

На правах рукописи

ФЕДЮКОВ АЛЕКСАНДР АНАТОЛЬЕВИЧ

**СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ И
ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2022

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Научный руководитель:

Баландин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Официальные оппоненты:

Ананьевский Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики управляемых систем, ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук»

Антоновская Ольга Георгиевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»

Защита диссертации состоится « 15 » сентября 2022 года в 16-00 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», пр. Гагарина, д. 23, корп.2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» и на официальном сайте организации: <https://diss.unn.ru/files/2022/1263/diss-Fedyukov-1263.pdf>.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20
канд. физ-мат. наук

Р.С. Бирюков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Математическими моделями рассматриваемых в диссертационной работе управляемых объектов являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной задачей является задача стабилизации этих объектов с помощью управления в форме обратной связи по состоянию или по измеряемому выходу.

В задаче стабилизации объекта по состоянию предполагают, что состояние системы доступно измерению и управление строят в виде линейной обратной связи по состоянию. При этом возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Например, в силу того, что в реальных условиях работы система должна находиться в области ее допустимых состояний. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничения на управляющие и фазовые переменные.

Задачи управления с ограничениями на управляющие и фазовые переменные считаются весьма трудными для решения. В настоящее время существует несколько подходов к решению таких задач. Один из них связан с попытками построения ограниченного управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Основная идея работ на эту тему состоит в поиске подходящей квадратичной функции Ляпунова, позволяющей оценить область притяжения замкнутой системы. Несколько иной подход к решению, также базируется на идеях метода Ляпунова, но использует не квадратичные функции Ляпунова и теорию линейных матричных неравенств. Одним из эвристических подходов к учету геометрических ограничений на управляющее воздействие в задачах стабилизации является использование управления типа срезки линейного по фазовым переменным управляющего сигнала по величине ограничений.

Пусть решена задача поиска управления по состоянию, которое обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. Однако в реальных ситуациях состояние системы измеряется, как правило, с ошибкой. Поэтому открытым остается вопрос о возможности применения полученных законов управления в указанной ситуации.

При решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. Как правило доступно измерению лишь часть фазовых переменных

или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу системы. Для ее решения применяют законы управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы, а также динамические регуляторы по измеряемому выходу системы.

Вопрос поиска управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу, который будет обеспечивать стабилизацию замкнутой системы является важным и актуальным в настоящее время. Есть разные подходы к решению задачи. В подходе, основанном на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств, решение задачи стабилизации линейной динамической системы с помощью управления по измеряемому выходу сводится к разрешимости системы билинейных матричных неравенств. Эта задача не принадлежит классу задач выпуклого программирования. В настоящее время отсутствуют эффективные с вычислительной точки зрения численные методы решения такого класса задач. Из-за актуальности этим вопросом продолжают заниматься до настоящего времени.

Более сложным является случай, когда закон управления по измеряемому выходу, должен обеспечить не только асимптотическую устойчивость состояния равновесия замкнутой системы, но и обеспечить выполнение заданных требований к функционированию системы. Например, ограничений на фазовые переменные объекта. При этом актуальным является вопрос об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях на фазовые переменные. Также актуальным и открытым остается вопрос о возможности применения полученных законов управления в случае, когда выходные переменные системы измеряются с ошибкой.

Третья задача, которая рассматривается в диссертационной работе, связана с вопросом поиска динамического регулятора по измеряемому выходу, который будет обеспечивать стабилизацию замкнутой системы.

Существуют разные способы построения динамических регуляторов, в частности способ, основанный на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Известно, что в случае поиска параметров динамического регулятора по измеряемому выходу полного порядка, решение задачи стабилизации сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно двух неизвестных симметричных положительно определенных матриц. Эта задача принадлежит классу задач выпуклого программирования, поэтому параметры такого

регулятора можно получить, например, используя пакет Matlab. Также известно, что в случае поиска параметров динамического регулятора по измеряемому выходу пониженного порядка решение задачи стабилизации сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно двух неизвестных симметричных положительно определенных взаимнообратных матриц. Эта задача уже не принадлежит классу задач выпуклого программирования, и поэтому она является сложной. Из-за актуальности ею продолжают заниматься до настоящего времени. При этом ни один из предложенных к настоящему времени алгоритмов не гарантирует получение параметров динамического регулятора пониженного порядка.

В настоящее время случай построения динамического регулятора для линейного управляемого объекта при ограничениях на фазовые переменные был рассмотрен только для регулятора полного порядка. При этом актуальным остался вопрос поиска динамического регулятора пониженного порядка. Актуальным остается вопрос поиска динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые будут обеспечивать заданную степень устойчивости замкнутой системы при фазовых ограничениях. Также открытым является вопрос об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные регуляторы будут обеспечивать стабилизацию замкнутой системы при ограничениях на фазовые переменные. Четвертым актуальным и открытым остается вопрос о возможности применения полученных регуляторов в случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных.

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что все параметры системы точно известны, однако о параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение линейных динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью, т.е. для которых один или несколько параметров точно не известны. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным управлением.

В задаче робастной стабилизации по состоянию систему управления строят в виде линейной обратной связи по измеряемому состоянию. Вместе с тем, в случае отсутствия в модели ограничений на фазовые переменные объекта и управление возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. В связи с этим возникает задача поиска управления в виде линейной обратной связи по состоянию, которое будет обеспечивать

робастную стабилизацию линейной динамической системы при наличии ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Проблема поиска робастного управления, а также проблема поиска робастного управления при заданных ограничениях являются сложными и актуальными в настоящее время.

Цели и задачи темы исследования.

Цель работы состоит в создании на основе современных достижений теории управления, теории линейных матричных неравенств и теории выпуклой оптимизации новых подходов и алгоритмов поиска законов управления динамическими системами в форме обратной связи по состоянию или по выходу, которые обеспечивают стабилизацию и выполнение заданных ограничений на фазовые и управляющие переменные. Решение задачи стабилизации в условиях, когда в математической модели рассматриваемого управляемого объекта присутствует неопределенность в задании параметров и построении робастного управления по состоянию, которое обеспечивает выполнение требуемых ограничений при всех допустимых неопределенных факторах. Разработка алгоритмов и программного обеспечения для численного решения данных задач.

Исходя из целей работы, были поставлены следующие задачи:

1. Построить оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой;
2. В случае не измеряемого состояния, решить задачу поиска закона управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы и задачи синтеза динамических регуляторов по измеряемому выходу, которые обеспечивают стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Исследовать возможность применения полученных законов управления в случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных;
3. Решить задачу поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные;

4. Разработать методы и алгоритмы построения законов управления для указанных задач;
5. Разработать программное обеспечение, реализующее указанные методы и алгоритмы;
6. Апробировать программное обеспечение на примерах конкретных задач управления.

Методы исследования.

Основными методами исследования являются метод функций Ляпунова, применяемый для исследования устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и методы выпуклого анализа, в частности, аппарат линейных матричных неравенств.

Научная новизна.

В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Построена оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой;
2. Решена задача поиска закона управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы, который обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Получена оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой будет обеспечиваться стабилизация и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных;
3. Поставлены и решены задачи синтеза динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые обеспечивают стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Получена оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой эти регуляторы будут обеспечивать стабилизацию замкнутой системы с заданной степенью устойчивости и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных;

4. Решена задача поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные в диссертационной работе результаты могут использоваться для решения задач управления сложными динамическими системами в технике, экономике, финансовой математике.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой;
2. Решение задачи поиска закона управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы, который обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой будет обеспечиваться стабилизация и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных;
3. Решение задач синтеза динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые обеспечивают стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные регуляторы будут обеспечивать стабилизацию замкнутой системы с заданной степенью устойчивости и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных;
4. Решение задачи поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Степень достоверности и апробации результатов.

Достоверность утверждений и выводов, сформулированных в

диссертационной работе, подтверждается сравнением полученных в работе теоретических результатов с результатами, полученными в результате численных экспериментов.

Материалы, изложенные в диссертационной работе, переставлены в виде секционных докладов и обсуждались на международных и всероссийских конференциях, съездах и научных школах: XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2012); X Международной Четаевской конференции (Казань, 2012); XII всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014); XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2016); Международной конференции «Оптимальное управление и дифференциальные игры» (Москва, 2018); XIV Международной научной конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2018); Международной конференции «Современные проблемы математики и механики» (Москва, 2019); XV Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2020); Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» - 2020 (Уфа, 2020); XX Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 2020); XXI Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 2021).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00514, № 11-01-00215, № 11-01-97022, № 12-01-31147, № 12-01-09330-моб_з, № 13-01-00603, № 14-01-00266, № 19-31-90086), а также в рамках НИР 3021 "Управление механическими системами в условиях неопределенности" с финансированием из средств Минобрнауки России (базовая часть государственного задания на научные исследования).

Публикации по теме работы.

По теме диссертационной работы опубликованы 7 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ [1-7], 3 из них — в библиографической базе Web of Science, 4 публикации в библиографической базе Scopus. Также опубликовано 14 статей и тезисов докладов, включенных в РИНЦ, в трудах международных и всероссийских конференций, съездов и математических школ [8-21].

Личный вклад.

В работах [4], [7] автором получены численные результаты совместно с соавторами. В совместной работе [5] автору принадлежит постановка задачи, доказательство теоремы и численные результаты. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем работы 109 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности диссертационной работы, определены цели и задачи исследования, аргументирована научная новизна, практическая значимость работы, выделены выносимые на защиту положения, приведены сведения об апробации результатов работы, сведения о публикациях, дано краткое изложение диссертации по главам.

В первой главе в § 1.1 сформулирована задача о стабилизации линейной динамической системы с помощью управления в виде линейной обратной связи по состоянию в случае, когда есть ограничения на фазовые и управляющие переменные. Для линейного управляемого объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$z_i = C_i x + D_i u, \quad i = \overline{1, N},$$

требуется построить управление в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx,$$

обеспечивающее асимптотическую устойчивость замкнутой системы и выполнение при заданных значениях γ_i ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $z_i \in R^{m_i}$ – управляемые выходы системы; A , B , C_i и D_i – заданные матрицы.

Описан подход к решению задачи, основанный на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Согласно подходу, если функция $V = x^T Y^{-1} x$ с матрицей $Y = Y^T > 0$ является квадратичной функцией Ляпунова замкнутой системы, то матрица параметров закона управления вычисляется как

$$K = ZY^{-1},$$

где матрицы $Y = Y^T > 0$, Z удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$YA^T + AY + Z^T B^T + BZ < 0, \\ \left(\begin{array}{cc} Y & YC_i^T + Z^T D_i^T \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{array} \right) \geq 0, i = \overline{1, N}.$$

Определение 1. Областью притяжения Ω состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях назовем множество всех начальных состояний, для которых фазовые траектории динамической системы, замкнутой управлением, будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями.

Определение 2. Под оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях будем понимать любое подмножество $w \subset \Omega$.

Если матрица параметров закона управления найдена, то, множество $E(Y) = \{x : x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях. Приведен подход, который позволяет уточнить эту оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях.

В § 1.2 сформулирована проблема о возможности применения для стабилизации при ограничениях полученного управления в том случае, когда состояние системы измеряется с ошибкой. Вводится переменная

$$y = (I + \Delta(t))x,$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения. Ставится задача о стабилизации исходной системы с помощью закона управления

$$u = Ky.$$

Рассматривается вопрос об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию также и в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии.

В § 1.3 сформулированы достаточные условия, позволяющие оценить

область притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Представим

$$y = x + w,$$

где $w = \Delta(t)x$. Тогда замкнутая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \bar{A}x + \bar{B}w, \\ z_i &= \bar{C}_i x + \bar{D}_i w, \quad i = \overline{1, N},\end{aligned}$$

где $\bar{A} = A + BK$, $\bar{B} = BK$, $\bar{C}_i = C_i + D_i K$, $\bar{D}_i = D_i K$. Доказана теорема.

Теорема 1. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar{C}_i^T \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^T \bar{C}_i & \bar{D}_i^T \bar{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \leq 0.$$

Тогда множество $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Показано, что если каждая из матриц X_i , $i = \overline{1, N}$, имеет минимальный след и является решением данной системы линейных матричных неравенств для значения γ_i , тогда множество $\bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$.

В качестве примеров в § 1.4 приведены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе.

Во **второй главе** в § 2.1, обсуждается решение задачи стабилизации линейной динамической системы с помощью управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу. Приведены два основных подхода к поиску параметров закона управления по выходу.

В § 2.2 сформулирована задача поиска управления по измеряемому выходу, которое обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Для линейного управляемого объекта с не измеряемым состоянием

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ z_i &= C_i x, \quad i = \overline{1, N}, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

требуется построить управление в виде линейной обратной связи по

измеряемому выходу

$$u = \Theta y,$$

которое будет обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы и выполнение при заданных значениях γ_i ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $l < n$, $z_i \in R^{m_i}$ – управляемые выходы системы, $y \in R^k$ – измеряемый выход системы, $k < n$; A , B , C и C_i – заданные матрицы соответствующих размеров. Предполагаем, что пара (A, B) – стабилизируема, а пара (A, C) – детектируема.

В § 2.3 получены достаточные условия для нахождения матрицы параметров обратной связи.

Теорема 2. Пусть взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ и величины $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$W_{B^T}^T (YA^T + AY) W_{B^T} < 0, \quad W_C^T (A^T X + XA) W_C < 0, \\ C_i^T C_i \leq \gamma_i^2 X, \quad i = \overline{1, N},$$

где $B^T W_{B^T} = 0$, $C W_C = 0$. Тогда все траектории замкнутой системы с начальными условиями $x(0) \in E(X)$, $E(X) = \{x : x^T X x \leq 1\}$ удовлетворяют ограничениям $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$. Матрицу параметров закона управления находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = YA^T + AY$, $P = CY$, $Q = B^T$.

Приведен подход, который позволяет уточнить множество начальных состояний, для которых полученный закон управления стабилизирует замкнутую систему при ограничениях $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$. Доказана теорема.

Теорема 3. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ удовлетворяет системе линейных матричных неравенств

$$A^T X_i + X_i A + C^T \Theta^T B^T X_i + X_i B \Theta C < 0, \quad C_i^T C_i \leq \gamma_i^2 X_i.$$

Тогда все траектории замкнутой системы с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$ удовлетворяют ограничению $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Показано, что если каждая из матриц X_i , $i = \overline{1, N}$, имеет минимальный

след и является решением данной системы линейных матричных неравенств для значения γ_i , тогда множество $\bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$.

В § 2.4 поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по измеряемому выходу линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных. Вводится

$$y = C(I + \Delta(t))x$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения. Поставлен вопрос о влиянии ошибок измерения фазовых переменных на выполнение ограничений $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$.

В § 2.5 в терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации. Запишем замкнутую систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x + \bar{B}w, \\ z_i &= C_i x, i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где $\bar{A} = A + B\Theta C$, $\bar{B} = B\Theta$, $w = \Delta(t)x$. Доказана теорема.

Теорема 4. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad C_i^T C_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i \leq 0.$$

Тогда множество $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Показано, что если каждая из матриц $X_i, i = \overline{1, N}$, имеет минимальный след и является решением данной системы линейных матричных неравенств

для значения γ_i , тогда множество $\bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$.

В качестве примеров в § 2.6 рассмотрены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе.

В **третьей главе** в § 3.1, обсуждаются подходы к решению задачи стабилизации линейной системы с помощью динамического регулятора по измеряемому выходу в случае наличия и отсутствия ограничений на фазовые переменные.

В § 3.2 сформулированы задачи о синтезе динамических регуляторов по измеряемому выходу, которые будут обеспечивать стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Для линейного управляемого объекта с не измеряемым состоянием

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

$$y = Cx,$$

$$z_i = C_i x, i = \overline{1, N},$$

требуется построить линейный динамический регулятор k – го порядка вида

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y,$$

$$u = C_r x_r + D_r y,$$

который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньшей, чем β ($\beta > 0$), а также обеспечивает выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$$

при заданных значениях γ_i . Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^m$ – управление, $y \in R^l$ – измеряемый выход системы, $z_i \in R^{m_i}$ – выходы, определяющие ограничения на фазовые переменные системы, $x_r \in R^k$ – состояние регулятора ($k \leq n$), $x_r(0) = 0$, A, B, C и C_i – заданные матрицы.

В § 3.3 получены достаточные условия для поиска матрицы параметров регулятора. Доказана теорема.

Теорема 5. Пусть начальное состояние $x_c(0)$ и взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$W_{B^T}^T (Y\bar{A}^T + \bar{A}Y + 2\beta Y)W_{B^T} < 0, \quad W_{\bar{C}}^T (\bar{A}^T X + X\bar{A} + 2\beta X)W_{\bar{C}} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} Y & x_c(0) \\ x_c^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I_{k \times k} & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k \times k} \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{C}_i = (C_i \quad 0_{m_i \times k})$, $\bar{B}^T W_{B^T} = 0$,

$\bar{C} W_{\bar{C}} = 0$. Здесь $\text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T)$ обозначает след матрицы $\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T$. Тогда все траектории замкнутой системы с начальными условиями $x_c(0) \in E(X)$, $E(X) = \{x_c : x_c^T X x_c \leq 1\}$ удовлетворяют ограничениям $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$.

Параметры динамического регулятора $\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$ находим как решение

относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = Y\bar{A}^T + \bar{A}Y + 2\beta Y$, $P = \bar{C}Y$, $Q = \bar{B}^T$.

Показано, что в случае поиска динамического регулятора полного порядка, решение задачи сводится к решению системы линейных матричных неравенств. Доказана теорема.

Теорема 6. Пусть матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ и величины $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11} + 2\beta Y_{11}) W_{B^T} < 0, \quad W_{\bar{C}}^T (A^T X_{11} + X_{11} A + 2\beta X_{11}) W_{\bar{C}} < 0,$$

$$x_0^T X_{11} x_0 \leq 1, \quad \begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad \text{trace}(C_i Y_{11} C_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, N},$$

где $B^T W_{B^T} = 0$, $C W_{\bar{C}} = 0$. Здесь $\text{trace}(C_i Y_{11} C_i^T)$ обозначает след матрицы $C_i Y_{11} C_i^T$. Тогда все траектории замкнутой системы с начальными условиями $x_c(0) \in E(X)$ удовлетворяют ограничениям $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$. Параметры

динамического регулятора полного порядка находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = Y\bar{A}^T + \bar{A}Y + 2\beta Y$, $P = \bar{C}Y$, $Q = \bar{B}^T$, $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \\ Y_{11} - X_{11}^{-1} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \end{pmatrix}$.

В § 3.4 поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные динамические регуляторы для

линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будут обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных. Вводится переменная

$$y = C(I + \Delta(t))x,$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения. Поставлен вопрос о влиянии ошибок измерения фазовых переменных на выполнение ограничений $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$.

В § 3.5 в терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации. Запишем замкнутую систему в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c w,$$

$$z_i = \bar{C}_i x, i = \overline{1, N}.$$

Здесь $A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}$, $B_c = \begin{pmatrix} BD_r C \\ B_r C \end{pmatrix}$, $\bar{C}_i = (C_i \ 0_{m_i \times k})$, $w = (\Delta(t) \ 0_{n \times k}) x_c$,

$x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$, а начальные условия имеют вид $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Доказана теорема.

Теорема 7. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} A_c^T X_i + X_i A_c + 2\beta X_i + \mu_1 \delta^2 I & X_i B_c \\ B_c^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i \leq 0.$$

Тогда множество $\hat{E}(X_i) = \{x_c : x_c^T X_i x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

В соответствии со структурой вектора $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$ представим матрицу X_i

в блочном виде $X_i = \begin{pmatrix} X_{i_11} & X_{i_12} \\ X_{i_12}^T & X_{i_22} \end{pmatrix}$. Показано, что если каждая из матриц X_i ,

$i = \overline{1, N}$, является решением данной системы линейных матричных неравенств

для значения γ_i , а ее блок X_{i-11} имеет минимальный след, тогда множество $\bigcap_{i=1}^N \widehat{E}(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$.

В качестве примера в § 3.6 рассмотрена задача стабилизации движения тела в электромагнитном подвесе.

В четвертой главе в § 4.1 поставлена задача поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные. Для управляемой системы с неопределенностью

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_\Delta v_\Delta, \\ z_\Delta &= C_\Delta x + D_u u + D_\Delta v_\Delta, \\ v_\Delta &= \Delta z_\Delta, \\ z_i &= C_i x + D_i u, i = \overline{1, N}.\end{aligned}$$

поставлена задача поиска закона управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = \theta x,$$

который для любых допустимых неопределенностей Δ , обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньшей, чем β ($\beta > 0$), а также обеспечивает выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$$

при заданных значениях γ_i . Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $z_i \in R^{m_i}$ – выходы, определяющие ограничения на фазовые и управляющие переменные, $A, B_u, B_\Delta, C_\Delta, D_\Delta, D_u$ и $C_i, D_i, i = \overline{1, N}$ – заданные матрицы соответствующих размеров. Неизвестная матрица Δ , описывает параметрические возмущения и удовлетворяет для всех $t \geq 0$ условию

$$\Delta^T \Delta \leq \eta^2 I$$

при заданном значении $\eta \neq 0$. Относительно v_Δ и z_Δ , которые можно трактовать как вход и как выход неопределенности системы, предполагаем, что они ограничены по норме L_2 .

В § 4.2 для поиска матрицы обратной связи θ , наряду с исходной системой рассматривается также вспомогательная система, в которой вход неопределенности v_Δ и выход неопределенности z_Δ в каждый момент времени связаны неравенством

$$\|v_{\Delta}\|^2 \leq \eta^2 \|z_{\Delta}\|^2.$$

Показано, что закон управления $u(t)$, обеспечивающий робастную стабилизацию вспомогательной системы, будет обеспечивать и робастную стабилизацию исходной системы.

Сформулированы достаточные условия для существования матрицы обратной связи робастного закона управления. Доказана теорема.

Теорема 8. Если начальное состояние $x(0)$, матрицы $Y = Y^T > 0$, Z и величины γ_i^2 , $i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_u^T + B_u Z + 2\beta Y & B_{\Delta} & YC_{\Delta}^T + Z^T D_u^T \\ B_{\Delta}^T & -\eta^{-1}I & D_{\Delta}^T \\ C_{\Delta}Y + D_u Z & D_{\Delta} & -\eta^{-1}I \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} Y & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} Y & YC_i^T + Z^T D_i^T \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

тогда все траектории замкнутой вспомогательной системы с начальными условиями $x(0) \in E$, $E = \{x : x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ удовлетворяют ограничениям $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$. Матрицу обратной связи вычисляем как $\theta = ZY^{-1}$.

В качестве примера в § 4.3 приведено решение задачи поиска робастного управления для двухмассовой системы при отсутствии полной информации об ее параметрах, при наличии ограничений на величину смещения одной из материальных точек и на величину управления.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в работе.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, а также журналах, включённых в международные базы Web of Science и Scopus

1. Федюков, А.А. Стабилизация по измеряемому выходу двузвенного перевернутого маятника / А.А. Федюков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2012. — № 2(1). — С. 177-183.
2. Федюков, А.А. Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные / А.А. Федюков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2013. — № 2 (1). — С. 152–159.

3. Федюков, А.А. Синтез робастного управления с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные / А.А. Федюков // Информатика и системы управления. — 2015. — № 2 (44) . — С. 121-130.
4. Баландин, Д.В. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без измерения его положения / Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган, А.А. Федюков // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2017. — № 3. — С. 12-24.
Английский перевод:
Balandin, D.V. Optimal Stabilization of Bodies in Electromagnetic Suspensions without Measurements of Their Location / D.V. Balandin, R.S. Biryukov, M.M. Kogan, A.A. Fedyukov // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2017. — V. 56. — № 3 . — P. 351–363. (WoS, Scopus)
5. Баландин, Д.В. Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные / Д.В. Баландин, А.А. Федюков // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2021. — № 5. — С. 5–17.
Английский перевод:
Balandin, D.V. Stabilization of Linear Dynamic Objects According to the Measured-Error State Under Constraints on the Phase and Control Variables / D.V. Balandin, A.A. Fedyukov // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2021. — V. 60. — № 5. — P. 673-685. (WoS, Scopus)
6. Fedyukov, A.A. Estimating a Set of the States in the Case of an Error in the Measured Output for Controlled System / A.A. Fedyukov. // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. — Communications in Computer and Information Science, Springer. — 2021. — V.1413. — P. 273-285. (Scopus)
7. Баландин, Д.В. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах / Д.В. Баландин, М.М. Коган, Л.Н. Кривдина., А.А. Федюков // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3-22.
Английский перевод:
Balandin, D.V. Design of Generalized Discrete-time H_∞ -Optimal Control over Finite and Infinite Intervals / D.V. Balandin, M.M. Kogan, L.N. Krivdina, A.A. Fedyukov // Automation and Remote Control. — 2014. — V. 75. — № 1. — P. 1–17. (WoS, Scopus)

Материалы конференций

8. Федюков, А.А. Стабилизация двухзвенного перевернутого маятника на тележке при фазовых ограничениях / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII Международной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2012. — С. 324-326.
9. Федюков, А.А. Применение линейных матричных неравенств в задачах стабилизации / А.А. Федюков // Четаевская конференция: Труды X международной конференции (г. Казань). — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. — Т. 3, Ч. 2. — С. 405-414.
10. Федюков, А.А. Стабилизация систем с фазовыми ограничениями с помощью динамических регуляторов пониженного порядка / А.А. Федюков // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: Сборник трудов (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 338-344.
11. Федюков, А.А. Синтез робастного управления для двухмассовой системы с учетом ограничений на фазовую переменную и управление / А.А. Федюков // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник докладов (г. Казань). — Казань: Изд-во Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. — С. 3902-3904.
12. Федюков, А.А. Робастная стабилизация двухмассовой системы с учетом ограничений на фазовую переменную и управление / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIII Международной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2016. — С. 386-388.
13. Федюков, А.А. Достаточные условия существования регулятора, обеспечивающего стабилизацию объекта с фазовыми ограничениями / А.А. Федюков // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники: Сборник научных статей международной конференции (г. Барнаул). — Барнаул: Изд-во Алтайский государственный университет, 2018. — С. 523-530.
14. Федюков, А.А. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе / А.А. Федюков // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Международной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, 2018. — С. 94-96.
15. Федюков, А.А. Стабилизация электромагнитного подвеса при ограничениях на фазовые переменные / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания

- нелинейных систем управления: Материалы XIV Международной научной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2018. — С. 451-454.
16. Федюков, А.А. Стабилизация динамической системы с ограничениями на фазовые переменные / А.А. Федюков // Современные проблемы математики и механики: Материалы международной конференции (г. Москва). — М.: Изд-во МАКС Пресс, 2019. — С. 799-802.
 17. Федюков, А.А. Робастная стабилизация динамической системы с ограничениями на фазовую переменную и управление / А.А. Федюков // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов в 4-х томах (г. Уфа). — Уфа: Изд-во Башкирский государственный университет, 2019. — Т. 1. — С. 283-285.
 18. Федюков, А.А. Стабилизация по измеряемому с ошибкой выходу динамической системы с фазовыми ограничениями / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XV Международной научной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2020. — С. 471-473.
 19. Федюков, А.А. Управление динамическим объектом при ограничениях на управляющие и фазовые переменные / А.А. Федюков // Уфимская осенняя математическая школа - 2020: Сборник тезисов международной научной конференции (г. Уфа). — Уфа: Изд-во ООО Аэтерна, 2020. — Ч. 2. — С. 274-276.
 20. Федюков, А.А. Оценка области допустимых начальных состояний в случае наличия ошибки в измеряемом выходе системы / А.А. Федюков // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XX Международной конференции (г. Нижний Новгород). — Нижний Новгород: Изд-во Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2020. — С. 386-390.
 21. Федюков, А.А. Стабилизация с помощью статического регулятора динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные / А.А. Федюков // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XXI Международной конференции (г. Нижний Новгород). — Нижний Новгород: Изд-во Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2021. — С. 374-378.