На правах рукописи

Куликов Владимир Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО АРГУМЕНТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль
2022

Работа выполнена на кафедре математического моделирования ФГБОУ ВО “Ярославский государственного университет им. П.Г. Демидова”

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Кубышкин Евгений Павлович
Официальные оппоненты:	Соболев Владимир Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО “Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева”, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления;
	Войтицкий Виктор Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО “Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского ”, доцент кафедры математического анализа;
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО “Вологодский государственный университет ” (Вологда)

Защита диссертации состоится 13 октября 2022 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д212.166.20 при ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр.Гагарина, д.23. и на стайте https://diss/unn/ru/1211

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан “___”__________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д212.166.20 Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена изучению условий и механизмов возникновения пространственно-неоднородных решений математической модели генератора оптического излучения с оператором преобразования пространственных координат в контуре двумерной запаздывающей обратной связи и тонким слоем нелинейной среды. Основные экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных структур в различных нелинейных оптических системах были получены в конце 1980-х годов. В работе Ахманова С. А., Воронцова М. А., Иванова В.Ю.[1] приведены экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных волн в лазерных пучках генератора оптического излучения со специальным нелинейным контуром двумерной обратной связи. Такие структуры возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения световой волны. Их возникновение обусловлено нелинейностью системы, которая обеспечивается тонким слоем нелинейной проводящей среды и контуром двумерной обратной связи с оператором пространственного преобразования световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В указанной работе также предложена математическая модель для описания этого явления и приведены результаты ее численного анализа в случае оператора поворота плоскости световой волны. Математическая модель является уравнением динамики фазовой модуляции в нелинейной оптической системе и представляет собой начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с оператором преобразования пространственного аргумента в нелинейном функционале обратной связи. Уравнение рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения, с условиями непроницаемости на границе. Генераторы оптического излучения использующся в оптических системах передачи и оптических компьютерах. Их математическое моделирование, и на этой основе исследование механизмов их работы, представляет собой весьма актуальную задачу. Пространственно-неоднородные решения, исследованию которых посвящена диссертация, используются как носители информации в оптических и волоконно-оптических системах связи. Их пространственная неоднородность используется для кодирования и уплотнения информации. В связи с этим, решаемые в диссертации задачи являются весьма актуальными.

Степень разработанности темы. Начально-краевая задача, моделирующая оптический генератор, не учитывающий запаздывания контуре обратной связи, рассматривалась в большом количестве работ. Отметим

[1]Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках; новые типы нелинейных волн, возникновение «оптической турбулентности». Письма в ЖЭТФ. 1988. Т.47. № 12. С. 611-614.

наиболее существенные. Во-первых, это работы Ахманова С. А., Воронцова М. А., Иванова В.Ю., где приведен аккуратный вывод математической модели, некоторые экспериментальные данные и результаты численного моделирования. В работах Кащенко С.А. для начально-краевой задачи на окружности строятся асимптотические разложения пространственно-неоднородных решений. Отметим работы Белана Е.П, в которых рассмотрены вопросы разрешимости начально-краевой задачи, показана возможность бифуркации Андронова-Хопфа. Во второй работе в качестве метода исследования используется метод Галеркина в сочетании с методом интегральных многообразий. Построены асимптотические формулы бегущих волн. Обсуждается характер их взаимодействия. В работах Скубачевского А.А. изучается многомерный случай рассматриваемой начально-краевой задачи с оператором преобразования пространственных координат общего вида. Рассмотрены вопросы существования решений и их единственности. Для указанного класса функционально-дифференциальных уравнений, показана возможность бифуркации Андронова-Хопфа бегущих волн. Большое количество работ принадлежит Разгулину А.В. В значительной степени они суммированы в его докторской диссертации, где подробно рассмотрены вопросы разрешимости различных постановок задач. Значительная часть работы уделена построению численных методов решению рассматриваемых задач. С общих позиций рассмотрены вопросы размерности аттракторов. В диссертации имеется большая библиография по рассматриваемой проблеме. В настоящее время имеются учебные пособия для студентов, посвященные рассматриваемому классу уравнений. Вопрос бифуркации бегущих волн на окружности для модели с запаздыванием рассмотрен в работе Разгулина А. В., Романенко Т. Е., где используется специальный прием, связанный с переходом к вращающейся системе координат. К построению других автоколебательных решений он не применим.

Изучаемые в диссертации задачи – учет влияния запаздывания в контуре обратной связи математической модели оптического генератора– относятся к малоизученным. Наличие запаздывания вносит новые значительные особенности в изучаемую начально-краевую задачу. Запаздывание вносит в задачу большую неустойчивость к изменению параметров. В работах Кубышкина Е.П., Моряковой А.В. рассмотрен частный случай изучаемой математической модели – известное уравнение с запаздыванием Икеды. Показано, что в этом уравнении возможно существование весьма сложных аттракторов, в том числе хаотических, а также хаотической мультистабильности. В диссертации проведено полное исследование возможных вариантов потери устойчивости однородными состояниями равновесия начально-краевой задачи, в зависимости от параметров уравнения и величины запаздывания рассмотрены возможные критические случаи потери устойчивости, анализ бифуркаций автоколебательных решений, связанных с изменениями параметров уравнения и запаздывания и обусловленные потерей устойчивости однородных состояний равновесия. Рассмотрены два вида операторов преобразования пространственных координат: оператор поворота на заданный угол и оператор растяжения полярных радиусов. Эти результаты являются новыми и нигде ранее не рассматривались.

Цель работы. Целью диссертационного исследования является изучение условий и механизмов возникновения пространственно-неоднородных решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором преобразования пространственных координат и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. Начально-краевая задача является математической моделью генератора оптического излучения с оператором преобразования координат в контуре двумерной запаздывающей обратной связи и тонким слоем нелинейной среды.

Задачи исследования. На основе сформулированной выше цели рассматриваются следующие задачи:

1. Математическая постановка начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений с запаздывающим аргументом в случае оператора поворота пространственных координат и в случае оператора растяжения пространственных координат. Определение функциональных пространств для начальных условий и решений начально-краевой задачи, доказательство теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения.

2. Исследование динамики однородных состояний равновесия нелинейных начально-краевой задачи в зависимости от параметров уравнения.

3. Построение картины D-разбиений (областей устойчивости и неустойчивости решений) плоскости основных параметоров уравнения и исследование механизов потери устойчивости (критических случаев потери устойчивости) решений начально-краевой задачи в случае оператора поворота пространственного аргумента.

4. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором поворота пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно неоднородных решений.

5. Построение картины D-разбиений (областей устойчивости и неустойчивости решений) плоскости основных параметоров уравнения и исследование механизов потери устойчивости решений начально-краевой задачи в случае оператора растяжения пространственного аргумента.

6. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия про-

странственно неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором растяжения пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно неоднородных решений.

Методология и методы исследования. Основными методами исследования являются метод инвариантных (центральных) многообразий распределенных нелинейных динамических систем, метод нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, метод построения уравнений траекторий на центральном многообразии нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, теория нелинейных операторных уравнений, качественная теория и теория бифуркаций нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы. При исследовании устойчивости решений рассматриваемых начально-краевых задачи широко используется метод D-разбиений Неймарка Ю.И.

Научная новизна. Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Научная новизна проявляется в следующем:

1. Поставлены начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений с запаздывающим аргументом и, соответственно, оператором поворота пространственных координат и оператором растяжения пространственных координат. Доказаны теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения.

2. Исследована динамика однородных состояний равновесия начально-краевых задач для нелинейного параболического уравнения с запаздывающим аргументом и операторами поворота и растяжения пространственных координат в зависимости от параметров уравнения. Выявлены возможные механизмы потери устойчивости. Построены картины D-разбиений пространства основных параметров.

3. Исследованы возможные бифуркации пространственно-неоднородных решений (волн) начально-краевых задач для нелинейного параболического уравнения с запаздывающим аргументом и операторами поворота и растяжения пространственных координат. Для неоднородных решений построены асимптотические формулы.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Диссертация имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Проблема самоорганизации распределенных систем, т.е. изучение механизмов возникновения пространственно-неоднородных структур и волн в однородных распределенных системах, имеет важное фундаментальное значение. Генераторы оптического излучения используюся в оптических системах передачи данных и оптических компьютерах. Их математическое моделирование, и, на этой основе исследование механизмов их работы, представляет собой как теоретическую, так и прикладную задачу. Пространственно-неоднородные решения, исследованию которых посвящена диссертация, использовуются как носители информации в оптических и волоконно-оптических системах связи. Их пространственная неоднородность используется для кодирования и уплотнения информации.

Основные результаты. На защиту диссертации выносятся следующие **основные положения и результаты:**

1. Математическая постановка начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений с запаздывающим аргументом и, соответственно, с операторам поворота пространственных координат и операторам растяжения пространственных координат в функционале обратной связи. Определение функциональных пространств для начальных условий и решений начально-краевых задач, доказательство теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения.

2. Исследование динамики однородных состояний равновесия нелинейных начально-краевых задач в зависимости от параметров уравнения.

3. Построение картины D-разбиений плоскости основных параметров уравнения (областей устойчивости и неустойчивости решений начально-краевой задачи) и исследование механизов потери устойчивости (критических случаев потери устойчивости) решений начально-краевой задачи в случае оператора поворота пространственного аргумента.

4. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно-неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором поворота пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно неоднородных решений.

5. Построение картины D-разбиений плоскости основных параметров уравнения и исследование механизов потери устойчивости решений начально-краевой задачи в случае оператора растяжения пространственного аргумента.

6. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно неоднородных решений для различных критических

случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором растяжения пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно-неоднородных решений.

Апробация работы. Результаты исследований были представлены в докладах на следующих конференциях и семинарах:
Международная научная конференция "Динамика. 2019. Ярославль". 10-12 октября 2019. Ярославль. ЯрГУ им. П.Г. Демидова; Международная научная конференция "Актуальные проблемы математической физики". 27-30 ноября 2019. Москва. МГУ им. М.В.Ломоносова; XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. (КРОМШ-2020). Крым, пос. Батилиман 17-26 сентября 2020 г.; II международная конференция по интегрируемым системам и нелинейной динамике ISND-2020. Ярославль 19-23 октября 2020. Second International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics ISND–2020. Yaroslavl, October 19–23 2020 ; XXVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» 10-27 ноября 2020. Москва. МГУ им. М.В.Ломоносова; Современные методы теории функций и смежные проблемы. Международная конференция : Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.; Всероссийская молодежная конференция "Путь в науку. Математика". Ярославль, ЯрГУ им.П.Г.Демидова, 26 апреля - 16 мая 2021 г.

Представленные результаты неоднократно докладывались на семинаре “Нелинейная динамика и синергетика” кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Результаты диссертационной работы получены при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19 31 90133) и Программы развития ЯрГУ на период 2017-2021 гг. (задание ОП-2Г-01-2019).

Публикации и вклад автора. Аналитические результаты получены автором совместно с научным руководителем Кубышкиным Е.П., численные результаты получены лично автором. Кубышкину Е.П. также принадлежит редактирование работ, выполненных совместно.

По теме диссертации опубликовано 5 статей в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science, а также рекомендованных ВАК, и 10 работ в других журналах и тезисов докладов международных конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 111 страницах машинописного текста, содержит 25 рисунков. Библиографический раздел содержит 87 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, описаны цели и постановка основных задач исследования, отмечены научная новизна и практическая ценность полученных результатов. Изложены основные научные положения, выносимые на защиту. Приведены сведения о публикациях, апробации работы, структуре и объеме диссертации.

В **первой главе** для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho,\phi,t) + u(\rho,\phi,t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho,\phi,t) + K(1+\gamma cos(u_\theta(\rho,\phi,t-T))) \quad (1)$$

относительно функции $u(\rho,\phi,t+s)$, заданной в полярных координатах $0 \le \rho \le R, 0 \le \phi \le 2\pi$ $(R > 0)$ и $t \ge 0, -T \le s \le 0$ $(T > 0)$, в котором $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, $u_\theta(\rho,\phi,t) \equiv u(\rho,(\phi+\theta)mod(2\pi),t)$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ – оператор поворота пространственного аргумента, D, K – положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$, в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R = \{(\rho,\phi) : 0 \le \rho \le R, 0 \le \phi \le 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \le t < \infty\}$, рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_\rho(R,\phi,t) = 0, \quad u(\rho,0,t) = u(\rho,2\pi,t), \quad u_\phi(\rho,0,t) = u_\phi(\rho,2\pi,t),$$

$$u(\rho,\phi,t+s)|_{t=0} = u_0(\rho,\phi,s) \in H_0(K_R;-T,0). \quad (2)$$

В (2) пространство начальных условий $H_0(K_R;-T,0) = \{u(\rho,\phi,s) : u(\rho,\phi,s) \in C(\bar{K}_R \times [-T,0]), u(\rho,0,s) = u(\rho,2\pi,s), u_\phi(\rho,0,s) = u_\phi(\rho,2\pi,s),$ при каждом s $u(\rho,\phi,s) \in H^2(K_R)\}\}$, где пространство функций $H^2(K_R) \subset W_2^2(K_R)$ и получено замыканием множества функций $\{\ u(\rho,\phi) : u(\rho,\phi) \in C^2(\bar{K}_R),\ u_\rho(R,\phi) = 0, u(\rho,0) = u(\rho,2\pi), u_\phi(\rho,0) = u_\phi(\rho,2\pi)\}$ в метрике пространства функций $W_2^2(K_R)$. Как обычно $L_2(K_R)$ – пространство вещественнозначных определенных в K_R функций $u(\rho,\phi)$, для которых $||u(\rho,\phi)||_{L_2} = (u(\rho,\phi),u(\rho,\phi))_{L_2}^{1/2} < \infty, (u(\rho,\phi),v(\rho,\phi))_{L_2} = \int_{K_R}\rho u(\rho,\phi)v(\rho,\phi)d\rho d\phi$, $W_2^2(K_R) \subset L_2(K_R)$, $W_2^2(K_R) = \{u(\rho,\phi) : ||u(\rho,\phi)||_{W_2^2} = (u(\rho,\phi),u(\rho,\phi))_{W_2^2}^{1/2} < \infty, (u(\rho,\phi),v(\rho,\phi))_{W_2^2} = (u(\rho,\phi),v(\rho,\phi))_{L_2} + (\Delta_{\rho\phi}u(\rho,\phi),\Delta_{\rho\phi}v(\rho,\phi))_{L_2}$, $C(\bar{K}_R)$ и $C^2(\bar{K}_R)$ пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{K}_R$ функций, для которых определена норма $||u(\rho,\phi)||_C = \max_{\rho,\phi}|u(\rho,\phi)|$, $||u(\rho,\phi)||_{C^2} = ||u(\rho,\phi)||_C + ||\Delta_{\rho\phi}u(\rho,\phi)||_C < \infty$.

Фазовым пространством начально-краевой задачи (1)-(2) является пространство $H(K_R;-T,0) = \{u(\rho,\phi,s) : u(\rho,\phi,s) \in L_2(K_R)$ при каждом $-T \le s \le 0, ||u(\rho,\phi,s)||_{L_2} \in C([-T,0])\}$, норма в котором опредена как $||u(\rho,\phi,s)||_H = \max_s ||u(\rho,\phi,s)||_{L_2}$. Областью определения правой части уравнения (1) является пространство $H_0(K_R; -T, 0)$, Норма в $H_0(K_R; -T, 0)$ определена как $||u(\rho, \phi, s)||_{H_0} = \max_s ||u(\rho, \phi, s)||_{W_2^2}$.

Под решением начально-краевой задачи (1)-(2), определенным при $t > 0$, понимается функция $u(\rho, \phi, t+s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ (при каждом $t > 0$), непрерывно дифференцируемая по t при $t > 0$, обращающая уравнение (1) в тождество и удовлетворяющая начальным условиям (2).

В первом параграфе для начально-краевой задачи (1)-(2) доказана теорема существования решения, его единственности и непрерывной зависимости от параметров уравнения и начальных условий в норме пространства $H_0(K_R; -T, 0)$.

Во втором параграфе изучается динамика однородных состояний равновесия (1)-(2) в зависимости от параметров K, θ, γ, T, D, их устойчивость, а также характер потери устойчивости.

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ начально-краевой задачи (1)-(2) определяются как решения уравнения

$$u = K(1 + \gamma cos(u)). \tag{3}$$

Уравнение (3) в зависимости от K и γ может иметь несколько решений, в том числе кратные. Устойчивость состояния равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ опреляется поведением решений линейной краевой задачи

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T), \tag{4}$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$
$$u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_1(K_R; -T, 0). \tag{5}$$
$$b = K\gamma \sin(u_*(K, \gamma)). \tag{6}$$

Определяя решения (4)-(5) вида $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$ (решения Эйлера) получим пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho,\phi}u(\rho, \phi) + bu_\theta(\rho, \phi)e^{-\lambda T}, \tag{7}$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$, точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (4)-(5). Знаком "тильде" обозначено комплексное расширение соответствующего функционального пространства.

Применяя к (7) метод разложения по собственным функциям оператора $\Delta_{\rho,\phi}$ с соответствующими краевыми условиями, получим счетное число независимых алгебраических задач, характеристические уравнения которых определяют точки спектра пучка операторов (7). Применяя к характеристическим уравнениям методом D - разбиений [**?**], построены в пространстве параметров K, θ, T, D, γ области устойчивости решений (4)-(5), а также исследовано движение корней через границу для разных состояний равновесия $u_*(K,\gamma)$. Для этого была предложена модификация метода D - разбиений, использующая в качестве вариационного параметра состояние равновесия. На рис.1 приведена типичная картина D - разбиения плоскости параметров K,θ. Принято через D_j обозначается область, при значении параметров из которой пучек операторов (7) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости. Каждая замкнутая кривая имеет маркер из двух индексов, первый из которых характеризует область, к которой принадлежит исследуемое состояние равновесия $u_* = u_*(K,\gamma)$, второй индекс характеризует номер n, являющийся индексом собственных функций пучка операторов (7), соответствующих точкам спектра $\pm i\omega_*$. Из приведенного рисунка видно, что потеря устойчивости однородным состоянием равновесия $u_* = u_*(K,\gamma)$ может происходить с прохождением как одной, так и двух пар комплексно сопряженных точек спектра пучка операторов (7) через мнимую ось комплексной плоскости. Возможна также одновременная потеря устойчивости двумя состояниями равновесия. При уменьшении D таких состояний равновесия может быть больше. В работе исследована динамика областей D-разбиений плоскости K,θ в зависимости от параметров T,D,γ. В третьем параграфе главы исследуются возможные

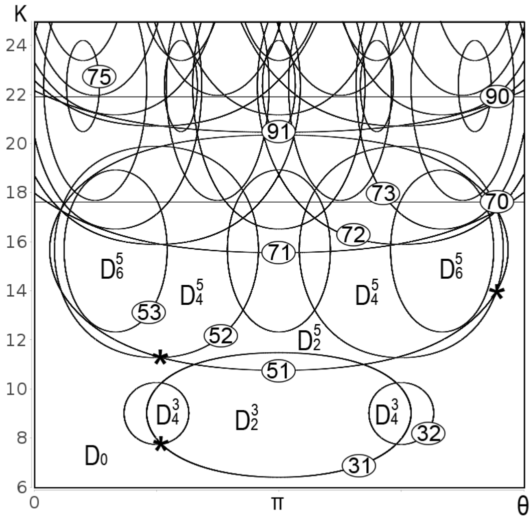

Рис.1 $D = 0.1, T = 0.5$, γ=0.25

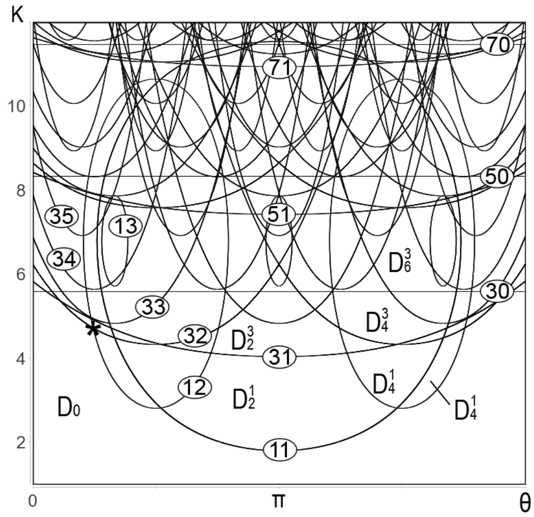

Рис.2 $D = 0.1, T = 0.5$, γ=0.75)

бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (1)–(2) из однородных состояний равновесия $u_* = u_*(K,\gamma)$, обусловленные потерей их устойчивости. Для этого используется метод инвариантных (центральных) многообразий распределенных динамических систем и теория нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия. При фиксированных T,D,γ выберем параметры K_*,θ_* таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости состояния равновесия $u_*(K,\gamma)$ начально-краевой задачи (1)–(2) и при этом пучок операторов (7) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, где $\omega_* > 0$ при некотором $n > 0$. Положим $K = K_* + \varepsilon$, где ε - малый параметр, и исследуем возможные бифуркации автоколебательных решений (1)–(2) из состояния равновесия $u_*(\varepsilon) = u_*(K_* + \varepsilon, \gamma)$.Обозначим соответствующую точку спектра (7) через $\lambda(\varepsilon) = \chi(\varepsilon) + i(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon)) = i\omega_* + \varepsilon\lambda_1 + ... = i\omega_* + \varepsilon(\chi_1 + i\sigma_1) + ...,$

В параграфе показано, что поведение решений начально-краевой задачи (1)–(2) в с начальными условиями из некоторого шаре $S_{u_*(\varepsilon)}(R)$ радиуса R окрестности состояния равновесия $u_*(\varepsilon)$ пространства начальных условий $H_0(K_R; -T, 0)$ полностью определяется поведением решений уравнения

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z + d(\varepsilon)z^2\bar{z} + Z(z, \bar{z}; \varepsilon), \quad z = z(t; \varepsilon) \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

а также предложен эффективный алгоритм вычисления $\lambda(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon) = a(\varepsilon) + ib(\varepsilon)$ в виде разложения по степеням ε. Для вычисления величин λ_1 и $d(0)$ написана программа. Бифуркации пространственно неоднородных волн определяет следующая теорема.

Теорема. Пусть при выбранных D, T, γ параметры K_*, θ_* принадлежат границе области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ и при пучек операторов (7) имеет точки спектра $\lambda = \pm i\omega_*, \omega_* > 0$ при некотором $n > 0 (n < 0)$, пусть также $\chi_1 > 0$ и $a(0) < 0$. Тогда существуют такие $\varepsilon_0,\ R > 0$, что при $K = K_* + \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в шаре $S_{u_*(\varepsilon)}(R)$ начально-краевая задача (1)–(2) имеет пространственно неоднородное периодическое решение вида $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}),\ \psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t+s)$ $(\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t+s)))$, периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$. Все остальные решения начально-краевой задачи (1)–(2) с начальными условиями из $S_{u_*(\varepsilon)}(R)$ при $t \to \infty$ стремятся к этому периодическому решению в норме $H_0(K_R; -T, 0)$. Функция $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$ разлагается в сходящийся ряд по степеням $\varepsilon^{1/2}$. Это решение является ротационной волной, вращающейся по часовой стрелке (против часовой стрелки). Если при этом $\theta_* = \pi/n$, то в шаре $S_{u_*(\varepsilon)}(R)$ начально-краевая задача (1)–(2) имеет однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия, задаваемых функцией $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$, в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t+s) \equiv const$. При прохождении параметром θ_* точки π/n период периодического решение $T(\varepsilon) \to \infty$ и ротационная волна меняется направление вращения.

Для периодического решения $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$ построена асимптотическия формула.

Рассмотрен также случай, когда точка K_*, θ_* границы области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ (1)-(2) является точкой пересечения замкнутых кривых, определяющих границу области D_0 и соответствующих различным значениям n. Это могут быть, например, точки, отмеченные * на фиг. 3. В этом случае пучек операторов (7) имеет две пары комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_{*j}, \omega_{*j} > 0, j = 1, 2$, которым отвечают собственные функции пучк операторов $e_{n_j}(\rho, \phi), \bar{e}_{n_j}(\rho, \phi), j = 1, 2$. При этом n_1 и n_2 всегда связаны соотношением $n_1 = n, n_2 = n + 1, n > 0$. Отметим также, между ω_{*1} и ω_{*2} не возможны резонансные соотношения $\omega_{*1}/\omega_{*2} = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$.

Бифуркационный сценарий с окрестности точки K_*, θ_* пересечения замкнутых кривых, соответствующих значениям n и $n + 1$ границы области D_0, выглядит следующим образом. При $\theta < \theta_*$ и $K > K_*$ в $S_{u_*}(R)$ имеется единственное устойчивое периодическое решение – ротационная волна, сответствующая значениям n. При увеличении θ из состояния равновесия u_* бифурцирует неустойчивое периодическое решение – ротационная волна, сответствующая значениям $n + 1$. При дальнейшем увеличении θ из этого периодического решения бифурцирует неустойчивый двумерный инвариантный тор, делая периодическое решение асимптотически орбитально устойчивым. В этом случае начально-краевой задача (1)–(2) в $S_{u_*}(R)$ имеет два устойчивых периодических решения, являющихся ротационными волнами. При дальнейшем увеличении θ неустойчивый инвариантный тор "влипает" в устойчивое периодическое решение, соответствующее значению n, делая его неустойчивым. В дальнейшем, это неустойчивое периодическое решение "влипает" в неустойчивое состояние равновесия u_*. В окрестности u_* остается одна ротационная волна, соответствующая значению $n + 1$.

Для периодических решений и инвариантного тора построены асимптотические формулы.

Объектом исследования второй главы является начально - краевая задача (2) для функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi} u(\rho, \phi, t) + \alpha^{-2} K(1 + \gamma cos(u(\rho/\alpha, \phi, t - T))) \quad (9)$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s)$, заданной в полярных координатах $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ $(R > 0)$ и $t \geq 0, -T \leq s \leq 0$ $(T > 0)$, в котором $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, выражение $u(\rho/\alpha, \phi, t)$ $(\alpha > 1)$ задает оператор растяжения пространственных координат, D, K – положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$, в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$.

Пространством начальных условий для решений (9) является пространство $H_0(K_R; -T, 0)$, фазовым пространством – пространство $H(K_R; -T, 0)$, определенные в главе 1. Определение решения начально-краевой задачи (9)-(2) аналогично определению решения (1)-(2). Для начально-краевой задачи (9)-(2) также справедлива теорема существования решения, его единственности и непрерывной зависимости от параметров уравнения и начальных условий в норме пространства $H_0(K_R; -T, 0)$.

В первом параграфе дается постановка задачи исследования, которая связана с исследованием условий и характера потери устойчивости однородными состояниями равновесия $u_*(K, \alpha, \gamma)$ начально-краевой задачи (9)-(2), а также обусловленные ею бифуркаций пространственно неоднородных автоколебательных решений.

Во втором параграфе изучается динамика однородных состояний равновесия (1)-(2) в зависимости от параметров K, T, D, α, γ, их устойчивость, а также характер потери устойчивости.

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$ начально-краевой задачи (9)-(2) определяются как решения уравнения

$$u = \alpha^{-2} K(1 + \gamma cos(u)). \tag{10}$$

и определяются аналогично решениям (3). Устойчивость состояния равновесия $u_*(K, \alpha, \gamma)$ определяется начально-краевой задачи аналогичной (4)-(5), в которой $b = b(K, \alpha, \gamma) = u_*(K, \alpha, \gamma)\gamma \sin(u_*(K, \alpha, \gamma))/(1 + \gamma cos(u_*(K, \alpha, \gamma)))$. При этом пучок операторов, определяющий устойчивость решений этой краевой задачи, будет иметь вид

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho,\phi} u(\rho, \phi) + bu(\rho/\alpha, \phi)e^{-\lambda T}, \tag{11}$$

который действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Представим $u(\rho, \phi) \in H^2(K_R)$ в виде

$$u(\rho, \phi) = u_{00}(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{nj}(\rho)e^{in\phi}v_{nj},$$

где $u_{nj}(\rho)e^{in\phi}v_{nj}, n = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots$ - нормированные собственные функции оператора $\Delta_{\rho,\phi}$, и подставим в (11). В результате получим последовательность алгебраических задач (операторных уравнений) в пространстве $\tilde{l}_2$ вида

$$P^{(n)}(\lambda, \alpha)v_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

для определения $v_n \in \tilde{l}_2^2$, где $P^{(n)}(\lambda, \alpha)$ бесконечномерные матрицы. Используя теперь конечномерных аппроксимации по $j = 1, 2, ..., N$ для каждого n можно применить метод D- разбиений. Это возволяет построить в плоскости основных параметров K, T картину D- разбиения, а также выявить механизмы потери устойчивости состояниями равновесия $u_*(K, \alpha, \gamma)$. На рис. 2 приведена типичная картина D- разбиения плоскости K, T для двух значений других параметров. На рис. 3, 4 для значений $D = 0.1, \gamma = 0.75$ и различных значений α приведены картины D-разбиений плоскости

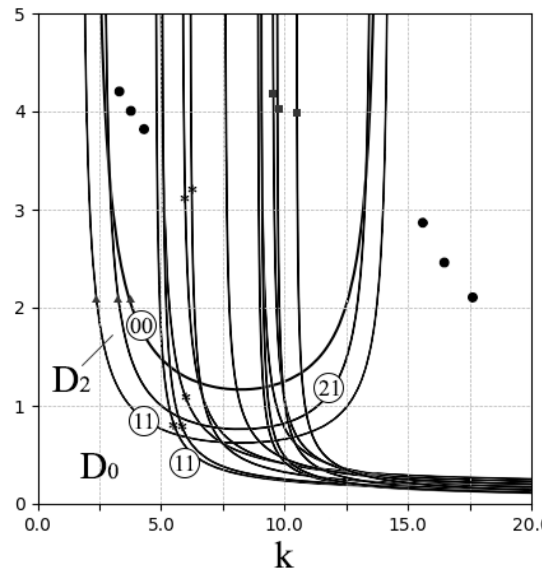

Рис.3 $D = 0.1$, α=1.1, γ=0.75

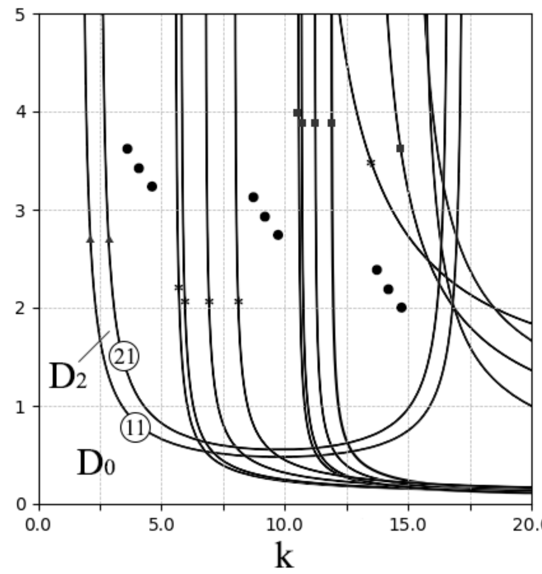

Рис.4 $D = 0.1$, α=1.2, γ=0.75

параметров (K, T). На рисунках в соответствии с методом D-разбиений через D_j обозначены области, при значении параметров из которых пучок операторов (11) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Кривые, отмеченные треугольником, звездочкой и квадратом относятся к разным состояниям равновесия. Каждая кривая имеет маркер (на рисунках они прставлены не везде), первая цифра которого показывает номер n, вторая – значение j соответстветствующей собственной функции пучка операторов (11). Точками на рисунка условно обозначена совокупность границ областей D_j не имеющих принципиального значения для рассматриваемой задачи.

В параграфе 3 главы исследуются возможные бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (9)–(2) из однородных состояний равновесия $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$, обусловленные потерей их устойчивости. Для этого используется метод инвариантных (центральных) многообразий распределенных динамических систем и теория нормальных форм нелинейных обыкновенных диффренциальных уравнений в окрестности состояний равновесия. При фиксированных D, α, γ выберем параметры $K_*, T*$ таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости состояния равновесия $u_*(K, \alpha, \gamma)$ начально-краевой задачи (9)–(2) и при этом пучок операторов (11) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, где $\omega_* > 0$ при некотором $n > 0$. Положим $K = K_* + \varepsilon$, где ε - малый параметр, и исследуем возможные бифуркации автоколебательных решений (9)–(2) из состояния равновесия $u_*(\varepsilon) = u_*(K_* + \varepsilon, \alpha, \gamma)$. Обозначим соответствующую точку спектра (11) через

$$\lambda(\varepsilon) = \chi(\varepsilon) + i(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon)) = i\omega_* + \varepsilon\lambda_1 + ... = i\omega_* + \varepsilon(\chi_1 + i\sigma_1) + ...,$$

В параграфе показано, что поведение решений начально-краевой задачи (9)–(2) в с начальными условиями из некоторого шаре $S_{u_*(\varepsilon)}(R)$ радиуса R окрестности состояния равновесия $u_*(\varepsilon)$ пространства начальных условий $H_0(K_R; -T, 0)$ полностью определяется поведением решений уравнения вида

$$\dot{z}_1 = z_1(\lambda(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)|z_1|^2 + d_2(\varepsilon)|z_2|^2) + Q(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), \qquad (13)$$

$$\dot{z}_2 = z_2(\lambda(\varepsilon) + d_2(\varepsilon)|z_1|^2 + d_1(\varepsilon)|z_2|^2) + Q(z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1; \varepsilon), \qquad (14)$$

где $d_j(\varepsilon) = a_j(\varepsilon) + ib_j(\varepsilon)$, а функция $Q(*) = O(|z|^5)$ инвариантна в следующем виде

$$e^{ic}Q(z_1e^{ic}, z_1e^{-ic}, z_2e^{-ic}, z_2e^{ic}; \varepsilon) = Q(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon).$$

Система уравнений (13)–(14) описывает поведение решений начально-краевой задачи (3)–(2) на четырехмерном инвариантном (центральном) многообразии в окрестности состояния равновесия $u_*(\varepsilon)$. Ее симметрия обусловлена инвариантностью (3)–(2) относительно поворота по переменной ϕ. Для вычисления $\lambda(\varepsilon)$ и $d_j(\varepsilon) = a_j(\varepsilon) + ib_j(\varepsilon), j = 1, 2$ предложен эффективный алгоритмв виде разложения по степеням ε. Для вычисления λ_1 и $d_j(0) = a_j(0) + ib_j(0), j = 1, 2$ написана программа.

Бифуркации пространственно неоднородных волн определяет следующая теорема.

Теорема. Пусть при выбранных D, α, γ параметры K_*, T_* принадлежат границе области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \alpha, \gamma)$ и при этом пучек операторов (11) имеет точки спектра $\lambda = \pm i\omega_*, \omega_* > 0$ при некотором $n > 0$ и пусть также величины $\gamma_1 > 0$, $a_1(0) < 0$, $a_1(0)a_2(0)(a_1^2(0) - a_2^2(0)) \neq 0$. Тогда существуют такие $\varepsilon_0, R > 0$, что при $K = K_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в шаре $S(u_*(\varepsilon))(R)$ начально-краевая задача (9)–(2) имеет два взаимно инвариантных пространственно неоднородных периодических решения вида $\varepsilon^{1/2}u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$, $\psi = \pm n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon))(t + s) + c$, $c = const$, периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$, являющихся спиральными волнами, вращающимися в противоположных направлениях, и двумерный инвариантный тор $\varepsilon^{1/2}(u_{**}(\rho, n + \psi; \varepsilon^{1/2})$, $\phi = (\omega_* + \varepsilon\omega_{**1} + O(\varepsilon^2))(t + s) + c$, $c = const$, заполненный периодическими решениями одного периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_{**} + \varepsilon\omega_{**1} + O(\varepsilon))$, (ведущий центр). При этом, если $a_1(0) + a_2(0) < 0$, $a_2(0) < 0$, то периодические решения асимптотически орбитально устойчивые, а тор неустойчив, если $a_1(0) + a_2(0) < 0$, $a_2(0) > 0$, то периодические решения неустойчивы, а тор асимптотически орбитально устойчив. Все остальные решения начально-краевой задачи (9)–(2) с начальными условиями из $S(u_*(\varepsilon))(R)$ при $t \to \infty$ стремятся к устойчивым автоколебательным решениям в норме $H_0(K_R; -T, 0)$. Функция $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = u_*(\rho, \psi + 2\pi; \varepsilon^{1/2})$ раскладывается в сходящийся ряд по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

Для периодических решений и инвариантного тора построены асимптотические формулы. Отметим, что в начально-краевой задачи (9)–(2) возможны оба сценария бифуркации устойчивых нелинейных волн.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в диссертации, и возможные варианты дальнейших исследований.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в перечне ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК:

1. Kubyshkin E. P., Kulikov V. A. Analysis of Occurrence Conditions for Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems// Automatic Control and Computer Sciences. 2020. Vol. 54. No. 7. P. 750–755. (Scopus, Wos)
2. Kubyshkin E. P., Kulikov V. A. On a Mechanism for the Formation of Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2021. Vol. 55, No. 7. P. 838–846. (Scopus, Wos)
3. Kubishkin E. P., Kulikov V. A. Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay. Comput. Math. Math. Phys. 61:3. 2021. P. 403–423. (Scopus, Wos)
4. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 61:3. 2021. С. 428–449. (ВАК)
5. Куликов В. А. Анализ устойчивости состояний равновесия параболического уравнения с оператором растяжения и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи// Таврический вестник информатики и математики. 2021. №4. С.70-84. (ВАК)

Работы, опубликованные в других научных изданиях:

1. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Анализ устойчивости решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального

уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием. Интегрируемые сист. и нелин. динамика: тезисы докладов. (Межд. науч. конф., 1-5 октября 2018 г., Яросл.). Ярославль: ЯрГУ, 2018. С.110-111.

2. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Анализ бифуркаций автоколебательных решений в начально-краевой задаче для параболического дифференциального уравнения с оператором поворота и запаздыванием. Современные мет. теор. краев. задач : матер. Межд. конф.: Воронеж. вес. матем. школа Понтрягинские чт-я XXXI (3–9 мая 2019 г.). С.179.

3. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Анализ условий возникновения пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации. Модел. и анализ информ. систем. Т. 26, № 2. 2019. С. 299–305.

4. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Об одном механизме образования пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации. Модел. и анализ информ. систем. Т. 27, № 2. 2020. С. 138–149.

5. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Исследование пространственно-неоднородных волн в начально-краевой задаче для нелинейного параболического уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием. Сборник тез. докл. Межд. конфер. «Актуальные проблемы математической физики» (27-30 ноября 2019). Москва. МГУ им.М.В.Ломоносова. 2019. С.36-37.

6. Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Бифуркации автоколебательных решений в параболическом уравнении с оператором преобразования пространственного аргумента и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 - XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. С.160.

7. Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи для параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. С.334.

8. Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений в параболическом уравнении с оператором преобразования пространственного аргумента и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи / Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020. – Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2020. С. 306.

9. Куликов В. А. Исследование бифуркаций автоколебательных решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020»
10. Kulikov V.A. Analysis of Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Nonlinear Parabolic Equation with the Operator of Rotation of the Spatial Argument and Delay// Second International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics : Book of Abstracts. Yaroslavl: Filigran. 2020 . P. 106. (October 19–23, 2020, Yaroslavl)