На правах рукописи

Растёгин Алексей Эдуардович

ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕРЫ РАЗЛИЧИМОСТИ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

1.3.3. – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Иркутск – 2021

Работа выполнена в *ФГБОУ ВО "Иркутский государственный университет"*.

Официальные оппоненты: **Аптекарев Александр Иванович**
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор (*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*)

Тарасов Василий Евгеньевич
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (*НИИЯФ им. Д.В. Скобельцина МГУ им. М.В. Ломономосова*)

Ульянов Сергей Викторович
доктор физико-математических наук, профессор (*Государственный университет "Дубна"*)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится 20 января 2022 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета *Д 24.2.306.01* при *ФГБОУ ВО "Иркутский государственный университет"*, расположенном по адресу: *664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 20.*

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке *ФГБОУ ВО "Иркутский государственный университет"* и на сайте https://isu.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор *Ю.В. Аграфонов*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Публичное обсуждение реальности квантовых вычислений началось в 80-ых годах XX века благодаря работам Р. Фейнмана [1] и П. Бениоффа [2]. Сходные идеи содержатся во вводном разделе книги Ю.И. Манина [3]. С тех пор в этой области был достигнут значительный прогресс. Для некоторых алгоритмических задач, таких как факторизация целого числа и нахождение дискретного логарифма, уже известны квантовые алгоритмы, достигающие экспоненциального ускорения по сравнению с лучшими на сегодняшний день классическими алгоритмами. Одним из ключевых наблюдений, сделаных в статье [1], была явная недостаточность вычислительных ресурсов обычных компьютеров при моделировании эволюции квантовых систем. Со времени первых экспериментальных реализаций, относящихся к концу 80-ых годов, было предложено множество различных квантовых криптосистем. Значительный интерес к использованию квантовых систем как информационного носителя стимулировал более глубокое изучение оснований квантовой механики, включая принцип неопределённостей и ограничения типа неравенств Белла. В настоящее время концептуальные вопросы квантовой теории являются предметом неослабевающего интереса.

Проектирование и анализ систем квантовых вычислений и коммуникаций зависит от понимания фундаментальных ограничений на возможные манипуляции с информацией, закодированной в квантовых носителях. Указанные ограничения задают своего рода “систему отсчёта” для наших возможностей в томографии квантовых состояний, при построении корректирующих ошибки квантовых кодов и анализе уязвимостей протоколов квантового распределения секретного ключа. Актуальность тематики обусловлена потенциальной мощью устройств, использующих квантовые эффекты для решения вычислительных задач и защиты данных от несанкционированного доступа. При этом важно знать не только формальные количественные ограничения, но и то, какие именно характеристики наиболее уместны при анализе тех или иных вопросов. В идеале хотелось бы располагать некоторой “теорией ресурсов”, позволяющей оценить потенциальное значение квантовых эффектов как информационных инструментов.

Цели и задачи диссертационной работы. В настоящей диссертационной работе предложены новые характеристики степени близости и различимости квантовых состояний, а также проанализированы свойства этих характеристик с точки зрения преобразований, востребованных на сегодня в инженерии квантовых состояний. Среди мер различимости квантовых состояний важнейшую роль играют следовая метрика и точность воспроизведения. В работе продемонстрирована целесообразность использования частичных аналогов указанных величин. В этой связи довольно естественно возникает идея определить частичные энтропийные суммы и исследовать их свойства. Помимо тех свойств, которые являются особенно важными в теории информации, с физической точки зрения необходимо выяснить свойства непрерывности и устойчивости энтропийных функций в термодинамическом пределе. Квантовую когерентность можно трактовать как потенциальный “ресурс” для использования в системах вычислений и коммуникаций, отличный от хорошо известного энтенглмента. Достаточно важно исследовать квантификаторы квантовой когерентности, индуциированные относительными энтропиями типа Цаллиса. Большой интерес представляет формулировка соотношений неопределённостей в терминах энтропий, зависящих от параметра, таких как энтропии Ре́ньи и Цаллиса. Как известно, в процессах обработки информации на квантовых носителях широко применяются измерения, обладающие специальной “внутренней” структурой. Выяснение дополнительных характеристик некоторых измерений такого рода было одной из задач диссертационного исследования. Формулировка соотношений неопределённостей для энергии и времени интересовала исследователей с момента возникновения квантовой механики.

Научная новизна. Краткая характеристика новизны представленных в диссертационной работе результатов состоит в следующем.

- Впервые предложены и проанализированы частичные аналоги следовой метрики и точности воспроизведения.

- Впервые сформулированы неравенства Фанне для частичных энтропийных сумм типа Цаллиса, что, в частности, позволяет описывать свойство непрерывности энтропийных характеристик в бесконечномерном пространстве.

- Впервые определены области параметров, для которых квантовые унифицированные энтропии обладают свойствами устойчивости и субаддитивности.

- Сформулированы новые неравенства типа Пинскера и Фанне для квантовой относительной энтропии Цаллиса.

- Впервые предложены и исследованы квантификаторы квантовой когерентности, индуциированные относительными энтропиями Цаллиса.

- Впервые получены энтропийные соотношения неопределённостей для экстремальных "распутываний" супероператоров.

- Получены новые энтропийные соотношения неопределённостей для равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений.

- Впервые получена энтропийная формулировка соотношений неопределённостей для энергии и "дополнения" гамильтониана как сопряжённнной с ней переменной.

Методология и методы исследования. Исследования проводились на основе стандартной формулировки квантовой механики и теории сохраняющих след вполне положительных преобразований. Были использованы некоторые результаты выпуклого и функционального анализа, включая свойства норм Шаттена, а также известные факты о монотонных и выпуклых матричнозначных функциях от матриц и ряд следствий теоремы Либа.

Теоретическая и практическая значимость. Построенные меры различимости квантовых состояний и выведенные для них соотношения являются инструментами для тестирования и количественного описания каналов передачи информации на квантовых носителях, особенно в условиях неполноты данных. Предложенные квантификаторы квантовой когерентности и сопутствующие соотношения комплементарности характеризуют доступные возможности по использованию когерентности как потенциального ресурса. Наборы равнонаклонённых базисов используются в распространённых системах квантовой криптографии. Соотношения неопределённостей для этих и схожих измерений со специальной структурой дают новые возможности по анализу уязвимостей подобных криптосистем. Локальные соотношения неопределённостей в применении к составным системам используются для разработки практических схем обнаружения энтенглмента. Энтропийный подход к описанию уровня неопределённостей позволяет естественным путём учесть неэффективности детектирования, неизбежно присутствующие в реальных устройствах.

Положения, выносимые на защиту.

1. Построены семейство частичных энтропийных сумм и частичные аналоги следовой метрики и точности воспроизведения, свойства которых обосновывают целесообразность их применения в квантовой теории информации.

2. Для квантовых унифицированных энтропий сформулированы неравенства типа Фанне, установлены монотонность при проективных измерениях и параметрические области субаддитивности и устойчивости.

3. Получены новые неравенства типа Пинскера и Фанне, устанавливающие дополнительные связи квантовых относительных энтропий Цаллиса с дру-

гими теоретико-информационными характеристиками.

4. Введены квантификаторы квантовой когерентности с использованием относительной энтропии Цаллиса и раскрыты их основные свойства.

5. Сформулированы новые соотношения неопределённостей для супероператоров, равнонаклонённых базисов и симметричных информационно полных измерений.

6. Предложенные энтропийные меры различимости и установленные их свойства открывают новые возможности для построения квантовых каналов и схем детектирования неклассических корреляций.

Апробация результатов. Представленные в диссертационной работе результаты докладывались и обсуждались на 46-ом международном симпозиуме по математической физике "Information Theory & Quantum Physics" в 2014 г. (Университет Николая Коперника, Торунь, республика Польша), на семинарах в Центре теоретической физики ПАН (Варшава, республика Польша), Институте физики им. М. Смолуховского Ягеллонского университета (Краков, республика Польша), Национальном центре квантовой информации (Гданьск, республика Польша), в отделе математических методов квантовых технологий и в отделе математической физики МИАН им. В.А. Стеклова.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в реферативных базах Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Диссертационная работа излагает и обобщает результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из вводного раздела, восьми глав, заключительного раздела и списка литературы из 209 наименований. Объём работы составляет 231 страницу, включая 4 рисунка.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, изложены взгляды автора на развитие и перспективы квантовой теории информации, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, обсуждается практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена частичным аналогам следовой метрики и точности воспроизведения. Результаты первой главы опубликованы в работах [A1, A2, A3]. Пусть X — квадратный оператор в d-мерном пространстве. Для целых $k=1,\ldots,d$, k-норма Фань Цзы определяется как

$$\|\mathsf{X}\|_{(k)} := \sum\nolimits_{j=1}^{k} s_j(\mathsf{X})^{\downarrow} \ . \tag{1}$$

Направленные вниз стрелки означают, что сингулярные числа $s_j(\mathsf{X})$ должны вводиться в невозрастающем порядке. Семейство норм Фань Цзы включает в себя спектральную норму при $k=1$ и следовую норму при $k=d$. Предлагается использовать нормы Фань Цзы для более детального описания различий между двумя матрицами плотности.

Для пары матриц плотности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ с единичным следом, следовая метрика определяется как [4]

$$D(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho}) := \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\varrho}| = \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\varrho}\|_{(d)} \ . \tag{2}$$

Эта величина является квантовым аналогом колмогоровской дистанции между распределениями вероятности $\mathtt{p}=\{p_j\}_{j=1}^{r}$ и $\mathtt{q}=\{q_j\}_{j=1}^{r}$:

$$\mathcal{D}(\mathtt{p},\mathtt{q}) := \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{r}|p_j-q_j| \ . \tag{3}$$

Для $k=1,\ldots,d$ мы далее определим частичные следовые дистанции [A3]

$$D_k(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho}) := \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\varrho}\|_{(k)} \ . \tag{4}$$

Частичная версия метрики (3) между распределениями вероятности задаётся как

$$\mathcal{D}_k(\mathsf{p},\mathsf{q}) := \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{k} |p_j - q_j|^{\downarrow} \ , \tag{5}$$

где числа $|p_j - q_j|$ должны вводиться в невозрастающем порядке. В соответствии с изложенной схемой, полная следовая метрика (2) обозначается далее через $D_d(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho})$. Подразумевая размерность вероятностных векторов равной r, колмогоровскую дистанцию (3) между распределениями вероятностей обозначим через $\mathcal{D}_r(\mathsf{p},\mathsf{q})$. Частичные следовые дистанции обладают свойствами, непосредственно вытекающими из свойств унитарно инвариантных норм:

(i) $0 \leq D_k(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho}) \leq 1$, причём равенство нулю достигается, если и только если $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\varrho}$;

(ii) симметричность, т.е. $D_k(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho}) = D_k(\boldsymbol{\varrho},\boldsymbol{\rho})$;

(iii) неравенство треугольника, т.е. $D_k(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho}) \leq D_k(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\omega}) + D_k(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varrho})$;

(iv) унитарная инвариантность, т.е. $D_k(\mathsf{U}\boldsymbol{\rho}\mathsf{U}^{\dagger},\mathsf{U}\boldsymbol{\varrho}\mathsf{U}^{\dagger}) = D_k(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varrho})$ для любого унитарного преобразования U.

Следующий результат характеризует свойство выпуклости величин (4).

Предложение 1. *Пусть* $\mathsf{p} = \{p_i\}$ *и* $\mathsf{q} = \{q_i\}$ *— вероятностные распределения над заданным множеством индексов, и пусть* $\{\boldsymbol{\rho}_i\}$ *и* $\{\boldsymbol{\varrho}_i\}$ *— два набора матриц плотности, пронумерованных тем же индексом. Для всех* $k = 1,\ldots,d$ *выполняется неравенство*

$$D_k\Big(\sum\nolimits_i p_i\boldsymbol{\rho}_i, \sum\nolimits_i q_i\boldsymbol{\varrho}_i\Big) \leq \sum\nolimits_i p_i\, D_k(\boldsymbol{\rho}_i,\boldsymbol{\varrho}_i) + \mathcal{D}(\mathsf{p},\mathsf{q}) \ . \tag{6}$$

Поведение частичных следовых дистанций при квантовых измерениях во многом аналогично стандартной следовой метрике. Обобщённые квантовые измерения, или ПОЗМ-измерения, часто используются в квантовой теории проверки гипотез и оценивания [5, 6]. Рассмотрим вероятностные векторы p и q, которые генерируются при выполнении данного измерения над системой в состояниях $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$. Тогда справедлив следующий результат.

Предложение 2. *Пусть $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ — две произвольные матрицы плотности; для всех $k = 1, \ldots, d$ справедливо равенство*

$$D_k(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}) = \max\bigl\{\mathcal{D}_k(\mathsf{p}, \mathsf{q}) :\ \mathrm{Tr}(\mathsf{M}_m) \leq 1\bigr\} \ , \tag{7}$$

где максимум берется над всеми ПОЗМ-измерениями $\{\mathsf{M}_m\}$ такими, что каждый его элемент имеет след не больше 1.

Эволюция квантовых систем представляется на языке сохраняющих след *вполне положительных* преобразований [4, 7]. Всякое вполне положительное линейное отображение можно представить в виде

$$\Phi(\mathsf{X}_A) = \sum\nolimits_m \mathsf{K}_m \, \mathsf{X}_A \, \mathsf{K}_m^{\dagger} \ , \tag{8}$$

где операторы Крауса $\mathsf{K}_m :\ \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$ отображают элементы $\mathcal{H}_A$ в элементы $\mathcal{H}_B$. Отображение Φ сохраняет след, когда операторы Крауса удовлетворяют соотношению замкнутости

$$\sum\nolimits_m \mathsf{K}_m^{\dagger} \, \mathsf{K}_m = \mathbb{1}_A \ . \tag{9}$$

Такие преобразования принято называть *квантовыми каналами* [4, 7].

Предложение 3. *Пусть операторы Крауса квантового канала Φ удовлетворяют соотношению*

$$\sum\nolimits_m \mathsf{K}_m \, \mathsf{K}_m^{\dagger} \leq \mathbb{1}_B \ . \tag{10}$$

Для всех $k = 1, \ldots, d$ выполняется неравенство

$$D_k\bigl(\Phi(\boldsymbol{\rho}_A), \Phi(\boldsymbol{\varrho}_A)\bigr) \leq D_k(\boldsymbol{\rho}_A, \boldsymbol{\varrho}_A) \ . \tag{11}$$

Обычная точность воспроизведения была исследована в работах [8, 9], а её частичные аналоги — в статье [10]. В работе [A2] изучен ряд свойств таких мер различимости. Частичные следовые дистанции позволяют дать физическую интерпретацию для сингулярных чисел оператора разности между двумя матрицами плотности, что может быть использовано при анализе процессов обработки информации на квантовых носителях. Во-первых, многие широко используемые квантовые каналы являются бистохастическими, например каналы деполяризации и фазового демпфирования. Применяя ПОЗМ-измерения определённого типа к состояниям на выходе квантовых схем и используя мажоризационные соотношения, можно извлечь более детальную информацию о состояниях на входе.

Во второй главе рассмотрены неравенства для частичных энтропийных сумм, обобщающие стандартное неравенство Фанне [11]. Содержание главы основано на результатах статьи [A4]. Пусть вектор $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — элемент вещественного пространства $\mathbb{R}^m$. Для $k = 1, \ldots, m$ мы введём функцию

$$G_{(k)}(\mathsf{x}) := \sum\nolimits_{i=1}^{k} |x_i|^{\downarrow} \ . \tag{12}$$

Заметим, что $G_{(m)}(\mathsf{x})$ даёт ℓ_1-норму, тогда как $G_{(1)}(\mathsf{x})$ даёт ℓ_∞-норму на $\mathbb{C}^m$. В терминах симметричных функций вида (12) определяются нормы Фань Цзы. Пусть $\xi \mapsto f(\xi)$ — функция вещественной переменной. Для любой функции $f : [0; 1] \to \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty)$, мы введём отображение $\mathsf{x} \mapsto G_{(k)}[f(\mathsf{x})]$ посредством

$$G_{(k)}[f(\mathsf{x})] := \sum\nolimits_{i=1}^{k} |f(x_i)|^{\downarrow} \ .$$

Здесь предполагается, что вектор x лежит в симплексе Δ_m вероятностных векторов, таких что $G_{(m)}(\mathsf{x}) = 1$ и $x_i \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Введём зависящую от параметра $\alpha > 0$ функцию

$$\eta_\alpha(\xi) := \begin{cases} \frac{\xi^\alpha - \xi}{1-\alpha} \,, & \text{для } 0 < \alpha \neq 1 \,, \\ -\xi \ln \xi \,, & \text{для } \alpha = 1 \,. \end{cases} \tag{13}$$

Для $k = 1, \ldots, m$, k-ая частичная энтропийная сумма равна

$$H_\alpha^{(k)}(\mathtt{p}) := G_{(k)}[\eta_\alpha(\mathtt{p})] \ . \tag{14}$$

В случае $k = m$ мы получаем саму энтропию, известную как α-энтропия Цаллиса [12]. Частичные суммы вида (14) обладают несколькими полезными свойствами. А именно, они неотрицательны, неубывают с ростом k, симметричны относительно перестановки вероятностей и монотонны относительно прямого произведения векторов. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть* $\mathtt{r} = \{r_{ij} : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ *— распределение вероятностей. Справедливо неравенство*

$$H_\alpha^{(k)}(\mathtt{p}) \leq H_\alpha^{(kn)}(\mathtt{r}) \ , \tag{15}$$

где $p_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ *являются элементами маргинального распределения.*

Для дальнейшего удобно ввести понятие α-логарифма. Для переменной $\xi > 0$ запишем

$$\ln_\alpha(\xi) := \begin{cases} \frac{\xi^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \, , & \text{для } 0 < \alpha \neq 1 \, , \\ \ln \xi \, , & \text{для } \alpha = 1 \, . \end{cases} \tag{16}$$

В пределе $\alpha \to 1$ имеем $\ln_\alpha(\xi) \to \ln \xi$. При заданных m и α максимум энтропии Цаллиса равен

$$\max \left\{ H_\alpha^{(m)}(\mathtt{p}) : \ \mathtt{p} \in \Delta_m \right\} = \ln_\alpha(m) \tag{17}$$

и достигается тогда и только тогда, когда $p_i = 1/m$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Для k-ой частичной энтропийной суммы $H_\alpha^{(k)}(\mathtt{p})$ максимизирующий вероятностный вектор будет зависеть в общем как от k, так и от α. Можно дать простые оценки снизу и сверху, а именно

$$\ln_\alpha(k) \leq \max \left\{ H_\alpha^{(k)}(\mathtt{p}) : \ \mathtt{p} \in \Delta_m \right\} \leq \ln_\alpha(k+1) \ , \tag{18}$$

причём они имеют неплохую точность для достаточно больших k. Относительная погрешность оценивания по этим границам не превышает $\bigl(k^\alpha \ln_\alpha(k+1)\bigr)^{-1}$. При $k = 1$ нижняя оценка в (18) становится тривиальной. В этом случае мы будем использовать точное выражение для максимума, а именно $\eta_\alpha\bigl(\alpha^{1/(1-\alpha)}\bigr)$. Это даёт верхнюю границу на $H_\alpha^{(1)}$.

Пусть $\boldsymbol{\rho}$ — оператор плотности на $\mathcal{H}$. Для $k = 1, \ldots, d$, k-ая частичная энтропийная сумма квантового состояния $\boldsymbol{\rho}$ определяется формулой

$$S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) := \|\eta_\alpha(\boldsymbol{\rho})\|_{(k)} \ . \tag{19}$$

Собственные значения $\{p_i\}$ оператора плотности $\boldsymbol{\rho}$ можно рассматривать как вероятности ввиду положительности и нормировки $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}) = 1$. Поскольку функция $\eta_\alpha(x)$ неотрицательна для $x \in [0; 1]$, имеем

$$S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) = H_\alpha^{(k)}(\mathtt{p}) \ , \tag{20}$$

где $\mathtt{p}$ есть вектор собственных значений $\boldsymbol{\rho}$. Случай $k = d$ даёт квантовую α-энтропию Цаллиса, рассмотренную ранее и другими авторами [13]. Некоторые свойства квантовых частичных энтропийных сумм перечислены ниже.

(1Q) *Положительность:* $S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) \geq 0$, причём $S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) = 0$, если и только если $\boldsymbol{\rho}$ идемпотентен.

(2Q) *Неубывание по отношению к порядку суммы:* если $k < k'$, то $S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) \leq S_\alpha^{(k')}(\boldsymbol{\rho})$.

(3Q) *Симметрия:* если $\mathrm{spec}(\boldsymbol{\varrho}) = \mathrm{spec}(\boldsymbol{\rho})$, то $S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\varrho}) = S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$.

(4Q) *Расширяемость:* при расширении гильбертова пространства $\mathcal{H}$ до $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ величины $S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$ неизменны для любой матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ на $\mathcal{H}$.

(5Q) *Монотонность по отношению к произведению векторов:* справедливо $S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) \leq S_\alpha^{(kN)}(\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\omega})$, где $\boldsymbol{\omega}$ — N-мерная матрица плотности.

Свойство (3Q) содержит унитарную инвариантность как частный случай. Пусть комбинированная система AB из подсистем A и B описывается оператором плотности $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ на тензорном произведении $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Редуцированные плотности систем A и B задаются как

$$\boldsymbol{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) \ , \qquad \boldsymbol{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) \ . \tag{21}$$

Входя в спектральные разложения

$$\boldsymbol{\rho}_A = \sum\nolimits_{i=1}^{d} a_i \, |i\rangle\langle i| \ , \qquad \boldsymbol{\rho}_B = \sum\nolimits_{\mu=1}^{N} b_\mu \, |\mu\rangle\langle \mu|, \tag{22}$$

векторы $|i\rangle$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_A$, векторы $|\mu\rangle$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_B$, $\mathrm{spec}(\boldsymbol{\rho}_A) = \{a_i\}$ и $\mathrm{spec}(\boldsymbol{\rho}_B) = \{b_\mu\}$. Тогда векторы $|i\mu\rangle \equiv |i\rangle \otimes |\mu\rangle$ формируют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Если матрицы $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ и $\boldsymbol{\rho}_A \otimes \boldsymbol{\rho}_B$ коммутируют и имеет место эквивалентность*

$$\big(a_i \, b_\mu = a_j \, b_\nu\big) \Longleftrightarrow \big(i = j \wedge \mu = \nu\big) \ , \tag{23}$$

то

$$S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_A) \leq S_\alpha^{(kN)}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) \ , \qquad S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_B) \leq S_\alpha^{(kd)}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) \ . \tag{24}$$

Непрерывность частичных энтропийных сумм характеризуется двумя результатами, которые обобщают неравенство Фанне в отношении энтропийных сумм.

Предложение 6. *Для заданных $\alpha \in (0;2]$ и $k \in \{1,\ldots,d\}$ справедливо следующее. Если операторы плотности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ удовлетворяют условию $\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}\|_{(k)} = \varepsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$, то*

$$\Big| S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) - S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\varrho}) \Big| \leq \varepsilon^\alpha \ln_\alpha(k+1) + \eta_\alpha(\varepsilon) \ . \tag{25}$$

Предложение 7. *Для данных $\alpha \in (2;+\infty)$ и $k \in \{1,\ldots,d\}$ справедливо следующее. Если операторы плотности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varrho}$ удовлетворяют условию $\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho}\|_{(k)} = \varepsilon \leq \alpha^{1/(1-\alpha)}$, то*

$$\Big| S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) - S_\alpha^{(k)}(\boldsymbol{\varrho}) \Big| \leq \varepsilon^\alpha \ln_\alpha(k+1) + \eta_\alpha(\varepsilon) + h_\alpha(\varepsilon, 1-\varepsilon) \ . \tag{26}$$

Неравенства (25) и (26) позволяют исследовать устойчивость частичных энтропийных сумм и формулируются в терминах величин $\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\varrho}\|_{(k)}$, которые своими свойствами напоминают стандартную следовую метрику.

В третьей главе рассмотрены свойства унифицированных энтропий [14], важные с точки зрения физических приложений. Результаты третьей главы опубликованы в работе [A7]. Унифицированная (q,s)-энтропия вероятностного распределения $\mathtt{p}=\{p_i\}_{i=1}^{r}$ определяется выражением

$$E_q^{(s)}(\mathtt{p}):=\frac{1}{(1-q)\,s}\left[\Bigl(\sum\nolimits_{i=1}^{r}p_i^q\Bigr)^s-1\right], \tag{27}$$

причем $0<q\neq1$ и $s\neq0$. Для $s=0$ по определению принимаем $E_q^{(0)}(\mathtt{p})\equiv R_q(\mathtt{p})$, где энтропия Ре́ньи [15]

$$R_q(\mathtt{p}):=\frac{1}{1-q}\,\ln\Bigl(\sum\nolimits_{i=1}^{r}p_i^q\Bigr)\,. \tag{28}$$

В работах [16–18] исследованы дифференциальные энтропии Ре́ньи и их связь с асимптотическим поведением некоторых ортогональных полиномов, используемых в квантовомеханических задачах. Подобно энтропиям Ре́ньи и Цаллиса, определение (27) легко переносится случай матриц плотности. Для квантового состояния с матрицей плотности $\boldsymbol{\rho}$, унифицированная (q,s)-энтропия определяется как

$$\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}):=\frac{1}{(1-q)\,s}\Bigl\{\bigl[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^q)\bigr]^s-1\Bigr\} \tag{29}$$

для $0<q\neq1$ и $s\neq0$. Для $s=0$ принимается $\mathrm{E}_q^{(0)}(\boldsymbol{\rho})\equiv\mathrm{R}_q(\boldsymbol{\rho})$, где квантовая энтропия Ре́ньи

$$\mathrm{R}_q(\boldsymbol{\rho}):=\frac{1}{1-q}\,\ln\bigl[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^q)\bigr]\,. \tag{30}$$

Основные свойства энтропий Цаллиса и Ре́ньи применительно к квантовой теории обсуждаются в книге [19].

Предложение 8. *Рассмотрим ансамбль состояний* $\bigl\{p_i,|\psi_i\rangle\bigr\}$, *где* $\langle\psi_i|\psi_i\rangle=1$ *и* $\sum_i p_i=1$. *Пусть данный ансамбль порождает оператор плотности* $\boldsymbol{\rho}$

согласно формуле

$$\boldsymbol{\rho}=\sum\nolimits_i p_i\,|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \ . \tag{31}$$

Для значений параметров $0<q$ *при* $s\neq 0$*, а также для* $0<q<1$ *при* $s=0$*, мы имеем*

$$\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\leq E_q^{(s)}(\mathtt{p}) \ , \tag{32}$$

где $\mathtt{p}=\{p_i\}$.

Чтобы оценить квантовую унифицированную энтропию снизу в диапазоне $0<q<1$, можно использовать следующее неравенство.

Предложение 9. *Пусть матрица плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *задана в форме*

$$\boldsymbol{\rho}=\sum\nolimits_i p_i\,\boldsymbol{\omega}_i \ , \tag{33}$$

где $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\omega}_i)=1$ *и* $\sum_i p_i=1$*. Для* $0<q<1$ *и* $s\leq 1$ *справедливо неравенство*

$$\sum\nolimits_i p_i\,\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\omega}_i)\leq \mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}) \ . \tag{34}$$

Предложение 9 подразумевает вогнутость квантовой унифицированной энтропии для $0<q<1$ и $s\leq 1$. Соответствующее свойство энтропии фон Неймана хорошо известно. Подчеркнём, что энтропия Ре́ньи порядка $q>1$ не является чисто выпуклой или чисто вогнутой даже в классическом режиме.

Энтропийные величины должны обладать хорошими свойствами как функции состояния. В частности, для близких в том или ином смысле матриц плотности соответствующие энтропии также должны быть близки. Непрерывность энтропии фон Неймана характеризуется неравенством Фанне [11]. Получены оценки аналогичного типа для квантовых унифицированных энтропий.

Предложение 10. *Пусть* $\boldsymbol{\rho}$ *и* $\boldsymbol{\omega}$ *— нормированные* d*-мерные матрицы плотности. В параметрической области значений*

$$\big\{(q,s):\ 0<q<1,\ s\in(-\infty;-1]\cup[0;+1]\big\} \tag{35}$$

и при условии $2D(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\omega})=2\varepsilon\leq q^{1/(1-q)}$ справедливо неравенство

$$\left|\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho})-\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\omega})\right|\leq(2\varepsilon)^q\ln_q d+\eta_q(2\varepsilon)\ . \tag{36}$$

Для удобства введём фактор

$$\varkappa_s:=\begin{cases}d^{2(q-1)}\,, & \text{для } s\in[-1;0]\,,\\ 1\,, & \text{для } s\in[+1;+\infty)\,.\end{cases} \tag{37}$$

В параметрической области значений

$$\big\{(q,s):\ 1<q,\ s\in[-1;0]\cup[+1;+\infty)\big\} \tag{38}$$

для любого $D(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\omega})=\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\left|\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho})-\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\omega})\right|\leq\varkappa_s\big[\varepsilon^q\ln_q(d-1)+h_q(\varepsilon,1-\varepsilon)\big]\ . \tag{39}$$

Пусть состояние комбинированной системы AB описывается оператором плотности $\boldsymbol{\rho}_{AB}$, тогда парциальные матрицы плотности

$$\boldsymbol{\rho}_A=\mathrm{Tr}_B(\boldsymbol{\rho}_{AB})\ ,\qquad \boldsymbol{\rho}_B=\mathrm{Tr}_A(\boldsymbol{\rho}_{AB})\ . \tag{40}$$

Свойство субаддитивности имеет место для квантовых унифицированных энтропий в достаточно широком диапазоне параметров.

Предложение 11. *Для значений параметров $q>1$ и $s\geq q^{-1}$, квантовая унифицированная (q,s)-энтропия субаддитивна, т.е.*

$$\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_{AB})\leq\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_A)+\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_B)\ . \tag{41}$$

Как и в случае с энтропией фон Неймана [4], неравенство субаддитивности (41) приводит к соответствующему неравенству типа Араки–Либа.

Предложение 12. *Для значений параметров $q>1$ и $s\geq q^{-1}$, квантовая унифицированная (q,s)-энтропия удовлетворяет неравенству треугольника*

$$\left|\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_A)-\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_B)\right|\leq\mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}_{AB})\ . \tag{42}$$

Поведение квантовых энтропий при измерениях существенно с физической точки зрения. Пусть $\boldsymbol{\rho}$ — оператор плотности квантовой системы непосредственно перед измерением. Отдельные члены суммы

$$\sum\nolimits_i \mathsf{M}_i \boldsymbol{\rho}\, \mathsf{M}_i^{\dagger} \tag{43}$$

соответствуют различным исходам проведённого измерения. Для проективного измерения $\{\mathsf{P}_j\}$ результирующий оператор плотности записывается в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \sum\nolimits_j \mathsf{P}_j \boldsymbol{\rho}\, \mathsf{P}_j \ . \tag{44}$$

Свойство неубывания квантовой унифицированной энтропии под действием проективного преобразования формулируется следующим образом.

Предложение 13. *Пусть $\{\mathsf{P}_j\}$ — ортогональное разложение единицы, и оператор плотности $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ определяется формулой (44). Для $q > 0$ и всех действительных s мы имеем*

$$\mathrm{E}_q^{(s)}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}) \geq \mathrm{E}_q^{(s)}(\boldsymbol{\rho}) \ . \tag{45}$$

Тем самым установлено неубывание квантовой унифицированной энтропии (29) под действием произвольных проективных измерений для всех рассмотренных значений параметров. С другой стороны, обобщённые измерения могут уменьшать квантовые унифицированные энтропии [A7]. В этом отношении унифицированные энтропии аналогичны энтропии фон Неймана.

Четвёртая глава содержит новые оценки типа Пинскера и Фанне на относительную энтропию Цаллиса. Эти результаты были опубликованы в работах [A8, A10]. В классическом режиме относительная α-энтропия Цаллиса определяется выражением

$$H_\alpha(\mathtt{P}||\mathtt{Q}) := -\sum_{x\in\Omega} p(x)\, \ln_\alpha\!\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\sum_{x\in\Omega} p(x)^\alpha q(x)^{1-\alpha}\right) . \tag{46}$$

Относительная α-энтропия Ре́ньи записывается в виде

$$R_\alpha(\mathtt{P}||\mathtt{Q}) := \frac{-1}{1-\alpha}\ \ln\!\left(\sum_{x\in\Omega} p(x)^\alpha q(x)^{1-\alpha}\right) . \tag{47}$$

Прежде всего распространим определение (46) на произвольные положительно-значные функции $\mathtt{A} = \{a(x)\}$ и $\mathtt{B} = \{b(x)\}$ на конечном множестве Ω. Для заданного $\mathtt{A} = \{a(x)\}$, мы введём $\Omega_A = \{x: \ a(x) \neq 0\} \subseteq \Omega$. Для $\alpha > 1$, мы определим относительную α-энтропию $\mathtt{A} = \{a(x)\}$ по отношению к $\mathtt{B} = \{b(x)\}$ формулой

$$H_\alpha(\mathtt{A}||\mathtt{B}) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\Big(\sum_{x\in\Omega_A} a(x)^\alpha b(x)^{1-\alpha} - \sum_{x\in\Omega_A} a(x)\Big), & \text{если } \Omega_A \subseteq \Omega_B\,, \\ +\infty\,, & \text{иначе}\,. \end{cases} \tag{48}$$

Опуская вторую строку в правой части (48), мы получаем определение для $0 < \alpha < 1$.

Для $\alpha \in (0;1)$ и матриц плотности $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, мы определим квантовую относительную энтропию выражением

$$\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\sigma}) := \frac{1 - \mathrm{Tr}\big(\boldsymbol{\rho}^\alpha\boldsymbol{\sigma}^{1-\alpha}\big)}{1-\alpha}\ . \tag{49}$$

Если $\alpha > 1$, то правая часть (49) является хорошо определённой в случае $\mathrm{ran}(\boldsymbol{\rho}) \subseteq \mathrm{ran}(\boldsymbol{\sigma})$. В сингулярном случае $\mathrm{ran}(\boldsymbol{\rho}) \not\subseteq \mathrm{ran}(\boldsymbol{\sigma})$ правая часть (49) трактуется аналогично стандартной относительной энтропии [4] и принимается равной $+\infty$. Для $\alpha > 1$ и $\mathsf{A},\mathsf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ с равным следом, где под $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ понимается множество положительных линейных операторов, мы введём

$$\mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}||\mathsf{B}) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\left[\mathrm{Tr}(\mathsf{A}^\alpha\mathsf{B}^{1-\alpha}) - \mathrm{Tr}(\mathsf{A})\right], & \text{если } \mathrm{ran}(\mathsf{A}) \subseteq \mathrm{ran}(\mathsf{B})\,, \\ +\infty\,, & \text{иначе}\,. \end{cases} \tag{50}$$

Примем, что степени положительно полуопределённого оператора берутся только на его носителе. Таким образом, A^{-1} и A^0 соответственно означают обобщенные обратный и проекционный операторы на $\mathrm{ran}(\mathsf{A})$. Для оператора $\mathsf{A} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ введём операции Λ_A и Υ_A, обозначающие соответственно левое и правое умножения на A, так что

$$\Lambda_\mathsf{A}: \ \mathsf{X} \mapsto \mathsf{AX}\,, \qquad \Upsilon_\mathsf{A}: \ \mathsf{X} \mapsto \mathsf{XA}\,. \tag{51}$$

Операции левого и правого умножения коммутируют друг с другом, поэтому для $\mathsf{A},\mathsf{B}\in\mathcal{L}_{+}(\mathcal{H})$ имеем $\Lambda_{\mathsf{A}}\Upsilon_{\mathsf{B}}=\Upsilon_{\mathsf{B}}\Lambda_{\mathsf{A}}$. Пусть функция $z\mapsto f(z)$ непрерывна для $z\in[0;+\infty)$. Рассмотрим множество

$$\left\{ab^{-1}:\ a\in\mathrm{spec}(\mathsf{A}),\ b\in\mathrm{spec}(\mathsf{B})\right\}\,, \tag{52}$$

а также спектральные разложения

$$\mathsf{A}=\sum_{a\in\mathrm{spec}(\mathsf{A})}a\,\mathsf{P}_a\,,\qquad \mathsf{B}=\sum_{b\in\mathrm{spec}(\mathsf{B})}b\,\mathsf{Q}_b\,. \tag{53}$$

Теперь можно записать

$$f(\Lambda_{\mathsf{A}}\Upsilon_{\mathsf{B}^{-1}}):=\sum_{a\in\mathrm{spec}(\mathsf{A})}\sum_{b\in\mathrm{spec}(\mathsf{B})}f(ab^{-1})\,\Lambda_{\mathsf{P}_a}\Upsilon_{\mathsf{Q}_b}\,. \tag{54}$$

Если $\mathrm{ran}(\mathsf{A})\subset\mathrm{ran}(\mathsf{B})$, то квантовая f-дивергенция A по отношению к B определяется формулой [20]

$$\mathrm{S}_f(\mathsf{A}||\mathsf{B}):=\left\langle \mathsf{B}^{1/2},f(\Lambda_{\mathsf{A}}\Upsilon_{\mathsf{B}^{-1}})\,\mathsf{B}^{1/2}\right\rangle_{\mathrm{HS}}\,. \tag{55}$$

С функцией $f_\alpha(z)=\big(z^\alpha-z\big)/(\alpha-1)$ это определение приводит к относительной энтропии Цаллиса (50).

Одним из наиболее важных свойств стандартной относительной энтропии является её монотонность под действием сохраняющих след вполне положительных отображений. Для такого отображения Φ и функции f, операторно выпуклой на $[0;+\infty)$, имеем [20]

$$\mathrm{S}_f\big(\Phi(\mathsf{A})\big|\big|\Phi(\mathsf{B})\big)\leq\mathrm{S}_f(\mathsf{A}||\mathsf{B})\,. \tag{56}$$

Из монотонности (56) можно получить простую нижнюю границу на квантовую f-дивергенцию, причём граница эта выражается в терминах соответствующей классической дивергенции. Пусть $\mathsf{\Pi}\in\mathcal{L}_{+}(\mathcal{H})$ — проекционный оператор. Известно, что линейное отображение $\mathsf{X}\mapsto\big\{\mathrm{Tr}(\mathsf{\Pi X}),\mathrm{Tr}[(\mathbb{1}-\mathsf{\Pi})\mathsf{X}]\big\}$ сохраняет след и является вполне положительным. Сочетая эти факты с монотонностью (56), приходим к следующему выводу.

Предложение 14. *Возьмём два положительных оператора* $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$. *Через* $\Pi_\pm \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ *обозначим проекционные операторы на подпространства, отвечающие положительным и отрицательным собственным значениям разности* $(\mathsf{A} - \mathsf{B})$, *соответственно, причём* $\Pi_+ + \Pi_- = \mathbb{1}$. *Если функция* f *является операторно выпуклой, то*

$$\mathrm{S}_f(\mathsf{A}||\mathsf{B}) \geq S_f\big(\{u'_\pm\}\big|\big|\{v'_\pm\}\big) \ , \tag{57}$$

где $u'_\pm = \mathrm{Tr}(\Pi_\pm \mathsf{A})$ *и* $v'_\pm = \mathrm{Tr}(\Pi_\pm \mathsf{B})$.

Функция $z \mapsto z^\alpha$ является операторной вогнутой на $[0; +\infty)$ для $0 \leq \alpha \leq 1$ и операторно выпуклой на $[0; +\infty)$ для $1 \leq \alpha \leq 2$. Таким образом, функция $f_\alpha(z) = \big(z^\alpha - z\big)/(\alpha - 1)$ является операторно выпуклой для $\alpha \in [0; 2]$ и $\alpha \neq 1$. Объединяя этот факт с неравенством (57), имеем

$$\mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}||\mathsf{B}) \geq H_\alpha\big(\{u'_\pm\}\big|\big|\{v'_\pm\}\big) \ . \tag{58}$$

Соотношение (58) можно скомбинировать с неравенством

$$\|\mathsf{A} - \mathsf{B}\|_1 = |u'_+ - v'_+| + |u'_- - v'_-| \tag{59}$$

Это позволяет оценить правую часть (57) снизу в терминах следовой метрики, равной половине $\|\mathsf{A} - \mathsf{B}\|_1$.

Предложение 15. *Пусть* $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$, $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}) = \mathrm{Tr}(\mathsf{B}) = \theta$, $D(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \tau$, *и* $g(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$. *Для всех* $\alpha \in (0; 1)$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}||\mathsf{B}) \geq \varkappa_\alpha \, \theta \, g\big(\tau/\theta\big) \ , \tag{60}$$

где фактор

$$\varkappa_\alpha := \begin{cases} \frac{2\alpha}{1-\alpha} \, , & \textit{для } 0 < \alpha \leq 1/2 \, , \\ 2 \, , & \textit{для } 1/2 \leq \alpha < 1 \, . \end{cases} \tag{61}$$

Для вероятностных распределений нижняя граница (60) выражается аналогично, но в терминах величины $\tau = \mathcal{D}(\mathsf{P},\mathsf{Q})$. Разлагая функцию $g(\tau/\theta)$ в степенной ряд, мы получаем семейство нижних границ типа Пинскера. А именно, запишем

$$\mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}||\mathsf{B}) \geq \varkappa_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} \frac{\tau^{2n}}{\theta^{2n-1}} \ , \tag{62}$$

включая $\mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}||\mathsf{B}) \geq (2\theta)^{-1}\varkappa_\alpha\tau^2$. Входящий в (62) коэффициент

$$\binom{1/2}{n} (-1)^{n+1}$$

положителен для всех n. Любая частичная сумма ряда (62) приводит к варианту нижней границы типа Пинскера. В общем, это семейство не обеспечивает обобщения неравенства Пинскера с наилучшими константами при степенях следовой метрики. Для $\alpha = 1/2$ из (62) мы получаем

$$\mathrm{H}_{1/2}(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\sigma}) \geq \tau^2 + \frac{1}{4}\,\tau^4 + \sum_{n=3}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1}\,\tau^{2n} \ . \tag{63}$$

Одной из основных особенностей стандартной относительной энтропии является её неограниченность. Относительная α-энтропия обладает тем же свойством для $\alpha > 1$. Конечно, в квантовом режиме вопрос сложнее для разрешения ввиду некоммутативности операторов [A8].

В работе [A10] были даны оценки сверху на условную α-энтропию Цаллиса для всех $\alpha > 0$. Через X и Y обозначим дискретные случайные величины с вероятностными распределениями $\{p_X(x)\}$ и $\{p_Y(y)\}$. Можно считать, что x и y принимают значения из одного и того же множества Ω мощности N, описывая ввод и вывод некоторого канала связи. Через $p_{XY}(x,y)$ и $p_{X|Y}(x|y)$ соответственно обозначим совместные и условные вероятности. Совместная α-энтропия и условная α-энтропия определяются выражениями

$$H_\alpha(X,Y) := \frac{1}{1-\alpha}\left(\sum\nolimits_{x,y} p_{XY}(x,y)^\alpha - 1\right) \ , \tag{64}$$

$$H_\alpha(X|Y) := \sum\nolimits_{y} p_Y(y)^\alpha H_\alpha(X|y) \ , \tag{65}$$

где $H_\alpha(X|y) = (1-\alpha)^{-1}\Big(\sum_x p_{X|Y}(x|y)^\alpha - 1\Big)$. Вероятность ошибки равна

$$P_e = \sum_y p_Y(y)\, q(e|y) \ , \qquad q(e|y) = 1 - p_{X|Y}(y|y) = \sum_{x \neq y} p_{X|Y}(x|y) \ . \tag{66}$$

Имеет место следующий результат.

Предложение 16. *Пусть случайные переменные X и Y принимают значения из одного и того же финитного множества мощности N. Для заданной вероятности ошибки P_e условная энтропия Цаллиса ограничена сверху неравенствами*

$$H_\alpha(X|Y) \leq \frac{P_e^{\,\alpha} - \alpha P_e}{1-\alpha} + P_e^{\,\alpha} \ln_\alpha\big[N(N-1)\big] \qquad (0 < \alpha < 1) \ , \tag{67}$$

$$H_\alpha(X|Y) \leq h_\alpha(P_e) + P_e^{\,\alpha} \ln_\alpha(N-1) \qquad (1 < \alpha < \infty) \ . \tag{68}$$

Неравенства (67) и (68) приводят также к неравенствам типа Фанне для энтропии Цаллиса [A10].

В пятой главе введены и проанализированы квантификаторы квантовой когерентности на основе семейства дивергенций типа Цаллиса. Изложение основано на результатах работы [A13] в рамках общего подхода [21]. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — пространство линейных операторов на конечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ обозначим множество положительно полуопределённых операторов на $\mathcal{H}$. Подпространство $\mathrm{ran}(\mathsf{X})$ означает образ оператора X. В дальнейшем мы используем соглашение, по которому степени положительно полуопределённого оператора берутся только на подпространстве-носителе. Для любого $\mathsf{Z} \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ мы рассматриваем Z^0 как ортогональный проектор на $\mathrm{ran}(\mathsf{Z})$.

В случае операторов аналог понятия дистанции обычно индуцируется той или иной нормой. По отношению к заданному ортонормированному базису каждый оператор $\mathsf{X}:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ представляется квадратной матрицей с элементами x_{ij}. Тогда ℓ_1-норма определяется формулой

$$\|\mathsf{X}\|_{\ell_1} := \sum\nolimits_{ij} |x_{ij}| \ . \tag{69}$$

Эта норма приводит к одному из наиболее часто используемых квантификаторов. Пусть $\mathcal{E} = \big\{|e_i\rangle\big\}$ — выбранный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_A$, предпочтительный с точки зрения исследуемых физических ситуаций. Набор некогерентных по отношению к $\mathcal{E}$ состояний содержит все состояний, которые диагональны в нём, а именно

$$\boldsymbol{\delta} = \sum\nolimits_i \delta_i \, |e_i\rangle\langle e_i| \, . \tag{70}$$

Через $\mathcal{I}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{L}_+(\mathcal{H}_A)$ мы обозначаем множество всех таких состояний. Каждой матрице плотности квантификатор когерентности ставит в соответствие некоторое неотрицательное действительное число. С интуитивной точки зрения следующие два квантификатора когерентности выглядят наиболее естественными. Используя ℓ_1-норму, записываем

$$\mathrm{C}_{\ell_1}(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) := \min_{\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{I}(\mathcal{E})} \big\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\delta}\big\|_{\ell_1} = \sum_{i\neq j} \big|\langle e_i|\boldsymbol{\rho}|e_j\rangle\big| \ . \tag{71}$$

Другим естественным кандидатом служит величина, индуциированная возведённой в квадрат ℓ_2-нормой. Она выражается аналитически простой формулой

$$\mathrm{C}_{\ell_2}(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) := \min_{\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{I}(\mathcal{E})} \big\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\delta}\big\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i\neq j} \big|\langle e_i|\boldsymbol{\rho}|e_j\rangle\big|^2 \ . \tag{72}$$

К сожалению, данная интуитивно привлекательная величина не обладает необходимым свойством монотонности. Квантовые дивергенции обеспечивают другой путь сопоставлять матрицы плотности между собой.

Для всех $\lambda \in [0;+\infty)$ справедливо равенство

$$\mathrm{H}_\alpha(\lambda\mathsf{A}||\lambda\mathsf{B}) = \lambda \, \mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}||\mathsf{B}) \ . \tag{73}$$

Предположим, что четыре положительно полуопределённых оператора A_1, B_1, A_2, B_2 удовлетворяют условию $\mathsf{A}_1^0 \vee \mathsf{B}_1^0 \perp \mathsf{A}_2^0 \vee \mathsf{B}_2^0$. Тогда мы имеем

$$\mathrm{H}_\alpha\big(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2\big|\big|\mathsf{B}_1 + \mathsf{B}_2\big) = \mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}_1||\mathsf{B}_1) + \mathrm{H}_\alpha(\mathsf{A}_2||\mathsf{B}_2) \ . \tag{74}$$

Мы используем (74) при формулировке свойства монотонности для квантификаторов когерентности. Напомним, что квантовая α-дивергенция обладает свойством монотонности для $\alpha \in (0;2]$. Монотонность означает, в частности, что α-дивергенция является совместно выпуклой для $\alpha \in (0;2]$. Пусть $\{\boldsymbol{\rho}_n\}$ и $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}$ — два набора нормированных матриц плотности, и пусть положительные числа p_n в сумме дают 1. Тогда для $\alpha \in (0;2]$ мы имеем

$$\mathrm{H}_\alpha\left(\sum_n p_n\boldsymbol{\rho}_n \middle\| \sum_n p_n\boldsymbol{\sigma}_n\right) \leq \sum_n p_n\,\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{\rho}_n\|\boldsymbol{\sigma}_n)\ . \tag{75}$$

Свойства монотонности и совместной выпуклости будут принципиально важны при проверке соответствующих свойств индуцированных квантификаторов когерентности. Квантовая α-дивергенция неотрицательна, т.е.

$$\mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{\rho}\|\boldsymbol{\sigma}) \geq 0\ , \tag{76}$$

причём равенство достигается, если и только если $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}$.

Взяв α-дивергенцию Цаллиса в качестве меры различимости квантовых состояний, мы определим квантификатор когерентности формулой

$$\mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) := \min_{\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{I}(\mathcal{E})} \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{\rho}\|\boldsymbol{\delta})\,. \tag{77}$$

где $\alpha > 0$. В принципе, используемый подход может применяться с квантовыми дивергенциями более общего типа. Как правило, проблема оптимизации для таких дивергенций является достаточно сложной. Однако в случае относительной энтропии типа Цаллиса оказывается возможным получить замкнутое аналитическое выражение в терминах матричных элементов оператора плотности. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 17. *Для* $0 < \alpha \neq 1$ *определённый формулой* (77) *квантификатор когерентности равен*

$$\mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\alpha-1}\left\{\left(\sum\nolimits_j \langle e_j|\boldsymbol{\rho}^\alpha|e_j\rangle^{1/\alpha}\right)^\alpha - 1\right\}\ . \tag{78}$$

Для заданных $\boldsymbol{\rho}$ и α минимум в определении достигается с диагональным состоянием

$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{Z}\sum\nolimits_j \langle e_j|\boldsymbol{\rho}^\alpha|e_j\rangle^{1/\alpha}\,|e_j\rangle\langle e_j|\ . \tag{79}$$

Следует отметить, что $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\rho}}$ зависит не только от состояния $\boldsymbol{\rho}$, но и от значения параметра α, что для краткости не отражено явно. В случае $\alpha = 1$ мы имеем дело с формулировкой на основе стандартной относительной энтропии. Тогда состояние (79) получается из $\boldsymbol{\rho}$ обнулением всех недиагональных элементов. Рассмотрим другой интересный случай $\alpha = 2$. Поскольку матрица плотности эрмитова, получаем

$$\mathrm{C}_2(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) = \left(\sum\nolimits_j \sqrt{\sum\nolimits_i |\rho_{ij}|^2} \, \right)^2 - 1 \, , \tag{80}$$

где $\rho_{ij} = \langle e_i|\boldsymbol{\rho}|e_j\rangle$. Подобно величине (72), этот квантификатор когерентности является функцией квадратов модулей $|\rho_{ij}|^2$, но более сложным по аналитической структуре.

Ясно, что величина (77) равна нулю для всех некогерентных состояния. Это следует из (78) подстановкой $\langle e_j|\boldsymbol{\rho}^\alpha|e_j\rangle = \rho_{jj}^\alpha$ и $\sum_j \rho_{jj} = 1$. Кроме того, $\mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) = 0$ только для некогерентных состояний. Верхнюю границу на α-квантификаторы когерентности можно выразить в терминах степени отклонения данного состояния от идемпотентного.

Предложение 18. *Для* $0 < \alpha \leq 2$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) \leq -\ln_\alpha\!\left(\frac{1}{d\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)} \right) . \tag{81}$$

Для $2 < \alpha < \infty$ *мы имеем*

$$\mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ d\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) \Big(1 + \sqrt{d-1}\,\sqrt{d\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) - 1} \,\Big)^{\alpha - 2} - 1 \right\} . \tag{82}$$

Неравенства (81) и (82) обеспечивают верхнюю границу при оценке квантификаторов когерентности на основе α-дивергенции. Правые части этих неравенств выражены как функции величины $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)$, характеризующей близость матрицы плотности к чистым состояниям. В d-мерном пространстве степень смешанности матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ обычно характеризуется величиной

$$\mathrm{M}(\boldsymbol{\rho}) := \frac{d}{d-1} \left[1 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) \right] . \tag{83}$$

Эта величина равна нулю для чистых состояний и достигает 1 для полностью смешанного состояния. Итоговое соотношение комплементарности между когерентностью и мерой смешанности записывается в виде

$$\frac{1}{d-1}\,\mathrm{C}_{\alpha}(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho})+\mathrm{M}(\boldsymbol{\rho})\leq 1\ , \tag{84}$$

где $0<\alpha\leq 2$. Когда степень смешанности возрастает, верхняя граница на значения α-квантификатора когерентности уменьшается.

Поведение мер когерентности при трансформации квантовых состояний является принципиально важным. Естественно ожидать, что уровень когерентности не может повыситься в результате смешивания. Пусть $\{\boldsymbol{\rho}_n\}$ является набором матриц плотности, и пусть положительные числа p_n удовлетворяют $\sum_n p_n=1$. Для всех $\alpha\in(0;2]$ мы имеем

$$\mathrm{C}_{\alpha}\Big(\mathcal{E}\,\Big|\sum\nolimits_n p_n\boldsymbol{\rho}_n\Big)\leq\sum\nolimits_n p_n\,\mathrm{C}_{\alpha}(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}_n)\ . \tag{85}$$

Этот результат немедленно следует из совместной выпуклости (75) и определения (77). Первая формулировка свойства монотонности звучит следующим образом. Вспомним, что понятие когерентности зависит от базиса. Пусть $\mathcal{E}'$ — заданный ортонормированный базис, по отношению к которому введены некогерентные состояния выходной системы с пространством $\mathcal{H}_B$. Некогерентная квантовая операция определяется как сохраняющее след вполне положительное отображение $\Phi_I:\ \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\rightarrow\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, операторы Крауса которого подчиняются свойству

$$\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{I}(\mathcal{E})\ \Longrightarrow\ \frac{\mathsf{K}_n\boldsymbol{\rho}\mathsf{K}_n^{\dagger}}{\mathrm{Tr}(\mathsf{K}_n\boldsymbol{\rho}\mathsf{K}_n^{\dagger})}\in\mathcal{I}(\mathcal{E}')\ . \tag{86}$$

Для $\alpha\in(0;2]$ квантификатор когерентности (77) является монотонным при некогерентных операциях первого типа в смысле соотношения

$$\mathrm{C}_{\alpha}\big(\mathcal{E}'|\Phi_I(\boldsymbol{\rho})\big)\leq\mathrm{C}_{\alpha}(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho})\ . \tag{87}$$

Это заключение прямо следует из монотонности и определения (77), включающего процедуру минимизации.

Монотонность при некогерентных селективных измерениях является более жёстким требованием. Формулировка (87) относится к ситуации, в которой утрачивается информации об итогах измерений. Если результаты измерений сохраняются, то дальнейшие операции выбираются в зависимости от этих результатов. Такие операции также описываются множеством операторов Крауса $\{\mathsf{K}_n\}$, но теперь эти операторы могут иметь разные пространства вывода при одном и том же пространстве ввода. Рассмотрим набор операторов

$$\mathsf{K}_n :\, \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_{Bn} \ ,$$

удовлетворяющих $\sum_n \mathsf{K}_n^{\dagger}\mathsf{K}_n = \mathbb{1}_A$. Каждому выходному пространству $\mathcal{H}_{Bn}$ назначается ортонормированный базис $\mathcal{E}'_n$, используемый для определения некогерентных матрицы плотности. Оригинальная формулировка монотонности при некогерентных селективных измерениях записывается в виде

$$\sum\nolimits_n p_n\, \mathrm{C}\bigl(\mathcal{E}'_n|\boldsymbol{\rho}_n\bigr) \leq \mathrm{C}(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) \ . \tag{88}$$

Здесь выражение $p_n = \mathrm{Tr}\bigl(\mathsf{K}_n\boldsymbol{\rho}\mathsf{K}_n^{\dagger}\bigr)$ даёт вероятность n-го исхода, приводящего к n-му частному выводу

$$\boldsymbol{\rho}_n = p_n^{-1}\mathsf{K}_n\boldsymbol{\rho}\mathsf{K}_n^{\dagger} \ . \tag{89}$$

Оказывается, что α-квантификаторы когерентности подчиняются свойству монотонности в видоизменённой формулировке [A13].

Предложение 19. *Пусть некогерентное состояние $\boldsymbol{\delta}_\rho \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ удовлетворяет равенству $\mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{H}_\alpha(\boldsymbol{\rho}||\boldsymbol{\delta}_\rho)$. Для всех $\alpha \in (0;2]$ квантификатор когерентности (77) при действии некогерентных селективных измерений удовлетворяет неравенству*

$$\sum\nolimits_n p_n^{\alpha} q_n^{1-\alpha}\, \mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}'_n|\boldsymbol{\rho}_n) \leq \mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) \ , \tag{90}$$

где вероятности $p_n = \mathrm{Tr}(\mathsf{K}_n\boldsymbol{\rho}\mathsf{K}_n^{\dagger})$ и $q_n = \mathrm{Tr}(\mathsf{K}_n\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\rho}}\mathsf{K}_n^{\dagger})$, а вывод $\boldsymbol{\rho}_n$ определён формулой (89).

В работе [A13] построен явный пример некогерентного селективного измерения, при котором

$$\sum\nolimits_n p_n\, \mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}'_n|\boldsymbol{\rho}_n) > \mathrm{C}_\alpha(\mathcal{E}|\boldsymbol{\rho}) \ . \tag{91}$$

Итак, видоизменённая формулировка является необходимой. В статье [A13] были также рассмотрены приложения развитой формулировки к случаю однокубитовой системы. В работе [A14] определение квантификаторов когерентности типа (77) было расширено на ПОЗМ-измерения с элементами ранга 1. Показано, что результат вычислений не зависит от применяемого расширения Наймарка с операторами ранга 1 и определяется только теми величинами, которые относятся к исходному пространству состояний.

В шестой главе рассмотрены экстремальные "распутывания" супероператора и энтропийные соотношения неопределённостей для них. Изложение основано на публикациях [A5, A6]. Известно [22], что два представления Крауса одного и того же сохраняющего след супероператора удовлетворяют соотношению

$$\mathsf{B}_i = \sum\nolimits_j \mathsf{A}_j\, u_{ji} \ , \tag{92}$$

причём квадратная матрица $\mathsf{U} = [[u_{ij}]]$ является унитарной. Для данного оператора плотности $\boldsymbol{\rho}$ и распутывания $\mathcal{A} = \{\mathsf{A}_j\}$ можно ввести матрицу

$$\Pi(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho}) := \big[\big[\langle \mathsf{A}_i\sqrt{\boldsymbol{\rho}}\,, \mathsf{A}_j\sqrt{\boldsymbol{\rho}}\,\rangle_{\mathrm{HS}}\big]\big] \equiv \big[\big[\mathrm{Tr}(\mathsf{A}_i^\dagger \mathsf{A}_j \boldsymbol{\rho})\big]\big]\, . \tag{93}$$

Здесь $\langle \mathsf{X}\,, \mathsf{Y}\rangle_{\mathrm{HS}} := \mathrm{Tr}(\mathsf{X}^\dagger \mathsf{Y})$ означает скалярное произведение Гильберта–Шмидта. Диагональный элемент $p_i = \mathrm{Tr}(\mathsf{A}_i^\dagger \mathsf{A}_i \boldsymbol{\rho})$ явно положителен и даёт вероятность i-го эффекта. В терминах этих вероятностей мы вводим энтропии Цаллиса $H_\alpha(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho})$ и Ре́ньи $R_\alpha(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho})$. По определению матрица $\Pi(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho})$ эрмитова. Если элементы двух множеств $\mathcal{A} = \{\mathsf{A}_i\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathsf{B}_j\}$ удовлетворяют соотношению (92), то, используя свойства скалярного произведения, имеем

$$\langle \mathsf{B}_i\sqrt{\boldsymbol{\rho}}\,, \mathsf{B}_k\sqrt{\boldsymbol{\rho}}\,\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum\nolimits_{jl} u_{ji}^*\, u_{lk}\, \langle \mathsf{A}_j\sqrt{\boldsymbol{\rho}}\,, \mathsf{A}_l\sqrt{\boldsymbol{\rho}}\,\rangle_{\mathrm{HS}} \ . \tag{94}$$

Для заданного распутывания $\mathcal{A} = \{\mathsf{A}_i\}$ и оператора плотности $\boldsymbol{\rho}$ мы получаем конкретную матрицу $\Pi(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho})$, которую можем диагонализовать с помощью унитарной матрицы

$$\mathsf{V}^{\dagger}\,\Pi(\mathcal{A}|\rho)\,\mathsf{V} = \mathsf{D} \ . \tag{95}$$

Определим конкретное распутывание $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$, чьи операторы связаны с множеством $\mathcal{A}$ формулой

$$\mathsf{A}_i^{(ex)} = \sum\nolimits_j \mathsf{A}_j\, v_{ji} \ , \tag{96}$$

где унитарная матрица $\mathsf{V} = [[v_{ji}]]$ диагонализует $\Pi(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho})$. Распутывание (96) обладает свойством *экстремальности* по отношению к α-энтропиям Цаллиса для всех $\alpha \in (0;\infty)$ и α–энтропиям Ре́ньи для $\alpha \in (0;1]$.

Предложение 20. *Пусть распутывание $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$ определено по формуле (96) для заданных матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$ и супероператора Φ. Для каждого распутывания $\mathcal{A}$ супероператора Φ, справедливы неравенства*

$$H_{\alpha}(\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}) \leq H_{\alpha}(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho}) \qquad \forall\ \alpha \in (0;\infty)\ , \tag{97}$$

$$R_{\alpha}(\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}) \leq R_{\alpha}(\mathcal{A}|\boldsymbol{\rho}) \qquad \forall\ \alpha \in (0;1]\ . \tag{98}$$

Соотношения (97) и (98) могут быть переформулированы в терминах ансамблей чистых состояний, приводящих к заданному оператору плотности [A6]. Для $b \geq 1$ норма ℓ_b вектора x определяется выражением

$$\|\mathsf{x}\|_b := \Bigl(\sum\nolimits_j |x_j|^b\Bigr)^{1/b} \ . \tag{99}$$

Для $\beta > 0$, мы будем использовать подобную функцию вероятностных векторов, а именно

$$\|\mathsf{q}\|_{\beta} = \Bigl(\sum\nolimits_j q_j^{\beta}\Bigr)^{1/\beta} \ . \tag{100}$$

Правая часть (100) не является легитимной нормой для $0 < \beta < 1$.

Предложение 21. *Для данного оператора плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *и двух разложений единицы* $\mathcal{M} = \{\mathsf{M}_i\}$ *и* $\mathcal{N} = \{\mathsf{N}_j\}$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathsf{p}\|_\alpha \le g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\boldsymbol{\rho})^{2(1-\beta)/\beta} \, \|\mathsf{q}\|_\beta \ , \tag{101}$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ *и* $1/2 < \beta < 1$, *а функция* $g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\boldsymbol{\rho})$ *определена как*

$$g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) := \max\Big\{ (p_i q_j)^{-1/2} \left| \mathrm{Tr}(\mathsf{M}_i \mathsf{N}_j \boldsymbol{\rho}) \right| : \, p_i \neq 0, \; q_j \neq 0 \Big\} \, . \tag{102}$$

Принцип неопределённостей Гейзенберга [23] рассматривается ныне как фундаментальная концепция, применимая не только в физике. Целесообразность энтропийной формулировки принципа для дискретных наблюдаемых была обоснована в работах [24, 25]. Энтропийное соотношение неопределённостей для координаты и импульса были предложено в статье [26] и позднее усилено в статьях [27, 28]. Используя преобразования, описанные в доказательстве предложения 3 работы [A5], неравенство (101) даёт

$$R_\alpha(\mathcal{M}|\boldsymbol{\rho}) + R_\beta(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \ge -2 \ln g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \ . \tag{103}$$

Для чистого состояния это соотношение в терминах энтропий Ре́ньи совпадает с результатом, полученным в [A5]. Из результата (101) следует также соотношение неопределённостей в терминах энтропий Цаллиса.

Предложение 22. *Для данного оператора плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *и двух разложений единицы* $\mathcal{M} = \{\mathsf{M}_i\}$ *и* $\mathcal{N} = \{\mathsf{N}_j\}$ *справедливо неравенство*

$$H_\alpha(\mathcal{M}|\boldsymbol{\rho}) + H_\beta(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \ge \ln_\mu\!\Big(g(\mathcal{M}, \mathcal{N}|\boldsymbol{\rho})^{-2} \Big) \ , \tag{104}$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ *и* $\mu = \max\{\alpha, \beta\}$.

В рамках (104) можно рассмотреть случай экстремальных распутываний супероператоров. Для экстремальных распутываний $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$ и $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$ супероператоров Φ_A и Φ_B получаем соотношение неопределённости

$$H_\alpha(\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}) + H_\beta(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}) \ge \ln_\mu\!\left(g\big(\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}, \mathcal{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}\big)^{-2} \right) , \tag{105}$$

где $g\big(\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)},\mathcal{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}\big)$ определён в (102) для разложений единицы с элементами

$$\mathsf{M}_i=\mathsf{A}_i^{\dagger}\mathsf{A}_i\ , \qquad \mathsf{N}_j=\mathsf{B}_j^{\dagger}\mathsf{B}_j\ , \tag{106}$$

при этом $\mathsf{A}_i\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$ и $\mathsf{B}_j\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$. Следы $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}_i^{\dagger}\mathsf{A}_i\boldsymbol{\rho})$ и $\mathrm{Tr}(\mathsf{B}_j^{\dagger}\mathsf{B}_j\boldsymbol{\rho})$ — вероятности соответствующих каналов. Можно также записать соотношение неопределённостей для экстремальных распутываний в терминах энтропий Ре́ньи. Используя (103) и полагая $\alpha>1$, получаем соотношение

$$R_{\alpha}\big(\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}\big)+R_{\beta}\big(\mathcal{B}_{\rho}^{(ex)}|\boldsymbol{\rho}\big)\geq-2\ln\Big(g\big(\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\boldsymbol{\rho}}^{(ex)},\mathcal{B}_{\rho}^{(ex)}|\rho\big)\Big)\,, \tag{107}$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$ есть распутывание Φ_A, экстремальное по отношению к α-энтропии Ре́ньи порядка $\alpha>1$. Это распутывание отличается от заданного в (96) и зависит, вообще говоря, не только от $\boldsymbol{\rho}$, но и от параметра α. Поиск явного аналитического выражения для $\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\boldsymbol{\rho}}^{(ex)}$ представляется достаточно сложным, потому что выпуклость или вогнутость не могут быть здесь использованы.

В седьмой главе представлены новые энтропийные соотношения неопределённостей для измерений со специальной структурой, что позволяет сформулировать неравенства за рамками подхода статьи [25]. Изложение основано на статьях [A9, A11, A12]. Как правило, в задачах передачи и обработки информации на квантовых носителях особое значение имеют измерения, обладающие той или иной специальной структурой. Первая по времени появления и одновременно наиболее распространённая практически схема квантовой криптографии — протокол BB84 — основана на использовании двух равнонаклонённых базисов. Рассмотрим два ортонормированных базиса $\mathcal{B}_1=\big\{|b_j^{(1)}\rangle\big\}$ и $\mathcal{B}_2=\big\{|b_k^{(2)}\rangle\big\}$ в d-мерном комплексном пространстве $\mathcal{H}$. Данные базисы называются *равнонаклонёнными* [7], если для всех значений индексов j и k выполняется условие

$$\big|\langle b_j^{(1)}|b_k^{(2)}\rangle\big|=\frac{1}{\sqrt{d}}\ . \tag{108}$$

Семейство $\mathbb{B}=\big\{\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_M\big\}$ является набором равнонаклонённых базисов, когда любые два из этих базисов равнонаклонены. Для равнонаклонённых базисов состояние одного из них имеет одно и то же “перекрытие” с каждым из состояний другого. ПОЗМ-измерение является *информационным полным*, если его элементы образуют базис в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. В d-мерном пространстве рассмотрим набор, содержащий d^2 положительно полуопределённых матриц вида

$$\mathsf{N}_j=\frac{1}{d}\,|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\ . \tag{109}$$

Если нормированные на единицу векторы $|\phi_j\rangle$ подчиняются условию

$$\bigl|\langle\phi_j|\phi_k\rangle\bigr|^2=\frac{1}{d+1}\ , \qquad j\neq k\ , \tag{110}$$

то набор $\{\mathsf{N}_j\}$ описывает симметричное информационно полное ПОЗМ-измерение. Из уравнения (110) следует, что попарные внутренние произведения двух элементов ПОЗМ-измерения $\mathcal{N}$ равны величине

$$\langle\mathsf{N}_j\,,\mathsf{N}_k\rangle_{\mathrm{hs}}=\frac{1}{d^2(d+1)}\ , \qquad j\neq k\ . \tag{111}$$

Одним из достоинств энтропийного подхода к соотношениям неопределённостей является естественная возможность учесть неэффективности детектирования, например, в рамках следующей модели. Заданному значению эффективности $\eta\in[0;1]$ и произвольному вероятностному распределению $\mathtt{p}=\{p_j\}$ ставится в соответствие “искажённое” распределение $\mathtt{p}^{(\eta)}$ с вероятностями

$$p_j^{(\eta)}=\eta\,p_j\ , \qquad p_{\varnothing}^{(\eta)}=1-\eta\ . \tag{112}$$

Вероятность $p_{\varnothing}^{(\eta)}$ отвечает событию “детектор не сработал”. Можно показать, что для всех $\alpha>0$ справедливо

$$H_\alpha\bigl(\mathtt{p}^{(\eta)}\bigr)=\eta^\alpha H_\alpha(\mathtt{p})+h_\alpha(\eta)\ , \tag{113}$$

где $h_\alpha(\eta)$ — бинарная энтропия Цаллиса. В частности, для энтропии Шеннона получаем $H_1\bigl(\mathtt{p}^{(\eta)}\bigr)=\eta\,H_1(\mathtt{p})+h_1(\eta)$. Первое соотношение неопределённостей выражается следующим образом.

Предложение 23. *Пусть* $\mathbb{B} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_M\}$ *— набор* M *равнонаклонённых базисов в* d*-мерном комплексном пространстве* $\mathcal{H}$*. Для* $\alpha \in (0;2]$ *и произвольной матрицы плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *на* $\mathcal{H}$ *усреднённая по* $\mathbb{B}$ α*-энтропия Цаллиса удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} H_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\alpha\!\left(\frac{Md}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\,d+M-1}\right) . \tag{114}$$

Не зависящая от $\boldsymbol{\rho}$ *нижняя граница устанавливается неравенством*

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} H_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\alpha\!\left(\frac{Md}{d+M-1}\right) . \tag{115}$$

Для чистых состояний, когда $\boldsymbol{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, имеем $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) = 1$. Тогда зависящая от состояния граница (114) сводится к виду (115). Подставляя $M = d+1$ в неравенства (114) и (115), получаем

$$\frac{1}{d+1}\sum_{m=1}^{d+1} H_\alpha(\mathcal{B}_m|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\alpha\!\left(\frac{d+1}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)+1}\right) \tag{116}$$

$$\geq \ln_\alpha\!\left(\frac{d+1}{2}\right) . \tag{117}$$

В случае $\alpha = 1$ правая часть неравенства (117) приводит к известной энтропийной оценке, полученной разными методами во многих работах. Однако существование наборов, содержащих $d+1$ равнонаклонённых базисов, установлено только в случае значений d, являющихся степенью простого числа. Поэтому важно иметь энтропийные границы, справедливые для произвольного количества равнонаклонённых базисов.

Пусть параметр $\eta \in [0;1]$ характеризуют эффективность используемых в эксперименте детекторов. С физической точки зрения естественно считать, что эффективность детекторов одинакова по отношению ко всем равнонаклонённым базисам. Предполагая, что для любого базиса $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$ вероятностное распределение искажается согласно уравнению (112), запишем

$$p_j^{(\eta)}(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) = \eta\, p_j(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \ , \qquad p_\varnothing^{(\eta)}(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) = 1-\eta \ . \tag{118}$$

Используя формулы (113) и (114), для $\alpha \in (0;2]$ мы получаем

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} H_{\alpha}^{(\eta)}(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \eta^{\alpha}\ln_{\alpha}\left(\frac{Md}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\,d+M-1}\right)+h_{\alpha}(\eta)\ . \tag{119}$$

Здесь $H_{\alpha}^{(\eta)}(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho})$ обозначает α-энтропию распределения (118). Результат (119) является энтропийным соотношением неопределённостей в модели с неэффективностями детектирования. В случае $\alpha = 1$ мы просто добавляем бинарную энтропию Шеннона $h_1(\eta)$ к нижней границе, отвечающей случаю идеальных детекторов. Энтропии фактических вероятностных распределений учитывают не только квантовые неопределённости по отношению к базисам, но и вносимую реальными детекторами дополнительную неопределённость. Правая часть формулы (119) также позволяет оценить требуемый уровень эффективности применяемых детекторов. Соотношение неопределённостей в терминах усреднённой столкновительной энтропии записывается в виде [A11]

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} R_2(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln\left(\frac{Md}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\,d+M-1}\right) \tag{120}$$

$$\geq \ln\left(\frac{Md}{d+M-1}\right)\ . \tag{121}$$

Следующий результат формулируется в терминах min-энтропии. Он также позволяет оценить снизу усреднённую α-энтропию Ре́ньи для $\alpha > 2$.

Предложение 24. *Пусть* $\mathbb{B} = \bigl\{\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_M\bigr\}$ *— набор* M *равнонаклонённых базисов в* d*-мерном комплексном пространстве. Для произвольной матрицы плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *усреднённая* min*-энтропия удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} R_{\infty}(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln d - \ln\Bigl(1+M^{-1/2}\sqrt{d-1}\sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\,d-1}\Bigr)\ . \tag{122}$$

Не зависящая от $\boldsymbol{\rho}$ *нижняя граница устанавливается неравенством*

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} R_{\infty}(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln\left(\frac{\sqrt{M}\,d}{d+\sqrt{M}-1}\right)\ . \tag{123}$$

Показано [A12], что для α-энтропии Ре́ньи порядка $\alpha \geq 2$ справедливо неравенство

$$R_\alpha(\mathtt{p}) \geq \frac{1}{\alpha-1}\, R_2(\mathtt{p}) + \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\, R_\infty(\mathtt{p})\,. \tag{124}$$

Комбинируя (120), (122) и (124), получаем следующее утверждение.

Предложение 25. *Пусть* $\mathbb{B} = \bigl\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_M\bigr\}$ *— набор* M *равнонаклонённых базисов в* d*-мерном комплексном пространстве* $\mathcal{H}$*. Для* $\alpha \in (0;2]$ *и произвольной матрицы плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *на* $\mathcal{H}$ *усреднённая по* $\mathbb{B}$ α*-энтропия Ре́ньи удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} R_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \frac{1}{\alpha-1}\, &\ln\!\left(\frac{M d}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\, d + M - 1}\right) \\ &+ \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\left\{\ln d - \ln\!\left(1 + M^{-1/2}\sqrt{d-1}\sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\, d - 1}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{125}$$

Не зависящая от $\boldsymbol{\rho}$ *нижняя граница устанавливается неравенством*

$$\frac{1}{M}\sum_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} R_\alpha(\mathcal{B}|\boldsymbol{\rho}) \geq \frac{1}{\alpha-1}\, \ln\!\left(\frac{M d}{d + M - 1}\right) + \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\, \ln\!\left(\frac{\sqrt{M}\, d}{d + \sqrt{M} - 1}\right). \tag{126}$$

Если использовать теорему Рисса, то можно получить соотношения неопределённостей в терминах симметризованных энтропий [A11]. Чтобы сформулировать соотношения неопределённостей для симметричного информационно полного измерения, вычисляется соответствующий индекс совпадения [A11].

Предложение 26. *Пусть* $\mathcal{N} = \bigl\{d^{-1}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\bigr\}$ *— симметричное информационно полное измерение в* d*-мерном пространстве. Для произвольной матрицы плотности* $\boldsymbol{\rho}$ *генерируемые вероятности удовлетворяют равенству*

$$\sum_{j=1}^{d^2} p_j(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho})^2 = \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2) + 1}{d(d+1)}\,. \tag{127}$$

Таким образом, для любого симметричного информационно полного измерения индекс совпадения порождённого распределения вероятностей точно выражается через матрицу плотности. В общем, значения вероятностей варьируются в области, определяемый условиями $\sum_j p_j = 1$ и $p_j \geq 0$ для всех j. В случае симметричного информационно полного измерения они также должны удовлетворять дополнительному ограничению (127), которое зависит от измеряемого состояния. С другой стороны, статистика измерений может быть использована для характеризации неизвестного квантового состояния. С помощью полной статистики симметричного информационно полного измерения и результата (127) мы можем точно найти след квадрата неизвестной матрицы плотности. Этот след является одним из способов описать степень отклонения от чистых квантовых состояний. Для чистого состояния $\boldsymbol{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ формула (127) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{d^2} p_j(\mathcal{N}|\psi)^2 = \frac{2}{d(d+1)} \ . \tag{128}$$

Энтропийное соотношение неопределённостей для симметричных информационно полных измерений имеет следующий вид.

Предложение 27. *Пусть $\mathcal{N}$ — симметричное информационно полное измерение на d-мерном комплексном пространстве. Для $\alpha \in (0;2]$ и произвольной матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$, α-энтропия Цаллиса ограничена снизу согласно неравенству*

$$H_\alpha(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\alpha\left(\frac{d(d+1)}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)+1}\right) . \tag{129}$$

В случае неэффективностей детектирования энтропия искажённого распределения подчиняется неравенству

$$H_\alpha^{(\eta)}(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \geq \eta^\alpha \ \ln_\alpha\left(\frac{d(d+1)}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)+1}\right) + h_\alpha(\eta) \ , \tag{130}$$

где $\alpha \in (0;2]$. Результат (130) вытекает из (129) в комбинации с формулой (113). Рассмотрим теперь формулировку в терминах энтропии Ре́ньи. Она непосредственно следует из (127).

Предложение 28. *Пусть $\mathcal{N}$ — симметричное информационно полное измерение на d-мерном комплексном пространстве. Для $\alpha \in [2;\infty)$ и произвольной матрицы плотности $\boldsymbol{\rho}$, α-энтропия Ре́ньи ограничена снизу согласно неравенству*

$$R_\alpha(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \geq \frac{1}{\alpha-1}\,\ln\!\left(\frac{d(d+1)}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)+1}\right) + \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\left\{2\ln d - \ln\!\left(1+\sqrt{d-1}\,\sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\,d-1}\right)\right\}. \tag{131}$$

Для $\alpha = 2$ неравенство (131) даёт нижнюю границу на столкновительную энтропию, а именно

$$R_2(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln\!\left(\frac{d(d+1)}{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)+1}\right). \tag{132}$$

Поскольку α-энтропия Ре́ньи не увеличивается с ростом α, оценка (132) справедлива для всех энтропий Ре́ньи порядка $\alpha \in (0;2]$. В этом диапазоне мы имеем только постоянную энтропийную границу. Далее, правая часть уравнения (131) уменьшается с ростом α, а в пределе получается

$$R_\infty(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \geq 2\ln d - \ln\left(1+\sqrt{d-1}\,\sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)\,d-1}\right). \tag{133}$$

Последнее неравенство — соотношение неопределённостей для симметричного информационно полного измерения на языке min-энтропии. Для чистого состояния $\boldsymbol{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ правая часть (133) сводится

$$R_\alpha(\mathcal{N}|\boldsymbol{\rho}) \geq \ln d\,. \tag{134}$$

Неравенство (133) насыщается для полностью смешанного состояния $\boldsymbol{\rho}_* = \mathbb{1}/d$, когда $p_j = 1/d^2$ для всех j. Правая часть формулы (133) возрастает с уменьшением $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)$. Другими словами, чем выше степень смешанности состояния, тем больше нижняя граница (133).

В восьмой главе изучены энтропийные соотношения неопределённостей для энергии и её “дополнения” [A15]. Первые количественные формулировки принципа для энергии и времени были предложены Мандельштамом и Таммом

[29] и Крыловым и Фоком [30]. Авторы статьи [31] развили другой подход, в котором неопределённость во временно́м поведении системы характеризуется величиной “сэндвич”-дивергенции Ре́ньи определённых состояний комбинированной системы. Концепция “дополнения” гамильтониана [32] позволяет рассматривать соотношения неопределённостей для энергии и времени по аналогии с обычными наблюдаемыми. Она прямо приводит к формулировкам, непосредственно связанным со статистикой измерений. Ограничиваясь системами с дискретными энергетическими уровнями определённого типа, область применимости такого подхода включает наиболее типичные случаи с точки зрения реализации квантовых технологий.

Пусть квантовая система имеет $d+1$ энергетических уровней ε_n, причём $\varepsilon_0 = 0$. Предположим также, что собственные значения гамильтониана невырождены и упорядочены по возрастанию. Гамильтониан записывается в виде

$$\mathsf{E} = \sum\nolimits_{n=0}^{d} \varepsilon_n \, |\varepsilon_n\rangle\langle\varepsilon_n| \,, \tag{135}$$

где $|\varepsilon_n\rangle$ обозначает нормированное собственное состояние с энергией ε_n. Можно показать, что оператор E действует как генератор сдвигов на состояния вида

$$|\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{d+1}} \sum_{n=0}^{d} \exp(-\mathtt{i}\varepsilon_n \tau) \, |\varepsilon_n\rangle \,. \tag{136}$$

Параметр τ в формуле (136) принимает любые вещественные значения. Векторы этого типа образуют переполненную систему векторов в $\mathcal{H}_{d+1}$, а построить из них ортогональный базис в общем случае не удаётся. Но можно получить неортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}_{d+1}$, когда все дроби $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ являются рациональнами числами или с высокой точностью представляются ими. Рассмотрим $s+1$ состояний вида (136) со значениями

$$\tau_m = \tau_0 + m \, \frac{T_c}{s+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots, s) \,. \tag{137}$$

Отметим, что промежуточные значения $\tau_1, \ldots, \tau_s$ равномерно распределены между крайними точками τ_0 и $\tau_0 + T_c$. В рамках принятых предположений выполняется соотношение [32]

$$\frac{d+1}{s+1}\sum_{m=0}^{s}|\tau_m\rangle\langle\tau_m| = \mathbb{1}_{d+1}\,, \tag{138}$$

где $\mathbb{1}_{d+1}$ есть единичный оператор на $\mathcal{H}_{d+1}$. Гамильтониан генерирует на состояниях $|\tau_m\rangle$ сдвиг параметра согласно

$$\exp(-\mathtt{i}\mathsf{E}\,\varDelta\tau)\,|\tau\rangle = |\tau+\varDelta\tau\rangle\,. \tag{139}$$

Формула (138) является точной, когда дроби $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ рациональны и разности $r_\ell - r_n$ не делятся на $s+1$, что обеспечивается выбором $s+1 > \max r_n$. В остальном целое число $s \geq d$ произвольно. Если дроби $\varepsilon_n/\varepsilon_1$ не являются рациональными, но аппроксимируются ими с высокой точностью, то равенство (138) выполняется вплоть до малого аддитивного слагаемого. Набора векторов $|\tau_m\rangle$ достаточно для того, чтобы описать уровень неопределённостей с дополнительной к гамильтониану точки зрения.

Пусть $\mathcal{E} = \bigl\{|\varepsilon_n\rangle\langle\varepsilon_n|\bigr\}$ обозначает набор проекторов на собственные состояния гамильтониана. Если состояние системы непосредственно перед измерением описывается матрицей плотности $\boldsymbol{\rho}$ с единичным следом, то вероятность получения результата ε_n равна $\langle\varepsilon_n|\boldsymbol{\rho}|\varepsilon_n\rangle$. Через $R_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho})$ и $H_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho})$ обозначаются α-энтропии Ре́ньи и Цаллиса, вычисленные с упомянутыми вероятностями. Измерение дополнительной к гамильтониану наблюдаемой описывается ПОЗМ $\mathcal{T} = \bigl\{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\bigr\}$ с элементами ранга 1, где

$$|\theta_m\rangle = \sqrt{\frac{d+1}{s+1}}\,|\tau_m\rangle\,. \tag{140}$$

Для состояния $\boldsymbol{\rho}$ получаем α-энтропии Ре́ньи и Цаллиса $R_\alpha(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho})$ и $H_\alpha(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho})$, вычисленные с вероятностями $\langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\theta_m\rangle$. Введём скалярную величину

$$g(\mathcal{E},\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) := \max\frac{\bigl|\langle\varepsilon_n|\theta_m\rangle\,\langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\varepsilon_n\rangle\bigr|}{\langle\varepsilon_n|\boldsymbol{\rho}|\varepsilon_n\rangle^{1/2}\,\langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\theta_m\rangle^{1/2}}\;, \tag{141}$$

где максимум берётся над всеми теми n и m, для которых $\langle\varepsilon_n|\boldsymbol{\rho}|\varepsilon_n\rangle \neq 0$ и

$\langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\theta_m\rangle \neq 0$. Если состояние системы непосредственно перед измерением описывается матрицей плотности $\boldsymbol{\rho}$, то

$$R_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + R_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) \geq -2\ln g(\mathcal{E},\mathcal{T};\boldsymbol{\rho})\,, \tag{142}$$

$$H_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + H_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\mu\bigl\{g(\mathcal{E},\mathcal{T};\boldsymbol{\rho})^{-2}\bigr\}\,, \tag{143}$$

где положительные энтропийные параметры связаны формулой $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha,\beta\}$. Неравенства (142) и (143) выражают соотношения неопределённостей для сценария с приготовлением одного и того же состояния. Как видно из (141), имеется зависимость от выбора фактических моментов отсчёта при построении ПОЗМ $\mathcal{T} = \bigl\{|\theta_m\rangle\langle\theta_m|\bigr\}$. Возможность такого выбора отражает некоторую свободу, имеющуюся в способах экспериментальной реализации измерений “дополнения” гамильтониана. Следуя методам статьи [A5], можно преобразовать правые части соотношений (142) и (143) в форму, не зависящую от измеряемого состояния. Действительно, в силу неравенства Коши–Шварца

$$g(\mathcal{E},\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) \leq f(\mathcal{E},\mathcal{T}) := \max\bigl|\langle\varepsilon_n|\theta_m\rangle\bigr|\,, \tag{144}$$

или окончательно $f(\mathcal{E},\mathcal{T}) = (s+1)^{-1/2}$, так что

$$R_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + R_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) \geq \ln(s+1)\,, \tag{145}$$

$$H_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + H_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) \geq \ln_\mu(s+1)\,, \tag{146}$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha,\beta\}$. Неравенства (145) и (146) справедливы для любого состояния $\boldsymbol{\rho}$. При $s > d$ норма состояний $|\theta_m\rangle$ и вероятности $\langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\theta_m\rangle$ строго меньше 1. Поэтому энтропии $R_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho})$ и $H_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho})$ в приведённых выше соотношениях строго больше нуля. Принимая во внимание неравенство $\langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\theta_m\rangle \leq (d+1)/(s+1)$, имеем

$$R_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) \geq \ln\!\left(\frac{s+1}{d+1}\right) =: \mathit{\Gamma}\,. \tag{147}$$

Хотя данная оценка снизу приблизительная, она характеризует неизбежный ввиду $s > d$ уровень неопределённостей, присутствующий в измерении $\mathcal{T}$. Вычитая $\mathit{\Gamma}$ из обеих частей (145), окончательно получаем

$$R_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + R_\beta(\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) - \mathit{\Gamma} \geq \ln(d+1)\,. \tag{148}$$

После вычитания нижняя энтропийная граница равна логарифму размерности $d+1$ независимо от числа "временных" отсчётов $s+1$. Тем самым правая часть соотношения (148) становится полностью схожей с тем, что получается в случае конечномерных канонически сопряжённых наблюдаемых.

Неэффективности детектирования естественным образом учитываются в рамках энтропийного подхода. Заданному уровню эффективности $\eta \in [0;1]$ и произвольному вероятностному распределнию ставится в соответствие "искажённое" распределение (112). Пусть $\eta = \min\{\eta_\mathcal{E}, \eta_\mathcal{T}\} \geq 1/2$, где $\eta_\mathcal{E}$ и $\eta_\mathcal{T}$ соответственно характеризуют неэффективность детектирования в измерениях энергии и её "дополнения". Используя (113) для $\alpha = 1$, получаем

$$\begin{aligned} H_1(\mathcal{E}^{(\eta_\mathcal{E})};\boldsymbol{\rho}) + H_1(\mathcal{T}^{(\eta_\mathcal{T})};\boldsymbol{\rho}) &\geq -2\eta \ln g(\mathcal{E},\mathcal{T};\boldsymbol{\rho}) + h_1(\eta_\mathcal{E}) + h_1(\eta_\mathcal{T}) \\ &\geq \eta \ln(s+1) + 2h_1\big(\max\{\eta_\mathcal{E},\eta_\mathcal{T}\}\big). \end{aligned} \tag{149}$$

Бинарные энтропии учитывают вклад событий "детектор не сработал". При недостаточно высокой эффективности детекторов статистика измерений будет отражать, главным образом, генерируемые ими неопределённости.

Предельный случай $s \to \infty$ интересен в том отношении, что позволяет отвлечься от рассмотрения конкретных энергетических уровней. Так как разность между соседними τ_m стремится к нулю, вероятность попасть в малый интервал между τ и $\tau + \mathit{\Delta}\tau$ приближённо равна $w_{\boldsymbol{\rho}}(\tau)\,\mathit{\Delta}\tau$. Тогда записываем

$$w_{\boldsymbol{\rho}}(\tau) = \frac{\langle\tau'|\boldsymbol{\rho}|\tau'\rangle}{T_c}\ , \tag{150}$$

где отмасштабированные векторы $|\tau'\rangle = \sqrt{d+1}\,|\tau\rangle$. Полагая $\mathit{\Delta}\tau = T_c\,/(s+1)$, видим, что величина (150) удовлетворяет равенству

$$w_{\boldsymbol{\rho}}(\tau_m)\,\mathit{\Delta}\tau = \langle\theta_m|\boldsymbol{\rho}|\theta_m\rangle\,. \tag{151}$$

Пишем также $U_{\widetilde{\boldsymbol{\rho}}}(\theta_m)\,\varDelta\theta = w_{\boldsymbol{\rho}}(\tau_m)\,\varDelta\tau$ с малым интервалом $\varDelta\theta = 2\pi/(s+1)$. Как было сказано выше, матрица плотности $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ получена из $\boldsymbol{\rho}$ добавлением нулевых строк и столбцов. Дифференциальные энтропии Ре́ньи $R_\alpha(w_{\boldsymbol{\rho}})$ и $R_\alpha\bigl(U_{\widetilde{\boldsymbol{\rho}}}\bigr)$ вводятся согласно определению

$$R_\alpha(w) := \frac{1}{1-\alpha}\,\ln\!\left(\int_0^{2\pi} w(\varphi)^\alpha\,\mathrm{d}\varphi\right). \tag{152}$$

После предельного перехода из (145) находим $R_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + R_\beta(w_{\boldsymbol{\rho}}) \geq \ln T_c$ с условием $1/\alpha + 1/\beta = 2$. На шкале времени рассмотрим экспериментальные “бины”. Пусть интервал $[\tau_0;\tau_0+T_c]$ делится на малые отрезки точками τ_j. В отличие от меток (137) точки τ_j могут быть выбраны произвольно. Через $\delta\tau$ обозначим наибольшую из разностей $\tau_{j+1}-\tau_j$. Вместо $w_{\boldsymbol{\rho}}(\tau)$ используются вероятности

$$q_j^{(\delta)} := \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} w_{\boldsymbol{\rho}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{153}$$

составляющие вероятностное распределение $\mathsf{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)}$. В результате преобразований окончательно получаем неравенства

$$R_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + R_\beta\bigl(\mathsf{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)};\boldsymbol{\rho}\bigr) \geq \ln\!\left(\frac{T_c}{\delta\tau}\right), \tag{154}$$

$$H_\alpha(\mathcal{E};\boldsymbol{\rho}) + H_\beta\bigl(\mathsf{q}_{\mathcal{T}}^{(\delta)};\boldsymbol{\rho}\bigr) \geq \ln_\mu\!\left(\frac{T_c}{\delta\tau}\right), \tag{155}$$

в которых $1/\alpha+1/\beta = 2$ и $\mu = \max\{\alpha,\beta\}$. Формулы (154) и (155) выражают энтропийные соотношения неопределённостей с “бинами” на шкале времени. Фактические “бины” выбираются совершенно независимо от значений типа (137). В этом смысле формулировки (154) и (155) записаны в унифицированном виде, включающем единственную характеристику T_c.

В Заключении кратко суммированы представленные в диссертации основные результаты, а также обсуждаются их возможные применения в решении практических задач квантовых технологий.

Цитированная литература

1. Feynman R.P. Simulating physics with computers // Int. J. Theor. Phys. — 1982. — Vol. 21. — P. 467–488.
2. Benioff P. Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines // J. Stat. Phys. — 1982. — Vol. 29. — P. 515–546.
3. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. — М.: Советское радио, 1980. — 128 с.
4. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. — М.: Мир, 2006. — 824 с.
5. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979. — 344 с.
6. Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
7. Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. — М.: Изд-во МЦНМО, 2014. — 327 с.
8. Uhlmann A. The “transition probability” in the state space of a *-algebra // Rep. Math. Phys. — 1976. — Vol. 9. — P. 273–279.
9. Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states // J. Mod. Opt. — 1994. — Vol. 41. — P. 2315–2323.
10. Uhlmann A. On “partial” fidelities // Rep. Math. Phys. — 2000. — Vol. 45. — P. 407–418.
11. Fannes M. A continuity property of entropy density for spin lattice systems // Commun. Math. Phys. — 1973. — Vol. 31. — P. 291–294.
12. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics // J. Stat. Phys. — 1988. — Vol. 52. — P. 479–487.
13. Wehrl A. General properties of entropy // Rev. Mod. Phys. — 1978. — Vol. 50. — P. 221–260.
14. Hu X., Ye Z. Generalised quantum entropies // J. Math. Phys. — 2006. — Vol.

47. — P. 023502.

15. Rényi A. On measures of entropy and information // Proceedings of 4th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, ed. Neyman J., Vol. I. — P. 547–561. — University of California Press, 1961.
16. Aptekarev A.I., Dehesa J.S., Sánchez-Moreno P., Tulyakov D.N. Asymptotics of L_p-norms of Hermite polynomials and Rényi entropy of Rydberg oscillator states // Contemporary Mathematics. — 2012. — Vol. 578. — P. 19–29.
17. Aptekarev A.I., Tulyakov D.N., Toranzo I.V., Dehesa J.S. Rényi entropies of the highly-excited states of multidimensional harmonic oscillators by use of strong Laguerre asymptotics // Eur. Phys. J. B. — 2016. — Vol. 89. — P. 85.
18. Aptekarev A.I., Belega E.D., Dehesa J.S. Rydberg multidimensional states: Rényi and Shannon entropies in momentum space // J. Phys. A: Math. Theor. — 2021. — Vol. 54. — P. 035305.
19. Bengtsson I., Życzkowski K. Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement. — Cambridge University Press, 2017. — xv+619 p.
20. Hiai F., Mosonyi M., Petz D., Bény C. Quantum f-divergences and error correction // Rev. Math. Phys. — 2011. — Vol. 23. — P. 691–747.
21. Baumgratz T., Cramer M., Plenio M.B. Quantifying coherence // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 113. — P. 140401.
22. Hughston L.P., Jozsa R., Wootters W.K. A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix // Phys. Lett. A. — 1993. — Vol. 183. — P. 14–18.
23. Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // Z. Phys. — 1927. — Vol. 43. — P. 172–198.
24. Deutsch D. Uncertainty in quantum measurements // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 50. — P. 631–633.
25. Maassen H., Uffink J.B.M. Generalized entropic uncertainty relations // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 60. — P. 1103–1106.
26. Hirschman I.I. A note on entropy // Amer. J. Math. — 1957. — Vol. 79. — P.

152–156.

27. Beckner W. Inequalities in Fourier analysis // Ann. Math. — 1975. — Vol. 102.— P. 159–182.
28. Białynicki-Birula I., Mycielski J. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics // Commun. Math. Phys. 1975. — Vol. 44. — P. 129–132.
29. Мандельштам Л.И., Тамм И.Е. Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике // Изв. АН СССР, сер. физич. — 1945. — Т. 9. — С. 122–128.
30. Крылов Н.С., Фок В.И. О двух основных толкованиях соотношения неопределённости для энергии и времени // ЖЭТФ. — 1947. — Т. 17. — С. 93–107.
31. Coles P.J., Katariya V., Lloyd S., Marvian I., Wilde M.M. Entropic energy-time uncertainty relation // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Vol. 122. — P. 100401.
32. Pegg D.T. Complement of the Hamiltonian // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 58. — P. 4307.

Список публикаций автора по теме диссертации

[A1] Rastegin A.E. Trace distance from the viewpoint of quantum operation techniques // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — Vol. 40. — P. 9533–9549.

[A2] Rastegin A.E. Some properties of partial fidelities // Quantum Inf. Comput. — 2009. — Vol. 9. — P. 1069–1080.

[A3] Rastegin A.E. Partitioned trace distances // Quantum Inf. Process. — 2010. — Vol. 9. — P. 61–73.

[A4] Rastegin A.E. Continuity and stability of partial entropic sums // Lett. Math. Phys. — 2010. — Vol. 94. — P. 229–242.

[A5] Rastegin A.E. Rényi formulation of the entropic uncertainty principle for POVMs // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — Vol. 43. — P. 155302.

[A6] Rastegin A.E. Entropic uncertainty relations for extremal unravelings of superoperators // J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — Vol. 44. — P. 095303.

[A7] Rastegin A.E. Some general properties of unified entropies // J. Stat. Phys. — 2011. — Vol. 143.— P. 1120–1135.

[A8] Rastegin A.E. Upper continuity bounds on the relative q-entropy for $q > 1$ // J. Math. Phys. — 2011. — Vol. 52. — P. 062203.

[A9] Rastegin A.E. Notes on entropic uncertainty relations beyond the scope of Riesz's theorem // Int. J. Theor. Phys. — 2012. — Vol. 51. — P. 1300–1315.

[A10] Rastegin A.E. Bounds of the Pinsker and Fannes types on the Tsallis relative entropy // Math. Phys. Anal. Geom. — 2013. — Vol. 16. — P. 213–228.

[A11] Rastegin A.E. Uncertainty relations for MUBs and SIC-POVMs in terms of generalized entropies // Eur. Phys. J. D. — 2013. — Vol. 67. — P. 269.

[A12] Rastegin A.E. On uncertainty relations and entanglement detection with mutually unbiased measurements // Open Sys. & Inf. Dyn. — 2015. — Vol. 22. — P. 1550005.

[A13] Rastegin A.E. Quantum-coherence quantifiers based on the Tsallis relative α entropies // Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 032136.

[A14] Rastegin A.E. Coherence quantifiers from the viewpoint of their decreases in the measurement process // J. Phys. A: Math. Theor. — 2018. — Vol. 51 — P. 414011.

[A15] Rastegin A.E. On entropic uncertainty relations for measurements of energy and its "complement" // Ann. Phys. (Berlin). — 2019. — Vol. 531. — P. 1800466.

Научное издание

–

Подписано в печать 15.10.2021 г.

Формат 60 × 90 1/16.

Тираж 100 экз.

664003, Иркутск, б. Гагарина, 20