На правах рукописи

Байбулатова Гузель Дамировна

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», на кафедре математического анализа.

Научный руководитель:
Плеханова Марина Васильевна,
доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:
Попов Сергей Вячеславович,
доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», заведующий кафедрой математического анализа
Псху Арсен Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», директор Института прикладной математики и автоматизации
Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет»

Защита диссертации состоится **«23» ноября 2021 года** в **15:00** на заседании диссертационного совета **Д 003.015.04** при **Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН)** по адресу: **630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.**

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан **«22» октября 2021 г.**

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.015.04,
кандидат физико-математических наук М. А. Скворцова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Современные математические теории посвящены поискам новых инструментов исследования различных реальных процессов. С одной стороны это вызвано достаточной полнотой и завершенностью исследования известных математических моделей, с другой — новыми задачами, новыми возможностями информационных технологий. Теория дробного исчисления, активно развивающаяся в последние десятилетия, позволила открыть новые свойства систем, описывающих сложные физические процессы: процессы с памятью, процессы во фрактальных средах и многое другое. Применению дробного исчисления для различных приложений посвящено множество работ, теоретические аспекты дробного интегро-дифференциального исчисления исследовались в монографиях М. М. Джрбашяна, K. B. Oldham, J. Spanier, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, I. Podlubny, А. В. Псху и продолжают изучаться многими авторами.

Степень разработанности темы исследования. Тема диссертационной работы содержит в себе две составляющие — вырожденные эволюционные уравнения и уравнения с дробными производными. Поэтому и описание степени разработанности темы исследования будет состоять из двух соответствующих частей.

Уравнениями соболевского типа называют уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по времени. Основной объект исследования данной диссертационной работы — уравнения соболевского типа с вырожденным оператором при старшей производной, т. е. уравнения, в принципе не разрешимые относительно старшей производной по времени. Такие уравнения часто называют вырожденными эволюционными уравнениями. Свое название уравнения соболевского типа получили после цикла работ С. Л. Соболева, посвященных динамике идеальной равномерно вращающейся жидкости. Полученные результаты вызвали активный рост количества исследований уравнений, называемых теперь уравнениями соболевского типа. Среди современных работ в этом направлении отметим работы Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева, Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой, Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. А. Щегловой, А. И. Кожанова, И. Е. Егорова, С. В. Попова, С. Г. Пяткова, А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера, И. А. Шишмарева.

Существует несколько подходов к изучению вырожденных эволюционных уравнений и систем уравнений в частных производных. Один из них, наиболее близкий к используемым в данной диссертационной работе методам, основан на редукции к уравнению первого порядка в банаховом пространстве с необратимым оператором при старшей производной, исследуемому затем методами теории полугрупп операторов. Он используется в работах A. Favini, A. Yagi, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой, В. Е. Федорова, М. В. Фалалеева.

Исследования дробных производных и соответствующих дифференциальных уравнений связаны с именами Абеля, Я. Бернулли, Лейбница, Лопиталя, Лагранжа, Эйлера, Лапласа, Фурье, Лиувилля, Римана, Грюнвальда, Летникова, Хэвисайда, Куранта. В середине XX века дробное исчисление стало активно применяться в задачах механики сплошных сред в работах А. Н. Герасимова, Ю. Н. Работнова, С. И. Мешкова, Ю. А. Россихина, М. В. Шитиковой, M. Caputo, F. Mainardi. Большой вклад в изучение теории дробных дифференциальных уравнений внесли такие современные авторы как М. М. Джрбашян, А. М. Нахушев, С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, А. В. Псху, K. Diethelm. Тем не менее, законченной теории для дифференциальных уравнений с дробными производными к настоящему времени не существует. В настоящее время продолжаются как теоретические исследования дифференциальных уравнений дробного порядка, обыкновенных и в частных производных, так и исследование дробно-дифференциальных математических моделей различных процессов. Отметим, что существует немало определений различных дробных производных и современные исследования посвящены не только различным типам уравнений, но и различным типам дробного дифференцирования.

Как наиболее близкие к тематике диссертационной работы отметим результаты об интегральных и дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах, полученные в работах J. Prüss, E. G. Bajlekova, M. Kostić, В. Е. Федорова, М. В. Плехановой. Чуть подробней остановимся на некоторых результатах перечисленных авторов.

В монографии J. Prüss изучены вопросы существования и единственности решений линейных эволюционных интегральных уравнений в банаховых пространствах, в терминах резольвенты линейного замкнутого оператора получены критерии существования их разрешающих семейств операторов. Отметим, что к таким уравнениям могут быть сведены многие дифференциальные уравнения дробного порядка.

E.G. Bajlekova рассматривает линейные уравнения в банаховых пространствах с производной Герасимова — Капуто. Исследованы вопросы разрешимости задачи Коши для них в терминах разрешающих семейств операторов, сильно непрерывных, аналитических. Доказан принцип субординации для дробных дифференциальных уравнений, изучены связанные с ним вопросы.

M. Kostić исследует различные классы разрешающих семейств операторов дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховых и локально выпуклых пространствах, как разрешенных относительно старшей производной, так и вырожденных.

В работах В.Е. Федорова, М.В. Плехановой исследуются вопросы однозначной разрешимости начальных задач для линейных и полулинейных эволюционных уравнений в банаховых пространствах, линейная часть которых порождает разрешающее семейство операторов того или иного класса. Исследуются как уравнения дробного или распределенного порядка, разрешенные относительно производной Герасимова — Капуто, Римана — Лиувилля или соответствующей распределенной производной, так и вырожденные уравнения.

М.В. Плехановой исследуются также вопросы разрешимости различных задач оптимального управления для распределенных систем, состояние которых описывается начальными задачами для линейных и полулинейных дробных дифференциальных уравнений. Отметим работы других авторов — D. Baleanu, O. P. Agrawal, A. Debbouche, D. F. M. Torres, J. Wang, посвященные задачам управления для дифференциальных уравнений дробного порядка.

Цели и задачи. Цель диссертационной работы — исследование вопросов однозначной разрешимости в классическом и сильном смысле начальных задач для линейных и полулинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто и с необратимым оператором при старшей из них, а также разрешимости задач оптимального управления для систем, состояние которых описывается такими задачами. Полученные результаты используются при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных с несколькими дробными производными по времени, а также задач оптимального управления для соответствующих распределенных систем управления.

Научная новизна. Главным объектом исследования в современном дробно-дифференциальном исчислении являются уравнения различных типов, разрешенные относительно старшей дробной производной. Совсем немного работ посвящены дробным дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно старшей производной. Среди них значительную часть составляют работы с условием непрерывной или даже компактной обратимости оператора при старшей производной A. Debbouche, D. F. M. Torres, M. Fečkan, J. Wang, Y. Zhou и др. В отличие от них, в данной диссертации исследуются вырожденные эволюционные уравнения, т. е. уравнения с необратимым линейным оператором при старшей дробной производной.

Второй отличительной чертой данной работы является исследование уравнений, содержащих несколько дробных производных произвольных порядков, в отличие от близких по тематике работ М. В. Плехановой, в которых рассматриваются только уравнения с младшими производными целого порядка. И если линейные уравнения с несколькими дробными производными произвольных порядков (multi-term fractional differential equations) исследовались рядом авторов ранее (А. М. Нахушев, А. В. Псху, Yu. F. Luchko, H. M. Srivastava, В. Е. Федоров, M. Kostić), то исследования нелинейных уравнений — по-видимому, первые в своем роде. При этом полученные в данной работе результаты для линейных уравнений в вырожденном и невырожденном случае, в отличие от результатов упомянутых авторов, касаются уравнений, в которых операторы зависят от времени, и поэтому тоже являются новыми.

Что касается оптимального управления для уравнений с дробными производными, то, как уже было сказано, ранее некоторые задачи управления исследовались только для дробных уравнений соболевского типа с непрерывно обратимым оператором при старшей производной либо для вырожденных эволюционных уравнений с младшими производными целого порядка, поэтому соответствующие результаты диссертации также являются оригинальными.

Тем самым, полученные в данной диссертационной работе результаты об однозначной разрешимости начальных задач для линейных и полулинейных уравнений с несколькими дробными производными произвольных порядков и о разрешимости различных задач управления для соответствующих систем вносят вклад в теорию дифференциальных уравнений с дробными производными и в теорию оптимального управления.

Теоретическая и практическая значимость работы. Качественное исследование вырожденных эволюционных уравнений позволяет изучить вопросы однозначной разрешимости для широкого класса начально-краевых задач для уравнений с дробными производными. Результаты работы дополняют и обобщают теорию вырожденных эволюционных уравнений.

Прикладные задачи с уравнениями дробного порядка, которые позволяет исследовать развитая в работе теория, играют значимую роль в физике, биологии, медицине и др. областях науки. Результаты диссертационной работы, в частности, могут быть применены при выборе корректной постановки начально-краевых задач для дробно-дифференциальных математических моделей, при численном исследовании таких моделей.

Методология и методы исследования. Ход исследования в диссертационной работе разбит на несколько этапов. Прежде всего рассматривается задача Коши для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения в банаховом пространстве с нелинейностью, зависящей от нескольких дробных производных произвольных порядков. Полученные результаты используются при исследовании начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений с различными ограничениями на нелинейный оператор. При этом в первой главе доказывается существование и единственность классических решений таких задач, во второй главе аналогичные утверждения доказываются для сильных решений. В третьей главе существование единственного сильного решения таких начальных задач используется при доказательстве разрешимости задач управления соответствующими системами. Рассматриваются различные типы управляющего воздействия — распределенное, стартовое управление, а также различные типы целевых функционалов — компромиссный и жесткий (без учета затрат на управление).

Разрешимость задачи Коши для нелинейного невырожденного уравнения доказана с помощью теоремы о сжимающем отображении, при этом доказывается результат о возможности перехода от дифференциального уравнения к интегро-дифференциальному. Исследование уравнений, не разрешимых относительно старшей дробной производной по времени, опирается на теорию вырожденных эволюционных уравнений. При выполнении условия (L,p)-ограниченности оператора M осуществляется переход от исходного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(t)),$$

где $L, M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — линейные операторы, N — нелинейный оператор, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — банаховы пространства, D_t^β — производные Герасимова — Капуто, к уравнениям на двух подпространствах. На одном из подпространств (подпространстве без вырождения) получаем уравнение, разрешенное относительно старшей дробной производной, на подпространстве вырождения же — уравнение с нильпотентным степени p оператором при старшей дробной производной, либо при $p = 0$ — алгебраическое уравнение.

В работе рассматривается три типа условий на нелинейный оператор: образ нелинейного оператора лежит в подпространстве без вырождения, нелинейный оператор зависит только от элементов подпространства без вырождения или подпространства вырождения. В первых двух случаях используются доказанные здесь же теоремы о дополнительной гладкости решения. В случае зависимости нелинейного оператора от элементов подпространства вырождения доказательство использует теорему о неявной функции.

Исследование задач оптимального управления опирается на результаты А. В. Фурсикова об абстрактных задачах управления для систем с линейным и нелинейным уравнением состояния. Решение задачи оптимального управления понимается как пара состояние-управление, минимизирующая функционал качества. Множество допустимых пар — это пары, состоящие из функции управления из множества допустимых управлений (непустого, выпуклого и замкнутого, а также ограниченного в случае задач без учета затрат на управление) и решения начальной задачи, ему соответствующего. Общую схему исследования задач оптимального управления коротко можно описать как доказательство непустоты множества допустимых пар, проверки свойств оператора состояния системы, свойств функционала в выбранных функциональных пространствах и условия компактности в нелинейном случае. Условия, обеспечивающие непустоту множества допустимых пар, определяются условиями существования сильного решения при хотя бы одном допустимом управлении.

Методология исследования начально-краевых задач для уравнений в частных производных и задач управления для соответствующих систем заключается в их редукции к соответствующей абстрактной задаче путем выбора подходящих функциональных пространств. Такой подход позволяет применять один абстрактный результат для целого ряд однотипных задач.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдены условия однозначной разрешимости в смысле классических и сильных решений задачи Коши для нелинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто, разрешенных относительно производной старшего порядка.
2. Доказаны теоремы о существовании и единственности классического и сильного решения обобщённой задачи Шоуолтера — Сидорова для полулинейных, а также линейных нестационарных уравнений в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной дробного порядка.
3. Доказана разрешимость задач оптимального управления системами, состояние которых описывается уравнениями в банаховых пространствах указанных классов, с различными функционалами стоимости. Рассмотрены задачи с распределённым, стартовым управлением, задачи без учета затрат на управление.
4. Абстрактные результаты применены для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для встречающихся при математическом моделировании в естественных и технических науках линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешенных относительно старшей дробной производной по времени, так и не разрешимых относительно нее. Доказана разрешимость некоторых задач оптимального управления распределёнными системами, описываемыми такими начально-краевыми задачами.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2018, 2021; Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики», Нальчик, 2018; International Conference in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems, Santiago de Compostela, Spain, 2018; Международная школа-конференция «Соболевские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск, 2018; International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19, Белгород, 2019; International Conference «Mathematical Optimization Theory and Operations Research», Ekaterinburg, 2019.

Исследования по теме диссертации поддержаны грантом РФФИ конкурса на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре («Аспиранты»), проект 20-31-90015, тема «Вырожденные эволюционные уравнения с дробными производными и задачи управления» под руководством М. В. Плехановой, 2020–2022 гг.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах [1–15], из которых 8 статей [1–8] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит постановка задачи и общее руководство. Из работ, выполненных в соавторстве с Б. Т. Киен [1], П. Н. Давыдовым [8] и В. Е. Федоровым [12] в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа объемом в 137 страниц содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений, список литературы, состоящий из 131 источника.

Основное содержание диссертационной работы

Во **введении** описаны актуальность темы исследования, историография вопроса, постановка задачи, новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, методы исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробации, краткое содержание работы.

Цель **первой главы** — вывод условий разрешимости в классическом смысле начальных задач для уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)), \tag{1}$$

где $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha, m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}, m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, n$, $D_t^\alpha, D_t^{\alpha_1}, \dots D_t^{\alpha_n}$ — дробные производные Герасимова — Капуто, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейный ограниченный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$), $N : \mathbb{R} \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$.

В §1.1, 1.2 содержатся предварительные сведения, определение производной Герасимова — Капуто: $D_t^\alpha z(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t) \right)$, $\tilde{g}_\beta(t) = g_\beta(t - t_0)$, $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция в точке β, $J_t^\beta z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z(s)ds$, $t > t_0$. В §1.3 рассматривается невырожденное уравнение (1), т. е. при $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$, $L = I$. Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B : Z \to \mathcal{Z}$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Рассмотрим задачу Коши

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t)), \tag{2}$$

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{3}$$

Под решением задачи (2), (3) на отрезке $t \in [t_0, t_1]$ будем понимать функцию $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, такую, что $J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum\limits_{k=1}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1} \right) \in C^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t)) \in Z$ для любого $t \in [t_0, t_1]$, выполняются равенства (2) при $t \in [t_0, t_1]$ и (3).

Используя начальные данные $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$, определим многочлен Тейлора $\tilde{z} = z_0 + \frac{z_1}{1!}(t - t_0) + \frac{z_2}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{z_{m-1}}{(m-1)!}(t - t_0)^{m-1}$ и элементы $\tilde{z}_1 = D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}\tilde{z}(t)$, $\tilde{z}_2 = D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0}\tilde{z}(t)$, $\dots$, $\tilde{z}_n = D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0}\tilde{z}(t)$. Далее линия над символом будет обозначать набор из n элементов — фазовых переменных нелинейного оператора, например, $\bar{z} := (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, множество Z открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$ и отображение $B \in C(Z; \mathcal{Z})$ локально липшицево по $\bar{z}$, тогда для всех z_0, z_1, $\dots$, $z_{m-1} \in \mathcal{Z}$, таких, что $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in Z$, существует $t_1 > t_0$, такое, что задача (2), (3) имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.*

В четвертом параграфе с помощью редукции к соответствующей начальной задаче исследуется однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одной модификации псевдопараболического уравнения Осколкова – Бенджамина – Бона – Махони – Бюргерса:

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x,t_0)=w_k(x), \quad k=0,1,\dots,m-1, \quad x\in(a,b), \tag{4}$$

$$w(a,t)=w(b,t), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(a,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(b,t), \quad t\geq t_0, \tag{5}$$

$$D_t^\alpha w-D_t^\alpha w_{xx}=\beta w_{xx}+\gamma w_x-\left(D_t^{\alpha_1}w\right)^\delta\left(D_t^{\alpha_2}w_x\right)^\varepsilon,\ x\in(a,b),\ t\geq t_0, \tag{6}$$

где $a,b,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $a<b$, $0\leq\alpha_1<\alpha_2\leq m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{X}=\{v:H^2(a,b):v(a)=v(b),\,v'(a)=v'(b)\}$, $\mathcal{Y}=L_2(a,b)$, на $\mathcal{X}$ заданы операторы $L=1-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $M=\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\gamma\frac{\partial}{\partial x}$, $N(v_1,v_2)=-v_1^\delta v_{2x}^\varepsilon$, $Z=\mathbb{R}\times\mathcal{X}^2$. По теореме 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\delta,\varepsilon\geq1$, $w_k\in\mathcal{X}$, $k=0,1,\dots,m-1$. *Тогда для некоторого* $t_1>t_0$ *существует единственное решение задачи* (4)–(6) *на отрезке* $[t_0,t_1]$.

При дальнейшем рассмотрении потребуются условия дополнительной гладкости решения невырожденного уравнения, полученные в пятом параграфе.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha>1$, $0\leq\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\leq m-2$, $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, Z *— открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^n$, $l\in\mathbb{N}$, $B\in C^l(Z;\mathcal{Z})$, z_0, z_1, $\dots$, $z_{m-1}\in\mathcal{Z}$, *такие, что* $(t_0,\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\dots,\tilde{z}_n)\in Z$, *для решения* z *задачи* (2), (3) *на* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1>t_0$ *выполняются равенства*

$$D_t^{m_k+r}z(t_0)=0, \text{ если } m_k>\alpha_k, \quad k=1,2,\dots,n, \quad r=0,1,\dots,l-1,$$

$$D_t^k|_{t=t_0}[B(t,D_t^{\alpha_1}z(t),D_t^{\alpha_2}z(t),\dots,D_t^{\alpha_n}z(t))]=0, \quad k=0,1,\dots,l-1.$$

Тогда решение задачи (2), (3) *на* $[t_0,t_1]$ *принадлежит* $C^{m-1+l}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$.

Далее рассматривается уравнение (1) в случае $\ker L\neq\{0\}$, называемое вырожденным. §1.6 содержит определение и свойства (L,p)-ограниченного оператора. Пусть $L\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_M — область определения оператора M, снабженная нормой его графика. Определим L-резольвентное множество $\rho^L(M):=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$ оператора M, его L-спектр $\sigma^L(M):=\mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ и операторы $R_\mu^L(M):=(\mu L-M)^{-1}L$, $L_\mu^L:=L(\mu L-M)^{-1}$. Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если внешность круга некоторого радиуса $a>0$ лежит $\rho^L(M)$. В таком случае существуют проекторы $P:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=a+1}R_\mu^L(M)d\mu$, $Q:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=a+1}L_\mu^L(M)d\mu$, которым соответствуют представления пространств $\mathcal{X}=\mathcal{X}^0\oplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^0\oplus\mathcal{Y}^1$, где $\mathcal{X}^0:=\ker P$, $\mathcal{X}^1:=\mathrm{im}P$, $\mathcal{Y}^0:=\ker Q$, $\mathcal{Y}^1:=\mathrm{im}Q$. Обозначим $L_k:=L|_{\mathcal{X}^k}$, $M_k:=M|_{\mathcal{X}^k\cap D_M}$, $k=0,1$. Ранее доказано[1], что $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0\in\mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_k\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k=0,1$, существуют операторы $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$. Оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, а оператор $G:=M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени $p\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

В §1.7 рассмотрено уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha Lx(t)=Mx(t)+N(t,D_t^{\alpha_1}x(t),D_t^{\alpha_2}x(t),\dots,D_t^{\alpha_n}x(t))+f(t), \tag{7}$$

в случае $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$. Решением обобщенной задачи Шоултера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0)=x_k, \quad k=0,1,\dots,m-1, \tag{8}$$

для уравнения (7) является такое $x\in C([t_0,t_1];D_M)\cap C^{m_n}([t_0,t_1];\mathcal{X})$, что $Lx\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Y})$, $J_t^{m-\alpha}\left(Lx-\sum\limits_{k=0}^{m-1}(Lx)^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right)\in C^m([t_0,t_1];\mathcal{Y})$, для всех $t\in[t_0,t_1]$ $\left(t,D_t^{\alpha_1}x(t),D_t^{\alpha_2}x(t),\dots,D_t^{\alpha_n}x(t)\right)\in X$ и выполнены (7) и (8).

---

[1] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP. 216 p.

Теорема 4. *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)*-ограничен,* X *— открытое множество в пространстве* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, *отображение* $N \in C(X;\mathcal{Y})$ *локально липшицево по* $\bar{x}$, $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$, $f \in C([t_0,T];\mathcal{Y})$ *для некоторого* $T > t_0$, $(D_t^\alpha G)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in C^m([t_0,T];\mathcal{X})$, $l = 0,1,\dots,p$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0,\dots,m-1$, *такие, что* $(t_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n) \in V := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$, *при этом*

$$(t_0, D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}(\tilde{x}+w), D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0}(\tilde{x}+w), \dots, D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0}(\tilde{x}+w)) \in X, \qquad (9)$$

где $w(t) = -\sum\limits_{l=0}^{p}(D_t^\alpha G)^l M_0^{-1}(I-Q)f(t)$. *Тогда существует* $t_1 \in (t_0,T]$, *такое, что задача* (7), (8) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$.

С помощью теоремы 3 о дополнительной гладкости изучим также уравнение, в котором оператор L стоит за оператором дробного дифференцирования:

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + f(t). \qquad (10)$$

Его решением на отрезке $[t_0,t_1]$ будем называть такое $x \in C([t_0,t_1];D_M) \cap C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{X})$, что $J_t^{m-\alpha}\left(x(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}(t)\right) \in C^m([t_0,t_1];\mathcal{X})$, для $t \in [t_0,t_1]$ $\left(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)\right) \in X$ и выполняется (10).

Теорема 5. *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)*-ограничен,* X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, *отображение* $N \in C(X;\mathcal{Y})$ *локально липшицево по* x, $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$, *для некоторого* $T > t_0$ $f \in C([t_0,T];\mathcal{Y})$, $(D_t^\alpha G)^l M_0^{-1}(I - Q)f \in C^m([t_0,T];\mathcal{X})$, $l = 0,1,\dots,p$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0,1,\dots,m-1$, *такие, что* $(t_0,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n) \in V$, *при этом выполняется условие* (9). *Тогда существует такое* $t_1 \in (t_0,T]$, *что задача* (8), (10) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$.

В §1.8 с помощью теоремы 5 установлена однозначная разрешимость одной начально-краевой задачи для модельной системы уравнений с дробными производными по времени в ограниченной области с гладкой границей.

Параграф 1.9 посвящен исследованию задачи Шоуолтера — Сидорова для вырожденного уравнения (1) с нелинейным оператором, не зависящим от элементов подпространства $\mathcal{X}^0$, и с $(L,0)$-ограниченным оператором M.

Теорема 6. *Пусть* $m_n \leq \frac{m-1}{2}$, M $(L,0)$*-ограничен,* X *открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \mathcal{Y}$; $V := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$, *для всех* $(t,z_1,z_2,\dots,z_n) \in X$ *выполняется равенство* $N(t,z_1,z_2,\dots,z_n) = N_1(t,Pz_1,Pz_2,\dots,Pz_n)$ *при некотором* $N_1 : V \to \mathcal{Y}$, *отображение* $QN_1 : V \to \mathcal{Y}$ *локально липшицево по* $\bar{x}$, $(I-Q)N_1 \in C^{m_n}(V;\mathcal{Y})$. *Тогда для* $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0,1,\dots,m-1$, *для которых* $(t_0,\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) \in V$, *и таких, что* $x_{m_k+r} = 0$, если $m_k > \alpha_k$, $k = 1,2,\dots,n$, $r = 0,1,\dots,m_n-1$, *найдется такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (7), (8) (*при* $f \equiv 0$) *имеет единственное решение на* $[t_0,t_1]$.

Полученные результаты использованы в §1.10 при исследовании начально-краевой задачи для системы уравнений

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x,0) = \psi_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \qquad (11)$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [t_0,T), \qquad (12)$$

$$-\chi D_t^\alpha \Delta v = \nu\Delta v - (v \cdot \nabla)v - v_t - r + f, \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0,T), \qquad (13)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0,T). \qquad (14)$$

При $\alpha = 1$ это система уравнений Осколкова динамики вязкоупругой жидкости. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi,\nu \in \mathbb{R}$. Вектор-функция скорости $v = (v_1,v_2,\dots,v_d)$ и градиента давления $r = (r_1,r_2,\dots,r_d)$ не известны, функция $f : \Omega \times [t_0,T) \to \mathbb{R}^d$ — задана.

Теорема 7. *Пусть* $\chi \neq 0$, $\alpha > 2$, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Тогда существует единственное решение задачи* (11)–(14).

Наконец, случаю зависимости нелинейного оператора только от элементов подпространства вырождения при $(L, 0)$-ограниченном операторе M и приложениям соответствующих абстрактных результатов посвящены последние три параграфа главы. Рассмотрим начальную задачу

$$x^{(i)}(t_0) = x_i,\ i = 0, 1, \dots, m_n - 1,\ (Px)^{(j)}(t_0) = x_j,\ j = m_n, \dots, m - 1, \quad (15)$$

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)). \quad (16)$$

Через $[(I-Q)N]'_{x_n}(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ обозначим производную Фреше от оператора $(I - Q)N$ по последнему аргументу x_n в точке $(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \in X$. Обозначим проектор вдоль $\mathcal{X}^1$ на $\mathcal{X}^0$ как $P_0 := I - P$ и $W := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^0)^n)$.

Теорема 8. *Пусть оператор* M $(L, 0)$*-ограничен, множество* X *открыто в* $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^n$; $N \in C(X; \mathcal{Y})$, *для всех* $(t, z_1, \dots, z_n) \in X$ *выполняется* $N(t, z_1, \dots, z_n) = N_1(t, P_0z_1, \dots, P_0z_n)$ *для некоторого* $N_1 \in C(W; \mathcal{Y})$, $(I - Q)N_1 \in C^1(W; \mathcal{Y})$; $x_1, x_2 \dots x_{m_n-1} \in \mathcal{X}$, $x_{m_n}, x_{m_n+1}, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, *при этом биективно отображение* $M_0^{-1}[(I - Q)N_1]'_{x_n}(t, z_1, \dots, z_n) : \mathcal{X}^0 \to \mathcal{X}^0$ *при всех* $(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ *из окрестности точки* $(t_0, D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}\tilde{x}, D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0}\tilde{x}, \dots, D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0}\tilde{x}) \in W$, $P_0x_0+M_0^{-1}(I-Q)N_1(t_0, D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0}P_0\tilde{x}, \dots, D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0}P_0\tilde{x}) = 0$. *Тогда найдется такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (15), (16) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

В §1.12 в $(0, 1) \times [t_0, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, рассмотрена начально-краевая задача

$$\frac{\partial^i w}{\partial t^i}(s, t_0) = v_i(s),\ i = 0, 1, \dots, m_2 - 1,\ s \in (0, 1), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^j \Delta w}{\partial t^j}(s, t_0) = \Delta v_j(s),\ j = m_2, m_2 + 1, \dots, m - 1,\ s \in (0, 1), \quad (18)$$

$$w(0, t) = w(1, t), \quad \frac{\partial w}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial w}{\partial s}(1, t), \quad t \geq t_0, \quad (19)$$

$$D_t^\alpha \Delta w + \left| \int_0^1 D_t^{\alpha_1} w(s, t) ds \right|^\beta \int_0^1 D_t^{\alpha_2} w(s, t) ds = 0,\ s \in (0, 1),\ t \geq t_0. \quad (20)$$

Здесь $m - 1 < \alpha \leq m$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha$, $m_2 - 1 < \alpha_2 \leq m_2$, $\beta > 0$. Обозначим через $\langle\cdot, \cdot\rangle$ скалярное произведение в пространстве $L_2(0, 1)$. Возьмем $\mathcal{X} = \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = v(1), v'(0) = v'(1)\}$, $\mathcal{Y} = L_2(0, 1)$.

Теорема 9. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leq m$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq m - 1$, $m_2 - 1 < \alpha_2 \leq m_2$, $\beta > 0$, $v_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, $\langle v_j, 1\rangle = 0$, $j = m_2, m_2 + 1, \dots, m - 1$, $D_t^{\alpha_1}\big|_{t=t_0}\langle\tilde{v}, 1\rangle \neq 0$, $D_t^{\alpha_2}\big|_{t=t_0}\langle\tilde{v}, 1\rangle = 0$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *задача* (17)–(20) *имеет единственное решение на множестве* $(0, 1) \times [t_0, t_1]$.

Во **второй главе** рассмотрены вопросы существования и единственности сильного решения. Первый параграф посвящен предварительным результатам о разрешимости задач для линейного уравнения дробного порядка.

Во втором параграфе доказывается существование решения задач для нелинейного невырожденного уравнения. При $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (21)$$

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t)). \quad (22)$$

Сильным решением задачи (21), (22) будем называть функцию $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum\limits_{k=1}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z})$, выполняется равенство (22) почти всюду на (t_0, T) и условия (21).

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — *каратеодориево отображение, для всех* $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{Z}$ *и почти всюду на* (t_0, T)

$$\|B(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq a(t) + c\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|_{\mathcal{Z}} \tag{23}$$

для некоторого $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$ *и константы* $c > 0$. *Тогда функция* $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ *является сильным решением задачи* (21), (22) *в том и только в том случае, когда для* $t \in [t_0, T]$ $z(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}(A(t-t_0)^\alpha)z_k + \int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)B(s, D_t^{\alpha_1}z(s), D_t^{\alpha_2}z(s), \dots, D_t^{\alpha_n}z(s))ds$.

Теорема 10. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — *каратеодориево отображение, равномерно липшицево по* $\overline{z}$, *для всех* $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{Z}$ *и почти всюду на* (t_0, T) *выполнено* (23); $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$. *Тогда задача* (21), (22) *имеет единственное сильное решение* (t_0, T).

Следствие 1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, *оператор-функции* $B_k : (t_0, T) \to \mathcal{L}(\mathcal{Z}), k = 1, 2, \dots, n$, *измеримы и существенно ограничены на* (t_0, T), $f \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$. *Тогда задача* (21) *для линейного уравнения* $D_t^\alpha z(t) = Az(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} B_k(t)D_t^{\alpha_k}z(t) + f(t)$ *имеет единственное сильное решение на* (t_0, T).

В §2.3 полученные результаты применяются для изучения разрешимости начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k}(s, t_0) = v_k(s), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad s \in (0, \pi), \tag{24}$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad t \in (t_0, T), \tag{25}$$

$$D_t^\alpha\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \gamma w\right) = \delta w + \sum_{l=1}^{n}\delta_l(t)D_t^{\alpha_l}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \gamma_l w\right), \tag{26}$$

в $(0, \pi) \times (t_0, T)$, где $\gamma, \gamma_l, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta_l : (t_0, T) \to \mathbb{R}$, $l = 1, 2, \dots, n$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$.

Теорема 11. *Пусть* $\gamma \neq b^2$ *для всех* $b \in \mathbb{N}$, $v_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\delta_l : (t_0, T) \to \mathbb{R}$ *измеримы и существенно ограничены,* $l = 1, 2, \dots, n$. *Тогда существует единственное сильное решение задачи* (24)–(26) *на* (t_0, T).

Как и в первой главе, возникает необходимость в дополнительной гладкости уже сильных решений, такой результат получен в §2.4.

Теорема 12. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 2$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l \in \mathbb{N}$, *отображение* $B \in C^l([t_0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ *равномерно липшицево по* $\overline{z}$, *для сильного решения* z *задачи* (21), (22) *выполняется*

$$D_t^{m_k + r}z(t_0) = 0, \text{ если } m_k > \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad r = 0, 1, \dots, l-1,$$

$$D_t^k|_{t=t_0}[B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t))] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1.$$

Тогда для всех $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{X}$ *единственное сильное решение* z *задачи* (21), (22) *на* (t_0, T) *удовлетворяет условию* $z \in C^{m-1+l}([t_0, T]; \mathcal{Z})$.

В §2.5 рассматривается разрешимость задач для вырожденного уравнения с ограничением на образ нелинейного оператора. Рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + f(t). \tag{27}$$

Решением обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{28}$$

для уравнения (27) называется функция $x \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{X}) \cap L_q(t_0, T; D_M)$, для которой $Lx \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $J_t^{m-\alpha}\left(Lx - \sum\limits_{k=0}^{m-1}(Lx)^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Y})$ и почти всюду на (t_0, T) выполнено равенство (27) и условия (28).

Теорема 13. *Пусть* $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)-*ограничен, отображение* $N : (t_0,T) \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ *каратеодориево и равномерно липшицево по* $\overline{z} \in \mathcal{X}^n$, *для всех* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}$ *и почти всюду на* (t_0,T)

$$\|N(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq a(t) + c\sum_{k=1}^{n} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \qquad (29)$$

для некоторых $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$, *при этом* $N(t,z_1,z_2,\ldots,z_n) \subset \mathcal{Y}^1$. *Пусть* $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, *для всех* $k = 0,1,\ldots,p$ $(D_t^\alpha G)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m_n}([t_0,T];\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$. *Тогда при любых* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$ *задача* (27), (28) *имеет единственное сильное решение.*

Рассмотрим полулинейное уравнение

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \ldots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + f(t), \qquad (30)$$

где $N : (t_0,T) \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ — нелинейный оператор, $f : (t_0,T) \to \mathcal{Y}$.

Функция $x \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$ называется сильным решением задачи (28), (30), если $J_t^{m-\alpha}\left(x - \sum\limits_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0,T;\mathcal{X})$, выполнены условия (28) и почти всюду на (t_0,T) верно равенство (30).

Теорема 14. *Пусть* $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)-*ограничен, отображение* $N : [t_0,T] \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ *каратеодориево, равномерно липшицево по* $\bar{z} \in \mathcal{X}^n$, *для всех* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}$ *и почти всюду на* (t_0,T) *выполнено неравенство* (29) *при некоторой функции* $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, *константе* $c > 0$; $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$. *Пусть также* $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ *для всех* $k = 0,1,\ldots,p$. *Тогда задача* (28), (30) *имеет единственное сильное решение на* (t_0,T).

В §2.6 доказывается теорема о разрешимости линейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + \sum_{k=1}^{n} N_k(t) D_t^{\alpha_k} x(t) + f(t), \quad t \in (t_0,T). \qquad (31)$$

Теорема 15. *Пусть* $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)-*ограничен,* $N_k : (t_0,T) \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $k = 1,2,\ldots,n$, *измеримы и существенно ограничены на* (t_0,T), $\mathrm{im}N_k(t) \subset \mathcal{Y}^1$ *для почти всех* $t \in (t_0,T)$, $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, $(D_t^\alpha G)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m_n}([t_0,T];\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$ *для* $k = 0,1,\ldots,p$; $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$. *Тогда задача* (28), (31) *имеет единственное сильное решение.*

В §2.7 проиллюстрирован этот результат на примере задачи

$$D_t^\alpha\left(\tfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \gamma w\right) = \delta w + \sum_{l=1}^{n} \delta_l(t) D_t^{\alpha_l}\left(\tfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \gamma_l w\right),\ s \in (0,\pi),\ t \in (t_0,T), \qquad (32)$$

$$\tfrac{\partial^k w}{\partial t^k}(s,t_0) = v_k(s), \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \quad s \in (0,\pi), \qquad (33)$$

$$\tfrac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\tfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \gamma w\right)(s,t_0) = v_k(s), \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \quad s \in (0,\pi), \qquad (34)$$

Теорема 16. *Пусть для всех* $l = 1,2,\ldots,n$, $\gamma_l = \gamma = b^2$ *при* $b \in \mathbb{N}$, $v_k \in L_2(0,\pi)$, $\int\limits_0^\pi v_k(s)\sin(bs)ds = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\delta_l : (t_0,T) \to \mathbb{R}$ *измеримы и существенно ограничены,* $l = 1,2,\ldots,n$. *Тогда существует единственное сильное решение задачи* (32)–(34) *на* (t_0,T).

Случай другого типа нелинейного оператора исследуется в §2.8.

Теорема 17. *Пусть* $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, *оператор* M $(L, 0)$*-ограничен,* $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \to \mathcal{Y}$ *для всех* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{X}$ *и почти всех* $t \in (t_0, T)$ *удовлетворяет условию* $N(t, z_1, \ldots, z_n) = N_1(t, Pz_1, \ldots, Pz_n)$ *при некотором отображении* $N_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \to \mathcal{Y}$, *таком, что* $QN_1 \in C^{m_n+1}([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$ *равномерно липшицево по* $\bar{z} \in (\mathcal{X}^1)^n$, $(I - Q)N_1 \in C^m([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, *для решения задачи*

$$D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1} M_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_1(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \ldots, D_t^{\alpha_n} v(t)),$$

$$v^{(k)}(t_0) = x_k,\ k = 0, 1, \ldots, m - 1,$$

выполняются равенства

$$\text{если } \alpha_k < m_k, \text{ то } v^{(m_k + r)}(t_0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ r = 0, \ldots, \max\{m_n, m - 1\},$$

$$D_t^k|_{t=t_0}[QN_1(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \ldots, D_t^{\alpha_n} v(t))] = 0, k = 0, 1, \ldots, m_n.$$

Тогда (28), (30) (*при* $f \equiv 0$) *имеет единственное сильное решение на* (t_0, T).

Следующий параграф посвящен однозначной разрешимости начально-краевой задачи для системы Соболева дробного порядка по времени

$$\tfrac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, t_0) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1, \tag{35}$$

$$v_n(x, t) := \sum_{i=1}^{3} v_i(x, t) n_i(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T), \tag{36}$$

$$D_t^\alpha v(x, t) = [v(x, t), \overline{\omega}] - r(x, t) + g(D_t^{\alpha_1} v), \quad (x, t) \in \Omega \times (t_0, T), \tag{37}$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (t_0, T). \tag{38}$$

Теорема 18. *Пусть* $0 \leq \alpha_1 \leq m_1 \leq \frac{m-1}{2} < m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *производная* g' *ограничена на* $\mathbb{R}$, $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$; *если* $\alpha_1 < m_1$, *то* $x_{m_1 + r} = 0$, $r = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$. *Тогда существует единственное сильное решение задачи* (35)–(38).

В десятом параграфе второй главы исследуются начально-краевые задачи для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора, а в параграфе §2.11 — с многочленами нескольких переменных от операторов производных первого порядка по пространственным переменным.

Пусть $P_s(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s} c_i \lambda^i$, $Q_{s_1}(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{s_1} d_j \lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, s$, $j = 0, 1, \ldots, s_1$, $c_s, d_{s_1} \neq 0$, $s \geq s_1$. Кроме того, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов A, $B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен[2], где

$$(Aw)(x) = \sum_{|q| \leq 2r} a_q(x) \tfrac{\partial^{|q|} w(x)}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l w)(x) = \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(x) \tfrac{\partial^{|q|} w(x)}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + q_2 + \cdots + q_d$. Пусть $A_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$, $A_1 w := Aw$ с областью определения $D(A_1) = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ — самосопряженный оператор с ограниченным справа спектром. Рассмотрим задачу в $\Omega \times (t_0, T)$

$$P_s(A) D_t^\alpha w = Q_{s_1}(A) w + g(x, P_s(A) D_t^{\alpha_1} w, \ldots, P_s(A) D_t^{\alpha_n} w), \tag{39}$$

$$B_l A^k w(x, t) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, s - 1,\ l = 1, 2, \ldots, r,\ (x, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T), \tag{40}$$

$$D_t^k P_s(A) w(x, t_0) = w_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1, \quad x \in \Omega. \tag{41}$$

---

[2] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Теорема 19. *Пусть $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $m_n \leq \frac{m-1}{2}$, $s \geq s_1$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит нуля и общих корней многочленов P_s и Q_{s_1}, $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $j > \frac{d}{4r}$, все частные производные g порядка не больше, чем $2rj+1$, ограничены на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, $\langle w_l, \varphi_k \rangle = 0$ при $P_s(\lambda_k) = 0$, $l = 0, \dots, m-1$; если $\alpha_k < m_k$, то $w_{m_k+r} \equiv 0$, $r = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда существует сильное решение задачи* (39)–(41).

В **третьей главе** для систем управления, описываемых эволюционными уравнениями с несколькими дробными производными, однозначная разрешимость начальных задач для которых изучена во второй главе, исследуются задачи с распределенным или стартовым управлением. В §3.1 введены некоторые специальные пространства банаховозначных функций, обобщающие пространства Соболева, для которых сформулированы известные результаты о компактных вложениях, а также пространства функций, старшие дробные производные которых лежат в пространстве Лебега — Бохнера, в частности, $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) := \{z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : D_t^\alpha z \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})\}$, $\mathcal{Z}_{\alpha,q} := \{x \in L_q(t_0, T; D_M) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}) : D_t^\alpha x \in L_q(t_0, T; \mathcal{X})\}$.

Для доказательства разрешимости исследуемых задач управления для нелинейных систем используется существование дополнительного рефлексивного банахова пространства $\mathcal{Z}_1$ или $\mathcal{X}_1$, в которое компактно вложено рефлексивное банахово пространство $\mathcal{Z}$ или $\mathcal{X}$ соответственно.

В §3.2 рассматривается задача распределенного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + N(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) + Bu(t),\ t \in (t_0, T), \tag{42}$$

$$z^{(k)}(t_0) = z_k,\ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{43}$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \tag{44}$$

$$J(z, u) \to \inf, \tag{45}$$

где $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений — подмножество некоторого пространства функций управления $\mathbb{U}$, J — функционал качества.

Множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ для задачи (42)–(45) будем называть такое множество пар (z, u), что $z \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ является сильным решением задачи (42), (43) с $u \in \mathcal{U}_\partial$. Решения задачи оптимального управления (42)–(45) — это пары $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующие функционал стоимости.

Коэрцитивность функционала J, означает, что для любого $R > 0$ множество $\{(z, u) \in \mathfrak{W} : J(z, u) \leq R\}$ ограничено в $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathbb{U}$.

Теорема 20. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ при $\alpha_k < m_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_n \leq m - 2$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображение $N_1 : (t_0, T) \times \mathcal{Z}_1^n \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево и равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^n$, $N : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — сужение оператора N_1 на $(t_0, T) \times \mathcal{Z}^n$ действует в $\mathcal{Z}$; выполняется условие* (29); *$z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{Z}_1)$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, коэрцитивный на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи* (42)–(45).

Наряду с каждым классом задач управления в работе рассмотрены аналогичные задачи без учета затрат на управления или так называемые задачи жесткого управления, когда целевой функционал не зависит от функции управления u. В отличие от задачи с компромиссным функционалом, в задачах жесткого управления для доказательства разрешимости используется дополнительное условие ограниченности множества $\mathcal{U}_\partial$. Кроме того, результаты о разрешимости каждого класса задач управления сопровождаются их использованием в задачах минимизации конкретных функционалов, в §3.2 это функционалы

$$J(z,u) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D^\alpha_t z - D^\alpha_t z_d\|^{q_2}_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_3}_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} \to \inf, \tag{46}$$

$$J(z,u) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_3}_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} \to \inf, \tag{47}$$

где $q_i \geq 1$, $i = 1,2,3$, $\delta \geq 0$, $z_d \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ для (46) или $z_d \in C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{Z})$ для (47), $u_d \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$ — заданные функции. С помощью теоремы 20 при $\delta > 0$ или соответствующей теоремы для задачи жесткого управления при $\delta = 0$ получен следующий результат.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ при $\alpha_k < m_k$, $k = 1,2,\dots,n$, $\alpha_n \leq m-2$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображение $N_1 : (t_0,T) \times \mathcal{Z}_1^n \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево и равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^n$, $N : (t_0,T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ — сужение оператора N_1 на $(t_0,T) \times \mathcal{Z}^n$ действует в $\mathcal{Z}$; выполняется условие (29); $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $L_q(t_0,T;\mathcal{U})$. Тогда при $\delta > 0$ существует решение $(\hat{z},\hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (42)–(44), (46). При $\delta = 0$ утверждение справедливо при дополнительном условии ограниченности множества $\mathcal{U}_\partial$ в пространстве $L_q(t_0,T;\mathcal{U})$.*

В параграфе §3.3 доказывается теорема для линейной системы.

Теорема 21. *Пусть $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\alpha_n \leq m-1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображения $N_k : (t_0,T) \to \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ измеримы и существенно ограничены на (t_0,T), $k = 1,2,\dots,n$; $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, коэрцитивный на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times L_q(t_0,T;\mathcal{U})$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (43)–(45) для уравнения $D^\alpha_t z(t) = Az(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} N_k(t) D^{\alpha_k}_t z(t) + Bu(t)$, $t \in (t_0,T)$. Если функционал J строго выпуклый на $\mathbb{Y}$, то решение единственно.*

В §3.4 исследованы нелинейные задачи для вырожденного уравнения

$$LD^\alpha_t x(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}_t x(t), \dots, D^{\alpha_n}_t x(t)) + Bu(t),\ t \in (t_0,T). \tag{48}$$

Функция состояния здесь ищется в пространстве

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) := \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M).$$

Рассмотрены случаи принадлежности образа нелинейного оператора подпространству $\mathcal{Y}^1$ и его независимости от элементов подпространства вырождения.

Рассмотрим для системы (48) задачу оптимального управления

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k,\ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{49}$$

$$u \in \mathcal{U}_\partial, \tag{50}$$

$$J(x,u) \to \inf. \tag{51}$$

Теорема 22. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ *при* $\alpha_k < m_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_n \leq m - 2$, *оператор* M (L, p)*-ограничен,* $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1$ *— рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{X}$ *компактно вложено в* $\mathcal{X}_1$, $N_1 : (t_0, T) \times \mathcal{X}_1^n \to \mathcal{Y}$ *— каратеодориево, равномерно липшицево по* $\overline{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{X}_1^n$ *отображение,* N *— сужение оператора* N_1 *на* $(t_0, T) \times \mathcal{X}^n$, $N[(t_0, T) \times \mathcal{X}^n] \subset \mathcal{Y}^1$; *выполнено условие* (29). *Предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, *существует такое* $u_0 \in \mathcal{U}_\partial$, *что* $QBu_0 \in L_q(t_0, T; \mathcal{Y})$, *для* $k = 0, 1, \dots, p$ $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I - Q)Bu_0 \in L_q(t_0, T; \mathcal{X})$. *Пространство* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *а оно в свою очередь, непрерывно вложено в пространство* $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, *коэрцитивный на* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$. *Тогда существует решение* $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (48)–(51).

Теорема 23. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ *при* $\alpha_k < m_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_n \leq m - 2$, *оператор* M $(L, 0)$*-ограничен,* $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1$ *— рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{X}$ *компактно вложено в пространство* $\mathcal{X}_1$, *отображение* $N_1 : [t_0, T] \times \mathcal{X}_1^n \to \mathcal{Y}$ *для почти всех* $t \in (t_0, T)$ *и всех* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}$ *удовлетворяет условию* $N(t, z_1, \dots, z_n) = N_2(t, Pz_1, \dots, Pz_n)$ *при некотором* $N_2 \in C^{m_n+1}([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$. *Пусть* QN_2 *равномерно липшицево по* $\bar{z}$ *отображение,* $(I - Q)N_2 \in C^m([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$. *Предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, *существует управление* $u_0 \in \mathcal{U}_\partial$, *такое, что* $QBu_0 \in C^{m_n+1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $(I - Q)Bu_0 \in C^m([t_0, T]; \mathcal{Y})$, *для каждого решения* v *задачи*

$$D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1} M_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_2(t, D_t^{\alpha_1} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)) + L_1^{-1} Q B u_0(t),$$
$$v^{(k)}(t_0) = x_k, \ k = 0, 1, \dots, m - 1,$$

выполняются равенства

$$\text{если } \alpha_k < m_k, \text{ то } v^{(m_k + r)}(t_0) = 0, \ k = 1, 2, \dots, n, \ r = 0, 1, \dots, m - 1,$$
$$D_t^k|_{t=t_0}[L_1^{-1} Q N_2(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)) + L_1^{-1} Q B u_0(t)] = 0;$$

$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое, в свою очередь, непрерывно вложено в* $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, *коэрцитивный на пространстве* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times L_q(t_0, T; \mathcal{U})$. *Тогда существует решение* $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q} \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (48)–(51).

Когда нелинейный оператор не является равномерно липшицевым, разрешимость задачи оптимального управления удается доказать и в случае локально липшицева оператора, если существует хотя бы одно допустимое управление u_0, при котором разрешима соответствующая начальная задача. Соответствующие теоремы доказаны в пятом параграфе главы.

Теорема 24. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\alpha_n \leq m - 2$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ *при* $\alpha_k < m_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ *— рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{Z}$ *компактно вложено в* $\mathcal{Z}_1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$, *отображение* $N_1 : (t_0, T) \times \mathcal{Z}_1^n \to \mathcal{Z}_1$ *равномерно по* $t \in (t_0, T)$ *локально липшицево по* $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^n$, $N : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ *— сужение оператора* N_1 *на* $(t_0, T) \times \mathcal{Z}^n$ *действует в* $\mathcal{Z}$. *Предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, *при некотором* $u_0 \in \mathcal{U}_\partial$

существует сильное решение задачи (42), (43); *пространство* $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое, в свою очередь, непрерывно вложено в* $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y}\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, *коэрцитивный на пространстве* $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})$. *Тогда существует решение* $(\hat{z},\hat{u})\in\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$ *задачи* (42)–(45).

В вырожденном случае аналогично, заменив условие равномерной липшицевости оператора N на условие равномерной по $t\in(t_0,T)$ локальной липшицевости, напрямую потребовав существования допустимой пары и отказавшись от всех условий, которые в соответствующих теоремах третьей главы использовались только для доказательства этого существования, получим следующее утверждение.

Теорема 25. *Пусть* $\alpha>1$, $q>(\alpha-m+1)^{-1}$, $q>(m_k-\alpha_k)^{-1}$ *при* $\alpha_k<m_k$, $k=1,2,\dots,n$, $\alpha_n\leq m-2$, *оператор* M (L,p)-*ограничен,* $x_0,x_1,\dots,x_{m-1}\in\mathcal{X}^1$, $\mathcal{X},\mathcal{X}_1$ — *рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{X}$ *компактно вложено в* $\mathcal{X}_1$, *отображение* $N_1:(t_0,T)\times\mathcal{X}_1^n\to\mathcal{Y}$ *равномерно по* $t\in(t_0,T)$ *локально липшицево по* $\overline{z}\in\mathcal{X}_1^n$; *предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ — *непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, *для некоторого* $u_0\in\mathcal{U}_\partial$ *существует сильное решение задачи* (48), (49); *пространство* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое, в свою очередь, непрерывно вложено в* $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$, *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y}\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, *коэрцитивный на* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})$. *Тогда существует решение* $(\hat{z},\hat{u})\in\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})\times\mathcal{U}_\partial$ *задачи* (48)–(51).

В шестом параграфе третьей главы приведен пример задачи управления для одной системы уравнений дробной динамики вязкоупругой жидкости, в которой нелинейный оператор не является равномерно липшицевым, но работает предложенный в §3.5 подход. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим систему

$$a(1-\mu_1\Delta)D_t^{\alpha}z-\mu_2\Delta z+a^2(D_t^{\alpha_1}z\cdot\nabla)D_t^{\alpha_1}z+b^2(z\cdot\nabla)z+$$

$$+ab[(D_t^{\alpha_2}z\cdot\nabla)z+(z\cdot\nabla)D_t^{\alpha_2}z]+r=u,\quad (s,t)\in\Omega\times(t_0,T),\tag{52}$$

$$\nabla\cdot z=0,\quad (s,t)\in\Omega\times(t_0,T),\tag{53}$$

$$z(x,t)=0,\quad (s,t)\in\partial\Omega\times(t_0,T),\tag{54}$$

$$D_t^k z(s,0)=z_k(s),\quad k=0,\dots,m-1,\quad s\in\Omega,\tag{55}$$

которая при $\alpha=2$, $\alpha_1=\alpha_2=1$ моделирует движение жидкости Кельвина — Фойгта порядка L = 1 (система уравнений (0.47) при условии $\mu_0^{(3)}\alpha_{3,1}+\mu_1\alpha_{3,2}=0$ в работе[3]). Здесь $s=(s_1,s_2,s_3)$ — пространственные переменные, $z=(z_1,z_2,z_3)$ — функция памяти от вектора скорости, задаваемая его сверткой, $r=\nabla p$ — градиент давления жидкости. Константы a,b,μ_1,μ_2 заданы.

Пусть $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^1=(W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^2=(W_2^2(\Omega))^3$. Замыкание линеала $\mathfrak{L}=\{v\in(C_0^\infty(\Omega))^3:\nabla\cdot v=0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma:\mathbb{L}_2\to\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi=I-\Sigma$ — соответствующие ортопроекторы, $\mathbb{H}_\pi^1$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma^1$ в $\mathbb{H}^1$.

Оператор $A=\Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные

---

[3] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.

значения, занумерованные по их невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$. Определим линеал E_∞ всех вектор-функций вида $v = \sum\limits_{j=1}^{N} v_j\varphi_j$, где $v_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, N зависит от v. Обозначим через $\mathbb{H}_\sigma^3$ замыкание E_∞ по норме $\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\lambda_k|^3 |v_k|^2\right)^{1/2}$. Зададим пространства

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^3 \times \mathbb{H}_\pi^1, \quad \mathcal{X}_1 = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{U} = \mathbb{H}^1 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi.$$

Пусть множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ состоит из вектор-функций $u = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in \mathbb{H}^1$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1} \leq R. \tag{56}$$

Функционал стоимости при заданных $z_d \in Z_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{H}_\sigma^3)$, $r_d \in Z_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{H}_\pi^1)$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathbb{H}^1)$, $q > 1$, $\delta \geq 0$ имеет вид

$$J(z, r, u) = \|z - z_d\|^2_{Z_{\alpha,q}(t_0,T;\mathbb{H}_\sigma^3)} + \|r - r_d\|^2_{Z_{\alpha,q}(t_0,T;\mathbb{H}_\pi^1)} + \delta\|u - u_d\|^2_{L_q(t_0,T;\mathbb{H}^1)} \to \inf. \tag{57}$$

При таком выборе пространств задачу (52)–(55) можно свести к абстрактной задаче (48), (49) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} a(I - \mu_1 A) & \mathbb{O} \\ -a\mu_1\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \ M = \begin{pmatrix} \mu_2 A & \mathbb{O} \\ \mu_2\Pi\Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}).$$

Нелинейный оператор $N : (\mathcal{X}_1)^3 \to \mathcal{Y}$ задается формулой

$$N(t, v_0, v_1, v_2) = -a^2(v_1 \cdot \nabla)v_1 - b^2(v_0 \cdot \nabla)v_0 - ab[(v_2 \cdot \nabla)v_0 + (v_0 \cdot \nabla)v_2].$$

Показано, что при $a \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.

Зададим

$$\psi(s, t) = z_0(s) + (t - t_0)z_1(s) + \cdots + \frac{(t - t_0)^{m-2}}{(m-2)!} z_{m-2}(s) + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1}(s).$$

Как и прежде, $m_i - 1 < \alpha_i \leq m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

Теорема 26. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\alpha_i \leq m - 2$, $q > (m_i - \alpha_i)^{-1}$ *при* $\alpha_i < m_i$, $i = 1, 2$; $a \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$, $\delta \geq 0$, $z_k \in \mathbb{H}_\sigma^3$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$\|a(1 - \mu_1\Delta)D_t^\alpha\psi - \mu_2\Delta\psi + a^2(D_t^{\alpha_1}\psi \cdot \nabla)D_t^{\alpha_1}z +$$
$$+ b^2(\psi \cdot \nabla)\psi + ab[(D_t^{\alpha_2}\psi \cdot \nabla)\psi + (\psi \cdot \nabla)D_t^{\alpha_2}\psi]\|_{L_q(t_0,T;\mathbb{H}^1)} \leq R.$$

Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{r}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (52)–(57).

В параграфе 3.7 исследуются задачи стартового управления для невырожденного полулинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \ldots, D_t^{\alpha_n}z(t)), \ t \in (t_0, T), \tag{58}$$

$$z^{(k)}(t_0) = u_k, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{59}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{60}$$

$$J(z, u) \to \inf. \tag{61}$$

Теорема 27. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ *при* $\alpha_k < m_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_n \leq m - 2$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ *— рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{Z}$ *компактно вложено в* $\mathcal{Z}_1$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, *отображение* $B_1 : (t_0, T) \times \mathcal{Z}_1^n \to \mathcal{Z}_1$ *каратеодориево и равномерно липшицево по* $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^n$, $B : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^n \to \mathcal{Z}$ *— сужение оператора* B_1 *на* $(t_0, T) \times \mathcal{Z}$; *выполняется условие* (23). *Предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $\mathcal{Z}^m$, *пространство* $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое, в свою очередь, непрерывно вложено в* $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{Z}_1)$, *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times \mathcal{Z}^m$, *коэрцитивный на пространстве* $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}^m$. *Тогда существует решение* $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (58)–(61).

Рассмотрена также задача без учета затрат на управление и задачи минимизации функционалов

$$J(z,u) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D^\alpha_t z - D^\alpha_t z_d\|^{q_2}_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_3}_{\mathcal{Z}^m} \to \inf, \tag{62}$$

$$J(z,u) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_3}_{\mathcal{Z}^m} \to \inf, \tag{63}$$

где $q_i \geq 1$, $i = 1,2,3$, $\delta \geq 0$, $z_d \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ для (62) или $z_d \in C^{m-1}(t_0,T;\mathcal{Z})$ для (63), $u_d = (u_d^0, u_d^1, \ldots, u_d^{m-1}) \in \mathcal{Z}^m$ заданы.

В параграфе 3.8 исследуются задачи стартового управления для вырожденного полулинейного уравнения

$$LD^\alpha_t x(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}_t x(t), \ldots, D^{\alpha_n}_t x(t)) + f(t), \quad t \in (t_0,T), \tag{64}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \; k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{65}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{66}$$

$$J(x,u) \to \inf. \tag{67}$$

Теорема 28. *Пусть* $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$ *при* $\alpha_k < m_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, $\alpha_n \leq m - 2$, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1$ *— рефлексивные банаховы пространства,* $\mathcal{X}$ *компактно вложено в* $\mathcal{X}_1$, *оператор* M (L,p)*-ограничен, отображение* $N_1 : (t_0,T) \times \mathcal{X}_1^n \to \mathcal{Y}$ *каратеодориево, равномерно липшицево по* $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{X}_1^n$, N *— сужение оператора* N_1 *на* $(t_0,T) \times \mathcal{X}^n$, $N[(t_0,T) \times \mathcal{X}^n] \subset \mathcal{Y}^1$; *выполнено условие* (29); $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, $(GD^\alpha_t)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D^\alpha_t (GD^\alpha_t)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$ *для всех* $k = 0,1,\ldots,p$. *Предположим, что* $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $(\mathcal{X}^1)^m$, $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое непрерывно вложено в пространство* $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{X}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times (\mathcal{X}^1)^m$, *коэрцитивный на* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times (\mathcal{X}^1)^m$. *Тогда существует решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (64)–(67).

В §3.9 доказана разрешимость задачи стартового управления для вырожденного линейного уравнения с несколькими дробными производными

$$LD^\alpha_t x(t) = Mx(t) + \sum_{k=1}^{n} N_k(t) D^{\alpha_k}_t x(t) + f(t), \quad t \in (t_0,T), \tag{68}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \; k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{69}$$

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{70}$$

$$J(x,u) \to \inf. \tag{71}$$

Теорема 29. *Пусть* $\alpha > 0$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\alpha_n \leq m - 1$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)*-ограничен, отображения* $N_k : (t_0,T) \to \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ *измеримы и существенно ограничены на* (t_0,T), $\mathrm{im} N_k(t) \subset \mathcal{Y}^1$ *для почти всех* $t \in (t_0,T)$, $k = 1,2,\ldots,n$; $Qf \in L_q(t_0,T;\mathcal{Y})$, *для всех* $l = 0,1,\ldots,p$ $(GD^\alpha_t)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $D^\alpha_t (GD^\alpha_t)^l M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0,T;\mathcal{X})$; $\mathcal{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $(\mathcal{X}^1)^m$, $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times (\mathcal{X}^1)^m$, *коэрцитивный на* $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times (\mathcal{X}^1)^m$. *Тогда существует решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ *задачи* (68)–(71). *Если функционал* J *строго выпуклый на* $\mathbb{Y} \times (\mathcal{X}^1)^m$, *то решение единственно.*

В последнем, десятом, параграфе абстрактные результаты из §3.9 проиллюстрированы на примере задачи стартового управления для одной системы, состояние которой описывается начально-краевой задачей для уравнения в частных производных, не разрешимого относительно старшей дробной производной по времени.

Заключение

В диссертационной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости начальных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах с нелинейной частью, зависящей от нескольких дробных производных Герасимова – Капуто: задачи Коши для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения и обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова для вырожденного эволюционного уравнения с относительно ограниченной парой операторов. Полученные результаты о начальных задачах позволили исследовать разрешимость задач оптимального управления для соответствующих систем в случае распределенного и стартового управления, компромиссного функционала и задач без учета затрат на управление.

Дальнейшие перспективы развития тематики диссертационной работы связаны с применением ее результатов в различных моделях, поведение которых описывается уравнениями и системами с несколькими дробными производными, при рассмотрении обратных задач для соответствующих уравнений, при построении численных решений рассмотренных задач. Теоретические результаты предполагается перенести на случай более общих пар линейных операторов, задающих линейную часть вырожденного уравнения, а также исследовать аналогичные задачи для уравнений с дробными производными других типов, например, для уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Плеханова, М. В. Распределенное управление для полулинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто / М. В. Плеханова, Г. Д. Байбулатова, Б. Т. Киен // Мат. заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28, № 2. — С. 47–67.

2. Байбулатова, Г. Д. Задачи стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными / Г. Д. Байбулатова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, вып. 3. — С. 271–284.

3. Baybulatova, G. D. An initial problem for a class of weakly degenerate semilinear equations with lower order fractional derivatives / G. D. Baybulatova, M. V. Plekhanova // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2021. — Vol. 35. — P. 34–48.

4. Plekhanova, M. V. Multi-term fractional degenerate evolution equations and optimal control problems / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 4. — P. 483–491.

5. Plekhanova, M. V. Strong solutions of semilinear equations with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Transmutation Operators and Applications. — Switzerland: Springer Nature, 2020. — P. 329–341.

6. Plekhanova, M. V. Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019), Yekaterinburg, Russia, 08–12 July, 2019. Proceedings, ed. by M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. — Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — Vol. 11548. — P. 501–512.

7. Plekhanova, M. V. Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems, NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7, ed. by I. Area, A. Cabada, J. A. Cid etc. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 81–93.

8. Plekhanova, M. V. Numerical solution of an optimal control problem for Oskolkov's system / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova, P. N. Davydov // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, iss. 18. — P. 9071–9080.

Другие публикации автора

9. Байбулатова, Г. Д. Разрешимость одной начально-краевой задачи для уравнения с несколькими производными / Г. Д. Байбулатова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. междунар. конф., 15–19 марта, 2021, оз. Банное, Уфа. — С. 16–17.

10. Байбулатова, Г. Д. Вопросы разрешимости задач оптимального управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / Г. Д. Байбулатова // Актуальные проблемы прикладной математики: тез. докл. междунар. конф., Нальчик, Эльбрус, Россия, 22–26 мая 2018. — С. 208.

11. Байбулатова, Г.Д. Задача управления для дробного уравнения с многочленами от оператора дифференцирования / Г.Д. Байбулатова, М.В. Плеханова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. междунар. конф., 12 – 16 марта, 2018, оз. Банное, Уфа. — Уфа: Изд-во БГПУ. — С. 19–20

12. Байбулатова, Г. Д. Вырожденное эволюционное уравнение с несколькими производными по времени дробного порядка / Г. Д. Байбулатова, М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Соболевские чтения: тез. докл. междунар. шк.-конф., посвящ. 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 10–16 декабря 2018. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2018. — С. 57.

13. Plekhanova, M. V. A class of semilinear degenerate equations with fractional lower order derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Stability, Control and Differential Games, ed. by A. M. Tarasyev et al. –– Lecture Notes in Control and Information Sciences. — 2020. — P. 203–212.

14. Plekhanova, M. V. Strong solutions for a lass of semilinear equations with lower fractional derivatives / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // 2nd International Conference on Mathematical Modeling in Applied Sciences. Book of Abstracts. 20–24 August, 2019, Belgorod, Russia. — P. 115–116.

15. Plekhanova, M. V. Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations / M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova // Abstracts of XVIII International Conference "Mathematical Optimization Theory and Operations Research" (MOTOR 2019), ed. by M. Khachay, Y. Kochetov. — Ekaterinburg: Ural Federal University, 2019. — P. 96.