B. Spagnolo // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69. — P. 061103.
- [21] Valenti, D. Stabilization of quantum metastable states by dissipation / D. Valenti [et al.] // *Physical Review B*. — 2015. — Vol. 91. — P. 235412.
- [22] Agudov, N. V. Noise-enhanced stability of periodically driven metastable states / N. V. Agudov, B. Spagnolo // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 64. — 035102(R).
- [23] Kramers, H. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions / H. Kramers // *Physica*. — 1940. — Vol. 7. — P. 284.
- [24] Denisov, S. I. Steady-state Lévy flights in a confined domain / S. I. Denisov, W. Horsthemke, P. Hänggi // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 77. — P. 061112.
- [25] Metzler, R. The random walk’s guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // *Physics Reports*. — 2000. — Vol. 339. — P. 1.
- [26] Valenti, D. Pattern formation and spatial correlation induced by the noise in two competing species / D. Valenti, A. Fiasconaro, B. Spagnolo // *Acta Physica Polonica B*. — 2004. — Vol. 35. — P. 1481.
- [27] Manjoo-Docrat, R. A spatio-stochastic model for the spread of infectious diseases / R. Manjoo-Docrat // *Journal of Theoretical Biology*. — 2022. — Vol. 533. — P. 110943.
- [28] Katriel, G. Stochastic discrete-time age-of-infection epidemic models / G. Katriel // *International Journal of Biomathematics*. — 2013. — Vol. 06. — P. 1250066.
- [29] Kolinichenko, A. P. Stochastic sensitivity analysis of patterns in population dynamics models / A. P. Kolinichenko, L. B. Ryashko // *AIP Conference Proceedings*. — 2022. — Vol. 2466. — P. 070008.
- [30] Bashkirtseva, I. Regular and chaotic variability caused by random disturbances in a predator–prey system with disease in predator / I. Bashkirtseva, T. Perevalova, L. Ryashko // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2022. — Vol. 163. — P. 112551.
- [31] Bashkirtseva, I. Analysis of stochastic dynamics in a multistable logistic-type epidemiological model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2022. — P. 1.
- [32] Allen, L. J. S. An introduction to the stochastic process with applications to biology / L. J. S. Allen. — CRC Press, 2003. — 496 p.
- [33] Chesson, P. Stochastic population models / P. Chesson. — Springer, 1991. — 496 p.
- [34] Scheffer, M. Catastrophic shifts in ecosystems / M. Scheffer [et al.] // *Nature*. — 2001. — Vol. 413. — P. 591.
- [35] Blasius, B. Complex population dynamics: nonlinear modeling in ecology / B. Blasius, J. Kurths, L. Stone. — Singapore : World Scientific, 2007. — 257 p.

- [36] Ciuchi, S. Self-regulation mechanism of an ecosystem in a non-Gaussian fluctuation regime / S. Ciuchi, F. de Pasquale, B. Spagnolo // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 54. — P. 706.
- [37] Eigen, M. The hypercycle: a principle of natural self-organization / M. Eigen, P. Schuster. — Berlin : Springer, 1979. — 98 p.
- [38] Gardiner, C. W. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences / C. W. Gardiner. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1985. — 415 p.
- [39] Risken, H. The Fokker-Planck Equation / H. Risken. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989. — 441 p.
- [40] Strukov, D. The Missing memristor found / D. Strukov [et al.] // *Nature*. — 2008. — Vol. 453. — P. 80.
- [41] Zidan, M. A. The future of electronics based on memristive systems / M. A. Zidan, J. P. Strachan, W. D. Lu // *Nature Electronics*. — 2018. — Vol. 1. — P. 22.
- [42] Xia, Q. Memristive crossbar arrays for brain-inspired computing / Q. Xia, J. J. Yang // *Nature Materials*. — 2019. — Vol. 18. — P. 309.
- [43] Andreeva, N. V. Memristive logic design of multifunctional spiking neural network with unsupervised learning / N. V. Andreeva, E. A. Ryndin, M. I. Gerasimova // *BioNanoScience*. — 2020. — Vol. 10. — P. 824.
- [44] Ielmini, D. Resistive switching memories based on metal oxides: mechanisms, reliability and scaling / D. Ielmini // *Semiconductor Science and Technology*. — 2016. — Vol. 31. — P. 063002.
- [45] Marinella, M. J. Efficient reservoir computing with memristors / M. J. Marinella, S. Agarwal // *Nature Electronics*. — 2019. — Vol. 2. — P. 437—8.
- [46] Ryndin, E. Compact model for bipolar and multilevel resistive switching in metal-oxide memristors / E. Ryndin, N. Andreeva, V. Luchinin // *Micromachines*. — 2022. — Vol. 13. — P. 98.
- [47] Butusov, D. N. Semi-explicit composition methods in memcapacitor circuit simulation / D. N. Butusov [et al.] // *International Journal of Embedded and Real-Time Communication Systems*. — 2019. — Vol. 10. — P. 37.
- [48] Бутусов, Д. Н. Методы бифуркационного и рекуррентного анализа нелинейных динамических систем на примере мемристивной цепи / Д. Н. Бутусов [и др.] // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. — 2019. — Т. 19. — С. 126.
- [49] Risken, H. The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications / H. Risken. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1984. — 472 p.
- [50] Agudov, N. Transient bimodality of nonequilibrium states in monostable systems with noise / N. Agudov, R. Devyataykin, A. Malakhov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. — 1999. — Vol. 42. — P. 902.
- [51] Broggi, G. Transient bimodality in optically bistable systems / G. Broggi, L. Lugiato, A. Colombo // *Physical Review A*. — 1985. — Vol. 32. — P. 2803.

## Публикации автора по теме диссертации

- [A1] Dubkov, A. A. Time characteristics of one-dimensional and two-dimensional stationary Lévy flights in different potential profiles / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // IEEE 2015 International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF). — 2015.
- [A2] Dubkov, A. A. Features of barrier crossing event for Lévy flights / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // Europhysics Letters. — 2016. — Vol. 113. — P. 30009.
- [A3] Kharcheva, A. A. Spectral characteristics of steady-state Lévy flights in confinement potential profiles / A. A. Kharcheva [et al.] // JSTAT: Theory and Experiment. — 2016. — Vol. 2016. — P. 054039.
- [A4] Dubkov, A. A. Statistics of residence time for Lévy flights in unstable parabolic potentials / A. A. Dubkov [et al.] // Physical Review E. — 2020. — Vol. 102. — P. 042142.
- [A5] Dubkov, A. A. Effect of potential barrier on correlation characteristics of steady-state Lévy flights in bistable potential / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // Abstracts International Conference on Statistical Physics SigmaPhi2014. — 2014. — P. 76.
- [A6] Kharcheva, A. A. The correlation time of stationary superdiffusion in the form of Lévy flights in bistable symmetric quartic potential / A. A. Kharcheva // Abstracts 27th Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics. — 2014. — P. 29.
- [A7] Харчева, А. А. Влияние потенциального барьера на корреляционные характеристики полетов Леви в бистабильном симметричном потенциале / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Труды XVIII научной конференции по радиофизике. — 2014. — С. 277.
- [A8] Харчева, А. А. Сравнительные вероятностные характеристики диффузионного движения в двумерных потенциалах / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Труды XIX научной конференции по радиофизике, посв. 70-летию радиофизического факультета. — 2015. — С. 264.
- [A9] Харчева, А. А. Время корреляции установившихся полетов Леви в бистабильном симметричном потенциале / А. А. Харчева, А. А. Дубков // XX Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки: материалы докладов. — 2015. — С. 202.
- [A10] Харчева, А. А. Вероятностные и спектральные характеристики установившихся полетов Леви в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Труды XX научной конференции по радиофизике, посв. 110-летию со дня рожд. Г.С. Горелика. — 2016. — С. 282.
- [A11] Dubkov, A. A. Transient and stationary characteristics of Malthus–Verhulst–Bernoulli model with non-Gaussian fluctuating parameters / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // Physical Review E. — 2014. — Vol. 89. — P. 052146.
- [A12] Dubkov, A. A. Exact results for steady-state probability characteristics of Verhulst and Hongler models with multiplicative Poisson white noise / A. A. Dubkov,

- A. A. Kharcheva // *The European Physical Journal B*. — 2019. — Vol. 92. — P. 222.
- [A13] Харчева, А. А. Эволюция моментных и вероятностных характеристик модели Мальтуса–Ферхюльста–Бернулли под воздействием белых и цветных шумов / А. А. Харчева, А. А. Дубков // *Труды XVII научной конференции по радиофизике*. — 2013. — С. 286.
- [A14] Харчева, А. А. Эволюция моментных и вероятностных характеристик модели Мальтуса–Ферхюльста–Бернулли при воздействии негауссовых цветных шумов / А. А. Харчева // *Сборник научных статей и тезисов исследовательских работ “Российских Чтений-конкурса памяти нижегородских ученых”*. — 2013. — С. 231.
- [A15] Харчева, А. А. Переходная динамика модели Бернулли для различных видов негауссовых шумовых воздействий / А. А. Харчева, А. А. Дубков // *Сборник тезисов 19-й Сессии молодых ученых*. — 2014. — С. 187.
- [A16] Kharcheva, A. A. Multistability in nonlinear systems with colored noise and applicability of UCNA / A. A. Kharcheva [et al.] // *Book of Abstracts FisMat 2019*. — 2019. — P. 24.
- [A17] Харчева, А. А. Мультистабильность в нелинейных динамических системах, вызванная воздействием цветных шумов / А. А. Харчева, А. А. Дубков, Б. Дыбиец // *Труды XIV научной конференции по радиофизике*. — 2020. — С. 394.
- [A18] Kharcheva, A. A. Probabilistic analysis of two models of ideal memristor with external noise / A. A. Kharcheva, A. A. Dubkov, B. Spagnolo // *IEEE 2019 International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF)*. — 2019.
- [A19] Agudov, N. V. Nonstationary distributions and relaxation times in a stochastic model of memristor / N. V. Agudov [et al.] // *JSTAT: Theory and Experiment*. — 2020. — Vol. 2020. — P. 024003.
- [A20] Agudov, N. V. Stochastic model of memristor based on the length of conductive region / N. V. Agudov [et al.] // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2021. — Vol. 150. — P. 111131.
- [A21] Kharcheva, A. A. Probabilistic analysis of ideal memristor models under Gaussian noise / A. A. Kharcheva, A. A. Dubkov, B. Spagnolo // *Труды XXIII научной конференции по радиофизике*. — 2019. — С. 493.

*Харчева Анна Александровна*

Исследование нелинейных систем со случайными возмущениями различной природы в приложении к аномальной диффузии, динамике популяций и мемристорам

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография \_\_\_\_\_

