На правах рукописи

Зотов Игорь Николаевич

СООТВЕТСТВИЕ МАЛЬЦЕВА И ЛОКАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ АЛГЕБР КЛАССИЧЕСКИХ ТИПОВ

Специальность 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2021

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор **Левчук Владимир Михайлович**

Официальные оппоненты:
Бардаков Валерий Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, доцент, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория обратных задач математической физики, ведущий научный сотрудник;

Судоплатов Сергей Владимирович, д-р физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», кафедра алгебры и математической логики, заведующий кафедрой.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Защита диссертации состоится «8» октября 2021 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8–06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu-kras.ru/.

Автореферат разослан «___» ____________ 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного совета		Михалкин Евгений Николаевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Зависимость элементарной эквивалентности и других модельных свойств линейных групп от свойств полей или колец коэффициентов изучал А.И. Мальцев.

Согласно теореме А.И. Мальцева [1], элементарная эквивалентность $\equiv$ групп $G_n(K)$ и $G_n(S)$ $(n \geq 3)$ при $G_n = GL_n$, PGL_n, SL_n, PSL_n над полями K и S нулевой характеристики переносится на поля коэффициентов. Установленное соответствие

$$G_n(K) \equiv G_n(S) \to K \equiv S$$

называют соответствием Мальцева.

В [2] изучалось соответствие между элементарными свойствами унитреугольной группы $UT(3, K)$ степени 3 с выделенными параметрами и кольца коэффициентов K с единицей (не обязательно ассоциативного).

Б. Роуз [3] и В. Велер [4] исследовали соответствие Мальцева для колец $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц (т.е. с нулями на главной диагонали и над ней) над полями. Подробнее см. Ю.Л. Ершов [5] и обзор В.Н. Ремесленникова, В.А. Романькова [6].

С 1970-х годов исследования теоретико-модельных свойств линейных групп и колец развивались в тесной связи с теорией изоморфизмов. Связь отражает известный критерий элементарной эквивалентности алгебраических систем ([7], [8] и монография Кейслера–Чэна [9]):

Алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют их изоморфные ультрастепени.

В 1990 году К.И. Бейдар и А.В. Михалев [10] перенесли теорему Мальцева на случай, когда K и S – первичные ассоциативные кольца с $1/2$.

Автоморфизмы колец $NT(n, K)$ $(n \geq 3)$ над произвольными ассоциативными кольцами с единицей 1_K были описаны ранее в [11] и [12]. Это позволило К. Видэла [13] установить в 1988 году соответствие Мальцева для колец $NT(n, K)$ в общем случае.

Вместе с тем, когда $n > 4$ или кольцо K – коммутативное, в [11], [12] и [14] описаны автоморфизмы и изоморфизмы также для ассоциированных колец Ли $\Lambda(NT(n, K))$ и присоединенных групп (они изоморфны унитреугольным группам $UT(n, K)$).

---

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта: 16-01-00707) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Для групп $UT(n, K)$ $(n > 3)$ над коммутативными кольцами коэффициентов отношение изоморфности исследовал О.В. Белеградек [15] и также взаимосвязано установил соответствие Мальцева. С другой стороны, В.М. Левчук и Е.В. Минакова [16] выявили в 2009 году, что в общем случае соответствие Мальцева связано с обобщением понятия изоморфизма ассоциативных колец коэффициентов K и S.

Изоморфизм $\theta : K^+ \to S^+$ аддитивных групп с условием $\theta(1_K) = 1_S$, называется f-изоморфизмом кольца K на S, где f – центральный идемпотент кольца K, или *идемпотентным изоморфизмом*, если он индуцирует изоморфизм идеала fK и анти-изоморфизм идеала $(1_K - f)K$. Кольца K и S в этом случае называем *идемпотентно изоморфными*. В [14], [16] и [17] доказано, что при $R = NT(n, K)$, $R' = NT(n, S)$ и $n > 4$ любая из изоморфностей

$$UT(n, K) \simeq UT(n, S), \quad \Lambda(R) \simeq \Lambda(R')$$

равносильна идемпотентной изоморфности колец K и S, а любая из элементарных эквивалентностей

$$UT(n, K) \equiv UT(n, S), \quad \Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$$

равносильна существованию центральных идемпотентов f в K и g в S таких, что

$$fK \equiv gS, \quad (1 - f)K \equiv [(1 - g)S]^{op}.$$

Таким образом, соответствие Мальцева, в частности, для элементарной эквивалентности $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$ в общем случае не обязано выполняться (в отличие от элементарной эквивалентности $R \equiv R'$, по теореме К. Видэла, 1988). Примеры соответствующих колец K и S легко получить из колец клеточно-диагональных матриц с фиксированным разбиением на клетки; тогда единичная матрица любой диагональной клетки – это центральный идемпотент кольца.

В 1990 году К. Видэла [18] перенес соответствие Мальцева на унипотентные подгруппы групп Шевалле $U\Phi(K)$ над полями характеристики $\neq 2, 3$. Е.И. Бунина исследовала автоморфизмы и переносила соответствие Мальцева для наиболее естественного обобщения классических линейных групп – групп Шевалле над полями и локальными кольцами с ограничениями на характеристику, см. [19] и монографию [20].

Вопросы о теоретико-модельных свойствах различных групп Шевалле и их унипотентных подгрупп, алгебр Шевалле и подалгебр $N\Phi(K)$ отмечались в 2012 году в обзоре В.М. Левчука [21]. Конкретно отмечался вопрос:

(А) Исследовать зависимость элементарной эквивалентности нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ от свойств колец коэффициентов.

В силу теоремы Кейслера-Шелаха, связанным является вопрос:

(Б) Исследовать отношение изоморфности $N\Phi(K) \simeq N\Phi'(S)$ колец Ли для систем корней Φ, Φ' и колец K, S.

С 90-х годов наряду с автоморфизмами алгебр стали систематически изучаться локальные автоморфизмы алгебр. К ним относят модульный автоморфизм алгебры, действующий на каждый элемент как некоторый автоморфизм алгебры. *Тривиальные* локальные автоморфизмы алгебры дают ее автоморфизмы. Аналогично рассматривают обобщения дифференцирований – локальные дифференцирования.

Еще в 1990 году Д. Ларсон и А. Сурур [22] показали, что локальные автоморфизмы алгебры $M(n, \mathbb{C})$ комплексных $n \times n$ матриц исчерпываются автоморфизмами и антиавтоморфизмами. См. также [23] для простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_\mathfrak{n}$ над полем нулевой характеристики.

Один из первых примеров нетривиального локального автоморфизма построил в 2000 году Р. Крист [24] для подалгебры треугольных матриц в $M(3, \mathbb{C})$ с попарно совпадающими элементами каждой диагонали.

Описание локальных автоморфизмов алгебр $R = NT(n, K)$ и ассоциированного кольца Ли $R^{(-)}$ известно только при $n = 3$ [31] и, когда K – поле, при $n = 4$ [25].

Целью работы является, прежде всего, решение вопросов **(А)** и **(Б)**. Вместе с тем, ставится целью разработка редукционного метода описания локальных автоморфизмов алгебр $N\Phi(K)$ классических типов и построение новых примеров нетривиальных локальных автоморфизмов алгебр $NT(n, K)$ $(n > 3)$ и их финитарных обобщений алгебр $NT(\Gamma, K)$ всех финитарных нильтреугольных матриц с индексами из произвольного линейно упорядоченного множества (цепи) Γ.

Основные методы исследования. Используются общие методы теории групп, колец и алгебр Ли, теории моделей и математической логики, специальные представления нильтреугольных алгебр классических типов. Разработанные методы исследований финитарных алгебр $NT(\Gamma, K)$ оказываются применимыми и к нефинитарным обобщениям.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты имеют теоретический характер и могут применяться в исследованиях алгебраических систем, теории моделей и их приложений. Результаты диссертации могут использоваться в специальных курсах для бакалавров, магистрантов и аспирантов университетских математических кафедр.

Апробация диссертации. Результаты диссертации апробировались на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры ММФ МГУ (Москва, 12 декабря 2016), на красноярском алгебраическом семинаре при СФУ (2018, 2020, 2021) и на конференциях:

- XLII краевая научная студенческая конференция, VIII-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых (Красноярск, 2009, 2012);
- 5-я Российская школа-семинар "Синтаксис и семантика логических систем" (Улан-Удэ, 2017);
- Всероссийская конференция по математике и механике с международным участием в связи с 70-летием ММФ ТГУ (Томск, 2018);
- конференция "Алгебра и её приложения", посвященная 70-летию пермской алгебраической школы им. С.Н. Черникова (Пермь, 2020);
- международная конференция "Алгебра и Логика: теория и приложения" (Красноярск, 2010);
- международная XI школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию со дня рождения А.Ю. Ольшанского (Красноярск, 2016);
- международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Проспект Свободный - 2018" (Красноярск, 2018);
- международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 2018);
- международная конференция "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2016, 2019, 2020);
- 14-я международная летняя школа-конференция "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры", посвященной 75-летию профессора Б. Пуаза (Эрлагол, 2021).

Основные публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [31] – [43]. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [31] – [33] изданий из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 57 страницах. Она состоит из введения, трёх глав и списка литературы, включающего 63 наименований. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Через $N\Phi(K)$ обозначаем нильтреугольную подалгебру алгебры Шевалле над ассоциативно коммутативным кольцом K с единицей, ассоциированную с системой корней Φ. Аналогично выбираем $N\Phi'(S)$.

Основными результатами диссертации являются следующие.

1. Доказано, что если $N\Phi(K)$ классического типа лиева ранга $n > 4$, то кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ изоморфны тогда и только тогда, когда системы корней Φ', Φ эквивалентны и $S \simeq K$. (Решение вопроса **(Б)** для классических типов.) Перечислены изоморфизмы $N\Phi(K) \to N\Phi'(S)$.

2. Доказано, что если $N\Phi(K)$ классического типа лиева ранга $n > 4$, то кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда системы корней Φ', Φ эквивалентны и $S \equiv K$. (Решение вопроса **(А)** для классических типов.)

3. Доказано, что локальные автоморфизмы любой алгебры или кольца образуют группу по композиции. Установлена редукционная теорема для локальных автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов.

4. Найдены новые нетривиальные локальные автоморфизмы алгебр $NT(n, K)$ $(n > 3)$ и их финитарных обобщений, когда K есть кольцо вычетов целых чисел по примарному модулю или любое поле.

В § 1.1 главы 1 приводятся необходимые теоретико-модельные сведения и определяется соответствие Мальцева для линейных групп и колец. Приведен краткий обзор исследований соответствия Мальцева для классических линейных групп, нильтреугольных колец $R = NT(n, K)$, ассоциированных колец Ли $R^{(-)}$ и унитрегольных групп $UT(n, K)$.

В § 1.2 выделяются основные объекты – алгебры Шевалле и их нильтреугольные подалгебры $N\Phi(K)$.

Комплексную алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{C})$ характеризуют неразложимой системой корней Φ евклидова пространства и базой Шевалле

$$\{e_r \ (r \in \Phi), \quad h_s \ (s \in \Pi)\},$$

где Π – система простых корней или база в Φ, [26]. Система положительных корней $\Phi^+ \supseteq \Pi$ в Φ единственна. По теореме Шевалле о базисе, имеем

$$e_r * e_{-r} = h_r, \quad h_s * h_r = 0, \quad h_s * e_r = \frac{2(r,s)}{(r,r)}\, e_r;$$

$$e_r * e_s = 0 \ \ (r + s \notin \Phi \cup \{0\}), \quad e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s} = -e_s * e_r \ \ (r + s \in \Phi),$$

где $N_{rs} = \pm 1$, или $|r| = |s| < |r+s|$ и $N_{rs} = \pm 2$, или (тип G_2) $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3. Структурные константы базы Шевалле целочисленные.

Переходом от поля $\mathbb{C}$ к произвольному полю или даже ассоциативно коммутативному кольцу K получают алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$.

Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой e_r $(r \in \Phi^+)$ называют *нильтреугольной.*

Известно, что изоморфизм аддитивной группы поля K в группу автоморфизмов $Aut\ \mathcal{L}_\Phi(K)$ для любого корня r дает отображение

$$t \to x_r(t) := exp\ (t \cdot ad\ e_r) \quad (t \in K).$$

Алгебра Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$ и группа Шевалле, как подгруппа группы $Aut\ \mathcal{L}_\Phi(K)$, определяются над любым ассоциативно коммутативным кольцом K с единицей. (Элементарную) *группу Шевалле* $\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$. Её унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы X_r $(r \in \Phi^+)$, [26].

Группы Шевалле четырех типов A_n, B_n, C_n и D_n из девяти типов систем корней соответствуют классическим линейным группам. Для Φ типа A_{n-1} группу $U\Phi(K)$ представляет унитреугольная группа $UT(n,K)$.

Алгебра Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} представляется алгеброй Ли, ассоциированной с $NT(n,K)$. Поэтому для типа A_{n-1} вопросы **(А)** и **(Б)** решены ранее [14], [16], [17]. Решению вопросов **(А)** и **(Б)** для оставшихся типов B_n, C_n и D_n посвящены § 1.3 и глава 2.

Пусть K и S – произвольные ассоциативно коммутативные кольца с единицами. Основной теоремой об изоморфизмах является

Теорема 1.3.1. *Пусть $N\Phi(K)$ – кольцо Ли классического типа D_n $(n \geq 4)$, B_n или C_n $(n > 4)$. Кольцо Ли $N\Phi'(S)$ изоморфно $N\Phi(K)$ тогда и только тогда, когда $S \simeq K$, а системы корней Φ' и Φ эквивалентны.*

Напомним, что биективное отображение $\tau : \Phi \to \Phi'$ систем корней называют их *эквивалентностью*, если существует вещественное число $\lambda > 0$ такое, что

$$(\tau(r), \tau(s)) = \lambda \cdot (r, s) \quad (r, s \in \Phi).$$

В доказательстве теоремы 1.3.1 используются леммы. В частности,

Лемма 2.3.1. *Пусть кольца Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$ изоморфны, Φ ранга > 1, причем $2K = K$ для типа F_4 и $6K = K$ для типа G_2. Тогда системы корней Φ и Φ' эквивалентны.*

Ясно что любая эквивалентность $\tau : \Phi \to \Phi'$ систем корней индуцирует изоморфизм $\overline{\tau}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ по правилу

$$\bar{\tau}:\ N\Phi(K) \to N\Phi'(K), \quad e_r \to e_{\tau(r)} \quad (r \in \Phi^+).$$

Описание изоморфизмов использует известное специальное представление нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов (§ 2.1).

Аналогично алгебрам $NT(n,K)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа B_n, C_n и D_n заданы в [27, Лемма 2] в базе из "матричных единиц" $e_r = e_{iv}$ ($r \in \Phi^+$ для соответствующей нумерации корней $r = r_{iv}$) с ограничениями

$$-i < v < i \leq n, \quad -i \leq v < i \leq n,\ v \neq 0, \quad 1 \leq |v| < i \leq n,$$

соответственно. Любой элемент из $N\Phi(K)$ представляется суммой $\sum a_{iv}e_{iv}$ и Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$ над K соответствующего типа.

К суммам двух корней, являющихся корнем, помимо сумм $r_{ij} + r_{jv} = r_{iv}$ (аналогично типу A_n) здесь относятся еще $r_{kv} + r_{m,-v} = r_{k,-m}$ при $k > m > |v|$, а для типа C_n также при $k = m > |v|$. Структурные константы в выбранном базисе выписаны в лемме 2.1.1.

В этой терминологии описания верхнего и нижнего центральных рядов колец Ли $N\Phi(K)$ и $Aut\ N\Phi(K)$ известны, см. лемму 2.2.2 и теорему 2.2.3 в § 2.2. Выявленные характеристические идеалы позволяют завершить описание изоморфизмов.

Кольцевой изоморфизм $\theta : K \to S$ всегда индуцирует изоморфизм

$$\overline{\theta} : N\Phi(K) \to N\Phi(S)$$

колец Ли по правилу $\overline{\theta}(xe_r) = \theta(x)e_r \quad (x \in K,\ r \in \Phi^+)$. В § 2.3 доказана

Лемма 2.3.2. *Всякий изоморфизм $\varphi : N\Phi(S) \to N\Phi(K)$ колец Ли классического типа ранга $n > 3$ над ассоциативно коммутативными кольцами S и K с единицами есть произведение $\varphi = \eta\overline{\theta}$ для подходящего изоморфизма $\theta : S \to K$ и $\eta \in Aut\ N\Phi(S)$.*

Произвольный изоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ на $N\Phi'(S)$, учитывая леммы 2.3.1 и 2.3.2, всегда допускает разложение в произведение $\bar{\tau}\overline{\theta}\eta$. Тем самым, завершается описание изоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$. Завершается и доказательство теоремы 1.3.1.

Леммы 2.3.1, 2.3.2 и доказанная теорема устанавливают перечисление изоморфизмов $N\Phi(K) \to N\Phi'(S)$ и решение вопроса **(Б)**.

В § 2.4 решение вопроса **(А)** о соответствии Мальцева для колец Ли $N\Phi(K)$ (классических типов) завершает

Теорема 1.3.2. *Кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда $K \equiv S$, а системы корней Φ и Φ' эквивалентны.*

В ее доказательстве, основываясь на теореме Кейслера-Шелаха, мы опираемся на доказанную теорему 1.3.1 и на лемму 2.4.1 о связи ультрастепеней алгебраической системы с алгебраической системой над ультрастепенями.

Основные теоремы 1.3.1, 1.3.2 и леммы 2.3.1, 2.3.2 глав 1 и 2 апробировались на конференциях [37]-[40] и опубликованы в совместной работе [32] (соавтор – В.М. Левчук). Перечисленные основные результаты и их доказательства принадлежат диссертанту. Идеи и методы доказательств разрабатывали совместно диссертант и В.М. Левчук; ему же принадлежит постановка задач.

Глава 3 посвящена локальным автоморфизмам алгебры $N\Phi(K)$. Мы используем следующее определение.

Определение 3.1.2. *Локальным автоморфизмом произвольной K-алгебры A называют автоморфизм K-модуля A, действующий на каждый элемент $\alpha \in A$ как некоторый автоморфизм алгебры A, вообще говоря, зависящий от выбора α.*

В § 3.1 приводятся необходимые определения. Показана также замкнутость локальных автоморфизмов по композиции. Более точно,

Предложение 3.1.3. *Локальные автоморфизмы всякой алгебры (аналогично кольца) A образуют по умножению группу.*

(Обозначение: *Laut* A.) Предложение 3.1.3 вначале автором анонсировалось [34], а с доказательством опубликовано в [31, Лемма 4].

В § 3.2 рассматривается финитарное обобщение алгебр $NT(n, K)$. Пусть Γ есть произвольное линейно упорядоченное множество (или кратко, цепь) с отношением порядка $<$. Все Γ-матрицы $\alpha = \|a_{uv}\|_{u,v\in\Gamma}$ над K с конечным числом ненулевых элементов (их называют финитарными) образуют алгебру с обычными линейными операциями, матричным умножением и матричными единицами e_{ij} $(i, j \in \Gamma)$.

Подалгебру с базой e_{ij} $(i, j \in \Gamma,\ i > j)$ называем нильтреугольной и обозначаем через $NT(\Gamma, K)$. Очевидно, $NT(\Gamma, K)$ есть ниль-алгебра. Мы выявляем примеры нетривиальных локальных автоморфизмов алгебр $NT(\Gamma, K)$ (в частности, алгебр $NT(n, K)$).

Первый элемент цепи Γ (если он существует) обозначаем через p, а последний элемент – через q. Множество $\{u \in \Gamma \mid i \leq u \leq j\}$ при $i \leq j$ из Γ называем отрезком в Γ и обозначаем через $[i, j]$. Отображение

$$1+\varphi_{km,t} : \alpha = \|a_{ij}\| \to \alpha + t a_{km} e_{qp}, \qquad (\alpha \in NT(\Gamma, K)) \tag{1}$$

очевидно, является модульным автоморфизмом алгебры $NT(\Gamma, K)$ при любых $t \in K$ и $k, m \in \Gamma$, $k > m$. Следующая, основная в § 3.2 теорема рассматривает отображение (1) только при условии $p < k - m < q$.

Теорема 3.2.1. *Если (1) есть локальный автоморфизм алгебры R для $t \neq 0$ из K, то либо a) $m = p$ и |[p,k]|=3, либо b) $k = q$ и |[m,q]|=3. Если Kt – единственный минимальный ненулевой идеал кольца K, то (1) является нетривиальным локальным автоморфизмом алгебры R.*

Соответствующие примеры в § 3.2 показывают, что к новым нетривиальным локальным автоморфизмам мы приходим, когда K есть кольцо вычетов целых чисел по примарному модулю или любое поле.

Известно, что всякая конечная цепь Γ порядка n изометрична цепи $\{1, 2, ..., n\}$ и, поэтому $NT(\Gamma, K) \simeq NT(n, K)$. Этот случай теоремы 3.2.1 исследовался диссертантом ранее в совместной статье [31] в нераздельном соавторстве. Полностью теорема представлена на 14-й международной летней школе-конференции "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры" в Эрлаголе (НГТУ – ИМ СО РАН, 2021).

В § 3.3 разрабатывается редукционный метод исследования локальных автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов.

Для типов A_n и D_n редукция ведется к тривиальным автоморфизмам по модулю идеалов L_i стандартного центрального ряда. Для алгебр $R^{(-)}$ при $R = NT(n, K)$ (то есть для типа A_{n-1}) А.П. Елисова [29] разработала редукцию по модулю L_2. Однако, для типов B_n и C_n идеалы L_i, вообще говоря, не образуют нижний центральный ряд. В § 3.3 доказана

Теорема 3.3.1. *В алгебре Ли $N\Phi(K)$ классического типа ранга > 4 идеал L_2 является $(Laut\ N\Phi(K))$-инвариантным, а всякий локальный автоморфизм действует по модулю L_2 как её подходящий автоморфизм.*

Замечание. *Наряду с финитарной алгеброй $NT(\Gamma, K)$ из § 3.2 всех Γ-матриц над K с произвольной цепью Γ индексов, рассматривают и алгебру R нефинитарных Γ-матриц над K, которая определена лишь для бесконечных цепей $\Gamma = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, например, [30]. Аналог редукционной теоремы 3.3.1 выполняется для указанных нефинитарных алгебр R, как анонсировано на "Мальцевские чтения – 2020" (ИМ СО РАН) и на 14-й международной летней школе-конференции "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры" в Эрлаголе (НГТУ – ИМ СО РАН, 2021).*

Теорема 3.3.1 опубликована автором в [33].

Автор благодарен научному руководителю профессору Левчуку Владимиру Михайловичу за постановку задач и внимание к работе. Признателен сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и Института математики и фундаментальной информатики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

Список литературы

[1] *Мальцев А.И.* Элементарные свойства линейных групп // В кн.: Некоторые проблемы в Математике и механике. Новосибирск, Изд-во АН СССР. 1961. С. 110–132.

[2] *Мальцев А.И.* Об одном соответствии между кольцами и группами // Матем. сборник. 1960. Т. 50. С. 257–266.

[3] *Rose B.I.* The χ_1-categoricity of Strictly Upper Triangular Matrix Rings over Algebraically Closed Fields // J. Symbolic Logic. 1978. Vol. 43, № 2. P. 250–259.

[4] *Wheeler W.H.* Model Theory of strictly upper triangular matrix ring // J. Symbolic Logic. 1980. Vol. 45. P. 455–463.

[5] *Ершов Ю.Л.* Элементарные теории групп // ДАН СССР. 1972. Т. 203. С. 1240–1243.

[6] *Ремесленников В.Н., Романьков В.А.* Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Итоги науки и техники. Серия: Алгебра, топология, геометрия. 1983. Т. 21. С. 3–79.

[7] *Keisler H.J.* Ultraproducts and Elementary Classes // Indag. Math. 1961. V. 23. P. 477-495.

[8] *Shelah S.* Every Two Elementarily Equivalent Models Have Isomorphic Ultrapowers // Israel J. Math. 1972. V. 10. P. 224–233.

[9] *Кейслер Г., Чэн Ч.* Теория моделей // М.: Мир, 1977. 614 с.

[10] *Beidar C.I., Michalev A.V.* On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemporary math. 1992. V. 131. P. 29–35.

[11] *Левчук В.М.* Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец // Доклады АН СССР. 1975. Т. 222. № 6. С. 1279–1282.

[12] *Levchuk V.M.* Connections between a unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms // Siberian Mat. J. 1983. V.24. P.543-557.

[13] *Videla C.R.* On the Model Theory of the Ring $NT(n, R)$ // Pure and Appl. Algebra. 1988. Vol. 55. P. 289–302.

[14] *Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.* Isomorphisms of Certain Locally Nilpotent Finitary Groups and Associated Rings // Acta Applicandae Mathematicae. 2004. V. 82, № 2. p. 169–181.

[15] *Belegradek O.V.* Model Theory of Unitriangular Groups // Amer. Math. Soc. Transl. 1999. V. 195, № 2. 115 p.

[16] *Левчук В.М., Минакова Е.В.* Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально-нильпотентных матричных групп и колец // Доклады РАН. 2009. Т.425, № 2. С. 165–168.

[17] *Минакова Е.В.* Теоретико-модельные и смежные вопросы колец, ассоциированных с кольцом нильтреугольных матриц: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СФУ, Красноярск, 2008.

[18] *Videla C.K.* On the Mal'cev correspondence // PAMS. 1990. V. 109. P. 493–502.

[19] *Бунина Е.И.* Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур: дис. ... докт. физ.-мат. наук. МГУ, Москва, 2010.

[20] *Бунина Е.И., Михалев А.В., Пинус А.Г.* Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр // М: МЦНМО. 2015. 360 с.

[21] *Левчук В.М.* Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Итоги науки. Юг России. Т. 6. Группы и графы. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2012. С. 71–80.

[22] *Larson D.R., Sourour A.R.* Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ // Proc. Sympos. Pure Math. 1990. V. 51. P. 187–194.

[23] *Becker T., Salsedo J.E., Salas C., Turdibaev R.* On local automorphisms of $\mathfrak{sl}_n$, arXiv:1711.11297, 2018.

[24] *Crist R.* Local automorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 1409–1414.

[25] A.P. Elisova, Local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders // Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2013. V. 57. № 2. P. 40–48.

[26] *Carter R.W.* Simple groups of Lie type // New York: Wiley and Sons. 1972. 331 p.

[27] *Левчук В.М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 141–161.

[28] *Бунина Е.И.* Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 3. С. 3–20.

[29] Elisova A.P. Local derivations and local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders // Bulletin of the Siberian State Aerospace University. 2012. V. 44. № 4. P. 17–22.

[30] *Беккер Ю.В., Левчук Д.В., Сотникова Е.А.* Автоморфизмы колец нефинитарных нильтреугольных матриц // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 3. С. 7–13.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных перечнем ВАК

[31] *Елисова А.П., Зотов И.Н., Левчук В.М., Сулейманова Г.С.* Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". 2011. Т. 4. № 1. С. 9–19.

[32] *Зотов И.Н., Левчук В.М.* Соответствие Мальцева и изоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 4. С. 135–145.

[33] *Zotov I.N.* Local automorphisms of nil-triangular subalgebras of classical Lie type Chevalley algebras // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2019. V. 12. № 5. P. 598–605.

Прочие работы автора по теме диссертации

[34] *Зотов И.Н.* Локальные автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых степеней // Тр. XLII краевой науч. студ. конф. по математике и компьютерным наукам. Красноярск: СФУ. 2009. С. 24–25.

[35] *Зотов И.Н., Левчук В.М., Майсурадзе Д.Н.* Локальные дифференцирования и автоморфизмы линейных колец Ли // Тезисы докладов международной конференции "Алгебра, логика и приложения". Красноярск: СФУ. 2010. С. 162.

[36] *Зотов. И.Н.* Элементарно эквивалентные максимальные унипотентные подгруппы групп Шевалле // Сборник материалов VIII Всероссийской научно-техн. конференции "Молодежь и наука". Красноярск: СФУ. 2012. С. 20-21.

[37] *Зотов И.Н.* Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Тез. докл. XI международной школы-конференции по теории групп, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского. Красноярск: СФУ. 2016. С. 23-24.

[38] *Зотов И.Н.* Элементарная эквивалентность некоторых нильпотентных неассоциативных колец // Электронный сборник тез. докл. международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2016. С. 185.

[39] *Зотов И.Н.* Элементарная эквивалентность некоторых нильпотентных неассоциативных колец // Тезисы докладов международной алгебр. конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Москва: Издательство МГУ. 2018. С. 86-87.

[40] *Зотов И.Н.* Изоморфизмы и элементарная эквивалентность нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов // Тез. докл. Всероссийской конф. по математике и механике, посвящённой 140-летию ТГУ и 70-летию ММФ. Томск: ТГУ. 2018. С. 28.

[41] *Зотов И.Н.* Локальные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов // Электронный сборник тез. докл. международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2019. С. 162.

[42] *Зотов И.Н.* Локальные автоморфизмы алгебр нефинитарных нильтреугольных матриц // Тез. докл. конф. "Алгебра и ее приложения", 70-летию пермской алгебр. школы. Пермь: ПГНИУ. 2020. С. 22.

[43] *Levchuk V.M., Zotov I.N.* Nonfinitary niltriangular algebras and their automorphism groups // Электронный сборник тез. докл. международной конф. "Мальцевские чтения". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2020. С. 162.