На правах рукописи

Разумовский Пётр Владимирович

МИНИМАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЦВЕТНЫХ ГРАФОВ

Специальность 01.01.09 –
дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2022 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».

Научный руководитель:	**Абросимов Михаил Борисович**, д.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского», заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
Официальные оппоненты:	**Бредихин Дмитрий Александрович**, д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», профессор кафедры математики и моделирования
	Жуковский Максим Евгеньевич, д.ф.-м.н., доцент, ФГАОУ ВО "Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)", доцент кафедры дискретной математики
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской Академии Наук» (ФИЦ СНЦ РАН)

Защита состоится «19» мая 2022 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу: 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на официальном сайте https://diss.unn.ru.

Автореферат разослан ___________________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д212.166.20,
к.ф.-м.н. — Бирюков Руслан Сергеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень ее разработанности. Влияние информационных технологий и технических систем становится все более значимым в разных важных сферах жизни общества: медицине, энергетике, транспортной связи, освоении космоса и многих других. Выход из строя хотя бы одного элемента системы, внедренной в данные сферы жизни, иногда приводит к катастрофическим последствиям. Поэтому использование вычислительных систем в критических областях формирует требование надежности. Надежность является комплексным свойством, включающим в себя такие понятия, как долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость, достоверность функционирования, и, конечно же, отказоустойчивость. Говоря о построении надежной системы, чаще всего подразумевают именно свойство отказоустойчивости.

Одна из первых работ, исследующая принципы отказоустойчивых систем, принадлежит Джону фон Нейману[1]. В ней рассматривается надежная система, собранная из ненадежных элементов. Конечно же, можно выбрать путь повышения надежности самих элементов, однако, скорее всего, не существует способа создать элемент идеальной надежности. Для каждого элемента системы принято использовать характеристику наработки на отказ. Время наработки элемента на отказ составляет то время, которое элемент проработает до выхода из строя. Так, например, ENIAC, одно из первых электронных вычислительных устройств, использовал около 18000 вакуумных ламп со средним временем наработки на отказ около 2500 часов. Среднее время наработки на отказ ENIAC составляло 7 минут[2,3]. В современных компьютерах, конечно же, используются намного более надежные компоненты. Однако, в связи с этим, выросла комплексность и сложность вычислительных устройств. Так, в 2020 году компания RIKEN объявила о запуске самого быстрого суперкомпьютера Фугаку. 9 марта 2021 года[4] RIKEN объявила, что в этом компьютере установлено 158 976 процессоров Fujitsu A64FX[5,6] с общим числом 7 299 072 ядер.

Исходя из этого, вопрос о надежности необходимо переформулировать в контексте способности системы продолжать работу при выходе надежного элемента из строя. В 1971 году А. Авиженис[7] рассмотрел два подхода для повышения надёжности вычислительных систем: предотвращение ошибок и отказоустойчивость. Первое направление связано с уменьшением вероятности возникновения ошибки, оно состоит в разработке высоконадёжных компонентов системы и не будет рассматриваться в данной работе. Во втором направлении используется введение в систему избыточных структур для придания ей свойств отказоустойчивости. В более поздних работах отказоустойчивость стала рассматриваться как

---

[1] von Neumann J. Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components // *Automata Studies, ser. Annals of Mathematics Studies. Princeton*, NJ: Princeton University Press, 1956. – Vol. 34. – P. 43–98.

[2] Абросимов М.Б. *Графовые модели отказоустойчивости.* – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2012. – 192 с.

[3] Carter W.C., Bouricius W.G. A Survey of Fault Tolerant Computer Architecture and its Evaluation // *IEEE Computer*. – 1971. – Vol. 4, № 1. – P. 9–16.

[4] World’s fastest supercomputer Fugaku begins its shared use [Электронный ресурс] // *Science* | *Business*. – URL: https://sciencebusiness.net/network-updates/worlds-fastest-supercomputer-fugaku-begins-its-shared-use (Дата обращения: 15.10.2021).

[5] About Fugaku [Электронный ресурс] // *RIKEN Center for Computational Science*. – URL: https://www.r-ccs.riken.jp/en/fugaku/about/ (дата обращения: 15.10.2021).

[6] TOP500 [Электронный ресурс] // *TOP500*. – URL: https://www.top500.org/ (дата обращения: 15.10.2021).

[7] Avižienis A. Fault-Tolerant Computing: An Overview // *IEEE Computer*. – 1971. – Vol. 4, № 1. – P. 5–8.

одно из средств достижения гарантоспособности системы[8].

Авиженис[9] ввел также понятие *отказоустойчивости* как обеспечение системы способностью противостоять ошибке и возможностью продолжать работу в присутствии этой ошибки. Он рассмотрел два уровня отказоустойчивости:

1. *полная отказоустойчивость* – система продолжает работать в присутствии ошибок без существенной потери функциональных свойств;

2. *амортизация отказов* – система продолжает работать в присутствии ошибок с частичной деградацией функциональных возможностей.

В 1976 году Дж. Хейз[10] предложил модель для исследования полной отказоустойчивости технических систем, основанную на графах. Некоторой системе Σ сопоставляется помеченный граф $G(\Sigma)$, вершины которого соответствуют элементам системы Σ, рёбра – связям между элементами, а метки или цвета указывают тип элементов. Если связи не являются симметричными, то можно рассматривать ориентированные графы. В данной работе будут рассматриваться неориентированные графы. Под *отказом* элемента системы Σ понимается удаление соответствующей ему вершины из графа системы $G(\Sigma)$ и всех связанных с ней ребер. Система Σ^* называется *k-отказоустойчивой реализацией* системы Σ, если отказ любых k элементов системы Σ^* приводит к графу, в который можно вложить граф системы Σ с учетом меток вершин. Построение k-отказоустойчивой реализации системы Σ можно представить себе как введение в неё определенного числа избыточных элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи *маскируются*, а в случае отказа происходит *реконфигурация* системы до исходной структуры. Есть и другая интерпретация отказа, при которой сам элемент перестаёт функционировать, но через него могут передаваться сигналы[11,12]. На языке теории графов k-отказоустойчивую реализацию системы Σ мы будем называть вершинным k-расширением (В-kР) её графа $G(\Sigma)$.

Если в системе Σ встречается i различных типов элементов, то любая её k-отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k-отказоустойчивой реализации системы Σ. Добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы Σ. Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа. Построенную k-отказоустойчивую реализацию будем называть *тривиальной.* Её можно использовать для оценки числа дополнительных вершин и рёбер произвольной k-отказоустойчивой реализации. Таким образом, известно минимально возможное число дополнительных элементов для построения k-отказоустойчивой реализации системы, далее добавим условие минимальности числа дополнительных связей.

Для системы Σ ее k-отказоустойчивая реализация Σ^* называется *оптимальной*, если система Σ^* отличается от системы Σ на k элементов (каждого типа в случае помеченных

---

[8] Avižienis A., Laprie J.-C., Randell B., Landwehr C. Basic Concepts and Taxonomy of Dependable and Secure Computing // *IEEE Trans. on Dependable and Secure Comput.* – 2004. – № 1. – P. 11–33.

[9] Avižienis A. Design of fault-tolerant computers // *AFIPS'67 Conf. Proc.* – New York: ACM, 1967. – P. 733–743.

[10] Hayes J.P. A graph model for fault-tolerant computing system // *IEEE Trans. Comput.* – 1976. – Vol. C-25, no. 9. – P. 875–884.

[11] Каравай М.Ф. Инвариантно-групповой подход к исследованию *k*-отказоустойчивых структур // *Автоматика и телемеханика*. – 2000. – № 1. – С. 144–156.

[12] Каравай М.Ф. Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем // *Автоматика и телемеханика*. – 1996. – № 6. – С. 159–173.

графов), и среди всех k-отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система Σ^* имеет наименьшее число связей. На языке теории графов оптимальную k-отказоустойчивую реализацию системы Σ мы будем называть минимальным вершинным k-расширением (МВ-kР) её графа $G(\Sigma)$.

Если элементы технической системы однотипны, то метки элементов опускаются, и в качестве графа системы рассматривается граф без меток. В этом случае оптимальная k-отказоустойчивая реализация будет содержать в точности k дополнительных элементов. На практике такая ситуация встречается достаточно часто. Например, массивно-параллельные вычислительные системы состоят из однотипных узлов. Каждый узел состоит из одного или нескольких процессоров, локальной памяти и некоторых других компонент.

В данной работе будут рассмотрены только помеченные графы, то есть, системы с элементами i различных типов, где $i > 1$.

Позднее Ф. Харари и Дж. Хейз[13] расширили модель на случай отказов связей. В данной работе мы будем рассматривать отказы элементов и отказы связей между ними как два отдельных случая. Заметим, что вместо минимальности числа связей могут рассматриваться и другие ограничения, которые по той или иной причине предпочтительны, например, наличие определённой группы автоморфизмов[14].

В своей первой работе Дж. Хейз предложил схемы построения минимальных вершинных 1-расширений для цепей и циклов, а также для частного случая помеченного дерева. Большой обзор теоретических исследований задачи поиска минимальных вершинных k-расширений для различных классов графов можно найти в монографии М.Б. Абросимова «Графовые модели отказоустойчивости». В частности, можно отметить результаты по аналитическому построению вершинных и реберных k-расширений для различных классов графов, полученные Дж. Хейзом, Ф. Харари, А.В. Киреевой, М.Ф. Караваем, М.А. Кабановым, М.Б. Абросимовым, С.Г. Курносовой, А.А. Долговым, О.В. Моденовой, А.В. Гавриковым, П.П. Бондаренко, и др.

Задача поиска минимального расширения графа является вычислительно сложной. А именно, задача проверки того, что граф является вершинным k-расширением заданного графа, является NP-полной[15]. Очевидно, что для цветных графов, вложение исходного графа следует проверять с условием сохранности цветов, то есть проверять графы на цветное вложение. М.Б. Абросимов предложил переборный алгоритм построения минимальных вершинных k-расширений графов. Его можно модифицировать таким образом, чтобы проверялось условие цветного вложения, однако это не отменяет факта, что описанный алгоритм сложен для распараллеливания и является неэффективным. Для генерации сложных комбинаторных структур, в том числе графов, хорошо показывают себя методы без непосредственной проверки на изоморфизм. В основе таких методов лежит каноническая форма структуры или её канонический код. Основная идея состоит в оставлении структуры только в том случае, если её форма является канонической.

---

[13] Harary F., Hayes J.P. Edge fault tolerance in graphs // *Networks.* – 1993. – Vol. 23. – P. 135-142.

[14] Dutt S., Hayes J.P. Designing fault-tolerant systems using graph automorphisms // *Journal of Parallel and Distributed Computing*. – 1991. – Vol. 12. – P. 249–268.

[15] Абросимов М.Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // *Математические заметки.* – 2010. – № 88:5. – С. 643–650.

На основании метода канонических представителей были разработаны несколько алгоритмов поиска минимальных расширений для непомеченных графов. В работе[16] предложен алгоритм для поиска минимальных вершинных расширений, а в работе[17] для поиска минимальных реберных расширений. В данной работе предлагаются алгоритмы для цветных графов. Применение всех перечисленных алгоритмов ограничивается графами с небольшим числом вершин.

Аналитическое решение задачи поиска минимальных вершинных и реберных расширений позволяет найти схемы для цветных графов произвольного числа вершин и ребер, таким образом, решая вопрос для определенного класса графов.

Цели и задачи. Основные цели данной работы состоят в следующем:

1. Исследование алгоритмов для решения задачи генерации всех попарно-неизоморфных цветных графов без проверки на изоморфизм.

2. Исследование алгоритмов для решения задачи построения всех неизоморфных минимальных вершинных и реберных k-расширений для заданного цветного графа без проверки на изоморфизм.

3. Исследование минимальных вершинных k-расширений для цветных полных графов.

4. Исследование минимальных вершинных и реберных k-расширений для цветных звезд.

Основные задачи работы:

1. Разработка алгоритма построения всех попарно-неизоморфных цветных графов без проверки на изоморфизм.

2. Разработка алгоритма построения всех минимальных вершинных и реберных k-расширений для цветных графов без проверки на изоморфизм.

3. Получение схем для построения всех неизоморфных минимальных вершинных k-расширений для цветных полных графов.

4. Получение схем для построения всех неизоморфных минимальных вершинных и реберных k-расширений для цветных звезд.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработаны новые алгоритмы построения всех попарно-неизоморфных цветных графов без непосредственной проверки на изоморфизм.

2. Разработаны новые алгоритмы построения всех неизоморфных минимальных вершинных и реберных k-расширений заданного цветного графа без непосредственной проверки на изоморфизм.

3. Найдены схемы построения минимальных вершинных k-расширений для цветных полных графов.

4. Найдены схемы построения минимальных вершинных и реберных k-расширений для цветных звезд.

---

[16] Абросимов М.Б., Камил И.А.К., Лобов А.А. Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* – 2019. – Т. 19, вып. 4. – С. 479–485.

[17] Абросимов М.Б., Судани Х.Х.К., Лобов А.А. Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* – 2020. – Т. 20, вып. 1. – С. 105–115.

Методы исследования. В работе используются методы дискретной математики и математической кибернетики. Используется аппарат теории графов, комбинаторики и теории алгоритмов.

Положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Алгоритмы построения всех попарно-неизоморфных цветных реализаций заданного графа без непосредственной проверки на изоморфизм.

2. Алгоритмы построения всех неизоморфных минимальных вершинных и реберных k-расширений заданного цветного графа без непосредственной проверки на изоморфизм.

3. Схемы построения минимальных вершинных k-расширений для цветных полных графов.

4. Схемы построения минимальных вершинных и реберных k-расширений для цветных звезд.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит преимущественно теоретических характер и ее теоретическая значимость состоит в том, что удалось разработать алгоритмы построения всех цветных реализаций заданного графа, а также алгоритмы построения минимальных вершинных и реберных расширений цветных графов без проверки на изоморфизм. Для полных цветных графов и цветных звезд удалось найти полное аналитическое решение задачи построения их минимальных вершинных и реберных расширений.

Практическая значимость работы состоит в том, что на основе предложенных алгоритмов можно разрабатывать программные реализации, предназначенные для исследования минимальных расширений цветных графов, а с точки зрения приложений – изучать отказоустойчивые реализации технических систем с элементами разного типа. Автором были реализованы все алгоритмы в программном комплексе *ColorGraphExtensions*, который позволяет строить цветные графы и находить их минимальные вершинные и рёберные расширения.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научному руководителю принадлежат общее руководство, предложения по используемым методам, а также помощь в подготовке текста.

Апробация работы, степень достоверности результатов и публикации. Все полученные результаты снабжены строгими доказательствами и согласуются с результатами вычислительных экспериментов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

– научный семинар кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, 2017, 2018, 2019, 2020);

– VII, VII, VIII Международные научные конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А.М. Богомолова (Саратов, 2016, 2018, 2021);

– всероссийская конференция «XVI Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SIBECRYPT’17» (Томск, 2017);

– всероссийская конференция «XVIII Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SIBECRYPT’19» (Томск, 2019);

– XX Международная конференция «Сибирская научная школа-семинар «Компьютерная безопасность и криптография» – SIBECRYPT’21» (Новосибирск, 2021);

– научная конференция механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского «Актуальные проблемы математики и механики» (Саратов, 2021);

– международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021» (Москва, 2021).

Все результаты диссертации, полученные автором, являются новыми и достоверными. Это подтверждается публикациями в рецензируемых научных изданиях. По теме диссертации имеется 13 публикаций: 3 публикации в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, 2 публикации были опубликованы в научных изданиях, которые входят в базы цитирования Web of Science и Scopus, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка использованной литературы и приложений. Работа содержит 147 страниц, 52 рисунка, 44 таблицы, библиографический список из 104 наименований и 1 приложение.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, представлены обзор литературы по теме исследования, цели и задачи работы, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость работы, методы диссертационного исследования, основные результаты диссертации, структура работы, а также представлены степень достоверности результатов работ, апробации результатов работ и публикации по теме диссертации.

В первой главе приводятся некоторые понятия и обозначения из теории графов, предоставляющие теоретическую базу в области цветных графов и их изоморфизмов.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – граф, и $i \in \mathbb{N}$. Функция вида $f: V \to \{1, \dots, i\}$ называется *вершинной i-раскраской* графа G, а $f(v), v \in V$ называется *цветом* вершины v. При этом граф называется *графом с цветными вершинами*, или *цветным графом*. Для таких графов вводится следующее обозначение: $G = (V, \alpha, f)$.

В диссертационной работе множество цветов, сопоставленных графу G обозначается за $F = \{1, \dots, i\}$.

В главе приводятся известные и предлагаются новые алгоритмы, которые будут использоваться в диссертации для построения множества попарно-неизоморфных цветных реализаций для заданного непомеченного графа. Новые разработанные алгоритмы реализованы и включены в программный комплекс *ColorGraphExtensions.*

Основой разработанных алгоритмов является техника канонических представителей, позволяющая производить генерацию попарно-неизоморфных графов без процедуры проверки на изоморфизм. Данная техника называется «отсечением изоморфизмов». Были рассмотрены два известных подхода, использующих указанную технику: метод Рида-Фараджева и метод МакКея. Приводятся два алгоритма для генерации всех неизоморфных цветных реализаций для заданного непомеченного графа. Эти алгоритмы отличаются методами отсечения изоморфизмов.

После описания алгоритмов приводятся результаты различных вычислительных экспериментов запуска реализованных алгоритмов на различных классах графов. Данные были собраны в базу цветных графов следующих классов: цепи, циклы, полные графы и звезды.

Во второй главе приводятся некоторые понятия и обозначения из теории графов, предоставляющие теоретическую базу в области минимальных вершинных и реберных расширений. Предлагается уникальный способ кодирования цветных графов для решения задачи поиска минимальных расширений с применением техники канонических представителей.

Для цветных графов предлагается канонический код, состоящий из пары: максимальный матричный код графа и его *простой код раскраски*.

В работе описывается способ построения *кода раскраски* и *простого кода раскраски.*

Элемент *кода раскраски* предлагается строить следующим образом:

1. Рассматривается вершина $v \in V$, записывается ее цвет.

2. Рассматриваются все ее смежные вершины, и подсчитывается количество смежных вершин каждого цвета.

Подсчитанные данные записываются в следующем формате для каждой вершины v:

$$f(v)\{|f_1|,|f_2|,\dots,|f_j|\},$$

где $f(v)$ – цвет вершины v, а $|f_i|$ – количество смежных вершине v вершин цвета f_i.

Вектор структур для всех вершин образует *код раскраски*. Подобный код довольно неэффективен при операциях сравнения, поэтому предлагается модифицировать данный код.

Для каждого цвета f_i выбирается два простых числа: f_i^1 и f_i^2. Первое число стоит брать небольшим, например 3, 7, 11 и так далее. Второе следует задавать больше, чем первое в степени количества вершин графа: $f_i^2 > (f_i^1)^n$. Тогда для каждой структуры $f(v)\{|f_1|,|f_2|,\dots,|f_j|\}$, построенной для некоторой вершины $v \in V$ графа G, вычисляется число, которое называется *простым кодом вершины:*

$$fc(v) = f_i^2 \cdot (f_1^1)^{|f_1|} \cdot (f_2^1)^{|f_2|} \cdot \dots \cdot (f_j^1)^{|f_j|}.$$

Вектор простых кодов всех вершин образует *простой код раскраски*. Он обозначается следующим образом:

$$FC(G) = \{fc(v) : v \in V\}$$

На основании данного канонического кода разработан алгоритм для поиска всех неизоморфных минимальных расширений для заданного цветного графа. Реализация данного алгоритма включена в программный комплекс *ColorGraphExtensions*. Проведены вычислительные эксперименты на различных классах цветных графов, в том числе для цветных полных графов и цветных звезд. Для этих классов графов сформирована база минимальных вершинных и реберных расширений.

Третья глава целиком посвящена аналитическому решению задачи поиска минимальных вершинных расширений для цветных полных графов. Очевидно, что не существует реберных расширений полных графов, поэтому рассматриваются только минимальные вершинные расширения. Глава содержит рассуждения о схемах построения минимальных расширений, каждый шаг рассуждений обобщает предыдущие полученные и доказанные результаты. Полученные схемы согласуются с минимальными расширениями, полученными в ходе вычислительных экспериментов.

В главе вводятся некоторые обозначения для цветных графов. Пусть есть граф $G = (V, \alpha, f)$. Множество $V_{f_j} = \{v \mid f(v) = f_j\}$ – множество вершин из V, которым сопоставлен цвет f_j. Очевидно, что $V_{f_j} \subset V$. Тогда множество, содержащее все множества набора вершин по цветам будем обозначать за $W = \left\{V_{f_j} \middle| \forall f_j \in F\right\}$. Множество $W^1 = \left\{V_{f_j}: V_{f_j} \in W, |V_{f_j}| = 1\right\}$ содержит все множества вершин с цветом, встречающимся лишь единожды в графе. Множество, которое содержит наборы вершин, сопоставленных с цветами, встречающимися в графе более одного раза, обозначается за $W^* = \left\{V_{f_j}: V_{f_j} \in W, |V_{f_j}| > 1\right\}$.

Исходные вершины v из V цвета f_j будем обозначать v_{f_j}. Тогда дополнительные вершины u из $V^* - V$ цвета f_j будут обозначены за $u^+_{f_j}$. Аналогично введем обозначения вершин, включенных в множества из W^1 за v_{W^1} и $v^+_{W^1}$ для исходных и дополнительных соответственно. Аналогично введем v_{W^*} и $v^+_{W^*}$ для W^*.

Функция $F(W)$ – это уникальный набор цветов, сопоставленных вершинам из множеств, включенных в множество W. Тогда значением функции $F(W^1)$ будет являться набор всех цветов, встречающихся в графе единожды, а значением $F(W^*)$ – множество всех неуникальных цветов в графе.

Схемы построения минимальных вершинных расширений для цветных полных графов разбиты на несколько теорем от частного случая к общему. В итоге выводится общая теорема для построения минимального вершинного расширения для любого цветного полного графа.

Теорема 3.1.1. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $F = \{f_1, f_2\}$, $|F| = 2$, $|V_{f_1}| = 1$, $|V_{f_2}| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $2n - 1$.

Теорема 3.1.2. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $F = \{f_1, f_2\}$, $|F| = 2$, $|V_{f_1}| > 1$, $|V_{f_2}| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $2n$.

Теорема 3.2.1. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $F = \{f_1, f_2\}$, $|F| = 2$, $|V_{f_1}| = 1$, $|V_{f_2}| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $k(n-1) + kn + (k-1)^2 + \frac{k(k-1)}{2}$.

Теорема 3.2.2. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $F = \{f_1, f_2\}$, $|F| = 2$, $|V_{f_1}| > 1$, $|V_{f_2}| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $2nk + \frac{3k(k-1)}{2}$.

Теорема 3.2.1. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $|F| \geq 2$, $|W^1| > 1$, $|W^*| = 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$|W^1|(n - |W^1|)k + nk + |W^1|(k-1)^2 + \frac{k(k-1)}{2} + k.$$

Теорема 3.3.2. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $|F| \geq 3$, $|W^1| = 1$, $|W^*| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$(n-1)k + |W^*|nk + |W^*|(k-1)^2 + (|W^*| + 1)\frac{k(k-1)}{2}.$$

Следствие 3.3.1. Схема построения минимального вершинного расширения из теоремы 3.3.2 справедлива для полных графы $K_n = (V, \alpha, f)$ с $|W^1| > 1$, $|W^*| > 1$ с общим количеством дополнительных ребер, равным

$$(n-1)k + |W^*|nk + |W^*| \cdot |W^1|(k-1)^2 + (|W^*|+1)\frac{k(k-1)}{2}.$$

Теорема 3.3.3. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $|F| \geq 2, |W^1| = 0, |W^*| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $|W^*|nk + \frac{|W^*|(|W^*|+1)}{2} \cdot \frac{k(k-1)}{2}$.

Теорема 3.3.4. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $|F| \geq 2, |W^1| > 1, |W^*| = 0$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $k\frac{|W^1|(|W^1|-1)}{2}$.

Теорема 3.4.1. Полный граф $K_n = (V, \alpha, f)$ с $|F| > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным:

$$|W^1|(n - |W^1|)k + |W^*|nk + |W^*| \cdot |W^1|(k-1)^2 + \\ + \frac{|W^*|(|W^*|+1)}{2} \cdot \frac{k(k-1)}{2} + k\frac{|W^*|(|W^*|-1)}{2}.$$

В четвертой главе приводятся схемы построения минимальных расширений для звездных графов, и показано, что покрываются все возможные виды звездных графов с введенной на них функцией раскраски. Глава разбита на две части. В обеих частях используется специфическое для цветных звезд обозначение: множество $V_c = \{v | v \in V, f(v) = f(c)\}$ будет отображать набор вершин, цвет которых совпадает с цветом центральной вершины. Также следует отметить, что звездный граф может быть определен как соединение одновершинного полного графа со вполне несвязным: $K_1 + O_n$, где K_1 – полный граф с одной вершиной, а O_n – вполне-несвязный граф с n вершинами.

В первой части главы 4 приводятся теоремы с доказательствами со схемами построения минимальных реберных расширений для цветных звезд. Данные теоремы полностью решают вопрос о минимальных реберных расширениях цветных звезд.

Теорема 4.1.2. Любой цветной звездный граф $S = (V, \alpha, f)$, у которого $|V_c| < 1 + 2k$, не имеет минимального реберного k-расширения.

Теорема 4.1.3. Рассмотрим звезду $S = (V, \alpha, f)$, у которой множество $|V_c| \geq 2k + 1$, а общее число вершин $|V| = n + 1$. Минимальным реберным k-расширением, причем единственным с точностью до изоморфизма, графа S будет являться цветной граф с общим количеством ребер равным $(n-k)(2k+1)$. Схема построения данного МР-kР заключается в построении $2k$ дополнительных центров из вершин $v \in V_c, v \neq c$.

Во второй части главы 4 приводятся теоремы с доказательствами со схемами построения минимальных вершинных расширений для цветных звезд. Данные теоремы полностью решают вопрос о минимальных вершинных расширениях цветных звезд.

Теорема 4.2.1. Звезда $S = (V, \alpha, f)$, $|V| = n$, где только центральная вершина имеет цвет $f(c)$: $|V_c| = 1$, а также $|W^1| > 1$, $|W^*| = 0$, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение, содержащее $(|W^1| - 1)k$ дополнительных ребер. Схема построения минимального расширения заключается в том, что из k дополнительных вершин строится k исходных графов.

Теорема 4.2.2. Звезда $S = (V, \alpha, f)$, где $|V_c| = 1$, $|W^1| = 1$, $W^* = \{W_0^*\}$, $|W^*| = 1$, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение, содержащее $k(|W_0^*| + k)$ дополнительных ребер. Схема построения заключается в том, что из всех дополнительных вершин $f(c)$ цвета проводятся ребра во все исходные и дополнительные вершины цвета W_0^*.

Следствие 4.2.1. Звезда $S=(V,\alpha,f)$, у которой $|V_c|=1$, $|W^1|=1$, $W^*=\{W_1^*,W_2^*,W_3^*,\dots,W_r^*\}$, $|W^*|>1$, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным $k\sum_{j=1}^{|W^*|}\left(\left|W_j^*\right|+k\right)$. Схема построения сводится к тому, чтобы провести из каждой вершины цвета $f(c)$, отличной от вершины c, ребра во все исходные и дополнительные вершины каждого из цветов W^*.

Теорема 4.2.3. Звезда $S=(V,\alpha,f)$ с условиями $|V_c|=1$, $|W^1|>1$, $|W^*|\geq 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных вершин, равным $k\sum_{j=1}^{|W^*|}\left(\left|W_j^*\right|+k\right)+k(|W^1|-1)$.

Следствие 4.2.2. Схема построения и количество дополнительных ребер из теоремы 4.2.3 справедливы для любых цветных звездных графов, в которых выполняется условие $|V_c|=1, |W^1|\geq 1, |W^*|\geq 0$.

Теорема 4.2.5. Для любого цветного звездного графа, где $|V_c|>1, |W^1|\geq 1, |W^*|\geq 0$, минимальное вершинное k-расширение строится по следующей схеме:

1. Для вершин из V_c строится МВ-kР по теореме о минимальном вершинном расширении простой непомеченной звезды, содержащейся в работе М.Б. Абросимова «Графовые модели отказоустойчивости»[18].

2. Для вершин из W^1 и $W^*\backslash\{V_c\}$ строится МВ-kР по следствию 4.2.2 теоремы 4.2.3.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

[1]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. Минимальные расширения цветных звездных графов // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – Vol. 10, № 2. – P. 1–7.

[2]. Разумовский П.В., Абросимов М.Б. Минимальные вершинные расширения цветных полных графов [Razumovsky P.V., Abrosimov M.B. The Minimal Vertex Extensions for Colored Complete Graphs] // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 77–89.

[3]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. О поиске минимальных вершинных расширений цветного неориентированного графа // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* – 2021. – № 4 (60). – С. 106–117.

Публикации в изданиях, цитируемых SCOPUS и Web of Science

[4]. Разумовский П.В., Абросимов М.Б. Построение цветных графов без проверки на изоморфизм // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 267–277.

[5]. Razumovsky P.V. The search for minimal edge 1-extension of an undirected colored graph [Разумовский П. В. О поиске минимальных реберных 1-расширений неориентированного цветного графа] // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2021. – Т. 21, вып. 3. – С. 400–407.

[18] Абросимов М.Б. *Графовые модели отказоустойчивости.* – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2012. – 192 с.

Объекты интеллектуальной собственности

[6]. Разумовский П.В., Абросимов М.Б. *ColorGraphExtensions* // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021662022, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.06.2021.

Публикации в других изданиях

[7]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. Генерация неизоморфных вершинных k-раскрасок графа // *Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф.* – Саратов: центр «Наука», 2016. – С. 13–15.

[8]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. О генерации неизоморфных k-раскрасок методом МакКея // *Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф.* – Саратов: центр «Наука», 2018. – С. 318–320.

[9]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. О минимальных расширениях неизоморфных цветных звездных графов // *Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф.* – Саратов: центр «Наука», 2021. – С. 5–8.

[10]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. О генерации неизоморфных вершинных k-раскрасок // *ПДМ. Приложение*. – 2017. – № 10. – С. 136–138.

[11]. Абросимов М.Б., Разумовский П.В. О генерации неизоморфных раскрасок методом Рида-Фараджева // *ПДМ. Приложение.* – 2019. – № 12. – С. 173–176.

[12]. Разумовский П.В., Абросимов М.Б. Схемы построения минимальных вершинных 1-расширений полных двухцветных графов // ПДМ. Приложение. – 2021. – № 14. – С. 165–168.

[13]. Разумовский П.В. О минимальных вершинных 1-расширениях двухцветных полных графов // *Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021»* [Электронный ресурс] – 2021. – URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22112/124513_uid563707_ report.pdf (дата обращения 25.11.2021).

РАЗУМОВСКИЙ ПЁТР ВЛАДИМИРОВИЧ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук