

На правах рукописи



Леонтьев Евгений Владимирович

**КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ
НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УСЛОВИЙ ОПИРАНИЯ**

2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

г. Курск
2021

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет».

Научный руководитель	Травуш Владимир Ильич академик РААСН, доктор технических наук, профессор
Официальные оппоненты	Чернов Юрий Тихонович доктор технических наук, профессор кафедры строительной и теоретической механики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ) Курченко Наталья Сергеевна кандидат технических наук, доцент кафедры строительного производства ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет»
Ведущая организация	ФГБОУ ВО «Томский государственный архитектурно- строительный университет».

Защита диссертации состоится 16 октября 2021 г. в 12.00 часов на заседании объединённого диссертационного совета 99.2.026.03, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Юго-Западный государственный университет», федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Тульский государственный университет», по адресу: 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета и на официальном сайте ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» <http://www.swsu.ru>.

Отзывы на автореферат направлять в диссертационный совет по адресу: 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет».

Автореферат разослан «___» _____ 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.т.н., доцент



Колесников
Александр Георгиевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Основным требованием Федерального закона от 30.12.2009 № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений», предъявляемым к зданиям и сооружениям на всех стадиях жизненного цикла, является обеспечение безопасности жизни и здоровья граждан, имущества физических или юридических лиц, государственного или муниципального имущества. Выполнение требований безопасности обеспечивается реализацией требуемых функций строительных объектов в течение расчётного срока эксплуатации без отказов конструктивных систем, при которых их дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна. Для этого при проектировании зданий и сооружений необходимо учитывать предельные состояния при действии наиболее неблагоприятных сочетаний нагрузок в течение расчётного срока службы.

В современной строительной практике для выполнения требований механической безопасности зданий и сооружений, которые регламентированы законодательно и получили развитие в современных нормативно-технических документах, актуальной является задача исследования конструктивных систем, изменяющих расчётную схему в силу различных причин при локальном разрушении или в результате проявления опасных природных процессов и явлений или техногенных воздействий. Состояния, возникающие при особых воздействиях и ситуациях, превышение которых приводит к разрушению сооружений с катастрофическими последствиями, необходимо учитывать для обеспечения требований особой группы предельных состояний.

К особым воздействиям и ситуациям относятся деформации основания, вызванные изменением физико-механических свойств грунта, сопровождающиеся снижением его прочностных характеристик в результате карстовых или карстово-суффозионных процессов; тепловых просадок, связанных с оттаиванием льдистых грунтов и залежей подземных льдов; замачивания просадочных грунтов или вследствие ошибок при производстве работ; нарушений правил эксплуатации сооружений; нарушений технологического процесса или поломки оборудования и возникающие по другим не установленным причинам.

В большей степени изменение грунтовых условий влечёт за собой изменение условий работы фундаментных конструкций, которые в ряде случаев можно рассматривать как работу балки, лежащей на упругом основании. К этой схеме приводятся многие задачи расчёта элементов конструкций – шпал, рельсов, свай, ленточных фундаментов, резервуаров, трубопроводов, каналов, тоннелей, распределительных устройств каменных конструкций и др.

Поэтому разработка методики расчёта конструкций (в частности, балок), лежащих на упругом основании, с учётом изменения условий их опирания на основание, является актуальной задачей для обеспечения безопасности как фундаментов, так и находящихся на них надземных конструкций зданий и сооружений. Кроме того, актуальным является учёт как статических, так и динамических нагрузок, а также проявление динамических эффектов при внезапном изменении условий опирания фундаментных конструкций.

Инженерная практика нуждается в простых методах решения конкретных задач для типичных элементов конструкций зданий и сооружений, способных обеспечить их безопасность при особых воздействиях и ситуациях.

Степень разработанности темы исследования. Вопросы расчёта балок, лежащих на упругом основании, исследованы многими зарубежными и отечественными учёными. Исследовательские работы в большей части выполнены по расчёту балок, лежащих на сплошном упругом основании, описываемых моделью Винклера, и нагруженных статической нагрузкой. Результаты этих работ описаны в ряде монографий, преимущественно XX века.

Выполненные исследования работы конструкций за пределами первого и второго предельных состояний стали основой формулировки и постановки задач при расчётном анализе сопротивления зданий и сооружений прогрессирующему обрушению в результате локального разрушения одного из несущих элементов. На этих положениях формируются исследования современных требований безопасности конструктивных систем, формулируются критерии особого предельного состояния (работы В.А. Алмазова, В.М. Бондаренко, А.М. Белостоцкого, Г.А. Гениева, В.А. Гордона, А.С. Городецкого, П.Г. Еремеева, Н.И. Карпенко, Н.Г. Келасьева, Э.Н. Кодыша, В.И. Колчунова, Вл.И. Колчунова, В.И. Коробко, А.В. Коробко, Е.Н. Курбацкого, И.Е. Милейковского, Б.С. Расторгуева, И.Н. Серпика, А.Г. Тамразяна, В.И. Травуша, Н.Н. Трёкина, А.А. Трещёва, А.В. Туркова, В.С. Фёдорова, Н.В. Фёдоровой, Ю.Т. Чернова, Г.И. Шапиро и др.).

В то же время мало работ, в которых рассматриваются конструкции на упругом основании, у которых во время эксплуатации изменились граничные условия под частью площади опирания, либо на части опирания основание внезапно исчезло. Также мало работ, в которых рассматривается изменение характера воздействия нагрузки в процессе эксплуатации. Внезапное изменение условий опирания балки на основание приводит к тому, что действующая на балку статическая нагрузка превращается во внезапно приложенную нагрузку, вызывающую колебания, т.е. в динамическую.

Целью диссертационной работы является разработка методики расчёта балки на упругом винклеровском основании с кусочно-переменной жёсткостью, учитывающего изменение условий опирания, вызванное локальным, в том числе внезапным, разрушением основания.

Задачи исследования:

- решение статических задач изгиба балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью при отсутствии основания под частью конструкции и действии различных нагрузок;
- определение собственных частот колебаний балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью вследствие изменения условий опирания части конструкции на основание;
- решение динамических задач вынужденных колебаний балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью, в т.ч. при внезапном исключении основания под частью конструкции и действии различных нагрузок;

- учёт дополнительных масс и динамических нагрузок при внезапном изменении или исчезновении жёсткостных характеристик упругого основания под частью балки;
- совершенствование методики расчёта балок на упругом основании, являющихся фундаментами реальных сооружений на действие статических и динамических нагрузок в случае изменения условий опирания этих балок, вызванных изменением жёсткостных характеристик основания или исчезновением основания под частью балки;
- учёт односторонних и двусторонних связей балок с основанием.

Объект исследования - балка на упругом винклеровском основании с кусочно-переменной жёсткостью, учитывающем изменение условий опирания, вызванных локальным, в том числе внезапным, разрушением основания при действии статических и динамических нагрузок.

Предмет исследования - методика определения усилий и деформаций в балках на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью при изменении условий опирания части балки на основание при действии различных нагрузок.

Научная новизна работы:

- разработана теоретически обоснованная методика расчёта балок на упругом винклеровском основании с кусочно-переменной жёсткостью при действии различных статических и динамических нагрузок в случае изменения условий опирания балок на основание при их эксплуатации;
- получены формулы для определения усилий и деформаций в балках при различных сочетаниях коэффициентов постели основания под различными участками балок;
- построены зависимости для определения частот собственных колебаний балок с изменяемыми в процессе эксплуатации условиями опирания на упругое основание, в том числе с учётом сосредоточенных масс;
- построены зависимости для определения коэффициентов динамичности для балок на сплошном упругом основании и в случае изменения условий опирания балок на основание при действии различных динамических нагрузок, в том числе с учётом сосредоточенных масс;
- проведён анализ влияния на напряжённо-деформированное состояние балок при односторонних и двусторонних связях с основанием различных размеров исчезнувшего участка основания и жёсткостей элементов системы «балка – упругое основание».

Теоретическая и практическая значимость работы. Предложена и теоретически обоснована методика определения усилий и перемещений в балках на упругом основании с изменяемыми в процессе эксплуатации условиями их опирания на основание (провалы грунта, промоины, оттаивание, карстовые деформации и т.д.) при действии различных статических и динамических нагрузок.

Реализация предложенных методик и алгоритмов расчёта при проектировании зданий и сооружений позволит более обоснованно принимать решения для обеспечения их механической безопасности и, в частности, учитывать особые воздействия и ситуации при внезапном образовании локального разрушения основания.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы теоретического исследования. Совершенствование и дополнения существующих расчётных методик выполнено на основе общепринятых положений современной строительной механики, сопротивления материалов, механики деформируемого тела, математики, компьютерного моделирования. В качестве расчётной модели рассматривалась система «балка – упругое основание». Точность полученных результатов оценивалась путём сравнения результатов практических примеров с известными данными и результатами компьютерного моделирования в расчётных комплексах.

Личный вклад автора заключается в проведённом анализе отечественных и зарубежных исследований балок на упругом основании; решении многообразных задач по расчёту балок на упругом винклеровском основании при изменении условий опирания, вызванном локальным разрушением основания при действии статических и динамических нагрузок, разработке численных моделей с использованием ПК.

Положения, выносимые на защиту:

- методика расчёта балок на упругом винклеровском основании при изменяющихся в процессе эксплуатации граничных условиях, описывающих изменяющиеся, в т.ч. внезапно, условия опирания балок (провалы грунта, промоины, оттаивание, карстовые деформации и т.д.);
- формулы для определения усилий и деформаций в балках при различных коэффициентах постели упругого основания под различными участками балок;
- зависимости для определения частот собственных колебаний балок с изменяемыми в процессе эксплуатации условиями их опирания на упругое основание, в том числе с учётом присоединённых масс, а также коэффициентов динамичности в случае вынужденных колебаний;
- анализ усилий и перемещений балок на упругом винклеровском основании при различных размерах отсутствия основания под балками с учётом односторонних и двусторонних связей с основанием и действии статических и динамических нагрузок.

Степень достоверности результатов исследований. Достоверность результатов исследования обеспечена применением принятых физических гипотез строительной механики и сопротивления материалов; применением строгих математических методов решения задач и современных численных методов, а также подтверждается хорошей сходимостью тестовых примеров с результатами известных решений и решений, полученных с применением расчётных комплексов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях: VII Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (г. Новосибирск, 2018 г.); Международная конференция по физике материалов, строительным конструкциям и технологиям в строительстве, промышленности и производстве (MPCPE 2020) (г. Владимир, 2020 г.); Международный научно-практический форум SMART BUILD-2020 «Стройка политеха» (г. Ярославль, 2020 г.); XIII Всероссийская молодёжная

конференция аспирантов, молодых учёных, студентов и школьников «Современные технологии в строительстве. Теория и практика» (г. Пермь, 2021 г.); научный семинар кафедры «Строительная и теоретическая механика» НИУ МГСУ (г. Москва, 2021 г.).

Материалы диссертации в полном объёме доложены на расширенном заседании кафедры «Уникальные здания и сооружения» ФСА ЮЗГУ (г. Курск, 2021 г.).

Внедрение результатов исследования. Результаты диссертационной работы были использованы АО «ЦНИИПромзданий» при выполнении НИОКР в рамках государственного задания Минстроя России по развитию нормативной технической базы, направленной на обеспечение безопасности зданий и сооружений и применение передовых инновационных технологий проектирования и строительства по теме «Совершенствование методов расчёта защиты железобетонных конструкций зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения с учётом деформационной модели особого предельного состояния»; при разработке свода правил СП 385.1325800.2018 «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения»; Изменения № 1 к СП 385.1325800.2018; «Пособия по проектированию мероприятий по защите зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения (Часть 2)» (к СП 385.132800.2018 с изменением №1).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 научных работах, из которых 5 статей в журналах, включённых в перечень рецензируемых научных изданий по списку ВАК РФ и 2 статьи в журналах, индексируемых в международной базе данных Scopus.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы (111 наименований, в том числе 19 на иностранных языках). Работа изложена на 131 странице машинописного текста и приложения на 1 странице, содержит 59 рисунков и 37 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение посвящено обоснованию актуальности темы исследования, описанию общей характеристики работы и формулированию её основных положений.

Первая глава работы содержит анализ технической литературы и обзор работ отечественных и зарубежных авторов в области динамических расчётов балки на упругом основании. Приводится аналитический обзор моделей грунтового основания, проанализированы динамические модели балок, лежащих на упругом основании. Рассмотрены методы расчёта конструкций на деформируемом основании с использованием дифференциальных уравнений в зависимости от принятых моделей основания. Для получения точного решения задачи колебаний упругих статически неопределимых систем используется метод разделения переменных. Большие упрощения даёт метод начальных параметров, который позволяет записать в готовом виде решения задач при основных типах нагрузок. Отдельно рассмотрены вопросы рассеяния энергии при колебаниях, описаны методы их учёта при динамическом расчёте, освещена проблема учёта совместной работы конструкций с односторонними связями с

основанием.

Вопросы расчёта строительных конструкций, подвергающихся динамическим воздействиям, рассмотрены многими известными учёными. Отметим работы А.Н. Крылова, С.П. Тимошенко, И.М. Рабиновича, И.М. Бабакова, В.Л. Бидермана, Б.Г. Коренева, В.И. Коробко, Н.Н. Леонтьева, Л.С. Ляховича, В.Л. Мондруса, Я.Г. Пановко, А.Е. Саргсяна, Н.К. Снитко, А.Ф. Смирнова, А.И. Цейтлина, Ю.Т. Чернова и других учёных. Подавляющее большинство работ по динамике взаимодействия балки и основания выполнено для случаев, когда расчётная схема системы «балка – упругое основание» в нагруженном состоянии не изменяется.

Обоснована необходимость решения вопросов вынужденных колебаний системы «балка – упругое основание» при изменении условий опирания балок на упругое основание, т.е. при изменении расчётной схемы нагруженной балки. Решение вопросов обеспечения механической безопасности невозможно без решения задач исследования динамических процессов в конструктивно нелинейных системах, изменяющих расчётную схему при внезапном образовании недетерминированного локального разрушения основания.

Вторая глава включает результаты решения статических задач изгиба балки, расположенной на упругом винклеровском основании с кусочно-переменной жёсткостью, которые в дальнейшем будут использованы в качестве начальных условий исследования динамического процесса при внезапном изменении условий опирания системы «балка – упругое основание».

Рассмотрены три основные расчётные схемы балки со свободными концами, расположенной на упругом винклеровском основании (рис. 1 – 3):

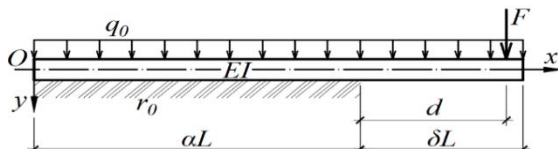


Рисунок 1 - Изменение условий опирания одной из краевых частей балки

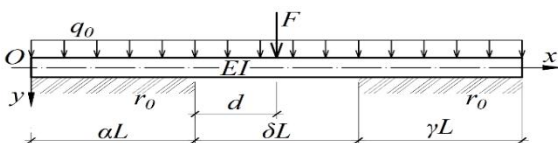


Рисунок 2 – Изменение условий опирания средней части балки

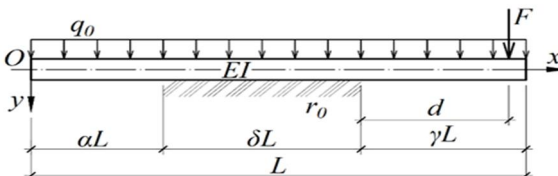


Рисунок 3 - Изменение условий опирания двух краевых частей балки

Дифференциальное уравнение линии прогибов для балки постоянного сечения имеет вид:

$$y^{IV}(x) + 4\beta^4 y(x) = \frac{q(x)}{EI}, \quad (1)$$

где $y(x)$ – величина осадки (перемещения), (м); $\beta = \sqrt[4]{\frac{r}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{r_0 b}{4EI}}$ – коэффициент относительной жёсткости упругого основания, (1/м); $r(x) = -r_0 b y(x)$ – интенсивность реакции упругого основания, (Н/м); r_0 – коэффициент постели, (Н/м³); b – ширина балки, (м); $q(x)$ – распределённая нагрузка; E – модуль упругости материала балки, (Па);

I - момент инерции поперечного сечения балки, (м^4).

Аналитическое решение уравнения (1) выполнено методом начальных параметров для каждого участка балки, с использованием функций А.Н. Крылова.

Для иллюстрации решений и с целью определения влияния на напряжённо-деформированное состояние балки изменения длины δL части балки при исключении упругого основания, действии собственного веса балки q_0 и сосредоточенной силы F (рис. 1 и 2) выполнены расчёты для трёх значений приведённой длины балки $L\beta = 2,2; 3,86; 5,1$ при значениях коэффициентов постели: $r_0 = 5; 50$ и 150 МН/м^3 и трёх вариантов длины части балки с исключаемым основанием $\delta L = (1/6) L; (1/4) L; (1/3) L$.

Исходные данные: балка прямоугольного сечения $1,25 \times 1,5(h)$ м длиной $L = 18,0$ м из материала плотностью $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ с модулем упругости $E = 21,0 \times 10^3 \text{ МПа}$. На балку действуют собственный вес q_0 и сосредоточенная сила $F = 100,0 \text{ кН}$, приложенная в точке d .

Результаты расчёта при изменении условий опирания правой (рис. 1) и средней (рис. 2) части балки для разных значений параметров $L\beta$ и δL и, для сравнения, балки на сплошном упругом основании представлены на рис. 4 и 5 и в табл. 1 и 2.

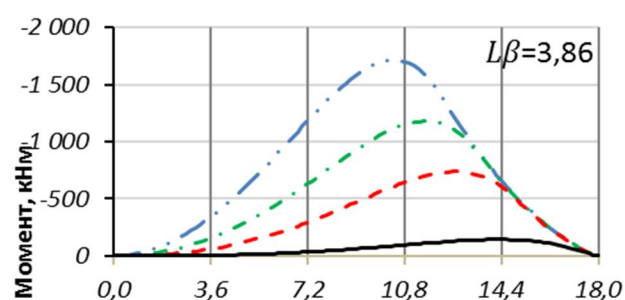
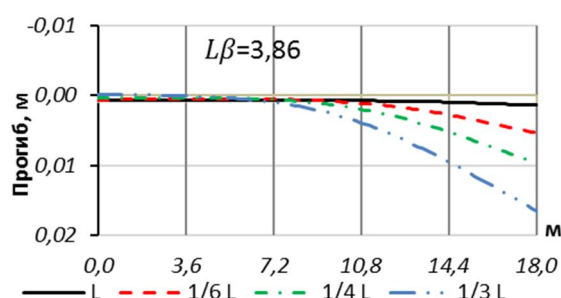


Рисунок 4 – Прогибы (м) и изгибающие моменты (кН·м) балки на упругом основании при $L\beta = 3,86$ и изменении условий опирания под правой частью

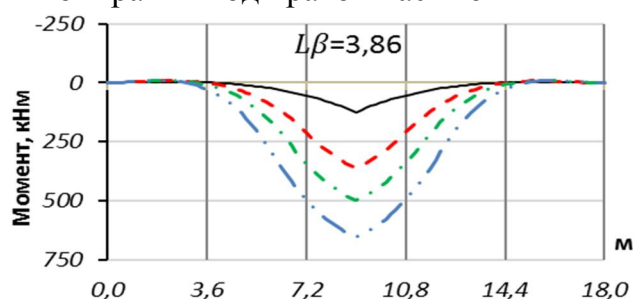
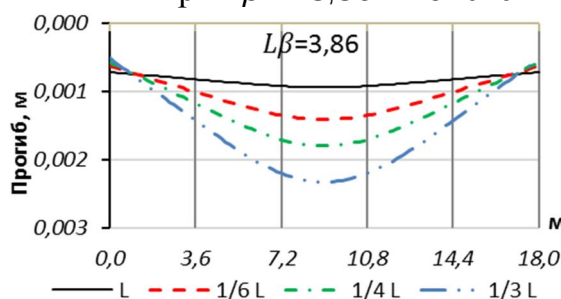


Рисунок 5 – Прогибы (м) и изгибающие моменты (кН·м) балки на упругом основании при $L\beta = 3,86$ и изменении условий опирания под средней частью

Таблица 1 - Результаты расчёта балки на упругом основании при изменении условий опирания правой части

$L\beta$ \ Основание	Прогиб справа (y_{max}), м				Изгибающий момент (M_{max}), кН·м			
	L	$(5/6)L$	$(3/4)L$	$(2/3)L$	L	$(5/6)L$	$(3/4)L$	$(2/3)L$
2,2	0,01166	0,02792	0,04490	0,07382	-229,0	-890,0	-1329,9	-1845,8
3,86	0,00142	0,00534	0,00965	0,01645	-143,8	-737,8	-1179,5	-1716,8
5,1	0,00054	0,00292	0,00586	0,01069	-107,8	-662,7	-1092,5	-1624,2

Таблица 2 - Результаты расчёта балки на упругом основании при изменении условий опирания средней части балки

$L\beta$ \ Основание	Прогиб справа (y_{max}), м				Изгибающий момент (M_{max}), кН·м			
	L	$(5/6)L$	$(3/4)L$	$(2/3)L$	L	$(5/6)L$	$(3/4)L$	$(2/3)L$
2,2	0,00860	0,01081	0,01232	0,01422	201,4	534,4	708,1	886,6
3,86	0,00094	0,00141	0,00179	0,00232	123,8	358,5	496,7	655,0
5,1	0,00033	0,00056	0,00077	0,00108	89,2	264,8	368,3	489,9

Рассмотрена та же балка при изменении условий опирания двух краевых частей (рис. 3), которая используется для решения задачи изгиба балки на упругом основании с односторонними связями.

Численным методом последовательных итераций определена наиболее вероятная расчётная схема системы «балка – упругое основание», при которой значение прогиба балки равно нулю в точке сопряжения участков балки, работающих совместно с упругим основанием в зоне контакта и независимо от основания в зоне отрыва. В табл. 3 представлены результаты расчёта балки при двусторонних и односторонних связях с упругим основанием.

Таблица 3 - Результаты расчёта балки на упругом основании с односторонними и двусторонними связями при изменении условий опирания правой части балки

$L\beta$	δL	Двусторонние связи				Односторонние связи			
		Длина отрыва, м	Прогиб y , м		M_{max} , кН·м	Длина отрыва, м	Прогиб y , м		M_{max} , кН·м
			слева	справа			слева	справа	
2,2	$(1/4)L$	1,62	-0,0033	0,0449	-1329,9	2,16	-0,0049	0,0462	-1316,7
2,2	$(1/3)L$	1,8	-0,0108	0,0738	-1845,8	3,42	-0,0415	0,1032	-1745,4
3,86		2,7	-0,0002	0,0165	-1716,8	4,14	-0,0006	0,0167	-1710,3

По результатам расчётов статических задач изгиба балки, расположенной на упругом основании, при исключении из работы основания одной из частей балки, определено, что перемещения и внутренние усилия балки увеличиваются при увеличении длины части балки с исключаемым основанием. С увеличением длины δL правой части балки с исключаемым основанием и увеличением приведённой длины $L\beta$ балки может происходить отрыв левой или средней части балки от упругого основания. В большинстве случаев отрыв не возникает, так как балка имеет достаточно большой пригруз постоянными нагрузками. При отрыве одной части балки от упругого основания в результате исключения основания под другой частью балки при односторонних связях балки с упругим основанием увеличивается длина зоны отрыва и увеличиваются прогибы левого и правого концов балки, но уменьшаются значения изгибающих моментов в сечениях балки по сравнению с той же балкой при двусторонних связях с основанием.

В третьей главе решены динамические задачи свободных и вынужденных колебаний балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью, в том числе при внезапном изменении или исчезновении жёсткостных характеристик упругого

основания под частью балки, при действии динамических нагрузок и с учётом дополнительных присоединённых масс. Рассмотрены основные расчётные схемы балки со свободными концами, расположенной на упругом основании при изменении условий опирания одной краевой части, средней части и двух краевых частей балки (рис. 6). Действие присоединённых масс и динамических нагрузок на каждом участке балки αL , δL и γL рассмотрено в произвольных точках (рис. 6 а - г).

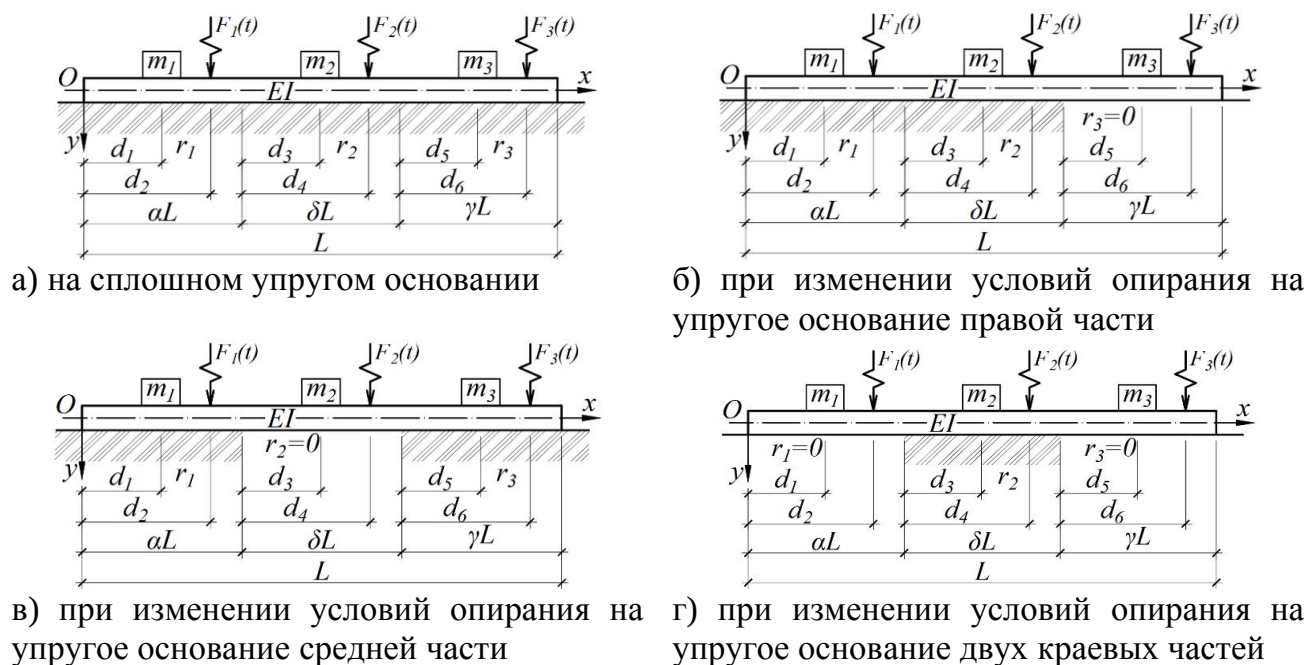


Рисунок 6 - Балка с присоединёнными массами на упругом основании при действии динамических нагрузок $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$

При внезапном исчезновении основания под какой-либо частью балки или образовании внутри основания полости под какой-либо частью балки, до этого покоящейся на сплошном упругом основании, происходит нарушение равновесия в системе «балка – упругое основание». Балка и основание начинают колебаться с некоторыми собственными частотами, возникают инерционные силы, учёт которых позволяет рассмотреть равновесие всей системы.

Методика расчёта балок на упругом винклеровском основании при действии статических и динамических нагрузок в случае изменения условий опирания частей балок на основание построена путём последовательного решения нижеследующих задач с использованием расчётной модели балки Бернулли - Эйлера:

1) решается статическая задача определения перемещений и внутренних усилий в балке, расположенной на упругом основании, при исключении из работы основания под частью балки. Значения статических перемещений используются как начальные условия динамического процесса (колебаний), возникающего после внезапного исключения из работы основания под частью конструкции. Значения статических внутренних усилий используются для сравнения с динамическими;

2) исследуются свободные поперечные колебания балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью вследствие изменения условий опирания части конструкции на основание;

3) исследуются вынужденные поперечные колебания балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью, в том числе при внезапном изменении или исчезновении жёсткостных характеристик упругого основания под частью балки, вызванные различными видами динамической нагрузки, путём разложения этой нагрузки в ряд по собственным формам колебаний.

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний балки при любом законе изменения возмущающей силы $q(x, t)$ имеет вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + r y(x, t) = q(x, t), \quad (2)$$

где $y(x, t)$ – функция прогиба балки, зависящая от координаты x и времени t , (м); $q(x, t)$ – возмущающая нагрузка, изменяющаяся во времени t ; μ – погонная масса балки (Н*с²/м²); ε_0 – коэффициент затухания.

Свободные колебания балки на упругом основании с учётом диссипативных сил описаны уравнением (2) при $q(x, t) = 0$. Получено выражение для прогиба балки $y(x, t)$ при её свободных колебаниях:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) e^{-nt} (C_j \sin \omega_j t + D_j \cos \omega_j t), \quad (3)$$

где ω_j – частота свободных колебаний балки: $\omega_j = \sqrt{\left(\frac{EI}{\mu} \kappa_j^4 + \frac{r}{\mu}\right)}$. (4)

Постоянные C_j и D_j определяются из начальных условий. Обычно в начальный момент времени при $t = 0$ известна функция статического прогиба $y(x, 0) = f(x)$ и начальная скорость балки $\dot{y}(x, 0) = 0$.

Вынужденные поперечные колебания могут быть вызваны различными видами динамической нагрузки. В работе получено решение дифференциального уравнения вынужденных поперечных колебаний балки на упругом основании при любом законе изменения произвольной динамической нагрузки $q(x, t)$.

Вынужденные колебания балки на упругом основании с учётом диссипативных сил при действии произвольной нагрузки.

Представим $q(x, t)$ в виде ряда $q(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) X_j(x)$, умножив на $X_j(x) dx$ и интегрируя, получим:

$$q_j(t) = \frac{\int_0^l q(x, t) X_j(x) dx}{\int_0^l X_j^2(x) dx}. \quad (5)$$

При действии на балку системы сил $\sum P_i(t) \delta(x - x_i)$, где $P_i(t)$ – сила, приложенная в точке x_i , $\delta(x - x_i)$ – дельта функция, функция $q_j(t)$ определится из выражения:

$$q_j(t) = \frac{\sum P_i(t) X_j(x_i)}{\int_0^l X_j^2(x) dx}. \quad (6)$$

Далее, как и прежде, представим функцию прогиба $y(x, t)$ в виде ряда, получим полное решение задачи о вынужденных колебаниях балки на упругом винклеровском основании при действии произвольной нагрузки:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \left[e^{-nt} (C_j \sin \omega_j t + D_j \cos \omega_j t) + \int_0^t \frac{q_j(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin \omega_j (t-\xi) d\xi}{\mu \omega_j} \right]. \quad (7)$$

Далее рассмотрим ряд частных случаев.

Вынужденные колебания балки на упругом основании с учётом диссипативных сил при действии внезапно приложенной силы P .

Получено уравнение функции прогиба балки:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \frac{P X_j(b)}{\mu G} \frac{[\omega_j e^{-nt} (n \sin \omega_j t + \omega_j \cos \omega_j t)]}{\omega_j (n^2 + \omega_j^2)}, \quad (8)$$

где
$$G = \int_0^l X_j^2(x) dx. \quad (9)$$

Если затуханием можно пренебречь, то вычисляя интеграл (9), получим решение задачи в окончательном виде:

$$y(x, t) = \frac{P}{\mu G} \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) X_j(b) \frac{(1 - \cos \omega_j t)}{\omega_j^2}. \quad (10)$$

Вынужденные колебания балки на упругом основании при действии сосредоточенного импульса S .

Действие импульса равнозначно кратковременному действию силы $S = P \Delta t$ при конечном S и $\Delta t \rightarrow 0$. Получено уравнение прогиба балки при действии сосредоточенного импульса S :

$$y(x, t) = \frac{S}{\mu G} \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) X_j(b) \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j}. \quad (11)$$

Вынужденные колебания балки на упругом основании с учётом диссипативных сил при действии вибрационной нагрузки от возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону, описываются уравнением:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + r y(x, t) = q_0(x) \sin(\rho t + \varphi_0), \quad (12)$$

где ρ – частота вынужденных колебаний, φ_0 – начальный сдвиг фазы.

Используя метод разделения переменных, разложим функцию $q(x, t)$ в ряд по фундаментальным функциям задачи о свободных колебаниях. В общем случае с учётом затухания прогиб балки при действии на неё вибрационной нагрузки:

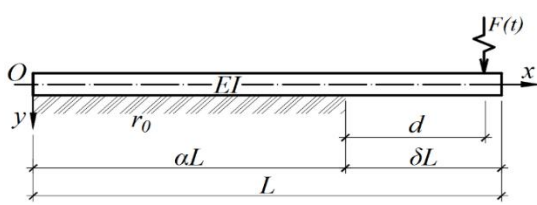
$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j X_j(x) [e^{-nt} A_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) + N_j \sin(\rho t + \varphi_0 + \delta_j)]. \quad (13)$$

Применяя метод начальных параметров и функции А.Н. Крылова получено точное решение динамических задач свободных и вынужденных колебаний балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью, в том числе с учётом дополнительных присоединённых масс, для основных расчётных схем при внезапном изменении или исчезновении жёсткостных характеристик основания из-за изменения условий опирания одной или двух краевых частей или средней части балки (рис. 6).

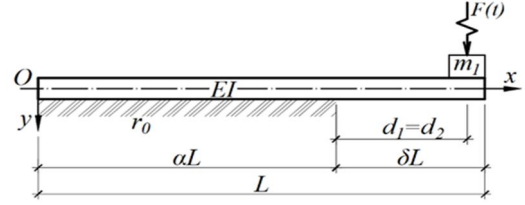
Четвертая глава включает в себя результаты практических расчётов, иллюстрирующих решения, полученные в главе 3. Исследованы поперечные колебания балки на упругом основании при действии вибрационной нагрузки $F(t) = F \sin \gamma t$, внезапно приложенной силы P и сосредоточенного импульса S , в том числе с учётом присоединённых масс, для балки, расположенной на упругом основании в случае внезапного изменения условий опирания краевой или средней части. Точность полученных результатов оценена путём сравнения с известными решениями и результатами компьютерного моделирования.

Колебания балки на упругом основании при изменении условий опирания и действии вибрационной нагрузки

Рассмотрена та же балка при действии собственного веса q_0 и вибрационной силы $F(t) = F \sin \gamma t$, приложенной в точке d без учёта (рис. 7 а) и с учётом присоединённой массы $m_1 = 1019,4$ кг (рис. 7 б).



а) без присоединённой массы



б) с присоединённой массой

Рисунок 7 - Балка на упругом основании при изменении условий опирания под правой частью и действии вибрационной силы

Используя выражение коэффициента относительной жёсткости основания β , принятого при решении уравнения (1) и формулу (4), получим:

$$\kappa_i^4 = \frac{\mu}{EI} \left(\omega_i^2 - \frac{r}{\mu} \right) = \frac{\mu \omega_i^2}{EI} - \frac{r}{EI} = \frac{\mu \omega_i^2}{EI} - 4\beta^4. \quad (14)$$

Коэффициент κ_j^4 принимает вещественное значение, если $\mu \omega_j^2 > r$, этот случай и имеем в виду в дальнейшем.

Корни частотного уравнения для части балки на упругом основании обозначим κ_i , а для части без основания - k_i . Определим корни и частоты собственных поперечных колебаний балки для первых четырёх форм колебаний из условия равенства частот собственных колебаний двух частей балки $\omega_i^{\kappa} = \omega_i^k$, на упругом основании αL и без основания δL . Результаты представлены в табл. 4 и 5.

Таблица 4 - Корни и частоты (рад/с) собственных поперечных колебаний балки на упругом основании при исключении основания правой части балки

Форма колебан	Упругое основание $r_0=50$ МН/м ³					Упругое основание $r_0=5$ МН/м ³				
	сплошное L		слева $\alpha L = (3/4) L$			сплошное L		слева $\alpha L = (3/4) L$		
	κ_i	ω_i	κ_i	k_i	ω_i	κ_i	ω_i	κ_i	k_i	ω_i
0	0,1217	115,84	0,1212	0,1212	115,82	0,1217	40,60	0,1212	0,1212	40,58
1	0,2626	142,99	0,2419	0,3302	135,54	0,2626	93,14	0,26	0,2713	91,26
2	0,4363	262,81	0,4303	0,4247	257,02	0,4363	239,35	0,4357	0,4382	238,71
3	0,6109	477,72	0,6082	0,6174	473,83	0,6109	465,25	0,6106	0,6115	464,85

Таблица 5 - Корни и частоты (рад/с) собственных поперечных колебаний балки с присоединённой массой на упругом основании при исключении основания правой части балки

Форма колебан	Упругое основание $r_0=50$ МН/м ³					Упругое основание $r_0=5$ МН/м ³				
	сплошное L		слева $\alpha L = (3/4) L$			сплошное L		слева $\alpha L = (3/4) L$		
	κ_i	ω_i	κ_i	k_i	ω_i	κ_i	ω_i	κ_i	k_i	ω_i
0	0,0225	114,37	-	-	-	0,0609	38,08	0,0379	0,1707	36,20
1	0,2309	132,2	0,2192	0,3222	129,00	0,2428	81,70	0,2416	0,2554	81,05
2	0,4110	239,1	0,4056	0,4341	234,26	0,4134	215,45	0,4129	0,4159	214,94
3	0,5847	440,13	0,5822	0,5926	436,50	0,5853	427,28	0,5851	0,5861	426,99

По результатам расчётов определено, что при исключении упругого основания под частью балки частота собственных поперечных колебаний балки уменьшается и колебания совершаются медленнее. В случае присоединения массы m_1 к балке частота свободных поперечных колебаний уменьшается по сравнению с аналогичными значениями частоты балки без присоединённой массы.

Построены первые четыре формы колебаний балки (рис. 8). Определено, что формы колебаний балки при исключении упругого основания под частью балки и балки на сплошном упругом основании тождественны.

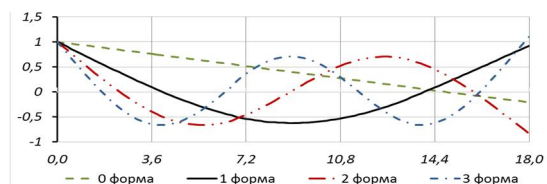


Рисунок 8 – Формы колебаний балки на упругом основании

Изгибные формы начинаются со второй частоты, первая частота соответствует перемещению балки, как жёсткого тела.

Рассмотрим действие на ту же балку собственного веса q_0 и вибрационной силы $F(t) = F \sin \gamma t$, приложенной в точке $d = \delta L$, действующей с частотой $\gamma = 160$ рад/с, без учёта затухания. Длина части балки без основания $\delta L = (1/4) L$.

Определим динамические прогибы и моменты балки (рис. 7а) при исключении упругого основания под правой частью балки. Для сопоставления результатов расчётов построим эпюры для балки, расположенной на сплошном упругом основании. Результаты расчётов представлены на рис. 9 и в табл. 6.

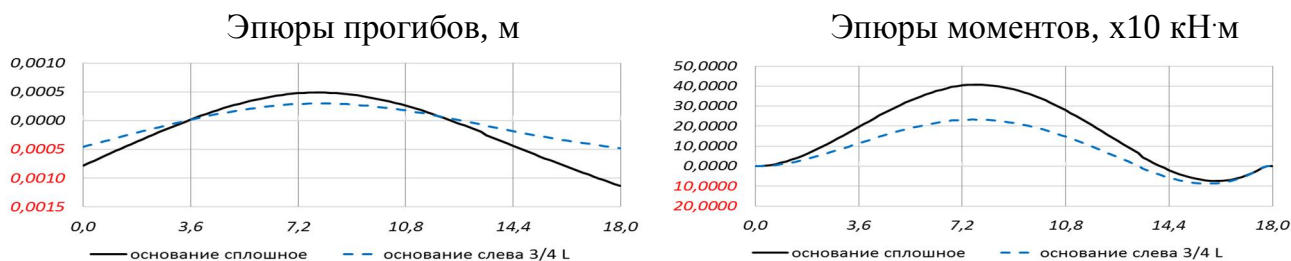


Рисунок 9 - Балка на упругом основании при изменении условий опирания правой части и действии вибрационной силы

Таблица 6 - Результаты динамического расчёта балки при исключении упругого основания правой части и действии вибрационной силы

$L\beta$	Упругое основание сплошное L			Упругое основание слева $\alpha L = (3/4) L$			$\frac{y_{\text{форма}}}{y_{\text{искл}}}$ $\frac{y_{\text{спл}}}{y_{\text{спл}}}$	$\frac{y_{\text{искл}}}{y_{\text{спл}}}$ $\frac{y_{\text{спл}}}{y_{\text{спл}}}$	$\frac{M_{\text{искл}}}{M_{\text{спл}}}$
	$y_{\text{спл}}^{\text{форма}}$ м	$y_{\text{спл}}^{\text{справа}}$ м	$M_{\text{спл}}$ кН м	$y_{\text{искл}}^{\text{форма}}$ м	$y_{\text{искл}}^{\text{справа}}$ м	$M_{\text{искл}}$ кН м			
3,86	0,0004	0,0011	407,7	0,0002	0,0004	233,2	0,59	0,42	0,57
2,2	0,0001	0,0001	121,0	0,0001	0,0001	121,8	1,0	0,94	1,007

При исключении упругого основания правой части балки значения динамических прогибов и изгибающих моментов уменьшились на 41-58 % и уменьшились на 11,4 % значения отношений частот γ^2/ω_1^2 к соответствующим значениям для балки на сплошном упругом основании.

Результаты определения динамических прогибов и моментов балки с

присоединённой массой при исключении упругого основания под правой частью балки (рис 7б) представлены в табл. 7.

Таблица 7 - Результаты динамического расчёта балки с присоединённой массой при исключении упругого основания правой части и действии вибрационной силы

$L\beta$	Упругое основание сплошное L			Упругое основание слева $\alpha L = (3/4) L$			$\frac{y_{\text{форма искл}}}{y_{\text{форма спл}}}$	$\frac{y_{\text{справа искл}}}{y_{\text{справа спл}}}$	$\frac{M_{\text{искл}}}{M_{\text{спл}}}$
	$y_{\text{спл}}^{\text{форма}}$, м	$y_{\text{спл}}^{\text{справа}}$, м	$M_{\text{спл}}$, кН·м	$y_{\text{искл}}^{\text{форма}}$, м	$y_{\text{искл}}^{\text{справа}}$, м	$M_{\text{искл}}$, кН·м			
3,86	0,0001	0,0003	106,0	0,0001	0,0002	105,7	1,0	0,73	0,99
2,2	0,0001	0,0001	121,0	0,0001	0,0001	121,8	1,0	0,94	1,007

При исключении упругого основания правой части балки значения динамических прогибов в середине балки не изменились, а правого конца балки уменьшились на 27 %, динамический изгибающий момент уменьшился незначительно, только на 1 %, и увеличились значения отношений γ^2 / ω_1^2 на 5 % к соответствующим значениям для балки на сплошном упругом основании.

Внезапное исключение основания под частью балки приведёт к колебаниям балки. Максимальное суммарное перемещение при внезапном исключении упругого основания под частью балки запишем в следующем виде:

$$y_{\text{max}} = (y_{\text{искл}}^{\text{стат}} + y_{\text{искл}}^{\text{дин}}), \quad (15)$$

где y_{max} – максимальное перемещение, $y_{\text{искл}}^{\text{стат}}$ – соответствующее максимальное статическое перемещение, $y_{\text{искл}}^{\text{дин}}$ – максимальное динамическое перемещение.

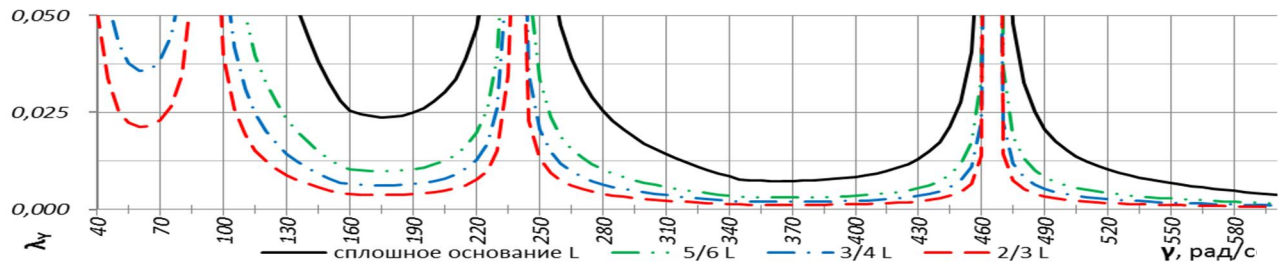
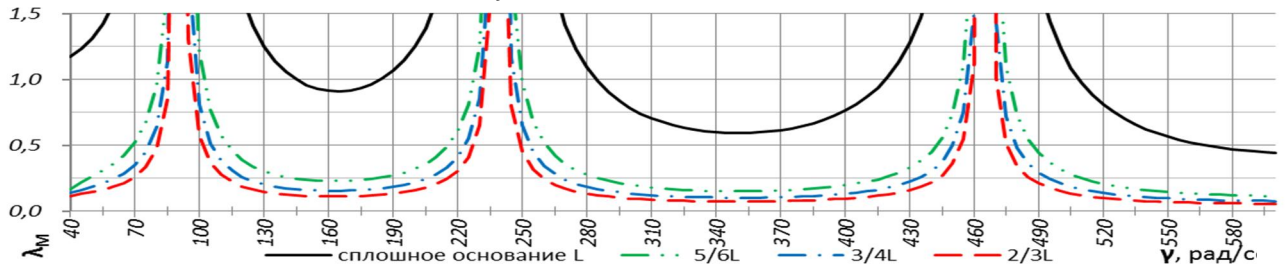
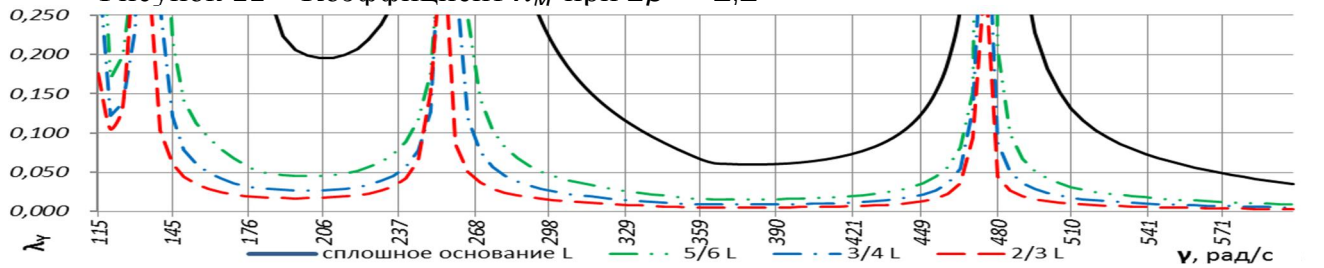
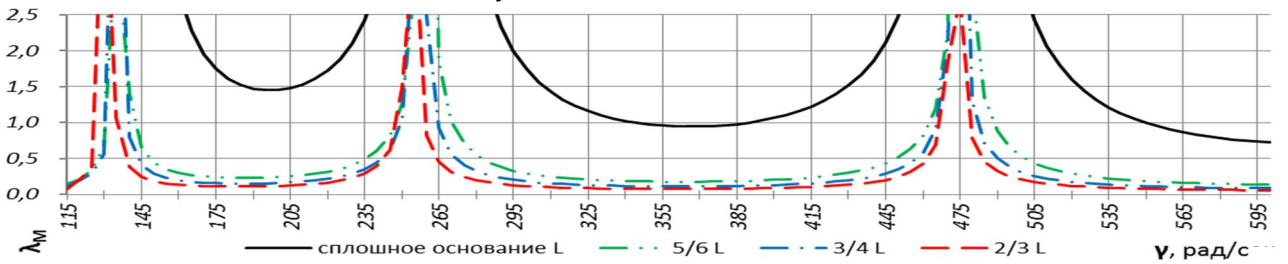
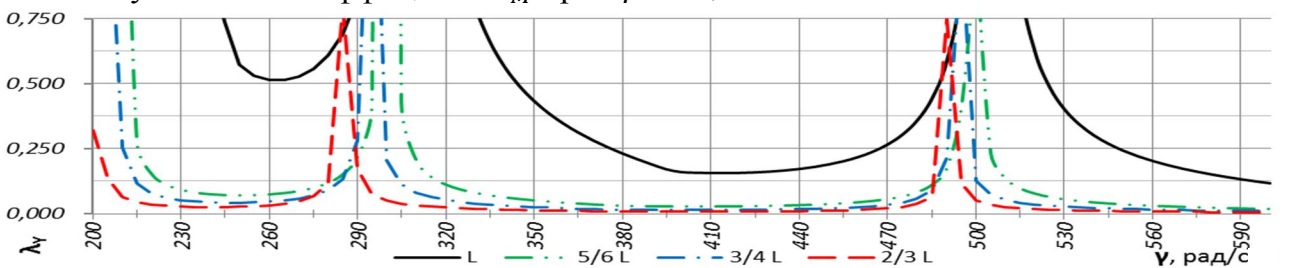
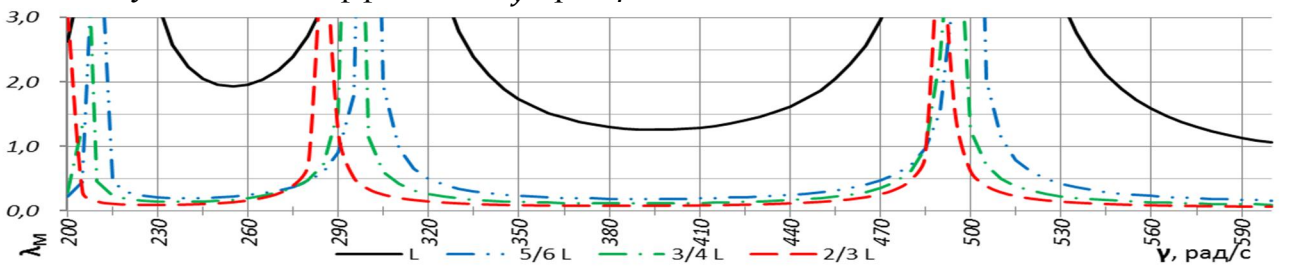
Статический прогиб при исключении основания под частью балки $y_{\text{искл}}^{\text{стат}}$ примем как начальные условия изучения динамического процесса.

Формулу для определения коэффициента суммарного перемещения при внезапном исключении упругого основания под частью балки с учётом выражения (15) запишем в виде:

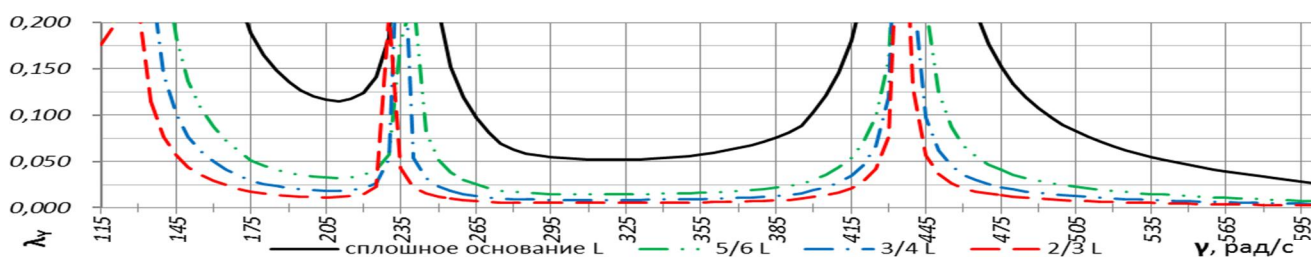
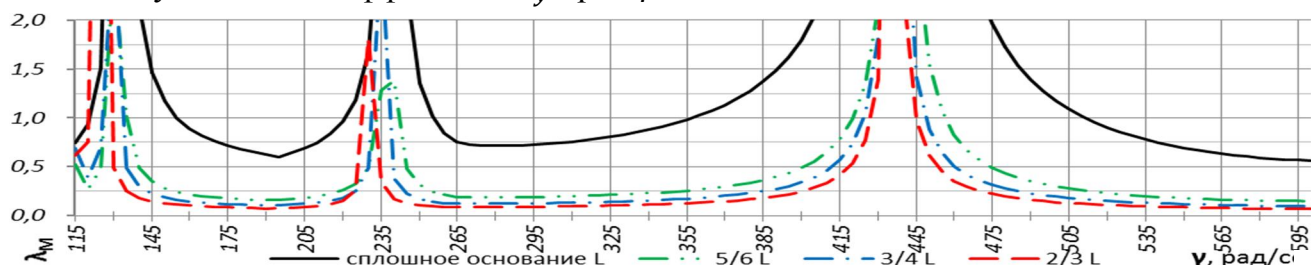
$$\lambda = \frac{y_{\text{max}}}{y_{\text{искл}}^{\text{стат}}} = \frac{y_{\text{искл}}^{\text{стат}} + y_{\text{искл}}^{\text{дин}}}{y_{\text{искл}}^{\text{стат}}} = 1 + \frac{y_{\text{искл}}^{\text{дин}}}{y_{\text{искл}}^{\text{стат}}}. \quad (16)$$

Соотношение $y_{\text{искл}}^{\text{дин}} / y_{\text{искл}}^{\text{стат}}$ в формуле (16), которое определит динамическую добавку относительно статических перемещений $y_{\text{искл}}^{\text{стат}}$, назовём коэффициентом динамичности перемещений и обозначим: $\lambda_y = y_{\text{искл}}^{\text{дин}} / y_{\text{искл}}^{\text{стат}}$. Аналогично выражению (16) получим формулу для коэффициента динамичности изгибающих моментов: $\lambda_M = M_{\text{искл}}^{\text{дин}} / M_{\text{искл}}^{\text{стат}}$.

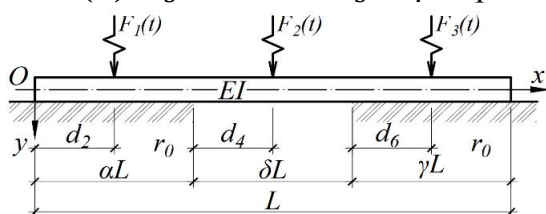
Построим для балки (рис. 7 а) графики коэффициентов динамичности перемещений λ_y и изгибающих моментов λ_M для первых трёх изгибных форм колебаний (рис. 10 – 15). Принято, что вибрационная сила $F(t)$ действует с частотой вынужденных колебаний γ в интервале 40 - 600 рад/с для балки с параметром $L\beta = 2,2$; 115 - 600 рад/с для $L\beta = 3,86$ и 200 - 600 рад/с для $L\beta = 5,1$. Длина части балки без основания $\delta L = (1/6) L$; $(1/4) L$ и $(1/3) L$.

Рисунок 10 – Коэффициент λ_y при $L\beta = 2,2$ Рисунок 11 – Коэффициент λ_M при $L\beta = 2,2$ Рисунок 12 – Коэффициент λ_y при $L\beta = 3,86$ Рисунок 13 – Коэффициент λ_M при $L\beta = 3,86$ Рисунок 14 – Коэффициент λ_y при $L\beta = 5,1$ Рисунок 15 – Коэффициент λ_M при $L\beta = 5,1$

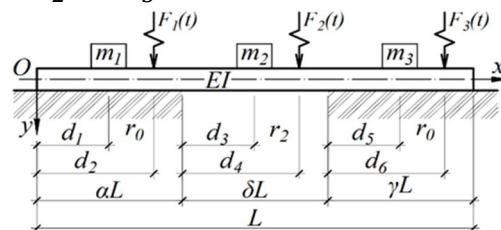
Для балки с присоединённой массой (рис. 7 б) и параметром $L\beta = 3,86$ построим графики λ_y и λ_M для трёх изгибных форм колебаний (рис. 16 и 17).

Рисунок 16 – Коэффициент λ_y при $L\beta = 3,86$ Рисунок 17 – Коэффициент λ_M при $L\beta = 3,86$

Также, рассмотрим ту же балку, состоящую из трёх участков при изменении условий опирания под средней частью и действии собственного веса q_0 и трёх вибрационных сил $F_1(t) = F_2(t) = F_3(t)$, приложенных в точках $d_2 = 0,1$ м, $d_4 = \delta L/2$ и $d_6 = \gamma L$ (рис. 18 а). И рассмотрим ту же балку (рис 18 б), к которой приложим в точках $d_1 = 0,1$ (м), $d_3 = \delta L/2$ и $d_5 = \gamma L$ три массы $m_1 = m_2 = m_3$.



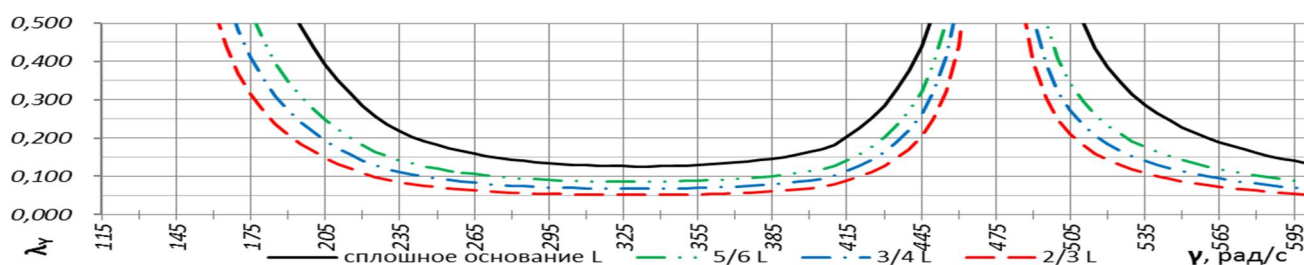
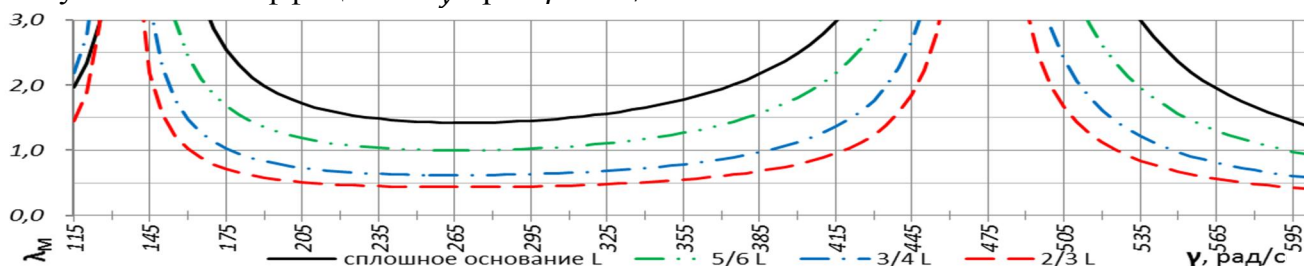
а) без присоединённых масс

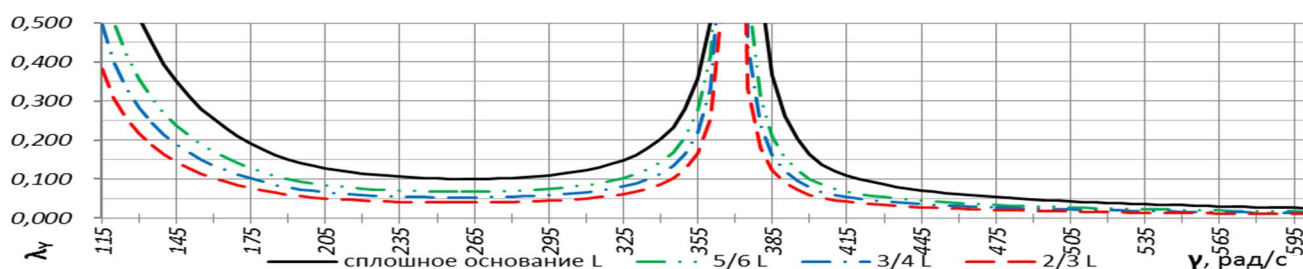
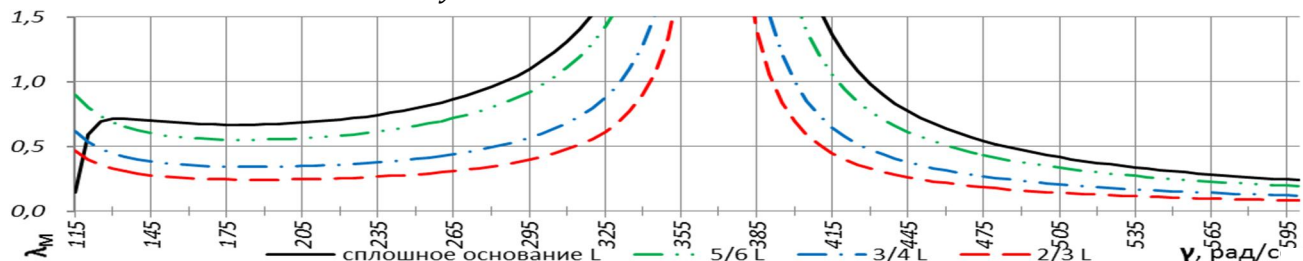


б) с присоединёнными массами

Рисунок 18 - Балка на упругом основании при изменении условий опирания под средней частью и действии вибрационных сил

Построим графики λ_y и λ_M для трёх изгибных форм колебаний балки без присоединённых масс (рис. 19 и 20) и с присоединёнными массами (рис. 21 и 22).

Рисунок 19 – Коэффициент λ_y при $L\beta = 3,86$ Рисунок 20 – Коэффициент λ_M при $L\beta = 3,86$

Рисунок 21 – Коэффициент λ_y при $L\beta = 3,86$ Рисунок 22 – Коэффициент λ_M при $L\beta = 3,86$

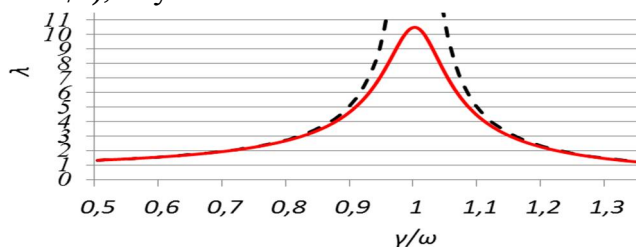
Рассмотрим результаты расчётов, представленных на рис. 10 – 17 и 19 - 22.

Во всех расчётных случаях значение коэффициента динамичности перемещений λ_y в межрезонансных зонах действия вибрационной нагрузки в несколько раз меньше значения коэффициента динамичности изгибающих моментов λ_M .

С увеличением длины участка балки с исключаемым основанием δL при одинаковой приведённой длине балки $L\beta$ уменьшаются значения коэффициентов λ_y и λ_M и уменьшается ширина резонансных зон. С увеличением значения параметра $L\beta$ при одинаковой длине участка балки с исключаемым основанием δL увеличиваются значения коэффициентов λ_y и λ_M .

При схеме нагружения, изображённой на рис. 18, резонансная зона для второй изгибной формы собственных колебаний расчётом не определена, одновременное действие двух вибрационных сил на концах балки и одной вибрационной силы в середине приводит к антирезонансу для второй формы колебаний для параметров приведённой длины балки $L\beta = 3,86$ и $5,1$. Приложение к балке дополнительных присоединённых масс можно рассматривать как гаситель колебаний.

При исключении упругого основания под частью балки, в случае учёта влияния диссипативных сил в материале балки (при $\delta = 0,3$), изучено изменение величины амплитуды вынужденных колебаний при резонансе. Зависимость коэффициента динамичности λ от изменения отношения γ/ω_1 представлена на рис. 23. Получено максимальное значение коэффициента $\lambda=10,47$ при $\gamma/\omega_1 = 1,0$.

Рисунок 23 – График изменения λ при резонансе

Определено, что в резонансной зоне при исключении упругого основания части балки значения динамических перемещений и внутренних усилий балки следует определять с учётом затухания колебаний.

Рассмотрим теперь случай односторонних связей с упругим основанием той же

балки (рис. 7), используя численный метод последовательных итераций.

При отрыве от упругого основания левой части балки из-за исключения основания под правой частью балки вычислены максимальные значения динамических прогибов и моментов при двусторонних и односторонних связях балки с упругим основанием за половину периода колебаний (рис. 24). Результаты расчётов представлены в таблице 8.

Таблица 8 - Результаты расчёта балки при исключении упругого основания под правой частью с учётом отрыва от основания левой части

$L\beta$	Односторонние связи			Двусторонние связи			$\frac{u_{\text{отрыв}}}{u_{\text{max}}}$	$\frac{M_{\text{отрыв}}}{M_{\text{max}}}$	$\frac{Q_{\text{отрыв}}}{Q_{\text{max}}}$
	$u_{\text{max}}^{\text{отрыв}}$, м	$M_{\text{max}}^{\text{отрыв}}$, кН·м	$Q_{\text{max}}^{\text{отрыв}}$, кН	u_{max} , м	M_{max} , кН·м	Q_{max} , кН			
3,86	0,0004	201,3	89,5	0,0005	227,9	87,7	0,83	0,88	1,02

Из таблицы 8 следует, что при односторонних связях балки с упругим основанием при $L\beta = 3,86$ длина участка отрыва левого конца балки уменьшилась на 32 %, а длина участка отрыва правого конца балки увеличилась на 10 %, также уменьшились значение частоты собственных колебаний с 135,54 до 129,23 рад/с и максимальные значения динамического прогиба на 17,4 % и динамического изгибающего момента на 12 %.

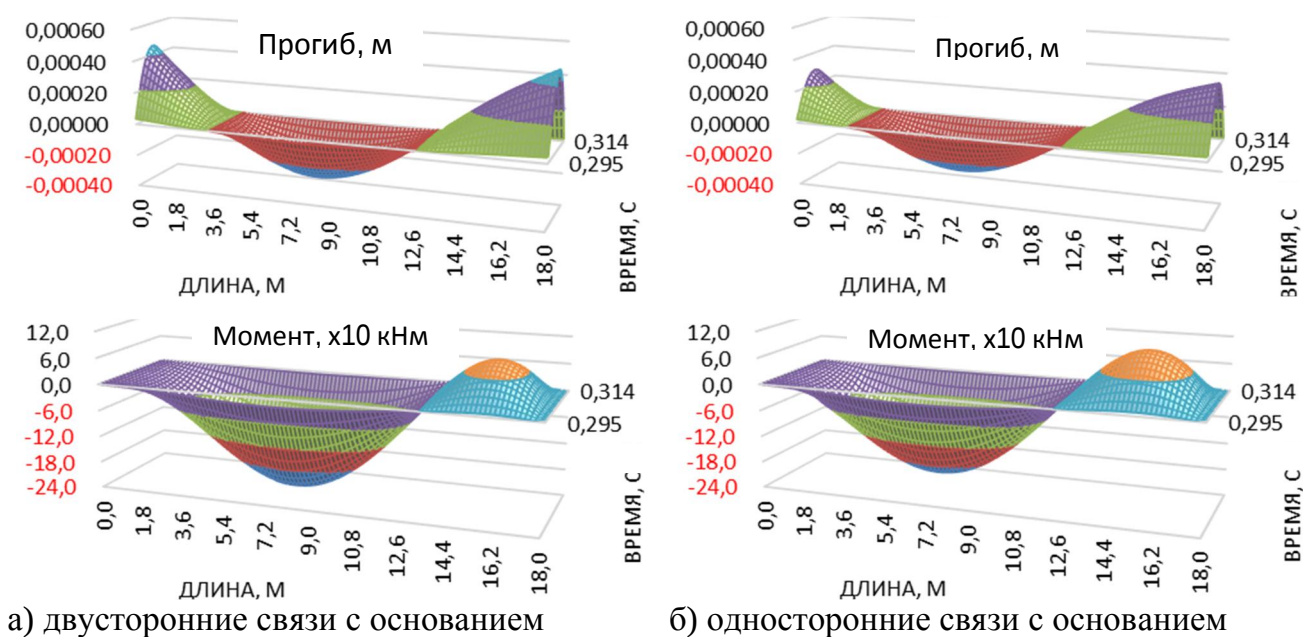


Рисунок 24 - Балка при исключении упругого основания правой части

Результаты расчёта той же балки с присоединённой массой (рис. 7б) представлены в табл. 9.

Таблица 9 - Результаты расчёта балки при исключении упругого основания под правой частью с учётом отрыва от основания левой части

$L\beta$	Односторонние связи			Двусторонние связи			$\frac{u_{\text{отрыв}}}{u_{\text{max}}}$	$\frac{M_{\text{отрыв}}}{M_{\text{max}}}$	$\frac{Q_{\text{отрыв}}}{Q_{\text{max}}}$
	$u_{\text{max}}^{\text{отрыв}}$, м	$M_{\text{max}}^{\text{отрыв}}$, кН·м	$Q_{\text{max}}^{\text{отрыв}}$, кН	u_{max} , м	M_{max} , кН·м	Q_{max} , кН			
3,86	0,0002	103,0	40,7	0,00022	106,0	40,7	0,91	0,97	1,0

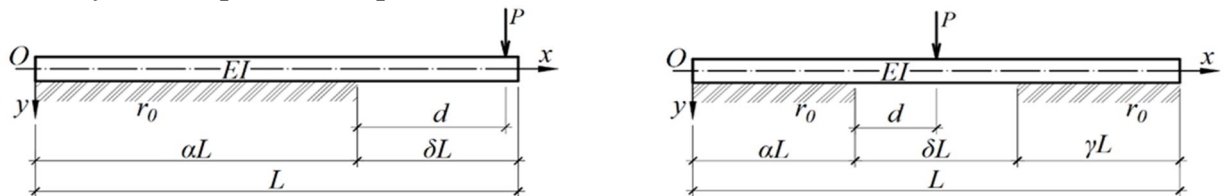
Из таблицы 9 следует, что при односторонних связях балки с упругим основанием

при $L\beta = 3,86$ длина участка отрыва левого конца балки уменьшилась на 32 %, а длина участка отрыва правого конца балки увеличилась на 12 %, также уменьшились значение частоты собственных колебаний и максимальные значения динамического прогиба на 9,1 % и динамического изгибающего момента на 2,8 %.

Колебания балки на упругом основании при изменении условий опирания части балки и действии внезапно приложенной силы P

Рассмотрено действие на ту же балку (см. главу 2) собственного веса q_0 и внезапно приложенной в точке d силы P (рис. 25). Наибольшие динамические перемещения вычислены при $\cos \omega_j t = -1$, т.е. при $t = \pi/\omega_j = T_j/2$ для $j = 1$.

Количество форм колебаний, принятых в расчёте, учтено в спектре длиной $25\omega_1$, где ω_1 – первая изгибная частота. Определены частоты собственных поперечных колебаний балки. Вычислены значения коэффициентов динамичности перемещений λ_y при исключении упругого основания под частью балки и действии внезапно приложенной силы. Результаты расчётов представлены в табл. 10 и 11.



а) исключение основания под правой частью балки
б) исключение основания под средней частью балки

Рисунок 25 - Балка при изменении условий опирания и действии внезапно приложенной силы

Таблица 10 – λ_y при исключении упругого основания правой части балки

Параметр системы «балка – основание»	Коэффициент	Сплошное основание		Исключение основания под правой частью балки					
				$\delta L = (1/6) L$		$\delta L = (1/4) L$		$\delta L = (1/3) L$	
		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм	
		$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м
$L\beta = 3,86$	λ_y	0,166	0,056	0,155	0,014	0,121	0,011	0,056	0,011

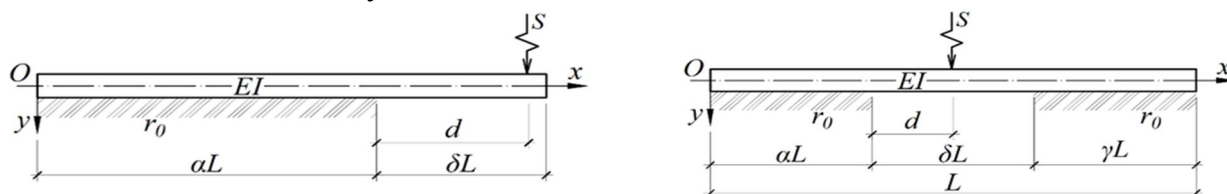
Таблица 11 – λ_y при исключении упругого основания средней части балки

Параметр системы «балка – основание»	Коэффициент	Сплошное основание		Исключение основания под средней частью балки					
				$\delta L = (1/6) L$		$\delta L = (1/4) L$		$\delta L = (1/3) L$	
		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм	
		$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м
$L\beta = 3,86$	λ_y	0,183	0,407	0,035	0,27	0,023	0,27	0,017	0,29

Определено, что при исключении упругого основания под частью балки и действии внезапно приложенной силы P вызываемые ею перемещения значительно меньше перемещений от статической нагрузки. Анализ сопоставления полученных результатов расчётов и выполненных с применением ПК свидетельствует, что относительная погрешность вычислений не превышает для собственных частот поперечных колебаний – 0,5 %, для перемещений – 1,26 %.

Колебания балки на упругом основании при изменении условий опирания правой части и действии сосредоточенного импульса S

Рассмотрено действие на ту же балку (см. главу 2) собственного веса q_0 и сосредоточенного мгновенного импульса $S = P\Delta t$ (рис. 26). Продолжительность действия мгновенного импульса $\tau = 0,001$ с.



а) исключение основания под правой частью балки б) исключение основания под средней частью

Рисунок 26 - Балка при изменении условий опирания и действии сосредоточенного импульса

Определены частоты собственных поперечных колебаний балки в спектре длиной $25\omega_1$. Вычислены значения коэффициентов динамичности перемещений λ_y при исключении упругого основания под частью балки и действии сосредоточенного импульса. Результаты расчётов представлены в табл. 12 и 13.

Таблица 12 – λ_y при исключении упругого основания правой части балки

Параметр системы «балка – основание»	Коэффициент	Сплошное основание		Исключение основания под правой частью балки					
				$\delta L = (1/6) L$		$\delta L = (1/4) L$		$\delta L = (1/3) L$	
		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм	
		$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м
$L\beta = 3,86$	λ_y	0,04	0,048	0,03	0,009	0,023	0,005	0,01	0,003

Таблица 13 – λ_y при исключении упругого основания средней части балки

Параметр системы «балка – основание»	Коэффициент	Сплошное основание		Исключение основания под средней частью балки					
				$\delta L = (1/6) L$		$\delta L = (1/4) L$		$\delta L = (1/3) L$	
		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм		$y(x)$, мм	
		$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м	$x = 9$ м	$x = 18$ м
$L\beta = 3,86$	λ_y	0,02	0,04	0,008	0,039	0,006	0,04	0,004	0,043

Определено, что при исключении упругого основания под частью балки и действии сосредоточенного импульса вызываемые им перемещения значительно меньше перемещений от статической нагрузки и от внезапно приложенной силы. Анализ сопоставления полученных результатов расчётов и выполненных с применением ПК свидетельствует, что относительная погрешность вычислений не превышает для собственных частот поперечных колебаний – 0,5 %, для перемещений – 1,81 %. Относительная погрешность вычислений в сопоставлении с известными решениями не превышает для собственных частот поперечных колебаний – 2,4 %, для перемещений – 0 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Получено решение статических задач изгиба балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью при отсутствии основания под различными частями балки, как начальных условий исследования динамического процесса. Выявлены закономерности распределения внутренних усилий по длине балки в зависимости от схемы нагружения и длины участка балки без основания.

2) Решена задача определения частот и форм собственных поперечных колебаний балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью вследствие изменения условий опирания части конструкции на основание.

3) Получено решение динамических задач вынужденных колебаний балки на упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью, в т.ч. при внезапном исключении основания под частью конструкции, и действии различных нагрузок. Исследовано влияние внезапного изменения условий опирания части балки на упругое основание, в результате которого действовавшая статическая нагрузка превращается во внезапно приложенную динамическую. На основании полученных решений динамических задач и выполненных численных исследований показаны зависимости максимальных значений динамических перемещений и усилий от амплитуд и частот вынужденных колебаний, а также от размеров исчезнувшего участка основания и жёсткостей элементов системы «балка – упругое основание» и от величины и расположения присоединённых к балке дополнительных масс. При исследовании вынужденных колебаний изучены резонансные эффекты для балки при исключении части основания.

Сопоставление выполненных результатов динамических расчётов с известными данными и результатами расчётов, выполненных с использованием программных комплексов, свидетельствует о хорошей сходимости.

4) Изучены вынужденные колебания балок на упругом основании с односторонними связями при внезапном исключении основания под какой-либо частью балки и действии статических нагрузок и динамических нагрузок.

Перспективой дальнейшей разработки темы представляется развитие и применение предложенной методики расчёта балок на винклеровском упругом основании с кусочно-переменной жёсткостью, в том числе при внезапном изменении или исчезновении жёсткостных характеристик упругого основания под частью балки с учётом инерции основания, а также использование отличных от принятых в работе моделей основания и динамических моделей балки.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи в изданиях, включённых в перечень рецензируемых научных изданий по списку ВАК РФ:

1. Travush, V.I. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting conditions / Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Ye.V. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2018. Т. 14. - № 4. - с. 27-41.
2. Travush, V.I. Mathematic model of a beam partially supported on elastic foundation / Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Ye.V. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2019. Т. 15. - № 2. - с. 144-158.
3. Леонтьев, Е.В. Поперечные колебания балки со свободными краями на упругом основании при действии динамической нагрузки // Строительство и реконструкция, - 2020. - № 3(89). – с. 31-44.
4. Leontiev, Ye.V. Transverse oscillations of the beam on an elastic base if the boundary conditions change // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, - 2020. - № 16(3). - с. 35-46.
5. Леонтьев, Е.В. К вопросу о поперечных колебаниях балок на упругом основании при изменении условий опирания // Строительство и реконструкция, - 2020. - № 5(91). – с. 70-76.

Статьи в изданиях, индексируемых в международной базе данных Scopus:

6. Travush, V.I. The response of the system “beam – foundation” on sudden changes of boundary conditions / Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. - 2018. - с. 012130.
7. Travush, V.I. Dynamic deformation of a beam at sudden structural transformation of foundation / Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. // Magazine of Civil Engineering. - 2019. - № 7 (91). - с. 129-144.