На правах рукописи

Янбарисов Руслан Маратович

Методы конечных объемов для гидродинамических задач в областях с не разрешаемыми сеткой границами

Специальность 1.1.6 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Никитин Кирилл Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук
Официальные оппоненты:	**Колдоба Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор МФТИ, заведующий лабораторией флюидодинамики и сейсмоакустики МФТИ
	Савенков Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В.Келдыша РАН
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 17 февраля 2022 года в __ часов на заседании диссертационного совета 24.1.137.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН и на сайте https://keldysh.ru/council/3/D00202403/defence3.htm .

Автореферат разослан «___» _____ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.137.01
к.ф.-м.н. Корнилина М.А.

Общая характеристика работы

Настоящая работа посвящена исследованию и построению численных методов решения задач фильтрации и гидродинамики с границами, не разрешенными расчетной сеткой.

Актуальность работы. При численном моделировании задач фильтрации и гидродинамики возникает необходимость корректного учета внутренних границ и поверхностей, которые могут быть как статическими, так и динамическими. Примерами таких поверхностей могут служить крупные трещины в пористых фильтрационных средах, свободная поверхность однофазной несжимаемой жидкости. Для учета подобных поверхностей в гидродинамических задачах часто применяют лагранжевы методы отслеживания с явным разрешением поверхностей адаптируемой расчетной сеткой. Такой подход обладает недостатком в случае движущихся поверхностей, таких, как свободная поверхность жидкости, поскольку в этом случае на каждом временном шаге необходимо строить новую поверхностную сетку, что является вычислительно затратным. Помимо этого, сама задача построения сетки, адаптируемой к внутренним поверхностям, может быть трудной. В качестве примеров можно привести задачу построения сетки в трехмерной пористой среде с большим числом пересекающихся трещин, задачу адаптации сетки к свободной поверхности в случае слияния двух капель жидкости.

В данной работе для задач фильтрации в трещиноватых пористых средах статические крупные трещины моделируются вложенными сетками, при этом трехмерная сетка пористой среды не адаптируется к положению трещин. В задачах течения жидкостей свободная поверхность задается неявно с помощью глобально определенной функции уровня.

Целью диссертационной работы является разработка и исследование конечно-объемных методов для математических моделей фильтрации и течения неньютоновских несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью, позволяющих эффективно учитывать вложенные в сетку границы и получать физически корректные дискретные решения.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать и исследовать новые численные методы учета трещин для задач фильтрации, основанные на применении нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потоков.

2. Разработать численную модель течения вязкопластичного и вязкоэластичного материала со свободной поверхностью.

3. Разработать программные реализации предложенных численных моделей и верифицировать их на серии тестовых задач.

Научная новизна. Впервые были получены следующие результаты:

1. Предложены, исследованы и разработаны монотонные методы вложенных дискретных трещин, основанных на применении нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потоков внутри пористой среды.

2. Сформулированы и доказаны теоремы о сохранении неотрицательности / удовлетворении дискретного принципа максимума переменной давления в задаче диффузии в областях пористой среды и трещин при использовании одной из двух нелинейных схем дискретизации потоков в пористой среде.

3. Предложена и разработана математическая модель течения вязкоэластичного материала, основанная на совмещении моделей вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б и гиперупругого твердого тела нео-Гука.

Теоретическая значимость работы состоит в формулировке новых нелинейных конечно-объемных дискретизаций задач диффузии и двухфазной фильтрации в пористой среде с крупными трещинами, и доказательстве сохранения неотрицательности / выполнении дискретного принципа максимума для переменной давления в задаче диффузии; в формулировке новой математической модели течения вязкоэластичного материала, основанной на совмещении моделей вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б и гиперупругого твердого тела нео-Гука.

Практическая значимость работы заключается в реализации исследованных моделей диффузии и двухфазной фильтрации в рамках внутреннего симулятора многофазных течений в пористых средах и моделей течения неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью в рамках программного пакета Floctree.

Предложенные численные методы решения задач диффузии и двухфазной фильтрации могут быть использованы для решения инженерных задач, связанных с моделированием нефтедобычи в трещиноватых пористых резервуарах. Разработанный полунеявный метод расчета течений вязкопластичных и вязкоэластичных жидкостей может быть использован в таких приложениях, как моделирование катастроф, задачи биопринтинга и другие.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены и исследованы монотонные методы вложенных дискретных трещин для задач фильтрации, основанные на применении нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потока внутри пористой среды.

2. Доказано, что монотонные свойства нелинейных схем, используемых для дискретизации потоков внутри пористой среды (неотрицательность решения при использовании нелинейной двухточечной схемы; наличие

дискретного принципа максимума при использовании нелинейной многоточечной компактной схемы), выполняются для дискретного решения задачи диффузии в пористой среде и трещинах.

3. Разработан полунеявный метод расчета течений неньютоновских жидкостей (вязкопластичной жидкости Хершеля-Балкли и вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б) со свободной поверхностью в трехмерных областях с использованием сеток типа восьмеричное дерево.

4. Предложена и разработана новая математическая модель вязкоэластичного материала, основанная на совмещении моделей гиперэластичного твердого тела нео-Гука и вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б.

5. Численные реализации разработанных методов внедрены в программные пакеты: внутренний симулятор многофазных течений и программный пакет Floctree моделирования течений несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью на динамически перестраиваемых сетках типа восьмеричное дерево.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ряде научных конференций и семинаров:

1. Совместный научный семинар ИВМ РАН и университета Аугсбурга «German-Russian Workshop on Numerical Modelling in Geophysics and Biomathematics» (Сьон, Швейцария, 2018).

2. Совместный научный семинар ИВМ РАН и университета Аугсбурга «German-Russian Workshop on Numerical Modelling in Geophysics and Biomathematics» (Сьон, Швейцария, 2019).

3. Международная конференция «3th International Conference “Multiscale Methods and Large-scale Scientific Computing”» (Владивосток, 2019).

4. Международная конференция «Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods, Theoretical Aspects, Examples» (проводилась онлайн, 2020).

5. Всероссийская конференция «XII конференции по математическим моделям и численным методам в биологии и медицине» (проводилась онлайн, 2020).

6. Международный семинар «KAUST International Seminar on Mathematical Models and Numerical Methods for Flow and Transport in Porous Media» (проводился онлайн, 2021).

7. Всероссийская конференция «Вычислительная математика и приложения» (Математический центр НТУ Сириус, 2021).

8. Всероссийская конференция молодых ученых-механиков (Сочи, 2021).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 7 работ [1—7] в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science. Из них 2 работы [5; 6] опубликованы в журналах из списка ВАК по профилю специальности, и 4 опубликованы в международных журналах из первого квартиля [1; 2; 4; 7].

Личный вклад. В работах [2—4] вклад автора заключался в доказательстве теорем для предложенных монотонных методов, разработке и внедрении методов во внутренний симулятор многофазной фильтрации, проведении численных экспериментов. В работе [1], представляющей собой результат большого сравнительного исследования численных методов решения задач однофазной фильтрации и переноса в трещиноватых средах, вклад автора заключался в верификации предложенных монотонных методов на серии тестовых задач. В работах [5—7] вклад автора заключался в построении и исследовании новых численных моделей течения вязкопластичных и вязкоэластичных жидкостей со свободной поверхностью, их разработке и внедрении в программный пакет Floctree, верификации моделей на численных и экспериментальных данных из литературы.

Объём и структура диссертации. Настоящая диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Объём диссертации составляет 117 страниц, включая 40 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 100 наименований.

Благодарности. *Автор выражает благодарность научному руководителю К.Д.Никитину за помощь, ценные советы и полезные обсуждения. Также автор глубоко признателен Ю.В.Василевскому и К.М.Терехову за замечания, рекомендации и всестороннюю поддержку.*

Работа поддержана грантами РНФ 18-71-10111, 19-71-10094, грантом РФФИ 19-31-90110 и Московским центром фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1624).

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор литературы, обосновывается актуальность работы, формулируется цель работы и ставятся задачи, необходимые для ее достижения. Излагается практическая значимость, научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** предложен подход для решения задач диффузии и двухфазной фильтрации в трещиноватых пористых средах, основанный на совмещении метода вложенных дискретных трещин и нелинейных конечно-объемных схем дискретизации потока внутри пористой среды.

В *разделе 1.1* приводится обзор методов, используемых для решения задач многофазных течений в областях с крупными трещинами (трещинами, превышающими своими продольными размерами локальный шаг расчетной сетки пористой среды).

В *разделе 1.2* излагается постановка задачи диффузии в пористых средах с крупными трещинами. Предполагается, что трещиноватая пористая среда представима в виде двух независимых областей пористой среды и трещин, а течение в ней задается уравнением диффузии для потоков q^m, q^f с неизвестными давления p^m, p^f в каждой из областей, в пористой среде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q^m &= g^m - q^{mf} && \text{в } \Omega^m \subset \mathbb{R}^3, \\ q^m &= -\mathbb{K}^m \nabla p^m, && \\ p^m &= \overline{p} && \text{на } \Gamma_D^m, \\ \mathbf{n} \cdot q^m &= \overline{u} && \text{на } \Gamma_N^m, \end{aligned} \tag{1}$$

и трещинах:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q^f &= g^f + q^{mf} && \text{в } \Omega^f \subset \mathbb{R}^3, \\ q^f &= -\mathbb{K}^f \nabla p^f, && \\ p^f &= \overline{p} && \text{на } \Gamma_D^f, \\ \mathbf{n} \cdot q^f &= \overline{u} && \text{на } \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f, \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь Ω^m - трёхмерная область пористой среды с границей $\Gamma^m = \Gamma_D^m \cup \Gamma_N^m \cup \Omega^f$, состоящей из границ $\Gamma_D^m = \overline{\Gamma}_D^m, \Gamma_D^m \neq \emptyset$ и Γ_N^m с фиксированными давлением $\bar{p}$ и потоком $\bar{u}$ соответственно, и внутренней границы Ω^f, представляющей двумерную область срединных поверхностей трещин. Ребра трещин $\Gamma^f = \Gamma_D^f \cup \Gamma_N^f \cup \Gamma_0^f$ разделяются на ребра $\Gamma_D^f \subset \Gamma_D^m$ и $\Gamma_N^f \subset \Gamma_N^m$, выходящие на границу Ω^m и внутренние ребра $\Gamma_0^f \subset \Omega^m$.

Свойства пористой среды задаются в общем случае анизотропным, неоднородным тензором проницаемости $\mathbb{K}^m = (\mathbb{K}^m)^T > 0$. В среде трещин тензор проницаемости полагается изотропным: $\mathbb{K}^f = k^f \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ - единичный тензор размера 3×3. Слагаемые g^m, g^f соответствуют источникам/стокам.

Рассматриваемую математическую модель можно получить осреднением уравнений течения в тонкой трехмерной трещине по ее ширине. Граничными условиями для внутренних границ "трещина-пористая среда"являются непрерывность давлений и потоков в нормальном направлении к трещине с каждой из ее сторон [1]. Это приводит к возникновению противоположных по знаку потоков q^{mf} в уравнениях каждой из сред, соответствующих перетокам между ними. В дальнейшем предполагается, что срединная поверхность трещины задана плоским многоугольником в трехмерном пространстве пористой среды.

В *разделе 1.3* описывается монотонный метод вложенных дискретных трещин для задачи диффузии в трещиноватой пористой среде. Монотонный метод является модификацией подхода, называемого моделью (а также методом) вложенных дискретных трещин (Embedded Discrete Fracture Model, EDFM [2] [3]).

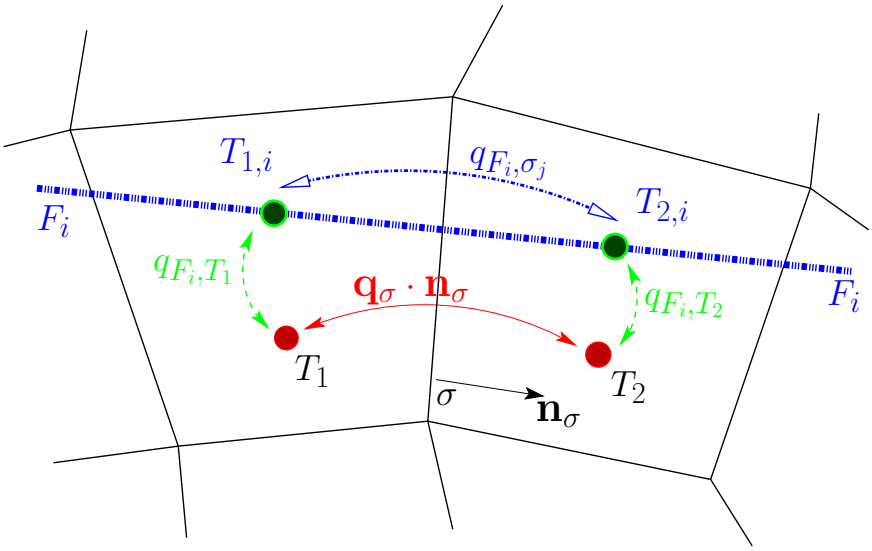

Рис. 1. Потоки Дарси: между ячейками пористой среды $\mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma$, между ячейками пористой среды и трещины $q_{F_i,T}$, между виртуальными ячейками трещины q_{F_i,σ_j}.

Модель вложенных дискретных трещин основана на представлении каждой трещины F_i виртуальными ячейками $T_i = T \cap F_i$ – двумерными многоугольниками пересечения с ячейками расчётной сетки $T \in \mathcal{T}$, не разрешёнными ею. Каждой виртуальной ячейке T_i соответствует определённая в центре масс многоугольника пересечения степень свободы $p^f_{T,i}, i = 1, \dots n_T$ локального давления трещины. Здесь n_T - количество трещин, пересекающих T.

[1] Martin V., Jaffré J., Roberts J. E. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media //SIAM Journal on Scientific Computing. – 2005.

[2] Li L., Lee S. H. Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media //SPE Reservoir evaluation & engineering. – 2008.

[3] Moinfar A. et al. Development of a coupled dual continuum and discrete fracture model for the simulation of unconventional reservoirs //SPE Reservoir Simulation Symposium. – OnePetro, 2013.

Для дискретизации уравнений (1)-(2) методом конечных объёмов вводится несколько типов потоков: поток внутри пористой среды, поток между пористой средой и трещинами, поток внутри одной трещины и поток между пересекающихся трещин (рис. 1). Это приводит к следующим уравнениям в ячейках T и $T_i, i = 1, \ldots, n_T$:

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \partial T} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma}_{\text{ячейка-ячейка}} - \underbrace{\sum_{i=1,\ldots,n_T} q_{F_i,T}}_{\text{ячейка-трещина}} = \int_T g^m d\mathbf{x}, \tag{3}$$

$$\underbrace{\sum_{\sigma_j \in \partial T_i} q_{F_i,\sigma_j}}_{\text{внутритрещ.}} + \underbrace{\sum_{j=1,\ldots,n_T} q_{F_{ij},T}}_{\text{трещина-трещина}} + \underbrace{q_{F_i,T}}_{\text{ячейка-трещина}} = \int_{T_i} g^f d\mathbf{x}, \tag{4}$$

$$i = 1, \ldots, n_T.$$

В стандартном EDFM для дискретизации потоков всех типов используется линейная двухточечная схема (TPFA). В данной работе предлагается монотонный EDFM (mEDFM), в рамках которого потоки внутри пористой среды дискретизируются с помощью одной из двух нелинейных схем: нелинейной двухточечной схемы, сохраняющей неотрицательность дискретного решения(NTPFA) или нелинейной многоточечной схемы с дискретным принципом максимума (NMPFA).

В подразделах 1.3.1 – 1.3.4 приводится описание дискретизации потоков всех типов, включая краткое описание нелинейных конечно-объемных дискретизаций потока внутри пористой среды. Для линейной двухточечной схемы приводится вид коэффициентов передаваемости (transmissibility) для потоков внутри области трещин и между областями. Эти коэффициенты рассчитываются с использованием геометрических характеристик пересечения полигонов трещины и расчетной сетки. Отметим, что при добавлении трещин расчетная сетка пористой среды не адаптируется к их положению.

Подраздел 1.3.5 посвящен анализу свойств mEDFM. Дискретизация методом mEDFM приводит к нелинейной системе уравнений. Доказано, что при решении полученной системы методом Пикара и его сходимости итоговое решение обладает монотонными свойствами (неотрицательность решения при использовании NTPFA и дискретный принцип максимума при использовании NMPFA) во всей области, включая область трещин.

В *разделе 1.4* рассматривается монотонный метод, основанный на проекционной версии EDFM (projection-based EDFM, pEDFM [4]) и следующий описанному ранее подходу: вместо линейной двухточечной схемы дискретизации потока внутри пористой среды применяется нелинейная многоточечная схема

[4] Ţene M. et al. Projection-based embedded discrete fracture model (pEDFM) //Adv. in W. Res. – 2017.

NMPFA с дискретным принципом максимума. Преимуществом pEDFM относительно стандартного подхода является корректный учет трещин с меньшей проницаемостью, чем окружающая ее пористая среда. Это преимущество достигается описанным в подразделах 1.4.1–1.4.2 добавлением дополнительных потоков между пористой средой и трещинами (рис. 2). Чтобы компенсировать добавление дополнительных потоков, поток между ячейками пористой среды масштабируется на коэффициент перекрытия грани трещинами.

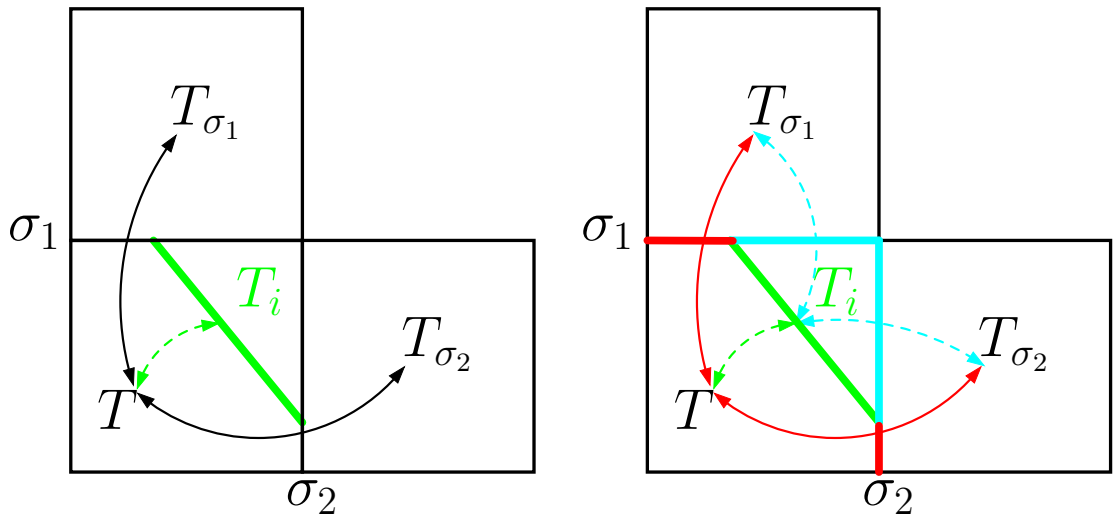

Рис. 2. Шаблоны для потоков между трещиной и ячейками пористой среды для EDFM (слева) и pEDFM(справа). Справа: дополнительные потоки отмечены голубым, не перекрытая трещинами площадь между ячейками отмечена красным.

В подразделе 1.4.3 производится анализ монотонного pEDFM. Доказано, что при решении нелинейной системы уравнений методом Пикара и его сходимости итоговое решение удовлетворяет дискретному принципу максимума во всей области, включая область трещин.

В *разделе 1.5* описаны результаты численных экспериментов, в которых были исследованы монотонные свойства методов, проведено сравнение результатов с референтными, изучена сходимость предложенных методов с измельчением сетки и их масштабируемость с увеличением числа процессоров.

В подразделах 1.5.1–1.5.2 в рамках тестов на неотрицательность и удовлетворение ДПМ решения производится проверка доказанных ранее теорем и сравнение результатов монотонных методов с стандартным EDFM. Результаты демонстрируют, что решение, полученное стандартным подходом, содержит постоянную ошибку аппроксимации, связанную с некорректным учетом анизотропии пористой среды, в то время как монотонные методы лишены этого недостатка.

Из результатов теста на ДПМ с блокирующей трещиной (рис. 4) можно сделать вывод, что монотонный pEDFM (pEDFM+NMPFA) дает близкое к референтному решение, в то время как остальные подходы не учитывают низкопроницаемость трещины и/или анизотропию тензора проницаемости в пористой среде.

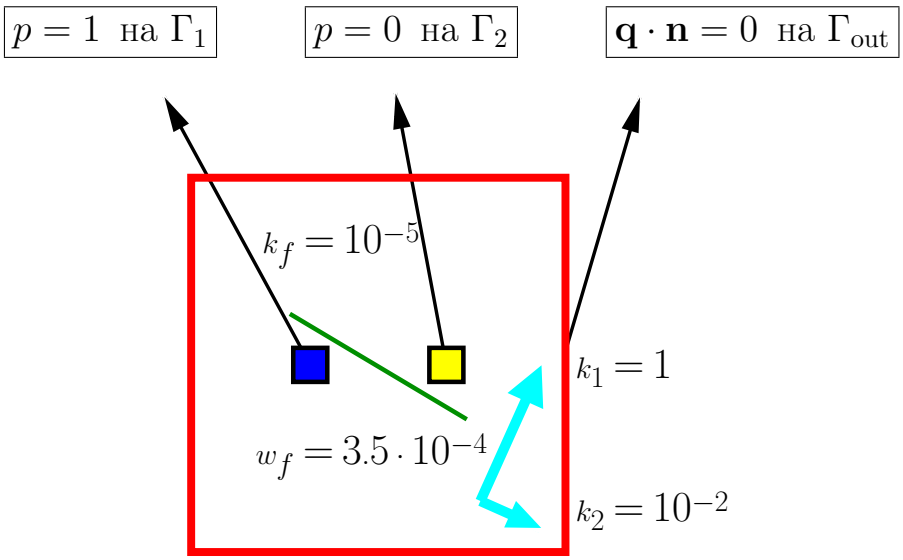

Рис. 3. Постановка теста на дискретный принцип максимума с блокирующей трещиной (зеленым).

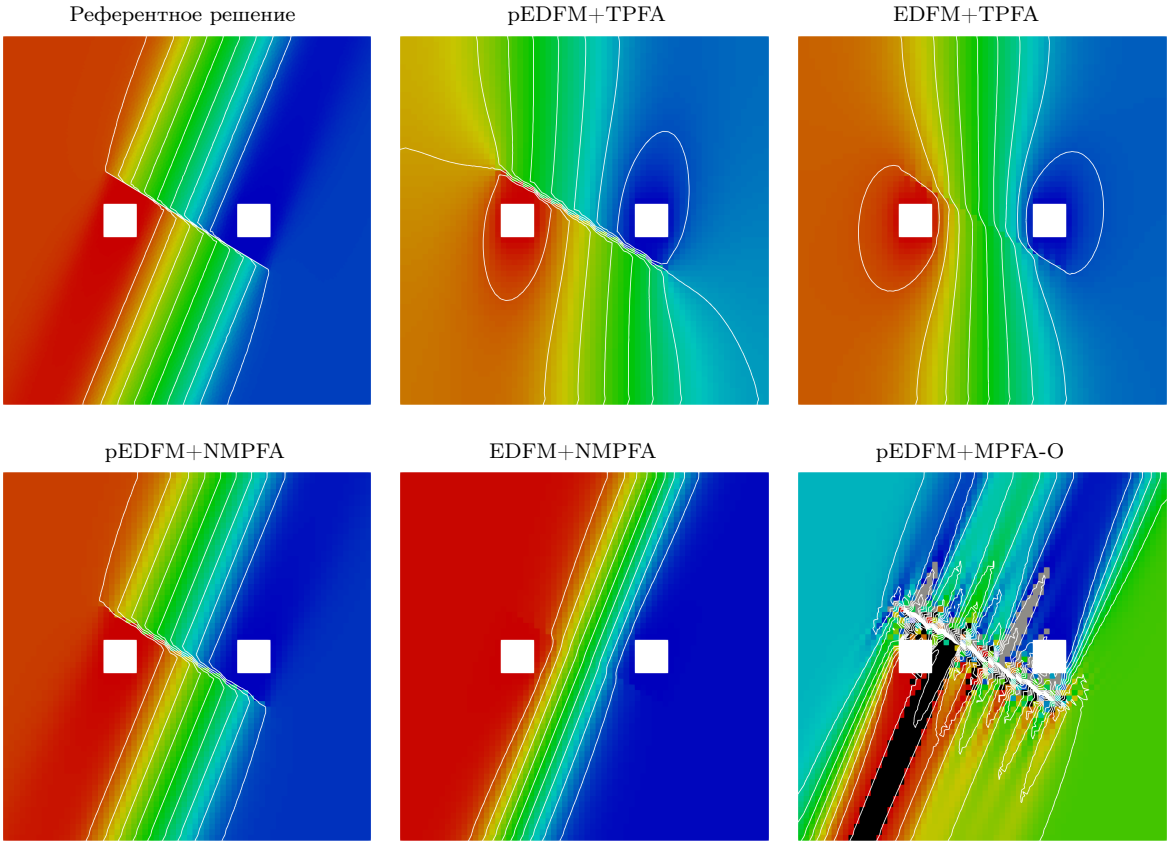

Рис. 4. Тест на дискретный принцип максимума с блокирующей трещиной: дискретные решения.

В подразделе 1.5.3 рассматривается тест на сходимость mEDFM при измельчении кубической и треугольно-призматической сеток пористой среды. Показано, что mEDFM сходится с первым порядком в L_2-норме независимо от типа рассматриваемых сеток.

Подраздел 1.5.4 посвящен верификации монотонного pEDFM на одной из задач сравнительного исследования по моделям фильтрации в трещиноватых пористых средах. Полученное решение находится в хорошем соответствии с результатами, полученными другими верифицированными методами.

В подразделе 1.5.5 рассматривается задача диффузии и переноса примеси в анизотропной пористой среде с блокирующими и проводящими трещинами. Решения, полученные методами EDFM и pEDFM с использованием различных схем для потоков внутри пористой среды, сравниваются с референтным, полученным на мелкой сетке с явно разрешенными трехмерными ячеекам трещинами. Показано, что монотонный pEDFM дает близкое к референтному решение, корректно учитывая как анизотропию в пористой среды, так и трещины различных проводимостей.

Подраздел 1.5.6 посвящен тесту на масштабируемость метода. Рассматривается задача однофазной фильтрацией с анизотропным тензором проницаемости пористой среды и сетью трещин, состоящей из 52 проводящих трещин, полученной оцифровкой реальных данных с месторождения в Норвегии. Результаты демонстрируют удовлетворительную масштабируемость метода при увеличении числа процессоров.

В *разделе 1.6* рассматривается расширение подхода на модель двухфазной фильтрации. В подразделе 1.6.1 вводится математическая модель двухфазной фильтрации в средах с крупными трещинами. Неизвестными модели являются давления p_α и насыщенности S_α смачивающей ($\alpha = w$) и несмачивающей ($\alpha = o$) фаз. Закон сохранения масс каждой из фаз в пористой среде и трещинах Ω^m, Ω^f может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi^m S_\alpha^m}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mm}\right) + \operatorname{div}\left(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{mf}\right) = q_\alpha^m, \quad \text{в} \quad \Omega^m,\ \alpha = w, o, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha \varphi^f S_\alpha^f}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{fm}\right) + \operatorname{div}\left(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^{ff}\right) = q_\alpha^f, \quad \text{в} \quad \Omega^f,\ \alpha = w, o, \tag{6}$$

$$S_w + S_o = 1, \tag{7}$$

$$p_o - p_w = p_c \tag{8}$$

где $\mathbf{u}_\alpha^{mm} = -\lambda_\alpha \mathbb{K}^m \nabla p_\alpha^m$ – поток Дарси внутри пористой среды с неизвестными давления p^m и насыщенности S^m, $\mathbf{u}_\alpha^{ff} = -\lambda_\alpha \mathbb{K}^f \nabla p_\alpha^f$ – поток Дарси внутри трещин с неизвестными давления p^f и насыщенности S^f, $\mathbf{u}_\alpha^{mf} = -\mathbf{u}_\alpha^{fm}$ – поток между пористой средой и трещинами; $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(p_\alpha, S_\alpha)$ – мобильность фазы $\alpha = w, o$, определяемая табличными зависимостями от давления и насыщенности в рассматриваемой области. Дополнительными соотношениями являются отсутствие пустот (7) и связь фазовых давлений через капиллярное давление (8), которым в данной работе считается равным нулю. В дальнейшем неизвестными модели считаются p_o, S_w.

В подразделе 1.6.2 описывается монотонный метод EDFM для рассматриваемой модели двухфазной фильтрации. Используется полностью неявный метод дискретизации уравнений модели по времени. Дискретизация потоков

аналогична представленной ранее для задачи диффузии, для мобильностей применяется противопотоковая аппроксимация. Для потоков внутри пористой среды применяется нелинейная двухточечная схема NTPFA. Для решения полученной в результате дискретизации нелинейной системы уравнений используется метод Ньютона.

В подразделе 1.6.3 рассматривается численный эксперимент для задачи двухфазной фильтрации в анизотропной пористой среде с двумя высокопроводящими трещинами (рис. 5). В плоском прямоугольном пласте размеров 100 фт × 100 фт × 10 фт с постоянными начальными давлениями нефти $p_o|_{t=0} = p_0 = 4000$ пси и насыщенностями воды $S_w|_{t=0} = S_0 = 0.15$ в нижнем левом и верхнем правом углах расположены нагнетательная и добывающая скважины с заданными забойными давлениями $p_{inj} = 4100$ пси и $p_{prod} = 3900$ пси соответственно. Расчет производился с шагом по времени $\Delta t = 1$ д до достижения $T = 90$ д.

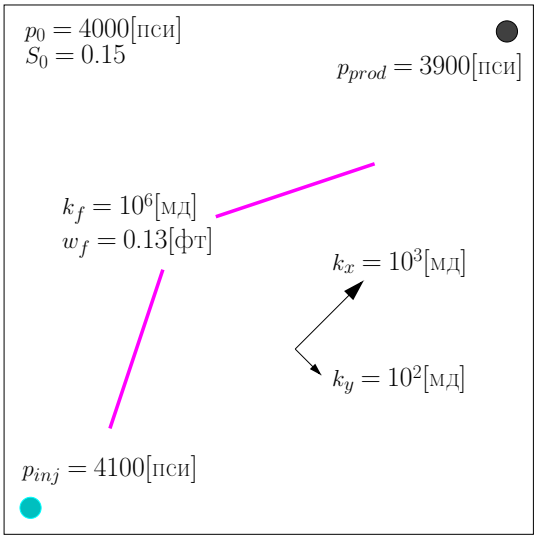

Рис. 5. Постановка численного эксперимента для задачи двухфазной фильтрации с двумя трещинами.

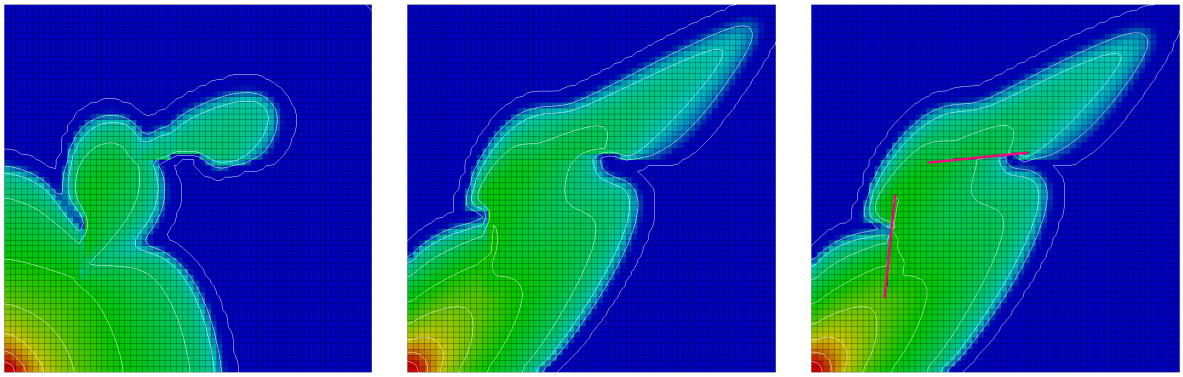

Рис. 6. Поля насыщенности воды в момент $T = 45$ дней. Решение методом EDFM+TPFA (слева), EDFM+NTPFA (посередине), референтное решение (справа).

Производится сравнение полей давления нефти и насыщенности воды, времени водяного прорыва на добывающей скважине для трех методов: методы EDFM+TPFA и EDFM+NTPFA сравниваются с референтным расчетом с использованием схемы NTPFA на призматической сетке, явно разрешающей трещины в виде тонких слоев трехмерных ячеек. Решение, полученное методом EDFM+NTPFA, практически совпадает с референтным благодаря корректному учету анизотропии в пористой среде, в то время как решение методом EDFM+TPFA значительно от него отличается (рис. 6).

Также проводится сравнение времени расчета методами EDFM+TPFA и EDFM+NTPFA. Несмотря на то, что схема NTPFA формально двухточечная, ее использование приводит к многоточечному шаблону в матрице якобиана, что может приводить к увеличенным затратам на решение линейных систем уравнений.

Из сравнения полного времени расчета, числа линейных и нелинейных итераций (табл. 1) можно отметить, что полные времена расчета отличаются не более чем на 30%, а число нелинейных итераций для обоих методов практически совпадает.

	t_{total}[c]	$t_{precond}$[c]	t_{solver}[c]	liters	niters
EDFM+TPFA	316	124	99	46250	1662
EDFM+NTPFA	405	95	188	114375	1635

Таблица 1. Задача двухфазной фильтрации: полное время расчета (t_{total}), время на предобуславливание ($t_{precond}$) и решение (t_{solver}) линейных систем уравнений, число линейных (liters) и нелинейных итераций (niters).

Можно сделать вывод, что использование метода mEDFM не является слишком затратным с точки зрения вычислений по сравнению со стандартным подходом, при этом позволяет учитывать анизотропию в пористой среде.

В *разделе 1.7* представлены выводы к первой главе. В *разделе 1.8* приведено описание комплекса программ и детали реализации предложенных моделей.

Во **второй главе** представлен реализованный в работе подход для моделирования течений неньютоновских (вязкопластичных и вязкоэластичных) несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью. Для описания вязкопластичных и вязкоэластичных течений используются модели Хершеля-Балкли и Олдройда-Б, соответственно.

Свободная поверхность жидкости описывается изоповерхностью нуля глобально определенной функции уровня. Задача переноса жидкой области сводится к решению уравнения переноса для функции уровня на каждом шаге по времени.

В *разделе 2.1* приводится краткий обзор современных численных моделей течения несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью.

Раздел 2.2 посвящен описанию математических моделей неньютоновских жидкостей Хершеля-Балкли и Олдройда-Б. Рассматривается течение неньютоновского несжимаемого материала со свободной поверхностью с неизвестными скорости $\mathbf{u}$ и давления p:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g} \quad \text{в} \quad \Omega(t) \tag{9}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

Тензор девиаторных напряжений $\boldsymbol{\tau}$ определяет реологию материала:

- Вязкопластическая жидкость Хершеля-Балкли:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(K|\mathbf{D}|^{n-1} + \tau_s|\mathbf{D}|^{-1}\right)\mathbf{D} \leftrightarrow |\boldsymbol{\tau}| > \tau_s, \tag{10}$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \leftrightarrow |\boldsymbol{\tau}| \le \tau_s, \tag{11}$$

  где $\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$ – тензор скоростей деформации, $|\mathbf{D}| = ||\mathbf{D}||_F = \sqrt{tr(\mathbf{D}^T\mathbf{D})}$ – скорость сдвиговых деформаций. Параметрами модели являются K – индекс согласованности, τ_s – предел текучести, n – индекс течения. При $n = 1$ и $\tau_s = 0$ модель описывает ньютоновскую жидкость с вязкостью $K/2$.

- Вязкоэластичная жидкость Олдройда-Б:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu_0\left(\mathbf{D} + \lambda_2\overset{\triangledown}{\mathbf{D}}\right) \tag{12}$$

  где $\overset{\triangledown}{\mathbf{C}} = \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{C} - (\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{C} - \mathbf{C}(\nabla\mathbf{u})$ – материальная производная Олдройда тензора $\mathbf{C}$. Параметрами модели являются λ_1 – время релаксации, $\lambda_2 \le \lambda_1$ – время запаздывания, μ_0 – полная вязкость жидкости. При $\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$ модель описывает ньютоновскую жидкость с вязкостью μ_0.

В подразделе 2.2.4 предлагается *новая* математическая модель течения вязкоэластичной жидкости, основанная на совмещении модели Олдройда-Б и модели нео-Гука гиперупругого несжимаемого тела с параметром совмещения $\alpha \in [0, 1]$:

$$\boldsymbol{\tau} = (1-\alpha)\boldsymbol{\tau}_1 + \alpha\boldsymbol{\tau}_2, \tag{13}$$
$$\boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_1\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}}_1 = 2\beta\mu_0(\mathbf{D} + \lambda_2\overset{\triangledown}{\mathbf{D}}), \tag{14}$$
$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}}_2 = 2\frac{\mu_0}{\lambda_1}\mathbf{D}. \tag{15}$$

Разработка новой математической модели вязкоэластичного материала обусловлена экспериментально наблюдаемыми результатами исследований биоматериалов (многоклеточных сфероидов), согласно которым последние могут проявлять свойства как жидкости, так и твердого тела.

В *разделе 2.3* представлен унифицированный подход для решения задачи течений неньютоновских жидкостей. Численный метод состоит из двух шагов: (1) обновления положения свободной поверхности; (2) решения полностью неявной схемой связанной системы уравнений импульса, неразрывности и состояния. В подразделе 2.3.1 описываются подшаги обновления свободной поверхности, включающие в себя перестроение сетки, перенос функции уровня, коррекцию объема жидкой области и другие. В подразделах 2.3.2 – 2.3.3 описывается неявная схема решения уравнений течения жидкости. Уравнения дискретизируются гибридным конечно-объемным/конечно-разностным методом на сетках типа восьмеричное дерево с разнесенным расположением неизвестных. В описание входит пространственная дискретизация инерционных, диффузионных, эластичных слагаемых уравнений.

Раздел 2.4 посвящен верификации представленного численного метода на серии экспериментов с вязкопластичными и вязкоэластичными жидкостями.

В подразделе 2.4.1 рассматривается эксперимент с вязкоэластичной каплей, падающей в поле тяжести на твердую поверхность. После ударения о поверхность диаметр капли увеличивается, пока накапливающиеся эластичные силы не превысят инерционные, после чего капля начнет поджиматься, а диаметр капли – уменьшаться. Полученные зависимости диаметра капли от времени находятся в хорошем соответствии с референтными расчетами из литературы.

В подразделе 2.4.2 исследуются затухающие колебания неньютоновских капель в вакууме, вызванные поверхностным натяжением. В первой серии экспериментов с каплями Хершеля-Балкли показано что увеличение предела текучести приводит к более ранней остановке колебаний, причем форма остановившейся капли может отличаться от сферической. Во второй серии экспериментов с каплями Олдройда-Б численно подтверждается наличие немонотонного поведения зависимости частоты колебаний от значений полной вязкости, при этом вычисленные безразмерные характеристики колебаний близки к оценкам асимптотического анализа и референтным результатам из литературы.

В подразделе 2.4.3 рассматривается задача прорыва дамбы с жидкостью Хершеля-Балкли. Результаты, полученные с помощью численного расчета, находятся в хорошем соответствии с результатами физического эксперимента.

Подраздел 2.4.4 посвящен задаче компрессии многоклеточного сфероида. Сфероид из биоматериала радиусом $R = 0.11$ мм находится между стенками тестовой установки и касается каждой из них в начальный момент времени.

(рис. 7).

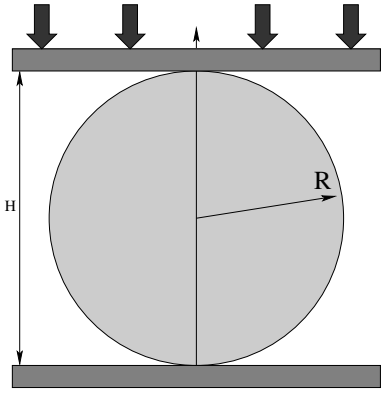

Рис. 7. Схема эксперимента по компрессии сфероида

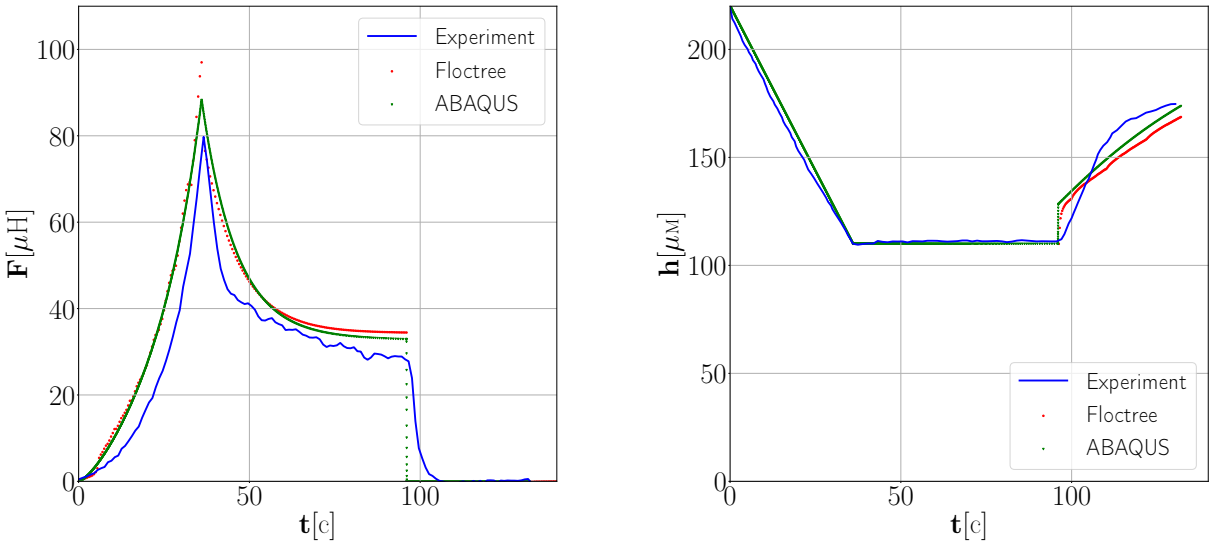

Рис. 8. Сила реакции на верхнюю стенку (слева) и высота сфероида (справа), сравнение с экспериментом.

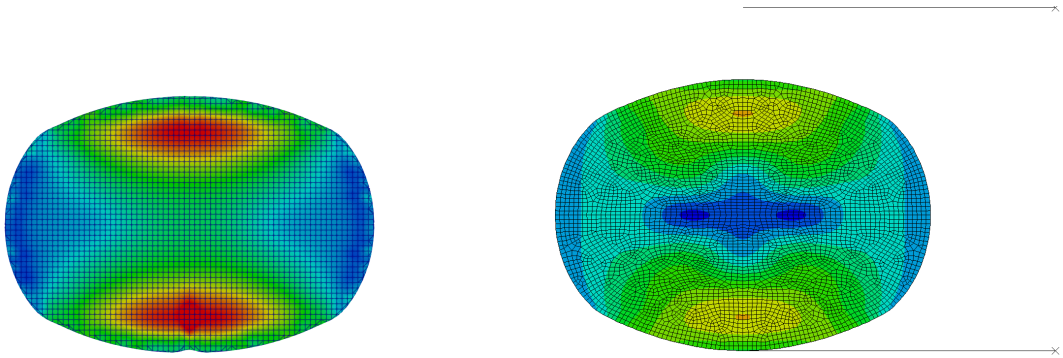

Рис. 9. Распределение напряжений фон Мизеса ($t = 132$ с). Вязкоэластичный материал (Floctree, слева) и твердое тело (ABAQUS, справа).

В процессе эксперимента тестовая установка записывала силу реакции, действующую со стороны сфероида на стенку, и z-координату верхней точки сфероида. Результаты физического эксперимента указывают на наличие вязкоэластичных свойств материала сфероида.

Сравнение полученных из расчета силы реакции и высоты сфероида с экспериментальными данными и результатами, полученными коммерческим пакетом ABAQUS, представлено на рис. 8. Можно отметить, что графики силы и высоты, полученных моделями, достаточно близки, при этом получено хорошее соответствие результатам физического эксперимента.

На рис. 9 представлены распределение эластичных напряжений фон Мизеса $q = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathrm{dev}[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] : \mathrm{dev}[\bar{\boldsymbol{\sigma}}])}$ для двух численных моделей сфероида в конечный момент времени $t = 132$ с, где $\mathrm{dev}[\bar{\boldsymbol{\sigma}}]$ - тензор девиаторных напряжений в материале. Несмотря на схожесть графиков силы реакции и высоты сфероида для двух вязкоэластичных моделей, распределение остаточных эластичных напряжений отличается.

В **заключении** приведены результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Предложены, разработаны и исследованы монотонные методы дискретных вложенных трещин, основанных на совмещении метода вложенных дискретных трещин с нелинейными конечно-объемными схемами дискретизации потоков внутри пористой среды.

2. Для двух нелинейных схем сформулированы и доказаны теоремы о сохранении неотрицательности /удовлетворении дискретного принципа максимума переменной давления для задачи диффузии в областях пористой среды и трещин.

3. Предложена и разработана новая математическая модель течения вязкоэластичного материала, основанная на совмещении модели вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б и модели нео-Гука гиперупругого твердого тела.

4. Разработан полунеявный метод численного расчета течений неньютоновских жидкостей (вязкопластичной жидкости Хершеля-Балкли и вязкоэластичной жидкости Олдройда-Б) со свободной поверхностью в трехмерных областях с использованием сеток типа восьмеричное дерево.

5. Численные реализации разработанных методов внедрены в программные пакеты: внутренний симулятор многофазных течений и программный пакет Floctree моделирования течений несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью на динамически перестраиваемых сетках типа восьмеричное дерево.

Публикации автора по теме диссертации

1. Verification benchmarks for single-phase flow in three-dimensional fractured porous media / I. Berre [и др.] // Advances in Water Resources. — 2021. — т. 147. — с. 103759.
2. *Nikitin K. D.*, *Yanbarisov R. M.* Monotone embedded discrete fractures method for flows in porous media // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2020. — т. 364. — с. 112353.
3. *Nikitin K. D.*, *Yanbarisov R. M.* Monotone Embedded Discrete Fracture Method for the Two-Phase Flow Model // International Conference on Finite Volumes for Complex Applications. — Springer. 2020. — с. 557—564.
4. *Yanbarisov R. M.*, *Nikitin K. D.* Projection-based monotone embedded discrete fracture method for flow and transport in porous media // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2021. — т. 392. — с. 113484.
5. *Yanbarisov R.*, *Nikitin K.*, *Vassilevski Y.* An implicit scheme for simulation of free surface non-Newtonian fluid flows on dynamically adapted grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2021. — т. 36, № 3. — с. 165—176.
6. *Янбарисов Р. М.* Параллельный метод вложенных дискретных трещин для течений в трещиноватых пористых средах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — т. 13, № 5. — с. 735—745.
7. Numerical Modelling of Multicellular Spheroid Compression: Viscoelastic Fluid vs. Viscoelastic Solid / R. Yanbarisov [и др.] // Mathematics. — 2021. — т. 9, № 18. — ISSN 2227-7390. — DOI: 10.3390/math9182333.

Янбарисов Руслан Маратович

Методы конечных объемов для гидродинамических задач в областях с не разрешаемыми сеткой границами

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать __.__.____. Заказ № _____
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография _____