

Михеева Галина Вениаминовна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ
ТЕПЛОПЕРЕНОСА И МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ
В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛАХ**

1.3.8. Физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Физика»

Научный руководитель:

Кудинов Игорь Васильевич
доктор технических наук, доцент, и. о. заведующего кафедрой «Физика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Официальные оппоненты:

Формалев Владимир Федорович
заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор физико – математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Данюк Алексей Валериевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прогрессивных технологий ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет».

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Защита состоится «21» октября 2022 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.377.01 при ФГБОУ ВО "СамГТУ" по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, ауд. 200.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «СамГТУ» и на сайте www.samgtu.ru.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах) с подписями, заверенные печатью учреждения, просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, учёному секретарю Диссертационного совета 24.2.377.01

Автореферат разослан « ____ » _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.377.01
кандидат технических наук, доцент

Д.А. Майдан

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. В связи с потребностью проведения физических процессов в условиях экстремальных значений температур, давлений и прочего, появился интерес к исследованию внутренних механизмов переноса тепла и процессов колебаний упругих твердых тел с учётом локальной неравновесности (пространственно-временной нелокальности) реальных физических процессов. В основе существующих математических моделей лежат параболические уравнения, полученные на основе принципов локального равновесия и сплошной среды, в соответствии с которыми не учитываются внутренняя структура вещества. То есть, используется допущение согласно которому в пространственно-временных масштабах порядка длины и времени свободного пробега микро- и квазичастиц (атомов, электронов, фононов), происходит мгновенный теплообмен. Отсутствие коэффициентов релаксации в уравнениях классических моделей подразумевает, с математической точки зрения, распространение теплоты и импульса без какой-либо временной задержки, т.е. с бесконечной скоростью. Поэтому существующие модели не подходят для описания процессов, происходящих в очень короткие промежутки времени (сопоставимые со временем релаксации), а также при малых пространственных масштабах. Для того, чтобы приблизиться к корректному описанию быстропотекающих процессов, необходима разработка новых моделей.

Целью работы является исследование внутренних механизмов теплопереноса и колебательных процессов с учётом релаксационных явлений.

Задачи исследования

1. Разработка линейной и нелинейной локально – неравновесной двухтемпературной модели переноса тепла в металлах, облучаемых ультракороткими импульсами лазерного излучения.

2. Исследование влияния внутреннего (объемного) коэффициента теплоотдачи на теплообмен между электронами и кристаллической решёткой с целью определения границ применимости двухтемпературной модели.

3. Исследование волнового и баллистического переноса теплоты в сверхтонких пленках наноразмерной толщины.

4. Создание математической модели несвязанной динамической термоупругости при тепловом ударе с учётом пространственно – временной нелокальности.

5. Создание математической модели локально – неравновесных продольных колебаний стержня с использованием модифицированной формулы закона Гука, учитывающей скорости и ускорения напряжений и градиента перемещений.

6. Разработка математической модели продольных колебаний стержня с учётом локальной неравновесности и внешней нагрузки с целью исследования резонансных и бифуркационных колебаний, а также для создания волновых пакетов с амплитудной модуляцией.

Научная новизна

1. Разработаны линейная и нелинейная локально – неравновесные двухтемпературные модели теплообмена между электронами и кристаллической решёткой в металлах, облучаемых мощными ультракороткими лазерными импульсами.

2. Впервые выполнено исследование влияния внутреннего коэффициента теплоотдачи на теплообмен между электронами и решёткой, позволившее определить границы применимости двухтемпературной модели.

3. Применительно к сверхтонким плёнкам, характеризующимся волновым переносом теплоты, предложен аналог температуры – квадрат амплитуды волновой функции, позволяющей определить действительную температуру при волновом её изменении.

4. Разработана локально – неравновесная модель несвязанной динамической термоупругости, позволяющая моделировать температурные напряжения, инициируемые движением двух волн – тепловой и звуковой при тепловом ударе на внешней поверхности тела.

5. Разработана математическая модель продольных колебаний стержня с учётом локальной неравновесности и внешней гармонической нагрузки, позволяющая моделировать резонансные и бифуркационные колебания, также выполнять амплитудную модуляцию волновых пакетов.

На защиту выносятся все вышеперечисленные положения научной новизны, а также алгоритмы и комплексы программ, реализующие разработанные в диссертации математические модели.

Теоретическая и практическая значимость результатов работы

Впервые выполнены исследования двухтемпературной линейной и нелинейной модели локально – неравновесного теплообмена в металлах при воздействии ультракороткого лазерного излучения. Применительно к исследованиям решения гиперболического уравнения теплопроводности предложен аналог температуры, определяемый как квадрат амплитуды волновой функции. При исследовании динамических температурных напряжений впервые показано, что скачки напряжений формируются в результате движения двух волн – тепловой и звуковой. Применительно к исследованию локально – неравновесных колебаний стержня с учётом внешней нагрузки получены волновые пакеты с амплитудно – частотной модуляцией.

Достоверность результатов подтверждается сравнением полученных в диссертации решений с данными других авторов, с численными решениями и с экспериментальными исследованиями.

Методология и методы исследования. При разработке математических моделей используются классические законы сохранения (равновесия, движения, теплового баланса) и эмпирические формулы законов Фурье и Гука. Разработанные модели исследуются аналитическими и численными методами.

Связь диссертации с государственными программами научных исследований. Исследования проводились по гранту РФФИ (проект № 20-38-70021).

Внедрение полученных результатов. Результаты, полученные в диссертации, были использованы в учебном процессе СамГТУ, на предприятии РКЦ "Прогресс", г. Самара.

Апробация материалов диссертации. Наиболее важные положения диссертации и обсуждены на XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара 2019 г.), XXI международной конференции "Проблемы управления и моделирования в сложных системах" (г. Самара, 2019 г.), международной научно-технической конференции «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении 2019», (г. Севастополь, 2019 г.), Central European Symposium On Thermophysics (Eger, Hungary, 2020), III международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики» (г. Москва, 2020 г.), VI Международной конференции «Информационные технологии и нанотехнологии» (г. Самара, 2020 г.), II Международной конференции «Метрологическое обеспечение инновационных технологий» (г. Красноярск, 2021 г.), XXIII семинар молодых ученых под

руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики в энергетических установках» (г. Екатеринбург, 2021 г.), III Международной конференции «Прикладная физика, информационные технологии и инжиниринг» (г. Красноярск, 2021 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из которых 11 работ являются публикациями в рецензируемых научных изданиях и публикациями, приравненными к ним.

Личный вклад автора. Работы [2, 9, 12] выполнены самостоятельно. В статьях [1, 3 – 8, 12 – 16] диссертант, совместно с другими авторами, выполнял работу по постановке задач и проведении расчётов. В остальных работах в одинаковой степени с соавторами принимал участие в разработке моделей и нахождении решений.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы, приложений; изложена на 136 страницах основного текста (без приложений), содержит 89 рисунка, 2 таблицы. Список литературных источников включает 203 наименования.

В первой главе дан обзор и проведен анализ известных публикаций по теме диссертации. Показано, что существуют различные модели локально – неравновесных процессов: молекулярно – динамические, кинетические, термодинамические, феноменологические, модели, основанные на теории случайных блужданий, на использовании понятия «тепловой памяти» и др., результаты которых не всегда между собой согласуются. Из анализа работ сделано заключение, что в настоящее время отсутствует единая непротиворечивая теория локально – неравновесных процессов.

Во второй главе диссертации приводятся результаты исследований двухтемпературной модели нагрева металлов, используемой в случае, когда их поверхность подвергается воздействию мощных ультракоротких импульсов лазерного излучения. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\partial\Theta_1/\partial Fo = \partial^2\Theta_1/\partial\xi^2 + F_1 \exp(-\xi/\nu - (Fo - Fo_0)^2/(\beta Fo_0^2)) + Bi(\Theta_2 - \Theta_1); \quad (1)$$

$$\partial\Theta_2/\partial Fo = BiF_2(\Theta_1 - \Theta_2); \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (2)$$

$$\Theta_1(\xi, 0) = \Theta_2(\xi, 0) = 1; \quad (3) \quad \partial\Theta_1(0, Fo)/\partial\xi = \partial\Theta_1(1, Fo)/\partial\xi = 0; \quad (4)$$

$$\Theta_1 = \frac{T_1}{T_0}; \quad \Theta_2 = \frac{T_2}{T_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo = \frac{\lambda_1 t}{c_1 \delta^2}; \quad Fo_0 = \frac{\lambda_1 t_0}{c_1 \delta^2}; \quad F_1 = \frac{Q_0 \delta^2}{\lambda_1 T_0}; \quad Bi = \frac{\alpha \delta^2}{\lambda_1}; \quad F_2 = \frac{c_1}{c_2}; \quad \nu = \frac{\mu}{\delta}, \quad (5)$$

где Θ_1 , Θ_2 , ξ , Fo – соответственно, безразмерные температуры, координата, время; Fo_0 – безразмерный момент времени максимума лазерного импульса; Bi – безразмерный коэффициент объёмной теплоотдачи; ν – безразмерная величина оптического проникновения; F_1 , F_2 – безразмерные комплексы; T_0 – начальная температура, K ; x – координата, m ; t – время, c ; t_0 – момент времени максимума теплового потока лазерного импульса, c ; λ_1 – коэффициент теплопроводности электронов, $Bm/(mK)$; α – коэффициент объёмной теплоотдачи, $Bm/(m^3K)$; c_1 , c_2 – теплоёмкости электронов и решётки, $Дж/(m^3K)$; μ – глубина оптического проникновения лазерного импульса, m ; $Q_0 = J/\mu$; J – плотность теплового потока лазерного излучения, Bm/m^2 ; δ – толщина пластины, m ; β – безразмерный коэффициент, регулирующий продолжительность лазерного импульса.

Учитывая, что теплообмен между электронами и решеткой при прочих равных условиях полностью определяется величиной объёмного коэффициента теплоотдачи, было выпол-

нено детальное исследование его влияния на температурное состояние системы. И, в частности, при неизменности всех других параметров ($F_1 = 10000$; $F_2 = 0,01$; $\nu = 0,1$; $\beta = 0,5$; $F_{00} = 0,1$) были выполнены расчёты для $Bi = 1$; 10; 100; 1000. Результаты расчётов для $Bi = 1$ приведены на рис. 1 – 4. Из анализа рис. 1 следует, что в точке $\xi = 0$, где источник теплоты максимальный, в течение времени $Fo \approx 0,15$ температура электронов достигает максимальной величины $\Theta_1 = 240$. Решетка в точке $\xi = 0$, за это же время прогревается лишь до величины $\Theta_2 = 1,2$. В диапазоне $6 \leq Fo \leq 50$ температура решётки в точке $\xi = 0$ выше, а в точке $\xi = 1$ ниже температуры электронов (рис. 2). Этот факт можно объяснить наличием перепада температуры кристаллической решётки по толщине пластины, тепловой инерционностью решетки и высокой теплопроводностью электронов.

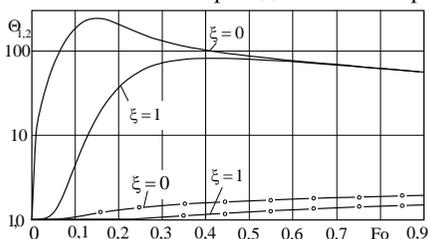


Рис. 1. — — Θ_1 ; —○— — Θ_2 ; $Bi = 1$.

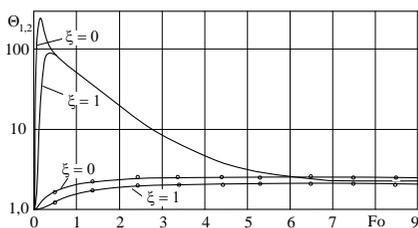


Рис. 2. — — Θ_1 ; —○— — Θ_2 ; $Bi = 10$.

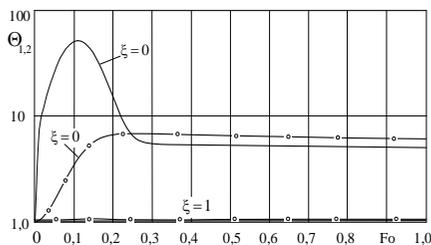


Рис. 3. — — Θ_1 ; —○— — Θ_2 ; $Bi = 100$.

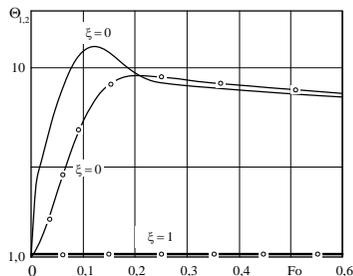


Рис. 4. — — Θ_1 ; —○— — Θ_2 ; $Bi = 1000$.

Увеличение числа Bi приводит к следующим изменениям в распределении температур ($Bi = 10$, рис. 2; $Bi = 100$, рис. 3; $Bi = 1000$, рис. 4): максимальная температура электронов уменьшается, а решетки увеличивается; увеличивается перепад электронной и решетчатой температур (каждой в отдельности) по толщине пластины; равенство температур электронов и решётки на границе $\xi = 0$ достигается при меньшем времени; время полного выравнивания температур по толщине пластины (стационарное состояние) уменьшается; при больших Bi ($Bi = 1000$) при $Fo > 0,2$ температура решётки начинает превышать температуру электронов; равновесная температура электронов и решётки не зависит от Bi и равна $\Theta = 2,2$.

Во второй главе диссертации приводятся также результаты разработки локально – неравновесной двухтемпературной модели теплообмена между электронами и кристаллической решёткой. То есть в данном случае в модели учитываются релаксационные свойства среды. Определяющие уравнения модели находятся путем разложения в ряд по степеням

малых параметров каждого члена уравнений теплового баланса для электронов и решётки. Математическая постановка задачи с учётом обозначений (5) имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial Fo} + F_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + F_4 \frac{\partial^3 \Theta_1}{\partial \xi^2 \partial Fo} + Bi(\Theta_2 - \Theta_1) + BiF_2 \frac{\partial}{\partial Fo} (\Theta_2 - \Theta_1) +$$

$$+ G(1 + \gamma F_3) \exp(-\xi/v - (Fo - Fo_0)^2 / (\beta Fo_0^2)); \quad (6) \quad \partial \Theta_2 / \partial Fo = Bi(\Theta_1 - \Theta_2); \quad (7)$$

$\Theta_1(\xi, 0) = \Theta_2(\xi, 0) = 1$; (8) $\partial \Theta_1(\xi, 0) / \partial Fo = 0$; (9) $\partial \Theta_1(0, Fo) / \partial \xi = \partial \Theta_1(1, Fo) / \partial \xi = 0$, (10)
 где $\Theta_1 = T_1 / T_0$; $\Theta_2 = T_2 / T_0$; $\xi = x / \delta$; $Fo = a_1 t / \delta^2$; $Fo_0 = a_1 t_0 / \delta^2$; $F_1 = a_1 \tau_1 / \delta^2$; $F_2 = a_1 z_1 / \delta^2$; $F_3 = a_1 m_1 / \delta^2$; $F_4 = a_1 r_1 / \delta^2$; $G = (Q_0 \delta^2) / (\lambda_1 T_0)$; $c = c_1 / c_2$; $Bi = \alpha \delta^2 / \lambda_1$; $v = \mu / \delta$; $a_1 = \lambda_1 c_1$; $\gamma = 2(Fo - Fo_0) / (\beta Fo_0^2)$, τ_1 , z_1 , m_1 , r_1 – коэффициенты релаксации. (11)

В диссертации приводятся численные расчёты задачи (6) – (10) для никелевой на-
 ноплёнки при исходных данных, приведенных в таблице

Таблица. Исходные данные для численного расчёта

λ_1 , Вм/(м·К)	c_1 , Джс/(м ³ ·К)	c_2 , Джс/(м ³ ·К)	J, Вм/м ²	μ , нМ	δ , нМ	α , Вм/м ³	T_0 , К
90	$3,2 \cdot 10^4$	$4,1 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^{16}$	15,3	1000	$1,2 \cdot 10^{17}$	300
G	c	Bi	v	Fo ₀	β	t_0 , фс	Q_0 , Джс/м ³
$7,26 \cdot 10^7$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	400	10	$1,96 \cdot 10^{24}$

На рис. 5 – 7 показано изменение электронной и решётчатой температур на поверхности ($\xi = 0$) и внутри никелевой наноплёнки, облученной лазером, без учёта релаксационных явлений ($\tau_1 = z_1 = m_1 = r_1 = 0$). Отметим, что температура электронного газа в момент времени импульса $t = 10$ фс достигает максимума $T_1 = 35000$ К, однако решётка достигает температурного максимума $T_2 = 450$ К при $t = 746$ фс.

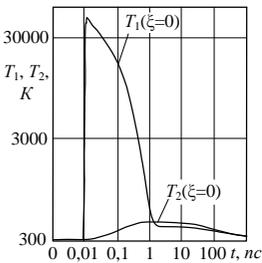


Рис. 5. Изменение T_1 и T_2

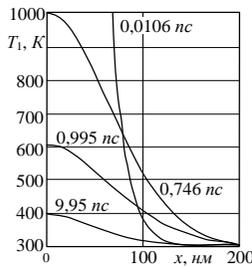


Рис. 6. Изменение T_1

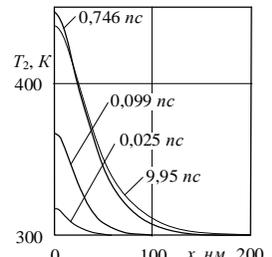


Рис. 7. Изменение T_2

На рис. 8 – 10 приведено исследование изменения температур электронного газа и кристаллической решётки в никелевой наноплёнке для случая учёта релаксационных явлений только в электронном газе ($\tau_1 = 10^{-8}$ с, $F_1 = 28,1$, $m_1 = z_1 = 0$). В отличие от распределения температур при $\tau_1 = 0$, в данном случае наблюдаются скачкообразно изменяющиеся профили

температур (бегущая волна). Они возникают при $t = 203 \text{ нс}$ и $x = 100 \text{ нм}$, движутся вглубь наноплёнки и затухают в середине плёнки при $x = 500 \text{ нм}$. Сходная ситуация, но с более плавным температурным профилем, наблюдается и в кристаллической решётке.

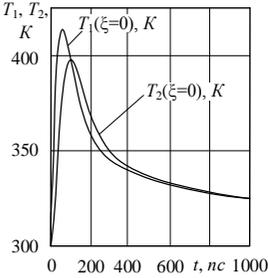


Рис. 8. Изменение T_1 и T_2

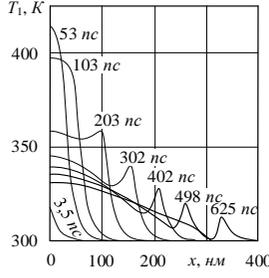


Рис. 9. Изменение T_1

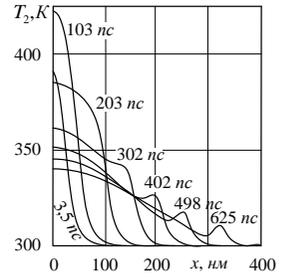


Рис. 10. Изменение T_2

Во второй главе диссертации приводятся также результаты разработки нелинейной локально – неравновесной двухтемпературной модели теплообмена в металлах. Анализ результатов её численных расчётов позволяет заключить, что учёт нелинейности теплофизических свойств приводит к ускорению процесса теплообмена.

В третьей главе диссертации приводятся результаты исследований точного аналитического решения уравнения теплопроводности для бесконечной пластины с однофазной и двухфазной релаксацией. Математическая постановка задачи в случае использования для теплового потока формулы Максвелла – Каттанео – Лыкова* (однофазная релаксация) имеет вид

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo + F_1 \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo^2 = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2; \quad (12)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (13) \quad \partial\Theta(\xi, 0)/\partial Fo = 0; \quad (14)$$

$$\partial\Theta(0, Fo)/\partial\xi = 0; \quad (15) \quad \Theta(1, Fo) = 0; \quad (16)$$

где $\Theta = (T - T_1)/(T_0 - T_1)$; $\xi = x/\delta$; $Fo = at/\delta^2$; $F_1 = a\tau_1/\delta^2$; (17)

Θ , ξ , Fo – соответственно безразмерные температура, координата, время (число Фурье); F_1 – безразмерный коэффициент релаксации; T – температура; T_1 – температура при $x = \delta$; δ – толщина пластины; t – время; a – коэффициент температуропроводности; T_0 – начальная температура; τ_1 – коэффициент релаксации.

Точное аналитическое решение задачи (12) – (16) имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (r = 2k - 1), \quad (18)$$

где $C_{1k} = -C_{2k} z_{2k}/z_{1k}$, $C_{2k} = (-1)^{k+1} (4/r\pi) / (1 - z_{2k}/z_{1k})$, $(i = 1, 2; k = 1, \infty)$; $v_k = r^2 \pi^2 / 4$, $(r = 2k - 1)$; $C_{\#}$ – константы интегрирования;

$$z_{\#k} = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4F_1 v_k}\right) / (2F_1). \quad (19)$$

*Maxwell S. C. // Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1867. V. 157. P. 49

Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. Compter Rendus. 1958. Vol. 247, No. 4. Pp. 431 – 433.

Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа 1967. 601 с.

Если подкоренное выражение соотношения (19) $(1 - 4F_1 v_k) > 0$, то будем иметь два действительных отрицательных корня z_{1k} и z_{2k} и решение задачи будет определяться по формуле (18). Проведем анализ выполнения соотношения $4F_1 v_k < 1$ в зависимости от величин F_1 и v_k . Для выполнения последнего неравенства F_1 должно быть бесконечно малым ($F_1 \rightarrow 0$) при любых значениях v_k , что возможно (исходя из соотношения $F_1 = a\tau_1/\delta^2$) лишь при бесконечно большой толщине пластины δ (при неизменных значениях a и τ_1), то есть для полупространства. В этом случае решение (18) описывает диффузионное изменение температуры. Таким образом, при бесконечно большой толщине пластины волновое изменение температуры отсутствует (рис. 11).

Если подкоренное выражение из (19) $(1 - 4F_1 v_k) < 0$, то будем иметь комплексные корни

$$z_{1k} = \gamma + i\beta_k; \quad z_{2k} = \gamma - i\beta_k, \quad (20)$$

где $\gamma = -0,5/F_1$; $\beta_k = \sqrt{(4F_1 v_k - 1)/(2F_1)}$; $i = \sqrt{-1}$.

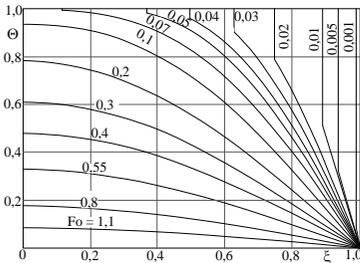


Рис. 11. Изменение температуры по формуле (18).
 $F_1 = 10^{-7}$; $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\delta = 0,316 \cdot 10^{-4} \text{ м}$

Неравенство $(4F_1 v_k - 1) > 0$, независимо от величин v_k , может быть выполнено лишь при каких-то больших значениях F_1 . Исходя из формулы $F_1 = a\tau_1/\delta^2$, большие величины F_1 (при неизменных a и τ_1) соответствуют малым толщинам пластины δ . В данном случае диффузионное изменение температуры отсутствует и реализуется лишь волновое её изменение. Решение задачи (12) – (16) для комплексных корней соотношения (19) записывается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(\gamma Fo) [B_{1k} \cos(\beta_k Fo) - B_{2k} \sin(\beta_k Fo)]] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (21)$$

где $B_{1k} = 4/(r\pi)$; $B_{2k} = \gamma B_{1k}/\beta_k$. (22)

Соотношение (21) представляет точное аналитическое решение задачи (12) – (16) в случае, когда подкоренное выражение соотношения (19) меньше нуля, то есть при комплексных корнях характеристического уравнения, имеющих вид (20). Проведем анализ величин F_1 и v_k , при которых будет выполняться соотношение $(4F_1 v_k - 1) > 0$. Оно может быть выполнено лишь в случаях, когда $4F_1 v_k > 1$. Так, уже для первого собственного числа $v_1 = \pi^2/4 = 2,4674$ величина F_1 будет: $F_1 = 0,1$. Если положить $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$, то, исходя из формулы $F_1 = a\tau_1/\delta^2$, величине $F_1 = 0,1$ будет соответствовать толщина пластины $\delta = 10 \text{ нм}$. Следовательно, волновое решение задачи (12) – (16) будет наблюдаться

лишь для пластин сверхмалой толщины, что соответствует большим значениям безразмерного коэффициента релаксации F_1 (при неизменных значениях коэффициента температуропроводности a и коэффициента релаксации τ_1).

Так как в каждой точке пространства происходит колебательное изменение искомой функции с определенной частотой и амплитудой (рис. 12), то классическое понятие температуры, как некоторой величины в фиксированной точке пространства в данный момент времени, теряет смысл. В связи с чем, в соотношении (18) величину $\Theta(\xi, Fo)$ будем интерпретировать не как температуру, а как некоторую волновую функцию, квадрат амплитуды которой, как будет показано ниже, будет определять значение температуры в конкретной точке пространства в конкретный момент времени (рис. 13). Отмечается полное совпадение полученных таким путем температур с их значениями, найденными из решения (28) краевой задачи при двухфазном запаздывании, рассмотренной ниже.

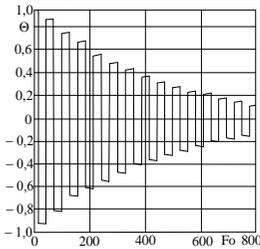


Рис. 12. Изменение волновой функции в точке $\xi = 0$. $F_1 = 200$; $\tau_1 = 10^{-11}$ с; $a = 10^{-6}$ м²/с; $\delta = 0,224$ нм

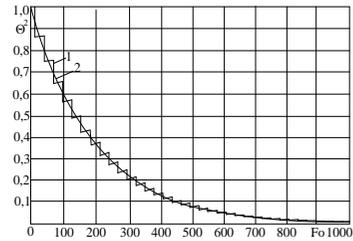


Рис. 13. 1 – изменение Θ^2 (ступенчатая функция); 2 – аппроксимация ступенчатой функции 1. $F_1 = 200$; $\tau_1 = 10^{-11}$ с; $a = 10^{-6}$ м²/с; $\delta = 0,224$ нм

Рассмотрим аналогичную краевую задачу для уравнения теплопроводности, полученного с учетом двухфазной релаксации (с учетом скорости изменения теплового потока и градиента температуры в формуле закона Фурье). Учитывая обозначения (17), а также, принимая $F_2 = a\tau_2/\delta^2$, получаем следующую задачу в безразмерном виде

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo + F_1 \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo^2 = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial \xi^2 + F_2 \partial^3\Theta(\xi, Fo)/(\partial \xi^2 \partial Fo); \quad (23)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (24) \quad \partial\Theta(\xi, 0)/\partial Fo = 0; \quad (25) \quad \partial\Theta(0, Fo)/\partial \xi = 0; \quad (26) \quad \Theta(1, Fo) = 0, \quad (27)$$

где τ_2 – коэффициент релаксации градиента температуры в формуле закона Фурье. Очевидно, что при $\tau_2 = 0$ уравнение (23) приводится к уравнению (12).

Точное аналитическое решение задачи (23) – (27) имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos((r\pi\xi)/2), \quad (28)$$

где
$$C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k}; \quad C_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{4}{r\pi} \left/ \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \right.;$$

$$z_{ik} = \frac{-(1 + F_2 v_k) \pm \sqrt{(1 + F_2 v_k)^2 - 4F_1 v_k}}{2F_1}; \quad (i = 1, 2; k = \overline{1, \infty}). \quad (29)$$

Из анализа соотношения (29) следует, что при $F_2 = 0$ оно приводится к соотношению (19). При $F_2 = F_1$ подкоренное выражение соотношения (29) при любых v_k больше нуля. В этом случае будем иметь два действительных отрицательных корня z_{1k} и z_{2k} , то есть соотношение (29) не допускает комплексных корней. Следовательно, при $F_1 = F_2$ задача (23) – (27) не имеет волновых решений. Уравнение (23) в этом случае будет параболическим, описывающим диффузионный процесс изменения температуры по координате во времени при отсутствии скачков внутри рассматриваемой области и её циклического изменения. Для $F_2 < F_1$ при определенном соотношении между F_1 и F_2 подкоренное выражение соотношения (29) может быть меньше нуля, что приведет к появлению комплексных корней z_{1k} и z_{2k} вида (20), где

$$\gamma = -0,5 / F_1; \beta_k = \sqrt{4F_1 v_k - (1 + F_2 v_k)^2} / (2F_1). \quad (30)$$

Решение (28) в данном случае будет

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\gamma Fo) [(B_{1k} \cos(\beta_k Fo) - B_{2k} \sin(\beta_k Fo)] \cos(r\pi \xi / 2). \quad (31)$$

В третьей главе диссертации приводятся также результаты исследований динамических температурных напряжений при тепловом ударе на поверхности пластины с учётом релаксационных явлений. В настоящей работе, в отличие от работ предыдущих авторов, существенно изменена безразмерная математическая постановка задачи, что связано с введением в рассмотрение некоторого нового параметра, характеризующего отношение звуковой и тепловой волн. Такая модификация уравнения позволила обнаружить движение двух волн напряжений – тепловой и звуковой. Ввиду их различных скоростей были введены такие понятия как продолжительность и ширина скачка напряжений.

Основную идею метода рассмотрим на примере решения несвязанной задачи динамической термоупругости для пластины, подверженной тепловому удару на внешних поверхностях. Математическая постановка задачи теплопроводности в данном случае имеет вид

$$\partial W / \partial \tau + \beta^2 \partial^2 W / \partial \tau^2 = \partial^2 W / \partial \xi^2, \quad (\tau > 0, 0 < \xi < \xi_0); \quad (32)$$

$$W(\xi, 0) = 0; \quad (33) \quad \partial W(\xi, 0) / \partial \tau = 0; \quad (34) \quad \partial W(0, \tau) / \partial \xi = 0; \quad (35) \quad W(\xi_0, \tau) = 1, \quad (36)$$

где

$$W(\xi, \tau) = (T(z, t) - T_0) / (T_c - T_0); \quad \xi = \vartheta_p z / a; \quad \xi_0 = \vartheta_p l / a; \quad \tau = \vartheta_p^2 t / a; \quad (37)$$

$$\beta = \vartheta_p / \vartheta_T; \quad v_T = \sqrt{a / \tau_r}; \quad v_p = \sqrt{(E(1 - \nu)) / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho)},$$

$W(\xi, \tau)$, ξ , τ – соответственно безразмерные температура, координата, время; ξ_0 – безразмерная толщина пластины; z – координата, m ; l – половина толщины пластины, m ; t – время, s ; a – коэффициент температуропроводности, m^2/c ; T_0 – начальная температура, K ; T_c – температура стенки, K ; T – температура, K ; v_p – скорость звуковой волны, m/c ; v_T – скорость тепловой волны, m/c ; E – модуль упругости, $Па$; ρ – плотность, $кг/м^3$, τ_r – время релаксации, c ; ν – коэффициент Пуассона.

Решение задачи (32) – (36) имеет вид

$$W(\xi, \tau) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(y_{1k} \tau) + C_{2k} \exp(y_{2k} \tau)] \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2\xi_0}\right), \quad (38)$$

где C_{1k} , C_{2k} – константы интегрирования, определяемые из начальных условий (33), (34); y_{1k} , y_{2k} – корни характеристического уравнения, имеющие вид

$$y_{1k,2k} = -A/2 \pm \sqrt{A^2/4 - B}, \quad (39)$$

где $A = 1/\beta^2$; $B = \mu_k/\beta^2$; $\mu_k = r^2\pi^2/(4\xi_0^2)$.

Математическая постановка динамической задачи термоупругости имеет вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad (\tau > 0, 0 < \xi < \xi_0); \quad (40)$$

$$\sigma_{\xi}(\xi, 0) = 0; \quad (41) \quad \partial \sigma_{\xi}(\xi, 0)/\partial \tau = 0; \quad (42) \quad \partial \sigma_{\xi}(0, \tau)/\partial \xi = 0; \quad (43) \quad \sigma_{\xi}(\xi_0, \tau) = 0, \quad (44)$$

где $\sigma_{\xi}(\xi, \tau) = (\sigma_z(z, t)(1 - 2\nu))/((T_c - T_0)\alpha_T E)$ – безразмерное напряжение; σ_z – напряжение, Па; α_T – коэффициент линейного расширения, $1/K$.

В диссертации получено следующее точное аналитическое решение задачи (40) – (44)

$$\sigma_{\xi}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} [L_{1k} \exp(-\tau\sqrt{\mu_k}) + L_{2k} \exp(\tau\sqrt{\mu_k}) + (C_{1k} y_{1k}^2 \exp(y_{1k} \tau))/(\mu_k + y_{1k}^2) + (C_{2k} y_{2k}^2 \exp(y_{2k} \tau))/(\mu_k + y_{2k}^2)] \cos(r\pi\xi/(2\xi_0)), \quad (45)$$

где L_{1k} , L_{2k} – константы интегрирования, определяемые из начальных условий (41), (42).

Сравнение результатов расчётов по формуле (45) с данными других авторов*, полученными без учёта релаксационных явлений ($\beta \rightarrow 0$), показало их практическое совпадение. Результаты расчётов напряжений по формуле (45) при $\beta = 0,9$ приведены на рис. 14, 15.

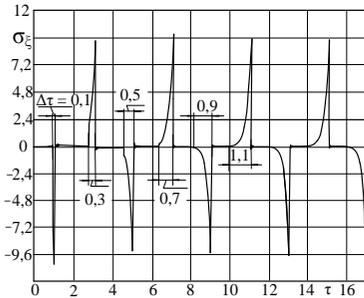


Рис. 14. Изменение напряжений во времени в точке $\xi = 0$ $\xi_0 = 1,0$; $\beta = 0,9$

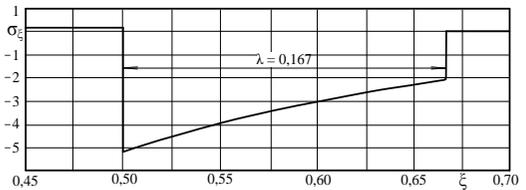


Рис. 15. Изменение напряжений по координате ξ . $\tau = 1,5$; $\xi_0 = 1,0$; $\beta = 0,9$.
Ширина скачка $\lambda = 0,167$

*Семерак Ф.М., Борисенко О.М. Динамическая задача термоупругости для бесконечной пластины. Математические методы и физико – механические поля: Сборник научных трудов. Киев: Наукова думка, 1977. Вып. 6. С. 61 – 63.

Из анализа рис. 14, 15 следует, что по толщине пластины l происходит перемещение скачков напряжений, движущихся от поверхности $\xi = \xi_0 = 1$, где происходит тепловой удар, к её центру ($\xi = 0$) и обратно, в незатухающем во времени процессе колебаний. Скачки напряжений формируются двумя фронтами, распространяющимися со скоростями v_T и v_p . Для $\beta < 1$ ($v_T > v_p$) продолжительность скачка $\Delta\tau$ можно определить по формуле

$$\Delta\tau = \tau_p - \tau_T = \xi_n \left(1/v_p^* - 1/v_T^* \right) = v_p^* \tau_n \left(1/v_p^* - 1/v_T^* \right) = \tau_n (1 - \beta), \quad (46)$$

где $\tau_p = \xi_n/v_p^*$ – безразмерное время, за которое звуковая волна достигает точки наблюдения; ξ_n – безразмерная координата точки наблюдения; $\tau_T = \xi_n/v_T^*$ – безразмерное время достижения точки наблюдения ξ_n тепловой волной; v_p^* , v_T^* – безразмерные скорости распространения звуковой и тепловой волн; $\tau_n = \xi_n/v_p^*$ – безразмерное время достижения точки наблюдения ξ_n звуковой волной (примем за безразмерное время наблюдения).

Учитывая обозначения $\xi = (v_p z)/a$; $\tau = (v_p^2 t)/a$; $\beta = v_p/v_T$, найдём величину безразмерных скоростей v_p^* и v_T^* . Величина любой безразмерной скорости v^* может быть найдена по формуле

$$v^* = \xi/\tau = (v_p z a)/(a v_p^2 t) = z/(v_p t) = v/v_p, \quad (47)$$

где v_T – скорость, м/с.

Используя графики рис. 14, выполним экспериментальную проверку формулы (46). Из анализа графиков следует, что при $\beta = 0,9$ для безразмерных времён наблюдения $\tau_n = 1; 3; 5; 7; 9; 11$ величина $\Delta\tau$ соответственно равна: $\Delta\tau = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,1$. Следовательно, графические результаты полностью соответствуют расчётам по формуле (45).

Рассматривая решение задачи в различные моменты времени, можно заметить, что скорость распространения переднего фронта скачка напряжения соответствует скорости тепловой волны, а скорость заднего фронта – скорости звука.

Ширину скачка можно найти по формуле

$$\lambda = ((1 - \beta)/\beta) v_p^* \tau_n, \quad (48)$$

где λ – безразмерная ширина скачка; $v_p^* = 1$ – безразмерная скорость звука.

На рис. 15 приведены результаты расчётов напряжения в зависимости от координаты ξ для времени $\tau = 1,5$. Ширина скачка λ , найденная по формуле (48) для времени $\tau = 1,5$ и скорости $v_p^* = 1$ и $\beta = 0,9$, составляет $\lambda = 0,167$. Она совпадает с её величиной, получаемой из расчётов по формуле (45).

Анализ полученных результатов позволяет заключить о движении двух волн динамических напряжений – звуковой и тепловой, скорости которых соответственно определяются скоростью распространения теплоты и скоростью звука в материале пластины. При $\beta \rightarrow 0$ ($v_T \rightarrow \infty$) напряжения определяются лишь движением звуковых волн, инициируемых тепловым ударом на поверхности пластины $\xi = \xi_0 = 1$. При $\beta \rightarrow 1$ скорости тепловой и звуковой волн выравниваются ($v_T \approx v_p$). В первом случае продолжитель-

ность скачка Δt равна безразмерному времени наблюдения τ_n ($\Delta t = \tau_n$), а во втором – она устремляется к нулю ($\Delta t \rightarrow 0$). Ширина скачка λ в первом случае устремляется к бесконечности ($\lambda \rightarrow \infty$), а во втором – к нулю ($\lambda \rightarrow 0$).

В четвертой главе диссертации представлены результаты исследований локально – неравновесных колебаний стержня, полученных с учётом релаксационных явлений. Используя модифицированную формулу эмпирического закона Гука, учитывающую скорости и ускорения напряжений и деформаций, получено нелокальное гиперболическое уравнение продольных колебаний стержня с учетом релаксационных явлений. Уровень локальной неравновесности процесса определяется величиной отклонения неравновесного перемещения от равновесного, и она пропорциональна скорости изменения равновесного перемещения. Величину такого отклонения будем учитывать путем разложения каждого члена уравнения движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (49)$$

в ряд по степеням малых параметров коэффициентов релаксации, то есть

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u + \sum_{k=1}^N \tau_k^k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial^k \sigma}{\partial t^k} \right) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sum_{k=1}^N \tau_k^k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right), \quad (50)$$

где u – перемещение; σ – напряжение; x – координата; t – время; ρ – плотность; γ – коэффициент трения; c , τ_k^k , r_k^k – коэффициенты релаксации перемещений и напряжений.

Подставляя формулу закона Гука $\sigma = du/dx$ в (49), ограничиваясь двумя членами рядов, получаем

$$\tau_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + l_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + l_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = e^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + r_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right), \quad (51)$$

где $l_1 = \tau_1 + \tau_2^2 \gamma$; $l_2 = 1 + \tau_1 \gamma$.

Уравнение (51) представляет уравнение продольных колебаний стержня, в котором учитываются релаксационные свойства материалов (пространственно – временная нелокальность) и сопротивление среды процессу изменения её формы. Если положить $\tau_1 = \tau_2 = r_1 = r_2 = \gamma = 0$, то уравнение (51) приводится к классическому уравнению, описывающему незатухающие колебания стержня.

Найдем решение уравнения (51) для стержня, один торец которого жестко закреплен (при $x = \delta$, где δ – длина стержня). В начальный момент времени стержень деформирован по линейному закону некоторой силой F_2 , от действия которой максимальное перемещение имеет свободный торец стержня, то есть $u(x,0) = F_2(\delta - x)/(ES)$, где S – площадь сечения стержня.

Математическая постановка задачи в безразмерном виде

$$Fo_2^2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial Fo^4} + Q_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + Q_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + \eta \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} + R_2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo^2}; \quad (52)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi; \quad (53) \quad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad (54) \quad \partial^2 \Theta(\xi, 0) / \partial Fo^2 = 0; \quad (55)$$

$$\partial^3 \Theta(\xi, 0) / \partial F_0^3 = 0; \quad (56) \quad \partial \Theta(0, F_0) / \partial \xi = 0; \quad (57) \quad \Theta(1, F_0) = 0, \quad (58)$$

где $\Theta = \frac{u}{u_0}$; $\xi = \frac{x}{\delta}$; $F_0 = \frac{et}{\delta}$; $F_{0k} = \frac{e\tau_k}{\delta}$; $R_k = \frac{er_k}{\delta}$; $\eta = \frac{\gamma\delta}{e}$; $u_0 = m_2\delta$; $m_2 = F_2/(ES)$;

Θ , ξ , F_0 – соответственно безразмерные перемещение, координата, время; F_{0k} , R_k – безразмерные коэффициенты релаксации, ($k = 1, 2$); η – безразмерный коэффициент трения; u_0 – удлинение торца стержня при $x = 0$ в начальный момент времени; $Q_1 = F_{01} + F_{02}^2\eta$; $Q_2 = 1 + F_{01}\eta$.

Точное аналитическое решение задачи (52) – (58) имеет вид

$$\Theta(\xi, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^4 C_k e^{z_k F_0} \cos(\pi \xi / 2), \quad (59)$$

где C_k , z_k , ($i = 1, 2, 3, 4; 1 \leq k \leq \infty$) – коэффициенты, приведенные в диссертации.

Для оценки достоверности теоретической модели были выполнены экспериментальные исследования продольных колебаний закрепленного на одном из торцов стержня. Исследования выполнялись на специализированном оборудовании АО РКЦ «Прогресс». На рис. 16 приведены результаты расчетов колебаний свободного торца стержня по формуле (59). Из их анализа следует, что наблюдается качественное совпадение результатов теоретического расчета с данными натурного эксперимента в части колебаний с двумя амплитудами и частотами, а также по гармоническому уменьшению амплитуды колебаний во времени.

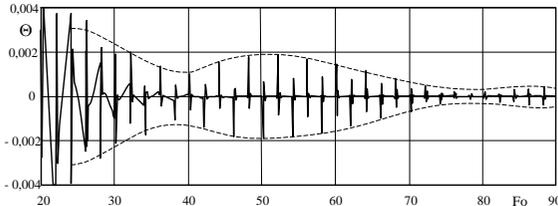


Рис. 16. Перемещение свободного торца стержня ($\xi = 0$). Расчет по формуле (59). $F_{01} = R_1 = 0,1$; $F_{02} = R_2 = 10^{-3}$; $\eta = 0,5$.

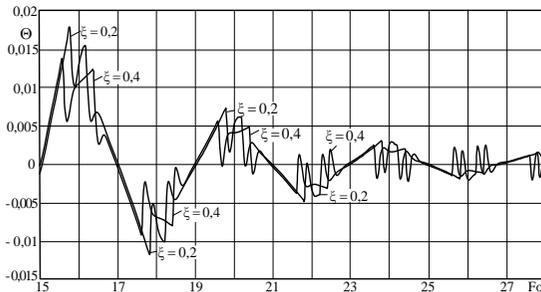


Рис. 17. Перемещение стержня в точках $\xi = 0,2$ и $\xi = 0,4$. Расчет по формуле (59). $F_{01} = R_1 = 0,1$; $F_{02} = R_2 = 10^{-3}$; $\eta = 0,5$.

На рис. 17 приведены результаты расчетов колебаний стержня в точках $\xi = 0,2$ и $\xi = 0,4$. Из их анализа следует, что колебания в этих точках происходят в различных фазах, что свидетельствует о противоположном направлении движения среды в них. При этом колебания в различных точках стержня, также как и на его свободном торце, происходят с двумя амплитудами и частотами. Так как амплитуда колебаний в точках, приближенных к закрепленному

торцу стержня, уменьшается, то, следовательно, колебания во всех точках по длине стержня происходят с бесконечно большим числом амплитуд и частот.

В четвертой главе приводятся также результаты исследований резонансных и бифуркационных колебаний стержня с учётом внешней гармонической нагрузки и формирования волновых пакетов с амплитудно – частотной модуляцией.

Найдем решение уравнения (52) для стержня, один торец которого жёстко закреплен ($x = \delta$), а на втором ($x = 0$) приложена сила F_1 , изменяющаяся по гармоническому закону

$$\partial u(0,t)/\partial x = F_1 \cos(\omega t)/(ES); (0 < t < \infty), \quad (60)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, m^2 ; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, $рад/с$; ν – частота колебаний, $1/с$; F_1 – сила, приложенная к свободному торцу, $кг \cdot м/с^2$.

Допустим, что в начальный момент времени стержень деформирован по линейному закону некоторой силой F_2 , то есть

$$u(x,0) = F_2(\delta - x)/(ES). \quad (61)$$

Математическая постановка задачи в данном случае эквивалентна задаче (52) – (58), за исключением граничного условия (57), которое будет

$$\partial \Theta(0,F_0)/\partial \xi = A_1 \cos(A_2 F_0), \quad (62)$$

где $A_1 = \delta m_1/u_0$; $A_2 = \omega \delta/e$; $m_1 = F_1/(ES)$.

Получение аналитического решения задачи с учетом гармонической внешней нагрузки затруднительно и поэтому для её решения использовался численный метод. В данном случае задача решалась без учёта ускорений напряжений и деформаций в формуле (51), то есть при $\tau_2 = r_2 = 0$. Следовательно, в уравнении (52) было принято $F_{02} = R_2 = 0$.

Результаты численных исследований приведены на рис. 18, 19. В случае, когда не учитываются релаксационные свойства материалов и силы сопротивления среды ($Q_1 = R_1 = \eta = 0$), а также при отсутствии внешней нагрузки ($A_1 = 0$), наблюдаются незатухающие колебания стержня с частотой его собственных колебаний, безразмерная величина которых составляет $\omega_c = 1,575$. При совпадении частоты внешней нагрузки с частотой собственных колебаний ($A_2 = \omega_c = 1,575$) происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний во времени, то есть наблюдаются резонансные колебания (рис. 18).

При отличных от нуля значениях коэффициентов релаксации ($Q_1 = R_1 = 0,2$) и при $\eta = 0,1$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,575$ (колебания в резонансных частотах) в начальном диапазоне времени амплитуда колебаний уменьшается, достигая некоторого минимума. С увеличением времени амплитуда возрастает, стабилизируясь на некоторой постоянной во времени величине.

При расчетах в нерезонансных частотах рассматривались два варианта – при частотах, близких к резонансным, и при существенно отличающихся от них. При колебаниях первого типа наблюдается периодическое возрастание и убывание амплитуды во времени. Такого вида колебания квалифицируются как биения.

Пример колебаний стержня при частотах, далеких от резонансных ($A_2 = 0,1$), приведен на рисунке 19. Из его анализа следует, что каждая точка стержня участвует в двух колебательных процессах, в одном из которых совершаются высокочастотные и низкоамплитудные колебания, а в другом – низкочастотные и высокоамплитудные.

Анализ рис. 20 – 22 показывает, что изменяя частоту и амплитуду колебаний внешней нагрузки, можно изменять частоту и амплитуду колебаний стержня. То есть по сути сложение собственных колебаний стержня с колебаниями внешней нагрузки приводит к образованию волнового пакета, амплитуда колебаний которого зависит от величин этих параметров, задаваемых во внешней нагрузке. Следовательно, изменяя частоту и амплитуду колебаний внешней нагрузки, можно выполнять амплитудно-частотную модуляцию волнового пакета, с помощью которого можно передавать определенную информацию по металлическому стержню, со скоростью, равной скорости звука в материале данной среды. Следует отметить высокую степень помехозащищенности такого вида передачи информации. Учитывая, что колебания газа и жидкости в трубопроводе под действием внешней нагрузки описываются аналогичными уравнениями, то передачу информации можно также организовать в газовой или жидкой среде.

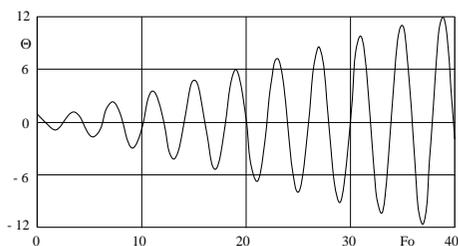


Рис. 18. Перемещение стержня ($\xi = 0$) $\eta = 0$,
 $Q_1 = R_1 = R_2 = B = F_{O2} = 0$; $A_1 = 0,5$;
 $A_2 = 1,575$; $Q_2 = 1$.

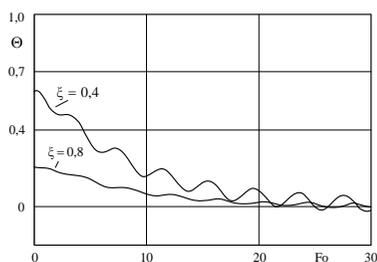


Рис. 19. Перемещение стержня ($\xi = 0$) при
 $Q_1 = R_1 = B = 0$; $\eta = 20$; $B = 0$; $Q_2 = 1$;
 $A_1 = 1$; $A_2 = 1,575$.

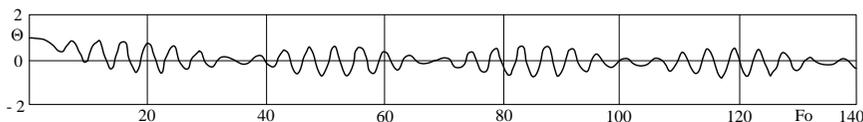


Рис. 20. Перемещение стержня ($\xi = 0$) при $Q_1 = Q_2 = R_1 = 10$; $\eta = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,4$.

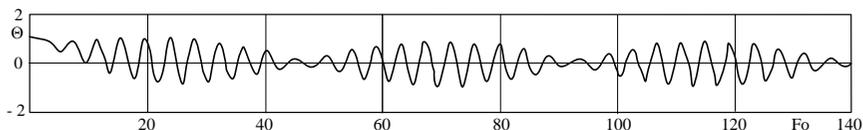


Рис. 21. Перемещение стержня ($\xi = 0$) при $Q_1 = Q_2 = R_1 = 10$; $\eta = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,45$.

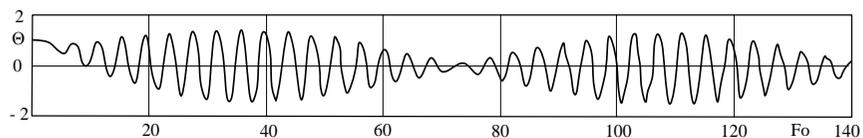


Рис. 22. Перемещение стержня ($\xi = 0$) при $Q_1 = Q_2 = R_1 = 10$; $\eta = 0,3$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 1,5$.

Выводы

1. Разработаны линейная и нелинейная локально – неравновесные двухтемпературные модели теплообмена, позволяющие исследовать температурное распределение в электронном газе и кристаллической решётке при их взаимном теплообмене в случае воздействия на поверхность металлов сверхкороткими импульсами лазерного излучения.

2. Выполнены детальные исследования влияния коэффициента объёмной теплоотдачи Vi на интенсивность теплообмена между электронами и кристаллической решёткой. Показано, что при малых его значениях наблюдается существенное различие в температурах электронов и решётки. С увеличением Vi температура электронов в скачке, вызванном лазерным источником, понижается. Уменьшается также и время выравнивания температур электронов и решётки. Причём температура решётки при дальнейшем теплообмене оказывается большей температуры электронов, что объясняется более высокой теплопроводностью электронов, приводящей к меньшему времени выравнивания температуры в электронной среде.

3. Выполнено детальное исследование точного аналитического решения классического гиперболического уравнения теплопроводности, из анализа которого следует, что в зависимости от толщины пластины, наблюдаются два существенно отличающихся режима теплообмена. Так, при каких-то больших её значениях происходит диффузионный теплообмен, сопровождающийся движением фронта температурного возмущения, разделяющего прогретую и непрогретую части пластины. При толщинах, сопоставимых с длиной свободного пробега микрочастиц (носителей энергии), происходит волновое изменение температурной функции. Классическое понятие температуры как величины, характеризующий внутреннюю энергию тела, в данном случае не может быть использовано. В связи с чем, за действительное значение температуры принимается квадрат амплитуды волновой функции.

4. Из анализа точных аналитических решений уравнений теплопроводности с учётом двухфазного запаздывания следует, что при толщинах пластины, сопоставимых с длиной свободного пробега микрочастиц, наблюдается баллистический перенос теплоты, сопровождающийся увеличением продолжительности процесса теплообмена. Этот факт можно объяснить тем, что в сверхтонких плёнках происходит изменение их теплофизических свойств, и, в частности, коэффициента теплопроводности, который с уменьшением толщины пластины уменьшается. Уменьшение частоты колебаний волновой функции с уменьшением толщины пластины связано со сдвигом фононного спектра в область коротких длин волн. При этом возрастает доля поверхностных атомов по отношению к их количеству во внутреннем объеме. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными исследованиями других авторов.

5. Разработана локально – неравновесная модель динамической термоупругости, позволяющая определять температурные напряжения при тепловом ударе на внешней поверхности тела. Исследования точного аналитического решения показали, что напряжения определяются движением двух волн – тепловой и звуковой, соотношением скоростей движения которых определяется форма скачка напряжений – его продолжительность во времени и ширина по пространственной переменной. В диссертации получены формулы, позволяющие определять продолжительность и ширину скачка до момента получения аналитического решения краевой задачи, имея лишь все необходимые исходные данные. Амплитуда скачка находится из аналитического решения задачи.

6. На основе модифицированной формулы закона Гука, учитывающей скорости и ускорения напряжений и градиента перемещений, и второго закона Ньютона получена локально – неравновесная математическая модель продольных колебаний стержня, закреплённого на одном из его торцов. Результаты исследований полученного точного аналитического решения позволили заключить о наличии двух временных участков с существенно отличающимися колебательными процессами. Показано также, что колебания в различных точках стержня могут происходить в различных, в том числе, и в противоположных фазах.

7. Разработана локально – неравновесная математическая модель закреплённого на одном из торцов стержня при воздействии внешней гармонической нагрузки на свободном торце. Анализ результатов численных исследований позволяет заключить, что в зависимости от частоты и амплитуды колебаний внешней нагрузки могут наблюдаться резонансные и бифуркационные колебания. Изменяя амплитуду и частоту внешней нагрузки, можно получить волновые пакеты с амплитудно – частотной модуляцией, что позволяет организовать передачу информации по металлическому стержню.

Публикации по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных изданиях и публикации, приравненные к ним:

[1] *Кудинов И.В., Пименов А.А., Мухеева Г.В.* Исследование термонапряженного состояния реактора получения водорода из метана // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т.63. №1. DOI: 10.15372/PMTF20220120.

[2] *Mikheeva G.V.* Generalized functions in non-linear thermal conductivity problem for two-layer structure with heat source // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – 1889. № 022025. DOI: 10.1088/1742-6596/1889/2/022025.

[3] *Mikheeva G.V., Pashin A.V.* Investigation of heat transfer in metal nanofilms irradiated with ultrashort laser pulses: two-temperature model // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – 2094. № 022023. DOI: 10.1088/1742-6596/2094/2/022023.

[4] *Trubitsyn K.V., Mikheeva G.V., Klebleev R.M., Kurganova O.Y.* Further boundary conditions in heat conduction problems in multilayer structures // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – 1745. № 012073. DOI: 10.1088/1742-6596/1745/1/012073.

[5] *Trubitsyn K.V., Mikheeva G.V., Klebleev R.M., Stefanyuk E.V.* Determination of heat exchange coefficients in heat conductivity problems with asymmetric boundary conditions // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – 1745. № 012074. DOI: 10.1088/1742-6596/1745/1/012074.

[6] *Kudinov I.V., Sobolev S.L., Mikheeva G.V.* Study of the two-temperature heat transfer model in metal nanofilms exposed to ultrashort laser pulses // AIP Conference Proceedings. – 2020. – 2275. №020015. DOI: 10.1063/5.0025795.

[7] *Kudinov I.V., Stefanyuk E.V., Gavrilova T.E., Maksimenko G.N., Mikheeva G.V.* Plate vibrations under heat stress on its external surfaces // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). – 2019. P. 491–493. DOI: 10.1109/CSCMP45713.2019.8976573.

[8] *Zhukov V.V., Kudinov I.V., Kutsev N.M., Mikheeva G.V., Klebleev R.M.* Determination of quasi-static and residual stresses in the course of the thermoplastic hardening in a boundary layer of the material // Materials Science and Engineering. – 2020. – 709. № 033078. P. 1–5. DOI: 10.1088/1757-899X/709/3/033078.

[9] *Мухеева Г.В.* Численное решение двухтемпературной задачи теплопереноса в металлических наноплёнках. 2021. Свидетельство на программу для ЭВМ № 2021613413.

- [10] *Крюков Ю.А., Пименов А.А., Кудинов И.В., Михеева Г.В.* Численное моделирование индукционного нагрева жидкометаллического реактора пиролиза метана на основе нелинейной локально-неравновесной математической модели. 2020. Свидетельство на программу для ЭВМ № 2020667367.
- [11] *Кудинов И.В., Трубицын К.В., Михеева Г.В., Клеблеев Р.М., Пашин А.В.* Затухающие колебания стержня на основе модели двухфазного запаздывания. 2020. Свидетельство на программу для ЭВМ № 2020616392.

Другие публикации:

- [12] *Михеева Г.В.* Численное исследование двухтемпературной модели теплопереноса в металлической наноплёнке // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Тезисы докладов XXIII Школы семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева. – М.: Издательский дом МЭИ, 2021. – 362 с.
- [13] *Кудинов И.В., Максименко Г.Н., Пашин А.В., Михеева Г.В.* Исследование аналитического решения уравнения теплопроводности с запаздыванием при граничных условиях третьего рода // Фундаментальные и прикладные разработки в области технических и физико-математических наук, Казань, 2018. – С. 57-58.
- [14] *Кудинов И.В., Пашин А.В., Куцев Н.М., Михеева Г.В.* Третья краевая задача теплопроводности на основе модели двухфазного запаздывания // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре, Самара, 2019. – С. 545-551.
- [15] *Кудинов И.В., Соболев С.Л., Крюков Ю.А., Михеева Г.В.* Двухтемпературная модель теплопереноса в металлической наноплёнке, облучаемой ультракороткими лазерными импульсами // Современные проблемы теплофизики и энергетики: материалы III международной конференции. – М.: Издательство МЭИ, 2020. – 708 с.
- [16] *Клеблеев Р.М., Ткачев В.К., Еремин А.В., Курганова О.Ю., Михеева Г.В.* Теплообмен в жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры // Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Т.1. – Самара: СамГТУ, 2019. – С. 313 – 316.

Заказ № . Формат 60 x 84 1/16 Уч. изд. л. 1,00. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета
443100, Самара, Молодогвардейская, 244, корпус 8.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета 24.2.377.01
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
(протокол № 2 от 17 июня 2022 г.)