На правах рукописи

Катембо Алекс Лунгили

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИСЯЧИХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

Специальность 2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Воронеж — 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Научный руководитель:	**Шитикова Марина Вячеславовна** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Трещёв Александр Анатольевич** Член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции», заведующий кафедрой, г. Тула
	Смирнов Владимир Александрович кандидат технических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), кафедра строительной и теоретической механики, доцент, г. Москва
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.» (г. Саратов)

Защита состоится «13» мая 2022 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.286.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», по адресу: г. Воронеж, Московский проспект, д.14, ауд. 216.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» и на сайте https://cchgeu.ru.

Автореферат разослан «11» марта 2022

Ученый секретарь диссертационного совета, к.т.н. — Макеев Алексей Иванович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Висячие мосты представляют собой инженерный ответ на требования легкости, высокой прочности, простоты конструкции и эстетического внешнего вида мостовых перекрытий. Опираясь на новейшие разработки в технологии проектирования, мосты с несущими кабелями пользуются растущим успехом во всем мире как функциональные, экономически эффективные и элегантные решения для перекрытия всех больших пролетов.

Висячие мосты настолько гибкие по сравнению с другими типами мостов, что сильные колебания могут легко возникать из-за различных динамических нагрузок. Большие пролеты построенных в последнее время висячих мостов делают их динамическое поведение наиболее важным, при этом первостепенное значение приобретает исследование крутильных колебаний.

В инженерном анализе часто возникает проблема прогнозирования динамического поведения конструкции в результате прохождения по ней подвижных нагрузок и, в частности, изучения вызванных ими колебаний в мостах. Исследования показывают, что поперечные прогибы и напряжения от движущихся нагрузок значительно выше, чем при стационарных нагрузках.

Исследование вынужденных нелинейных колебаний висячих мостов является неотъемлемой составляющей строительной механики. Многие ученые, такие как С.П. Тимошенко, Н.М. Кирсанов, В.А. Смирнов, В.С. Сафронов, С.В. Ефрюшин, Ю.А. Россихин, М.В. Шитикова, A.M. Abdel-Ghaffar, J.M.W. Brownjohn, W. Lacarbonara, P.J. McKenna и др. занимались исследованиями висячих комбинированных систем и предложили различные методы расчетов. На сегодняшний день существуют различные методы исследования вынужденных нелинейных колебаний висячих мостов: аналитические, экспериментальные и численные.

В настоящее время дробное исчисление широко используется для моделирования сил демпфирования при решении линейных и нелинейных динамических задач строительной механики, о чем свидетельствуют многочисленные исследования в этой области, обзор которых проведен профессорами Россихиным Ю.А. и Шитиковой М. В., включая примеры использования дробных производных при анализе свободных колебаний висячих мостов.

Первые натурные наблюдения колебаний висячего моста «Золотые ворота» были выполнены в период с 1933 по 1942 годы, когда были установлены сейсмологические приборы на опорах, башнях и тросах для измерения возможных колебаний. После разрушения Такомского моста в 1940 году было решено установить десять приборов для измерения вертикальных перемещений моста, которые работали непрерывно до 1954 года.

Так, полученные экспериментальные данные показали, что различные колебательные режимы характеризуются разными коэффициентами затухания, а порядок малости этих коэффициентов говорит о низкой демпфирующей способности висячих комбинированных систем, что приводит к длительной перекачке энергии из одной подсистемы в другую. Однако аналитическая модель, предложенная A.M. Abdel-Ghaffar, дала коэффициенты затухания, не зависящие от частот колебаний.

Для приведения теоретических исследований в соответствие с экспериментом Россихиным Ю.А. и Шитиковой М.В. были введены дробные производные для описания процессов внутреннего трения, протекающих в висячих комбинированных системах при свободных колебаниях. Предложенная модель висячего моста уже позволяет получить коэффициенты демпфирования, зависящие от собственных частот колебаний. Эта модель была далее обобщена путем использования двух различных параметров дробности для анализа вертикальных и крутильных колебаний.

Данная диссертационная работа является непосредственным продолжением исследований Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой и обобщает предложенную ими теорию на случай нелинейных вынужденных колебаний висячих комбинированных систем, когда частота внешней силы близка к одной из собственных частот вертикальных колебаний висячей комбинированной системы, которая находится в условиях внутреннего резонанса.

Целью диссертационной работы является анализ вынужденных нелинейных колебаний висячих комбинированных систем под действием внешних сил при наличии внешнего и внутреннего резонансов.

Задачи для достижения цели:

- постановка задачи о вынужденных нелинейных колебаниях, вызванных внешним гармоническим воздействием в виде вертикальной сосредоточенной силы с учетом наложения внутреннего резонанса на внутренний резонанс, при наличии демпфирования, которое описывается реологической моделью, содержащей дробную производную;
- изучение влияния параметра дробности на процесс перекачки энергии, происходящий при нелинейных вынужденных колебаниях висячих мостов, находящихся в условиях внутреннего резонанса;
- получение численно-аналитических решений разрешающих дифференциальных уравнений с использованием обобщенного метода многих временных масштабов, метода Рунге-Кутта четвертого порядка и метода вариации произвольной постоянной.

Научная новизна. Предложена математическая модель, описывающая динамическое поведение висячей комбинированной системы, находящейся под действием подвижной гармонической силы, с использованием аппарата дробного исчисления.

Решена задача о вынужденных колебаниях для случая сосредоточенной или подвижной гармонической силы, когда частота возмущающей силы близка к одной из собственных частот вертикальных колебаний системы, находящейся в условиях внутреннего резонанса. Используя модальный анализ и обобщенный метод многих временных масштабов, получена система нелинейных уравнений для фаз и амплитуд вынужденных колебаний, для которой найдено приближенное аналитическое решение методом вариации произвольных постоянных и численное решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Детально рассмотрено влияние параметра дробности, который отвечает за вязкость окружающей среды. Исследовано влияние величины внешнего воздействия на характер нелинейных колебаний. Наглядно продемонстрирована перекачка энергии между взаимодействующими нелинейными модами колебаний, что характеризует прямое влияние внутреннего резонанса на процесс свободных и вынужденных колебаний.

Впервые показано, что проявление внешнего резонанса при действии подвижной нагрузки зависит от скорости ее движения. Другими словами, меняя скорость прохождения нагрузки, можно регулировать явление внешнего резонанса.

Практическая ценность. В гибких висячих мостах под действием различных динамических нагрузок, таких как подвижная или ветровая, могут возникать сильные изгибно-крутильные колебания, развивающиеся иногда до чрезвычайно больших амплитуд, затрудняющих нормальную эксплуатацию моста, а иногда вызывающие его разрушение. В силу низкой демпфирующей способности висячих мостов колебания могут сопровождаться перекачкой энергии между различными модами колебаний еще долгое время и после снятия нагрузки, которая была причиной их возникновения. Это объясняется явлением внутреннего резонанса, когда одна из частот свободных изгибных колебаний близка по своему значению одной из собственных частот крутильных колебаний, что на практике может иметь место довольно часто в силу плотности спектра собственных частот висячих мостов, которые в значительной мере зависят от геометрических параметров моста. Поэтому задача исследования внутреннего резонанса в висячих мостах является весьма актуальной как с точки зрения теоретической, так и точки зрения ее практической значимости.

Разработан программный комплекс численного исследования нелинейных колебаний висячих комбинированных систем в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов под действием гармонических нагрузок и получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021664106.

Степень достоверности базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов, а также сопоставлением результатов, полученных двумя разными методами, используемых в данной диссертационной работе.

На защиту выносится:

- математическая модель, описывающая динамическое поведение висячей комбинированной системы, находящейся под действием подвижной гармонической силы, с использованием аппарата дробного исчисления;
- решение задачи о вынужденных колебаниях для случая сосредоточенной или подвижной гармонической силы, когда частота возмущающей силы близка к одной из собственных частот вертикальных колебаний системы, находящейся в условиях внутреннего резонанса;
- анализ системы нелинейных уравнений для фаз и амплитуд вынужденных колебаний с помощью метода вариации произвольных постоянных и численное решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в Уфе в 2019 году; на XXX и XXXI Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения в Москве в 2018 и 2019 годах; на 14^{th} International Conference on Vibration Problems (ICOVP 2019) в Греции в 2019 году; на International Conference on Nonlinear Solid Mechanics (ICoNSoM 2019) в Италии в 2019 году; на симпозиуме Symposium «Nonlinear dynamics - scientific work of Prof. Dr. Katica (Stevanovic) Hedrih», Mathematical Institute of SANA в Сербии в 2019 году; на IX Международной научной конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») в Москве в 2021 году.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из них 3 в изданиях, проиндексированных в международной базе данных Scopus, из которых одно входит в список изданий, рекомендованных ВАК РФ. Разработанная программа численных исследований зарегистрирована в государственном реестре программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Основные результаты по теме диссертации были получены лично автором и опубликованы в соавторстве с научным руководителем, который определил основные направления исследования в рамках выполнения базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ. Все численные исследования выполнены лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объем работы составляет 147 страниц, включает в себя 6 таблиц и 49 рисунков. Список литературы содержит 273 наименования, в том числе 192 из англоязычных изданий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность исследований по рассматриваемой теме, приведены общая характеристика диссертационной работы и основные положения, которые автор выносит на защиту.

В первой главе приводится обзор существующей литературы, посвящённой висячим комбинированным системам. Описаны преимущества висячих мостов, обсуждаются проблемы, в том числе динамические, которые возникают при возведении и эксплуатации висячих мостов. Дается краткий исторический очерк работ ученых, которые работали и продолжают работать в этой области. Приводится обзор методов расчета, которые были предложены для динамического анализа висячих комбинированных систем.

Вторая глава посвящена анализу вынужденных нелинейных колебаний висячих мостов под действием гармонической силы при наличии внутреннего и внешнего резонансов с использованием аппарата дробного исчисления.

В рамках классических гипотез выведена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих вынужденные колебания висячего моста под действием гармонической силы, приложенной в точке или движущейся с постоянной скоростью по мосту. С помощью обобщенного метода многих временных масштабов система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены системы разрешающих уравнений для амплитуд и фаз колебаний в случае сочетаний внутреннего и внешнего резонансов, приближенное решение которых найдено аналитическим методом вариации произвольных постоянных и численно, используя метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

Предполагается, что контур балки перемещается как твердое тело по вертикали $v(x,t)$ и вращается относительно оси балки $\theta(x,t)$. Начало системы координат находится в центре тяжести поперечного сечения. Основные принятые допущения:

1. Деформация сдвига поперечного сечения и инерция вращения не учитываются;
2. Подвески считаются непрерывно распределенными по длине моста;
3. Подвески вертикальны в состоянии статического равновесия, их удлинения не учитываются;
4. Изгибающие моменты в балке жесткости от постоянной нагрузки равны нулю;
5. Кабели очерчены по квадратной параболе.

Подробно рассмотрен случай, когда в колебательном процессе преобладают только две моды, а именно: вертикальная n-я мода с линейной собственной частотой

ω_{0n} и крутильная m-я мода с собственной частотой Ω_{0m}, тогда функции $v(x,t)$ и $\theta(x,t)$ можно приближенно определить как

$$v(x,t) \sim \eta_n(x)x_{1n}(t),$$
$$\theta(x,t) \sim \xi_m(x)x_{2m}(t), \qquad (1)$$

где $x_{1n}(t)$ и $x_{2n}(t)$ - обобщенные перемещения, соответствующие собственным формам колебаний $\eta_n(x)$ и $\xi_m(x)$ двух взаимодействующих мод колебаний.

В случае, когда гармоническая сила $\hat{f}\cos(\omega_F t)$ приложена в точке $x = x_0$ пролета висячего моста, уравнения его вынужденных затухающих колебаний, записанные в безразмерном виде, можно получить непосредственным обобщением подходов, предложенных Россихиным Ю.А. и Шитиковой М.В. для свободных колебаний, путем добавления в эти уравнения слагаемых $\beta D_{0+}^{\gamma_1}x_1$ и $\beta D_{0+}^{\gamma_2}x_2$, описывающих неупругую реакцию системы; тогда получим:

$$\ddot{x}_{1n} + \omega_{0n}^2 x_{1n} + \beta D_+^{\gamma_1}x_1 + a_{11}^n x_{1n}^2 + a_{22}^{nm}x_{2m}^2 + \left(b_{11}^n x_{1n}^2 + b_{22}^{nm}x_{2m}^2\right)x_{1n} = \hat{f}\cos\left(\omega_f t\right),$$
$$\ddot{x}_{2m} + \Omega_{0m}^2 x_{2m} + \beta D_+^{\gamma_2}x_2 + a_{12}^{nm}x_{1n}x_{2m} + \left(c_{11}^{nm}x_{1n}^2 + c_{22}^{m}x_{2m}^2\right)x_{2m} = 0, \qquad (2)$$

где a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} (i=1,2, j=2) - коэффициенты, зависящие от геометрических параметров и номеров взаимодействующих форм колебаний, $\beta D_{0+}^{\gamma_1}x_1$ и $\beta D_{0+}^{\gamma_2}x_1$ - слагаемые, в которых β - коэффициент вязкости, $D_{0+}^{\gamma}x$ $(\gamma = \gamma_1, \gamma_2)$ - дробная производная Римана-Лиувиля (γ - порядок дробной производной)

$$D_{0+}^{\gamma}x = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x\left(t-t'\right)}{\Gamma\left(1-\gamma\right)t'^{\gamma}} \qquad \left(0 < \gamma \le 1\right) \qquad (3)$$

и $\Gamma\left(1-\gamma\right)$ - Гамма-функция.

Метод решения. Систему уравнений (2) можно исследовать аналитически с помощью обобщенного метода многих временных масштабов. Тогда приближенное решение (2) для малых, но конечных амплитуд, слабо изменяющихся во времени, может быть представлено в виде разложений по различным временным масштабам $T_n = \varepsilon^n t$ $\left(n = 0,1,2,...\right)$ в виде

$$x_1(t) = \varepsilon x_{11}(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 x_{12}(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^3 x_{13}(T_0,T_1,T_2) + \ldots,$$
$$x_2(t) = \varepsilon x_{21}(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 x_{22}(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^3 x_{23}(T_0,T_1,T_2) + \ldots, \qquad (4)$$

где ε - малый параметр, который имеет тот же порядок величины, что и амплитуды, $T_0 = t$ - быстрый масштаб, характеризующий движения с собственными частотами ω_0 и Ω_0, а $T_1 = \varepsilon t$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$ - медленные масштабы, характеризующие модуляции амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

Соотношения (4) сводят задачу к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Так как уравнения движения содержат производные по времени, то необходимо представить их в виде разложений по новым временным масштабам в виде

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ..., \qquad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0D_2)... \qquad (5)$$

$$\left(\frac{d}{d\,t}\right)^{\gamma}=(D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2 D_2+\ldots)^{\gamma}=D_{+}^{\gamma}+\varepsilon\gamma D_{+}^{\gamma-1}D_1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\gamma(\gamma-1)D_{+}^{\gamma-2}D_1^2+\ldots$$

где $D_n=\partial/\partial T_n$.

Система уравнений (2) описывает два процесса, которые связаны между собой и происходят одновременно: механизм обмена энергией между взаимодействующими вертикальными и крутильными модами и процесс диссипации энергии при этом взаимодействии. Поскольку дальнейшие исследования будут проводиться с помощью обобщенного метода многих временных масштабов и оба процесса должны протекать в одном масштабе времени, то необходимо предположить, что коэффициент вязкости β можно представить в виде $\beta=\varepsilon^k\mu$, где μ - конечная величина, а $k=1$ и 2 для случаев внутреннего резонанса 2:1 и 1:1 соответственно. При других порядках малости коэффициента вязкости диссипация энергии будет проходить либо слишком быстро, либо слишком медленно относительно процесса перекачки энергии.

Для решения задачи будем рассматривать два случая: (1) $k=1$, то есть $\beta=\varepsilon\mu,\ \hat{f}=\varepsilon^2 f$, и (2) $k=2$, $\beta=\varepsilon^2\mu,\ \hat{f}=\varepsilon^3 f$, где k – порядок вязкости, а μ и f являются конечными значениями, то есть μ и f - константы.

Подставляя (4) в (2), после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях к нулю, получим

- при ε:

$$D_0^2x_{11}+\omega_0^2x_{11}=0,\quad D_0^2x_{21}+\Omega_0^2x_{21}=0; \tag{6}$$

- при ε^2:

$$\begin{aligned}&D_0^2x_{12}+\omega_0^2x_{12}=-2D_0D_1x_{11}-\mu(2-k)D_{+}^{\gamma_1}x_{11}-a_{11}x_{11}^2-a_{22}x_{21}^2+\\&+(2-k)\hat{f}\cos(\omega_F T_0),\\&D_0^2x_{22}+\Omega_0^2x_{22}=-2D_0D_1x_{21}-\mu(2-k)D_{+}^{\gamma_2}x_{21}-a_{12}x_{11}x_{21};\end{aligned} \tag{7}$$

- при ε^3:

$$\begin{aligned}&D_0^2x_{13}+\omega_0^2x_{13}=-2D_0D_1x_{12}-\left(D_1^2+2D_0D_2\right)x_{11}-\mu(2-k)D_{+}^{\gamma_1}x_{12}-\\&-\mu\left(2-k\right)\gamma_1D_{+}^{\gamma_1-1}D_1x_{11}-\mu(k-1)D_{+}^{\gamma_1}x_{11}-2a_{11}x_{11}x_{12}-2a_{22}x_{21}x_{22}-b_{11}x_{11}^3-\\&-b_{22}x_{21}^2x_{11}+(k-1)\hat{f}\cos(\omega_F T_0),\\&D_0^2x_{23}+\Omega_0^2x_{23}=-2D_0D_1x_{22}-\left(D_1^2+2D_0D_2\right)x_{21}-\mu(2-k)D_{+}^{\gamma_2}x_{22}-\\&-\mu(2-k)\gamma_2D_{+}^{\gamma_2}D_1x_{21}-\mu(k-1)D_{+}^{\gamma_2}x_{21}-a_{12}(x_{11}x_{22}+x_{12}x_{21})-c_{11}x_{11}^2x_{21}-c_{22}x_{21}^3.\end{aligned} \tag{8}$$

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка (6) имеет вид:

$$\begin{aligned}x_{11}&=A_1(T_1,T_2)\exp(i\omega_0T_0)+\bar{A}_1(T_1,T_2)\exp(-i\omega_0T_0),\\x_{21}&=A_2(T\ ,T_2)\exp(i\Omega_0T_0)+\bar{A}_2(T_1,T_2)\exp(-i\Omega_0T_0),\end{aligned} \tag{9}$$

где A_1 и A_2 - неизвестные комплексные функции, а $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ - функции, комплексно сопряженные с A_1 и A_2 соответственно.

Для того чтобы интегрировать системы уравнений (7) и (8), необходимо рассмотреть каждый случай отдельно.

Вязкость порядка ε: Теперь подставим соотношения (9) в правую часть уравнений (7), полагая $k=1$ и учитывая, что $2\cos\left(\omega_F T_0\right)=\exp\left(i\omega_F T_0\right)+\exp\left(-i\omega_F T_0\right)$. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&D_0^2 x_{12}+\omega_0^2 x_{12}=-2i\omega_0 D_1 A_1\exp\left(i\omega_0 T_0\right)-\mu\left(i\omega_0\right)^{\gamma_1}A_1\exp\left(i\omega_0 T_0\right)-\\
&-a_{11}\left[A_1^2\exp\left(2i\omega_0 T_0\right)+A_1\bar{A}_1\right]-a_{22}\left[A_2^2\exp\left(2i\Omega_0 T_0\right)+A_2\bar{A}_2\right]+\\
&+\frac{1}{2}f\exp\left(i\omega_F T_0\right)+cc,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_0^2 x_{22}+\Omega_0^2 x_{22}=-2i\Omega_0 D_1 A_2\exp\left(i\Omega_0 T_0\right)-\mu\left(i\Omega_0\right)^{\gamma_2}A_2\exp\left(i\Omega_0 T_0\right)-\\
&-a_{12}\left\{A_1 A_2\exp\left[iT_0\left(\omega_0+\Omega_0\right)\right]+A_1\bar{A}_2\exp\left[iT_0\left(\omega_0-\Omega_0\right)\right]\right\}+cc,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где cc означает комплексно сопряженную часть к предыдущим слагаемым.
Из уравнений (10) и (11) видно, что они определяют два колебательных режима: (1) резонансное возбуждение $\omega_F=\omega_0+\varepsilon\sigma_1$ при $\omega_0\neq 2\Omega_0$ или (2) резонансное возбуждение при наличии внутреннего резонанса два-к-одному, когда $\omega_0=2\Omega_0+\varepsilon\sigma$, где σ и σ_1 – параметры, которые характеризуют малое расхождение между частотами и которые известны в теории нелинейных колебаний как параметры расстройки.

Случай 1: резонансное возбуждение $\omega_F=\omega_0+\varepsilon\sigma_1$ при $\omega_0\neq 2\Omega_0$. Чтобы исключить слагаемые, которые порождают вековые члены в уравнениях (10) и (11), необходимо обратить в нуль коэффициенты при $e^{\pm i\omega_0 T_0}$ и $e^{\pm i\Omega_0 T_0}$. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&D_1 A_1+\frac{1}{2}\mu\left(i\omega_0\right)^{\gamma_1-1}A_1-\frac{f}{4i\omega_0}e^{i\sigma_1 T_1}=0,\\
&D_1 A_2+\frac{1}{2}\mu\left(i\Omega_0\right)^{\gamma_2-1}A_2=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Тогда уравнения (10) и (11) примут вид

$$
\begin{aligned}
&D_0^2 x_{12}+\omega_0^2 x_{12}=-a_{11}A_1^2 e^{2i\omega_0 T_0}-a_{22}A_2^2 e^{2i\Omega_0 T_0}-a_{11}A_1\bar{A}_1-a_{22}A_2\bar{A}_2+cc,\\
&D_0^2 x_{22}+\Omega_0^2 x_{22}=-a_{12}A_1 A_2 e^{iT_0\left(\Omega_0+\omega_0\right)}-a_{12}A_1\bar{A}_2 e^{iT_0\left(\omega_0-\Omega_0\right)}+cc.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Подстановка результатов интегрирования (12) в уравнения (13) с последующим интегрированием приводит к выражениям для x_{12} и x_{22}. Подставляя затем найденные выражения для x_{12} и x_{22} в уравнения (8) при $k=1$ и используя стандартную процедуру для устранения вековых членов, получим функции амплитуд нелинейных колебаний $a_1(T_2)$ и $a_2(T_2)$, которые приводят к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&x_1=\varepsilon\left[2a_1^0 e^{-\alpha_1 t}\cos\left(\Omega_1 t\right)+\frac{f}{\mu\omega_0^{\gamma_1}}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\gamma_1\right)\right]+O\left(\varepsilon^2\right),\\
&x_2=\varepsilon 2a_2^0 e^{-\alpha_2 t}\cos\left(\Omega_2 t\right)+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где α_1,α_2 - это коэффициенты затухания, а Ω_1,Ω_2 - частоты нелинейных колебаний.

Из полученного аналитического решения (14) видно, что оно состоит из двух слагаемых: первое соответствует затухающим колебаниям с коэффициентами демпфирования и нелинейными частотами, зависящими от параметров дробности, и описывает нестационарный процесс, а второе является недемпфирующим по своему характеру и описывает вынужденные колебания с частотой возмущающей силы и разностью фаз, зависящей от параметра дробности.

Случай 2: резонансное возбуждение $\omega_F = \omega_0 + \varepsilon\sigma_1$ при $\omega_0 = 2\Omega_0 + \varepsilon\sigma$, т.е. случай сочетания внешнего резонанса с внутренним резонансом два-к-одному. Тогда условие исключения вековых членов в уравнениях (10) и (11) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &D_1 A_1 + \frac{1}{2}\mu\left(i\omega_0\right)^{\gamma_1 - 1} A_1 + \frac{a_{22}}{2i\omega_0} A_2^2 \exp\left(-i\sigma T_1\right) - \frac{f}{4i\omega_0}\exp\left(-i\sigma_1 T_1\right) = 0,\\ &D_1 A_2 + \frac{1}{2}\mu\left(i\Omega_0\right)^{\gamma_2 - 1} A_2 + \frac{a_{12}}{2i\Omega_0} A_1 \bar{A}_2 \exp\left(i\sigma T_1\right) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Умножим первое и второе уравнения в (15) на $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ соответственно и запишем уравнения, к ним сопряженные. Две пары взаимносопряженных уравнений сначала сложим друг с другом, а затем вычтем одно из другого. Представляя затем функции A_1 и A_2 в полярной форме, т.е. $A_i = a_i \exp\left(i\varphi_i\right)$, и используя формулы Эйлера, получим систему уравнений относительно амплитуд a_i и фаз φ_i (i = 1,2) нелинейных колебаний

$$\begin{aligned} &\left(a_1^2\right)^{\bullet} + \mu\omega_0^{\gamma_1-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right)a_1^2 + a_{22}\omega_0^{-1}a_1a_2^2\sin(2\varphi_2 - \varphi_1 - \sigma T_1) + \frac{1}{2}f\,\omega_0^{-1}a_1\sin(\varphi_1 - \sigma_1 T_1) = 0,\\ &\left(a_2^2\right)^{\bullet} + \mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right)a_2^2 - a_{12}\Omega_0^{-1}a_1a_2^2\sin(2\varphi_2 - \varphi_1 - \sigma T_1) = 0,\\ &\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right) - \frac{a_{22}a_2^2}{2\omega_0 a_1}\cos(2\varphi_2 - \varphi_1 - \sigma T_1) + \frac{f}{4\omega_0 a_1}\cos(\varphi_1 - \sigma_1 T_1) = 0,\\ &\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right) - \frac{a_{12}}{2\Omega_0}a_1\cos(2\varphi_2 - \varphi_1 - \sigma T_1) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где точка обозначает дифференцирование по T_1.

Для того чтобы исключить в уравнениях (16) явную зависимость от времени, положим

$$\beta_1 = 2\varphi_2 - \varphi_1 - \sigma T_1 = \delta - \sigma T_1, \quad \text{или} \quad \dot{\beta}_1 = 2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \sigma = \dot{\delta} - \sigma, \tag{17}$$

$$\beta_2 = \varphi_1 - \sigma_1 T_1, \quad \text{или} \quad \dot{\beta}_2 = \dot{\varphi}_1 - \sigma_1. \tag{18}$$

Уравнения (16), следовательно, примут вид

$$\begin{aligned} &\dot{a}_1 + s_1 a_1 + \frac{a_{22}}{2\omega_0}a_2^2\sin\beta_1 + \frac{1}{4\omega_0}f\sin\beta_2 = 0,\\ &\dot{a}_2 + s_2 a_2 - \frac{a_{12}}{2\Omega_0}a_1 a_2\sin\beta_1 = 0,\\ &\dot{\beta}_2 + \sigma_1 - s_3 - \frac{a_{22}a_2^2}{2\omega_0 a_1}\cos\beta_1 + \frac{f}{4\omega_0 a_1}\cos\beta_2 = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\dot{\beta}_1 + \sigma - \left(2s_4 - s_3\right) - \left(\frac{a_{12}}{\Omega_0} - \frac{a_{22}}{2\omega_0}\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)a_1\cos\beta_1 - \frac{f}{4\omega_0 a_1}\cos\beta_2 = 0\,, \tag{19}$$

где

$$
\begin{aligned}
&s_1=\frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right),\ s_2=\frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right),\\
&s_3=\frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right),\ s_4=\frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Из соотношений (20) видно, что коэффициенты s_i (i=1,2,3,4), отвечающие за демпфирующие свойства системы, зависят от частот взаимодействующих мод колебаний ω_0 и Ω_0 и от параметров дробности γ_1 и γ_2.

Вязкость порядка ε^2. Рассмотрим теперь нелинейные колебания висячей комбинированной системы в случае, когда порядок малости вязкости равен ε^2. Подставляя соотношения (9) в правые части уравнений (7) при k=2, получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&D_1A_1=D_1A_2=0,\ \text{ следовательно, } A_1=A_1\left(T_2\right) \text{ и } A_2=A_2\left(T_2\right),\\
&D_0^2x_{12}+\omega_0^2x_{12}=-a_{11}\left[A_1^2\exp\left(2i\omega_0T_0\right)+A_1\bar{A}_1\right]-a_{22}\left[A_2^2\exp\left(2i\Omega_0T_0\right)+A_2\bar{A}_2\right]+cc,\\
&D_0^2x_{22}+\Omega_0^2x_{22}=-a_{12}\left\{A_1A_2\exp\left[iT_0\left(\omega_0+\Omega_0\right)\right]+A_1\bar{A}_2\exp\left[iT_0\left(\omega_0-\Omega_0\right)\right]\right\}+cc.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Решение уравнений (21) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x_{12}=\frac{a_{11}}{3\omega_0^2}A_1^2\exp\left(2i\omega_0T_0\right)+\frac{a_{22}}{4\Omega_0^2-\omega_0^2}A_2^2\exp(2i\Omega_0T_0)-\frac{1}{\omega_0^2}\left(a_{11}A_1\overline{A_1}+a_{22}A_2\overline{A_2}\right)+cc,\\
&x_{22}=\frac{a_{12}}{\omega_0\left(2\Omega_0+\omega_0\right)}A_1A_2\exp\left[iT_0\left(\omega_0+\Omega_0\right)\right]-\\
&-\frac{a_{12}}{\omega_0\left(2\Omega_0-\omega_0\right)}A_1\overline{A_2}\exp\left[iT_0\left(\omega_0-\Omega_0\right)\right]+cc.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Далее будем исследовать внутренний резонанс один-к-одному в сочетании с внешним резонансом, когда частота внешней силы близка по своему значению собственной частоте вертикальных колебаний:

$$\omega_0=\Omega_0+\varepsilon^2\sigma,\qquad \omega_F=\omega_0+\varepsilon^2\sigma_1, \tag{23}$$

где σ и σ_1 - параметры расстройки.

Подставляя (9) и (22) в уравнения (8) с учетом $\hat{f}=\varepsilon^3 f$ и используя стандартную процедуру для устранения вековых членов с учетом условия $D_0^\gamma e^{aT_0}=a^\gamma e^{aT_0}$, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, в которой заменяем функции A_1 и A_2 соответственно на $A_1 = A_1\exp\left(-i\sigma_1T_2\right)$ и $A_2 = A_2\exp\left[i\left(\sigma-\sigma_1\right)T_2\right]$ для устранения множителей $\exp\left(\pm 2i\sigma T_2\right)$ и $\exp\left(\pm i\sigma_1T_2\right)$. Далее представляя функции A_1 и A_2 в полярной форме $A_i = a_i\exp\left(i\varphi_i\right)$ и разделяя действительные и мнимые части, в результате приходим к системе уравнений нелинейных колебаний относительно амплитуд и фаз

$$
\begin{aligned}
&\dot{a}_1+\frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right)a_1-\frac{1}{4}\Gamma_1 a_1 a_2^2\sin\delta+\frac{1}{4}f\omega_0^{-1}\sin\varphi_1=0,\\
&\dot{a}_2+\frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right)a_2+\frac{1}{4}\Gamma_2 a_1^2 a_2\sin\delta=0,\\
&\dot{\varphi}_1-\frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right)-\sigma_1-\lambda_1 a_1^2-\lambda_2 a_2^2+\frac{1}{4}\Gamma_1 a_2^2\cos\delta+\frac{1}{4}f\omega_0^{-1}a_1^{-1}\cos\varphi_1=0,\\
&\dot{\varphi}_2-\frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right)-\left(\sigma_1-\sigma\right)-\lambda_3 a_1^2-\lambda_4 a_2^2+\frac{1}{4}\Gamma_2 a_1^2\cos\delta=0,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где $\delta=2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$ - сдвиг фаз, а точка обозначает дифференцирование по T_2.

Система дифференциальных уравнений (24) вместе с начальными условиями однозначно описывает модуляции амплитуд и фаз вынужденных затухающих колебаний. Приближенное аналитическое решение уравнений (24) можно найти методом последовательных приближений и численно, используя алгоритм Рунге-Кутта четвёртого порядка.

Метод вариаций произвольных постоянных. В качестве начального приближения рассмотрим решение однородной части уравнений (24) в виде:

$$
a_1=a_{10}\cdot e^{-S_1T_2},\ a_2=a_{20}\cdot e^{-S_2T_2},\ \ \varphi_1=S_3T_2+\varphi_{10},\ \ \varphi_2=S_4T_2+\varphi_{20}, \tag{25}
$$

где a_{i0} и φ_{i0} (*i=1,2*) - начальные значения амплитуд и фаз соответственно, определяемые начальными условиями, $\delta_0=2\left(\varphi_{20}-\varphi_{10}\right)$- разность начальных фаз, и S_i – константы,

$$
\begin{aligned}
&S_1=\frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right),\ \ S_2=\frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right),\\
&S_3=\frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma_1-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_1\right)-\sigma_1,\ S_4=\frac{1}{2}\mu\Omega_0^{\gamma_2-1}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_2\right)-\left(\sigma_1-\sigma\right).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Подставляя соотношения (25) и (26) в разрешающие уравнения (24) и применяя стандартную процедуру метода вариации произвольной постоянной, получаем приближенное решение в виде

$$
\begin{aligned}
&a_1=a_{10}e^{-S_1T_2}-\frac{1}{4}\Gamma_1 a_{10}a_{20}^2\left[2S_2\sin\left(\sum T_2+\delta_0\right)+\right.\\
&\left.+\sum\cos\left(\sum T_2+\delta_0\right)\right]\left(4S_2^2+\Sigma^2\right)^{-1}e^{-(S_1+2S_2)T_2}-\frac{f}{4\omega_0}\left[S_1\sin\left(S_3T_2+\varphi_{10}\right)-\right.\\
&\left.-S_3\cos\left(S_3T_2+\varphi_{10}\right)\right]\left(S_1^2+S_2^3\right)^{-1}e^{S_1T_2}+C_{10}e^{-S_1T_2},\\
&a_2=a_{20}e^{-S_2T_2}+\frac{1}{4}\Gamma_2 a_{10}^2a_{20}\left[2S_1\sin\left(\sum T_2+\delta_0\right)+\right.\\
&\left.\sum\cos\left(\sum T_2+\delta_0\right)\right]\left(4S_1^2+\Sigma^2\right)^{-1}e^{-(2S_1+S_2)T_2}+C_{20}e^{-S_2T_2}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$\varphi_1 = S_3T_2 + \varphi_{10} - \frac{\lambda_1 a_{10}^2}{2S_1} e^{-2S_1T_2} - \frac{\lambda_2 a_{20}^2}{2S_2} e^{-2S_2T_2} +$$
$$+\frac{1}{4}\Gamma_1 a_{20}^2 \frac{2S_2\cos\left(\sum T_2+\delta_0\right)+\sum\sin\left(\sum T_2+\delta_0\right)}{4S_2^2+\sum^2} e^{-2S_2T_2} -$$
$$-\frac{1}{4}\frac{f\,a_{10}^{-1}}{\omega_0}\frac{S_1\cos\left(S_3T_2+\varphi_{10}\right)+S_3\sin\left(S_3T_2+\varphi_{10}\right)}{S_1^2+S_3^2} e^{S_1T_2} + C_{30}, \tag{28}$$
$$\varphi_2 = S_4T_2 + \varphi_{20} - \frac{\lambda_3 a_{10}^2}{2S_1} e^{-2S_1T_2} - \frac{\lambda_4 a_{20}^2}{2S_2} e^{-2S_2T_2} +$$
$$+\frac{1}{4}\Gamma_2 a_{10}^2 \frac{2S_1\cos\left(\sum T_2+\delta_0\right)+\sum\sin\left(\sum T_2+\delta_0\right)}{4S_1^2+\sum^2} e^{-2S_1T_2} + C_{40},$$

где $C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{40}$ - константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

В разделе 2.3 исследовано динамическое поведение висячей комбинированной системы под действием подвижной гармонической силы. Тогда разрешающая система уравнений, описывающая вынужденные колебания висячей комбинированной системы под действием подвижной гармонической силы, записывается в виде

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) + \beta D_+^{\gamma_1} x_1 + a_{11}x_1^2(t) + a_{22}x_2^2(t) + \left[b_{11}x_1^2(t) + b_{22}x_2^2(t)\right]x_1(t) =$$
$$= 2p\sin\left(\omega_p t\right)\sin\Omega t, \tag{29}$$
$$\ddot{x}_2 + \Omega_0^2 x_2 + \beta D_+^{\gamma_2} x_2 + a_{12}x_1x_2\left(c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2\right)x^2 = 0,$$

где $\Omega = n\pi V$ - частота, зависящая от скорости движения гармонической силы V и номера собственной формы вертикальных колебаний n, доминирующей при изгибно-крутильных колебаниях. Решение системы уравнений (29) ищется, как и в предыдущем разделе, в виде разложений (4) с помощью обобщенного метода многих временных масштабов. Тогда применяя процедуру, описанную выше, приходим к следующим уравнениям:

- порядка ε^2:

$$D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = -2D_0D_1x_{11} - \mu(2-k)D_+^{\gamma_1}x_{11} - a_{11}x_{11}^2 - a_{22}x_{21}^2 +$$
$$+(2-k)p\left[\cos(\omega_p-\Omega)T_0 - \cos(\omega_p+\Omega)T_0\right], \tag{30}$$
$$D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = -2D_0D_1x_{21} - \mu(2-k)D_+^{\gamma_2}x_{21} - a_{12}x_{11}x_{21};$$

- порядка ε^3:

$$D_0^2 x_{13} + \omega_0^2 x_{13} = -2D_0D_1x_{12} - \left(D_1^2 + 2D_0D_2\right)x_{11} - \mu(2-k)D_+^{\gamma_1}x_{12} -$$
$$-\mu\left(2-k\right)\gamma_1 D_+^{\gamma_1-1}D_1x_{11} - \mu(k-1)D_+^{\gamma_1}x_{11} - 2a_{11}x_{11}x_{12} - 2a_{22}x_{21}x_{22} - b_{11}x_{11}^3 -$$
$$-b_{22}x_{21}^2x_{11} + (k-1)p\left[\cos(\omega_p-\Omega)T_0 - \cos(\omega_p+\Omega)T_0\right], \tag{31}$$
$$D_0^2 x_{23} + \Omega_0^2 x_{23} = -2D_0D_1x_{22} - \left(D_1^2 + 2D_0D_2\right)x_{21} - \mu(2-k)D_+^{\gamma_2}x_{22} -$$
$$-\mu(2-k)\gamma_2 D_+^{\gamma_2}D_1x_{21} - \mu(k-1)D_+^{\gamma_2}x_{21} - a_{12}(x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21}) - c_{11}x_{11}^2x_{21} - c_{22}x_{21}^3.$$

Вязкость порядка ε: Подставляя решение (9), полученное на первом шаге, в правую часть уравнений (30), полагая при этом $k=1$, получим

$$
\begin{aligned}
&D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = -2i\omega_0 D_1 A_1\left(T_1\right)\exp\left(i\omega_0 T_0\right) - \mu\left(i\omega_0\right)^{\gamma_1} A_1\left(T_1\right)\exp\left(i\omega_0 T_0\right) - \\
&-a_{11}\left[A_1^2\left(T_1\right)\exp\left(2i\omega_0 T_0\right) + A_1\bar{A}_1\right] - a_{22}\left[A_2^2\left(T_1\right)\exp\left(2i\Omega_0 T_0\right) + A_2\bar{A}_2\right] + \\
&+p\Big[\cos\Big(\omega_p + \Omega\Big)T_0 - \cos\Big(\omega_p - \Omega\Big)T_0\Big] + cc, \\
&D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = -2i\Omega_0 D_1 A_2 \exp\left(i\Omega_0 T_0\right) - \mu\left(i\Omega_0\right)^{\gamma_2} A_2 \exp\left(i\Omega_0 T_0\right) - \\
&-a_{12}\left\{A_1 A_2 \exp\left[iT_0\left(\omega_0 + \Omega_0\right)\right] + A_1\bar{A}_2 \exp\left[iT_0\left(\omega_0 - \Omega_0\right)\right]\right\} + cc.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Из уравнений (32) видно, что возможна реализация нескольких резонансных режимов:

1) внешний резонанс (а) $\omega_p - \Omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$ или (б) $\omega_p + \Omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$, когда $\omega_0 \neq 2\Omega_0$; (33)
2) наложение внешнего резонанса (а) $\omega_p - \Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma_1$ или (б) $\omega_p + \Omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$ на внутренний резонанс два-к-одному $\omega_0 = 2\Omega_0 + \varepsilon\sigma.$ (34)

Из соотношений (33) и (34) видно, что внешний резонанс при действии подвижной нагрузки зависит от скорости ее движения. Другими словами, меняя скорость прохождения нагрузки, можно регулировать явление внешнего резонанса.

В случае сочетания частот, соответствующих условию (33а) или (33б), условие устранения вековых членов в уравнениях (32) приводит к следующим уравнениям для определения функций $A_1(T_1)$ и $A_2(T_2)$:

$$
\begin{aligned}
&D_1 A_1 + \frac{1}{2}\mu\left(i\omega_0\right)^{\gamma_1 - 1} A_1 - \frac{p}{4i\omega_0}\exp(i\sigma_1 T_1) = 0, \\
&D_1 A_2 + \frac{1}{2}\mu(i\Omega_0)^{\gamma_2 - 1} A_2 = 0.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Из сравнения уравнений (35) с уравнениями (12), соответствующими случаю сосредоточенной нагрузки, видно, что они совпадают с точностью до условия резонансного возбуждения. Поэтому решение (14) справедливо и для уравнений (35).

Аналогичным образом можно показать, что и в случае сочетания частот, соответствующих условию (34а) или (34б), условие устранения вековых членов в уравнениях (32) приводит к следующим уравнениям для определения функций $A_1(T_1)$ и $A_2(T_2)$:

$$
\begin{aligned}
&D_1 A_1 + \frac{1}{2}\mu\left(i\omega_0\right)^{\gamma_1 - 1} A_1 + \frac{a_{22}}{2i\omega_0} A_2^2 \exp\left(-i\sigma T_1\right) - \frac{p}{4i\omega_0}\exp(i\sigma_1 T_1) = 0, \\
&D_1 A_2 + \frac{1}{2}\mu(i\Omega_0)^{\gamma_2 - 1} A_2 + \frac{a_{12}}{2i\Omega_0} A_1\bar{A}_2 \exp\left(i\sigma T_1\right) = 0,
\end{aligned} \tag{36}
$$

которые совпадают с уравнениями (15) с точностью до резонансных частот. Следовательно, разрешающая система уравнений относительно амплитуд и фаз нелинейных колебаний (16) справедлива и для анализа вынужденных колебаний под действием подвижной нагрузки.

Вязкость порядка ε^2: Рассмотрим теперь нелинейные колебания висячей комбинированной системы в случае, когда порядок малости вязкости равен ε^2. Подставляя соотношения (9) в правые части уравнений (7) при k=2, приходим к системе уравнений (21), решение которой имеет вид (22).

Как и в рассмотренном ранее случае воздействия гармонической силы, приложенной в точке, при подвижной нагрузке возможно неблагоприятное сочетание внутреннего резонанса один-к-одному с внешним резонансом, когда частота внешней силы близка по своему значению собственной частоте вертикальных колебаний:

$$\omega_0 = \Omega_0 + \varepsilon^2\sigma, \quad \omega_p - \Omega = \omega_0 + \varepsilon^2\sigma_1, \text{ или } \omega_p + \Omega = \omega_0 + \varepsilon^2\sigma_1. \qquad (37)$$

Подставляя соотношения (22) в уравнения (31) с учетом условия (37) и применяя процедуру освобождения от вековых членов, приходим к системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений относительно амплитуд и фаз колебаний, которая совпадает с системой уравнений (24) с точностью до резонансных условий. Следовательно, приближенное аналитическое решение уравнений (24) с учетом условий (37) можно найти методом последовательных приближений и численно, используя алгоритм Рунге-Кутта четвёртого порядка.

В третьей главе приведены результаты численных исследований всех случаев сочетания внешнего и внутреннего резонанса при помощи разработанного автором «Программного комплекса численных исследований нелинейных вынужденных колебаний висячих мостов под действием подвижных и сосредоточенных нагрузок при наличии внутреннего резонанса». Для тестирования работы численного алгоритма было проведено сравнение численных результатов с вычислениями на основе приближенных аналитических выражений, полученных в результате решения неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных.

Проанализировано влияние параметров дробности и параметров внешней нагрузки на свободные и вынужденные колебания висячей комбинированной системы на примере висячего моста «Золотые ворота», используя имеющиеся в литературе экспериментальные данные. В диссертации рассмотрены пять случаев внутреннего резонанса один-к-одному и один случай внутреннего резонанса два-к-одному, а в автореферате представлена часть результатов только для одного случая $\omega_{05}^c = \Omega_{03}^c$.

На рисунках 1а и 1б приведено решение (27) системы уравнений (24) для вынужденных колебаний при одинаковых и различных значениях параметра дробности методом вариации произвольной постоянной в программном пакете «Mathcad» (*пунктирные линии*), а также результаты численного эксперимента методом Рунге-Кутта четвёртого порядка в системе «GNU Octave» (*сплошные линии*). Из рисунка 1 видно, что оба метода дают качественное совпадение результатов.

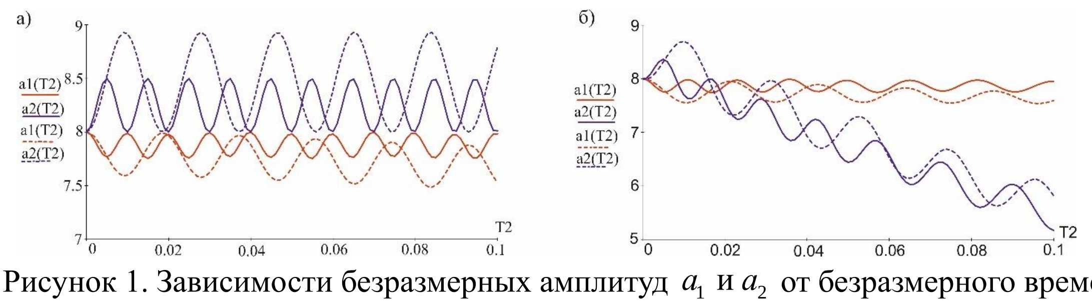

Рисунок 1. Зависимости безразмерных амплитуд a_1 и a_2 от безразмерного времени T_2 при $\omega_0 = \Omega_0 = 1.083 \cdot 10^{-3}, \sigma = 0, f = 0.02$: а) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, б) $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.015$ (численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка – сплошная линия, аналитический метод вариации произвольных постоянных – пунктирная линия).

На рисунках 2 и 3 приведены результаты численных исследований случая внутреннего резонанса один-к-одному, на который накладывается внешний резонанс (23) при действии внешней гармонической силы с частотой, близкой собственной частоте вертикальных колебаний, и амплитудой $f=0.1$ (рис. 2) и $f=1$ (рис. 3). Видно, что процесс перекачки энергии сохраняется и при одинаковых (рис. 2а и 3а) и при различных (рис. 2б и 3б) значениях параметров дробности, значения безразмерных амплитуд вертикальных и крутильных колебаний уменьшаются, а период колебаний возрастает с увеличением значения параметра дробности. При этом увеличение амплитуды возмущающей гармонической силы приводит к увеличению диапазона изменения безразмерных амплитуд колебаний, т.е. к усилению процесса перекачки энергии.

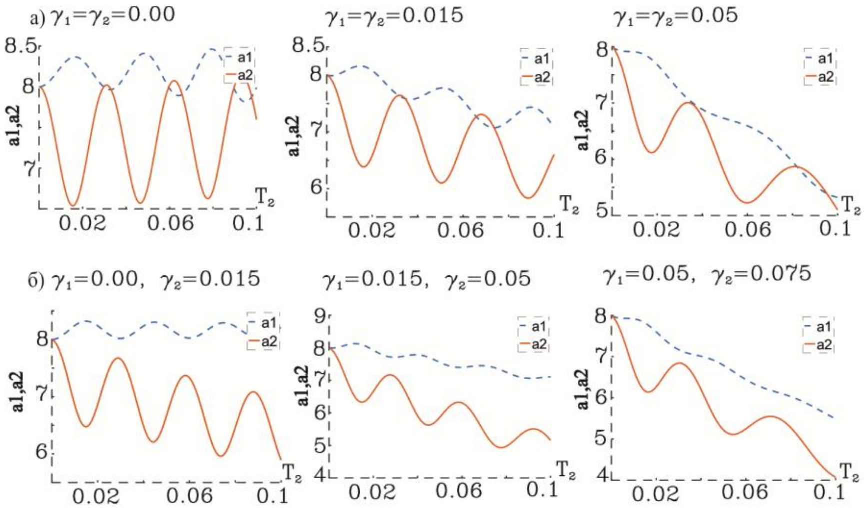

Рисунок 2. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_2 от безразмерного времени T_2 при $\omega_0=\Omega_0=1.083\cdot10^{-3}, \sigma=0, f=0.1$: a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

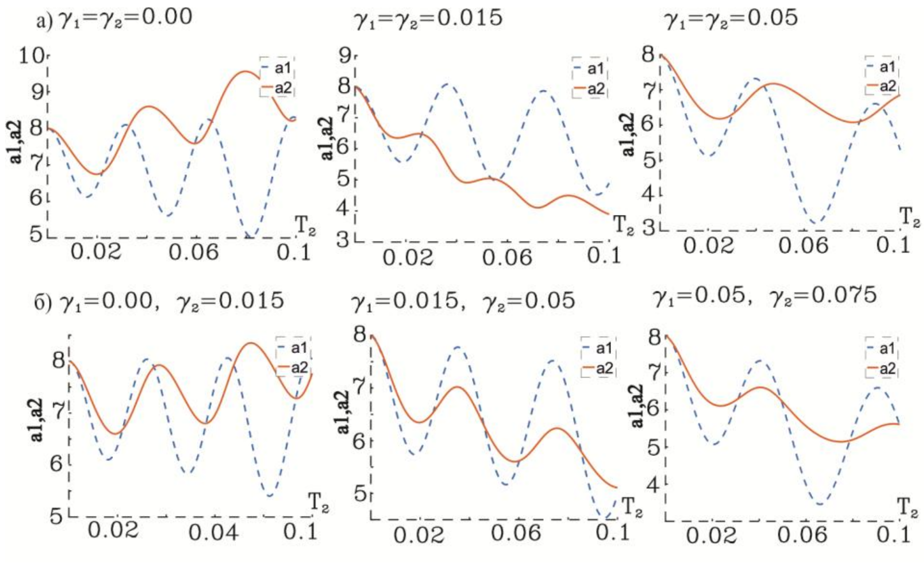

Рисунок 3. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_2 от безразмерного времени T_2 при $\omega_0=\Omega_0=1.083\cdot10^{-3}, \sigma=0, f=1$: a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

На рисунке 4 приведены временные зависимости амплитуд колебаний при реализации условия внутреннего резонанса два-к-одному $\omega_{06}^{c} = 2\Omega_{01}^{c} + \varepsilon\sigma$ в случае свободных незатухащих колебаний ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0, f = 0$ на рис. 4а), в случае незатухающих вынужденных колебаний ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0, f \neq 0$ на рис. 4б и в), свободных затухающих колебаний ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25, f = 0$ на рис. 4г) и вынужденных затухающих колебаний ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5, f = 0.05$ на рис. г). Из рисунка 4 видно, что увеличение амплитуды внешней гармонической силы усиливает процесс перекачки энергии, который может быть стабилизирован только за счет включения в работу сил демпфирования.

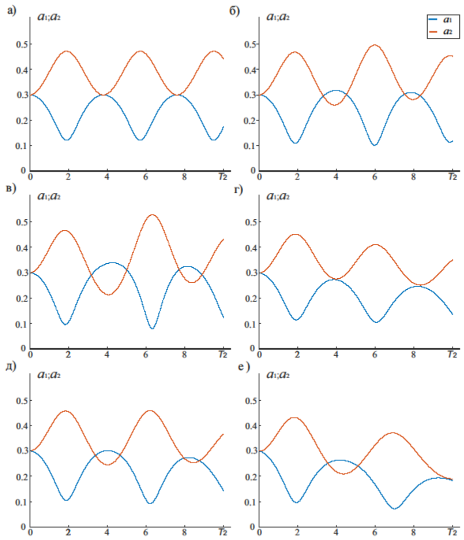

Рисунок 4. Случай внутреннего резонанса $\omega_{06}^{c} = 2\Omega_{01}^{c} + \varepsilon\sigma$ $\left(\omega_{06}^{c} = 10.858 \cdot 10^{-4}, \Omega_{01}^{c} = 5.512 \cdot 10^{-4}, \varepsilon\sigma = -0.166 \cdot 10^{-4}\right)$: а) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, f = 0$; б) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, f = 0.05$; в) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, f = 0.01$; г) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25, f = 0$; д) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.25, f = 0.05$; е) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5, f = 0.05$.

Результаты численных исследований вынужденных колебаний при действии подвижной гармонической силы приведены на рис. 5-7, которые позволяют оценить влияние изменения амплитуды подвижной гармонической силы (рис. 5), скорости ее движения (рис. 6) и параметров дробности (рис. 7). Из рисунков 5-7 видно, что увеличение каждого из трех параметров при фиксированных остальных значениях приводит к увеличению периода колебаний, при этом процесс перекачки энергии сохраняется. С ростом амплитуды и скорости гармонической силы увеличивается диапазон изменения амплитуд колебаний, то есть интенсивность энергообмена при наложении внешнего резонанса на внутренний. При этом увеличение параметра дробности уменьшает значение амплитуд колебаний.

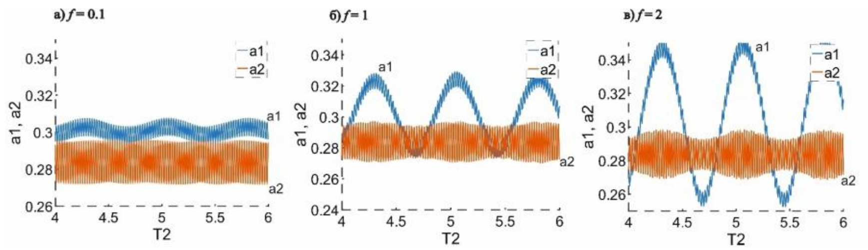

Рисунок 5. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_2 от безразмерного времени T_2 при $\omega_{05} = \Omega_{03} = 1.083 \cdot 10^{-3}, \sigma = 0, \gamma = 0, V = 0.3$.

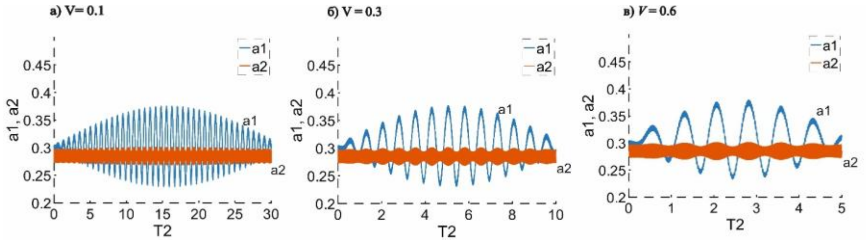

Рисунок 6. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_2 от безразмерного времени T_2 при $\omega_{05} = \Omega_{03} = 1.083 \cdot 10^{-3}, \sigma = 0, f = 3, \gamma = 0$.

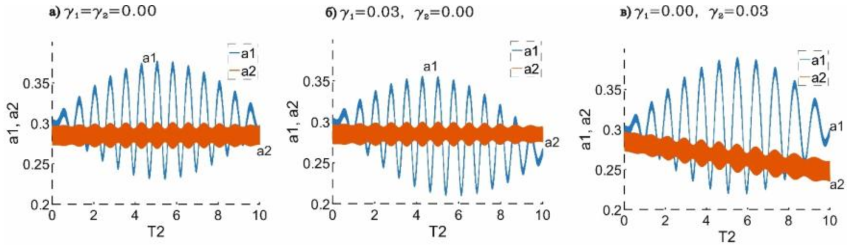

Рисунок 7. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_2 от безразмерного времени T_2 при $\omega_0 = \Omega_0 = 1.083 \cdot 10^{-3}, \sigma = 0, f = 3, V = 0.3$.

Зависимости обобщенных вертикальных и крутильных перемещений от времени, подсчитанные на основе соотношений (4) для различных амплитуд внешней силы, приведены на рис. 8, из которого видно, что перемещение x_1 более восприимчиво к увеличению амплитуды внешней вертикальной силы, чем x_2.

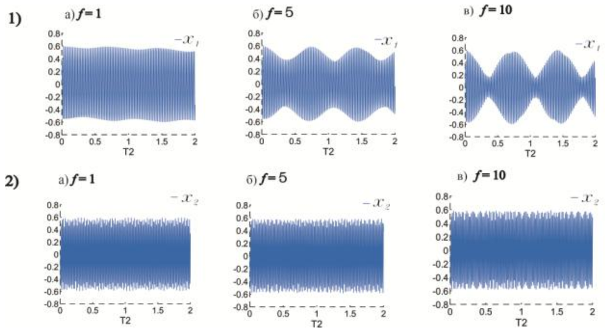

Рисунок 8. Зависимость безразмерного перемещений от безразмерного времени T_2 при $\omega_0 = \Omega_0 = 1.083 \cdot 10^{-3}, \sigma = 0$. 1) вертикальное перемещение x_1, 2) крутильное перемещение x_2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Характеристики демпфирования висячей комбинированной системы адекватно описываются дробными производными. При этом параметр дробности выполняет роль конструктивного параметра всей системы и влияет на характер коэффициента затухания в зависимости от собственных частот линейных колебаний. Когда параметр дробности стремится к единице, т. е. когда дробная производная преобразуется в первую производную по времени, коэффициент затухания системы не зависит от собственных частот линейных колебаний, что противоречит экспериментальным данным. Таким образом, принятая в данной диссертационной работе реологическая модель является более предпочтительной, чем наиболее часто используемая в инженерной практике.

2. Предложены нелинейные дифференциальные уравнения дробного порядка для описания вынужденных колебаний висячих комбинированных систем под действием гармонических нагрузок. Показано, что изучаемая система уравнений допускает появление внутреннего резонанса один-к-одному или два-к-одному. Рассмотрен неблагоприятный для работы конструкции режим, когда частота возмущающей силы близка к одной из собственных частот колебаний, уже находящейся в условиях внутреннего резонанса, т.е. ситуация наложения внешнего резонанса на внутренний. Впервые показано, что внешний резонанс при действии подвижной нагрузки зависит от скорости ее движения. Другими словами, меняя скорость прохождения нагрузки, можно регулировать явлением внешнего резонанса.
3. Обобщенным методом многих временных масштабов получены разрешающие нелинейные уравнения относительно амплитуд и фаз вынужденных колебаний, приближенные аналитические и численные решения которых найдены с помощью метода вариации произвольных постоянных и метода Рунге-Кутта четвертого порядка, на основе которого для выполнения численных экспериментов был разработан алгоритм, зарегистрированный в государственном реестре программ для ЭВМ.
4. Наглядно продемонстрирована перекачка энергии между взаимодействующими нелинейными модами колебаний, что характеризует прямое влияние внутреннего резонанса на процесс вынужденных колебаний. Показано влияние параметров дробности на свободные и вынужденные колебания, поскольку их увеличение приводит к значительному уменьшению амплитуд нелинейных колебаний висячих мостов, которые могут резко возрастать вследствие внешнего резонанса.
5. Изучено влияние амплитуды и скорости внешнего воздействия на характер нелинейных вынужденных колебаний. Показано, что с ростом амплитуды и скорости гармонической силы увеличивается диапазон изменения амплитуд колебаний, то есть усиливается интенсивность энергообмена при наложении внешнего резонанса на внутренний. Сравнительный анализ показал, что изменение амплитуды подвижной вертикальной гармонической силы больше влияет на характер поведения амплитуд вертикальных колебаний, чем на амплитуды крутильных колебаний.

Основные положения диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

Статьи в изданиях, проиндексированных в международных базах Web of Science и Scopus

1) **Katembo A.L.** Analysis of nonlinear forced vibrations of fractionally damped suspension bridges subjected to the one-to-one internal resonance / M.V. Shitikova, A.L. Katembo // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. Issue. 4. P. 113-129. DOI: 10.22337/2587-9618-2020-16-2-113-131.
2) **Katembo A.L.** Influence of fractional calculus model parameters on nonlinear forced vibrations of suspension bridges / A.L. Katembo, M.V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019. Vol. 489. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012037.

3) **Katembo A.L.** Numerical analysis of forced vibrations of the Golden Gate suspension bridge in the case of the 1:1 internal resonance / A.L. Katembo, M.V. Shitikova, V.V. Kandu // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020. Vol. 747. DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012052.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

4) **Катембо А.Л.**, Канду В.В., Шитикова М.В. Программный комплекс численных исследований нелинейных вынужденных колебаний висячих мостов под действием подвижных и сосредоточенных нагрузок при наличии внутреннего и внешнего резонансов. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. Регистрационный № RUS 2021664106 от 31 августа 2021 года.

Статьи и материалы конференций

5) **Катембо А.Л.** Моделирование нелинейных колебаний висячих комбинированных систем при наличии внутреннего резонанса / А.Л. Катембо, М.В. Шитикова // Сборник трудов: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Уфа, 19-24 августа 2019. – Том 3. – С. 542-544.
6) **Катембо А.Л.** Влияние параметров вязкоупругой модели с дробной производной на вынужденные колебания висячих мостов / А.Л. Катембо, М.В. Шитикова // Труды конференции: Юбилейная XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения / Изд-во ИМАШ РАН. – Москва, 20-23 ноября 2018 г. – С. 316-319.
7) **Катембо А.Л.** Численный анализ вынужденных колебаний висячего моста Золотые Ворота в случае внутреннего резонанса 1:1 / А.Л. Катембо, М.В. Шитикова, В.В. Канду // Труды конференции: XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения / Изд-во ИМАШ РАН. – Москва, 4-6 декабря 2019 г. – С. 310-313.
8) **Katembo A.L.** Analysis of nonlinear vibrations of suspension bridges subjected to a moving force in the presence of the internal resonance / M.V. Shitikova, A.L. Katembo // Abstracts of the International Conference on Nonlinear Solid Mechanics (IConSoM), 16-19 June 2019, Roma, Italy.
9) **Katembo A.L.** Dynamics of suspension bridges: nonlinear free and forced vibrations with internal resonances / M.V. Shitikova, A.L. Katembo // Booklet of Abstracts of the Symposium “Nonlinear Dynamics – Scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanovich) Hedrih”. Belgrade, 4-6 September 2019. – P. 43-44.
10) **Katembo A.L.** Analysis of force driven vibrations of suspension bridges under primary and 2:1 internal resonances / M.V. Shitikova, A.L. Katembo // Proceedings of the 14th International Conference on Vibration Problems. Crete, Greece, 1-4 September 2019. https://icovp2019.org/proceedings/pdf/18686.pdf

Подписано в печать 04.03.2022 г. Формат 80x64 1/16
Бумага писчая. Усл. п.л. 1,0 Тираж 100 экз. Заказ № 69

Отпечатано: отделом оперативной полиграфии ВГТУ
394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84