

На правах рукописи



БУХ Андрей Владимирович

АВТОВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ, ВКЛЮЧАЯ ХИМЕРНЫЕ,
В ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ
СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ.
СИНХРОНИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

1.3.4. – Радиофизика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2021

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики **Анищенко Вадим Семенович**,
доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики **Стрелкова Галина Ивановна**.

Официальные оппоненты:

Осипов Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», г. Нижний Новгород, кафедра теории управления и динамики систем, заведующий кафедрой

Станкевич Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, лаборатория топологических методов в динамике, старший научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», г. Нижний Новгород

Защита состоится «22» октября 2021 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.392.01 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Университетская, 40, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» и на сайте <https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-01/kandidatskaya-dissertaciya-buha-andreya>.

Автореферат разослан «___» _____ 2021 года.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.2.392.01, к.ф.-м.н., доцент



Слепченков
Михаил Михайлович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы. Автоволновые процессы на протяжении уже нескольких десятков лет представляют собой фундаментально-научную проблему в теории колебаний и волн¹. Термин «автоволны» для активных сред был введен по аналогии с термином «автоколебания» для автогенераторов. Одно из первых определений звучит следующим образом: «Под автоволнами принято сейчас понимать самоподдерживающийся волновой процесс в неравновесной среде, остающийся неизменным при достаточно малых изменениях как начальных, так и граничных условий». Примерами могут служить волны горения, распространения туннельных переходов в полупроводниках и нервные импульсы, которые участвуют в управлении и передаче информации в биологических системах. К автоволновым процессам относятся колебательные химические реакции в активных средах (реакция Белоусова-Жаботинского), распространение импульса возбуждения по нервному волокну, спиральные и концентрические волны на сердечной мышце, волны химической сигнализации в колониях некоторых микроорганизмов, популяционные автоволны, распространение эпидемий и генов, спиральные галактики в астрономии, и многие другие явления².

Применительно к автоволновым процессам исследуются такие фундаментальные физические явления как синхронизация,³ управление и грубость,⁴ бифуркации и устойчивость, мультистабильность и гистерезис⁵.

В начале 21-го века вновь активизировался интерес ученых к проблеме автоволновых структур, что связано с открытием химерных состояний⁶. Химерным состоянием называют динамический режим ансамбля, при котором сосуществуют кластеры с регулярным или синхронным поведением и кластеры с нерегулярным или несинхронным поведением.⁷ Были обнаружены различные типы химерных структур⁸, в том числе при различной топологии

¹Васильев В.А. и др., Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987; Krinsky V.I., Self-Organization: Autowaves and Structures Far from Equilibrium. Springer, 2012.

²Белоусов Б.П., ИПФ АН СССР, 176-186, 1981; Кринский В.И., Жаботинский, А.М., ИПФ АН СССР, 6-32, 1981; Елькин Ю.Е., Мат. биол. биоинф. **1**(1), 27-40, 2006; Филд Р., Бургер М., Колебания и бегущие волны в химических системах. М.: Мир, 1988; Nozakura T., Ikeuchi S., Astrophys. J **333**, 68, 1988.

³Afraimovich V.S. et al., Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. World Scientific, 1995.; Pikovsky A. et al., Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge, 2003; Nekorkin V., Velarde M.G., Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos. Springer, 2002; Osipov G.V. et al., Synchronization in Oscillatory Networks. Springer, 2007.

⁴Osipov G.V., Collins J.J. Phys. Rev. E **60**, 54-57, 1999; Zhang H. et al., Phys. Rev. E **68**(3), 026134, 2003.

⁵Hagan P.S., SIAM J Appl. Math. **42**(4), 762-786, 1982; Barkley D., Phys. Rev. Lett. **72**(1), 164-167, 1994; Hendrey M. et al., Phys. Rev. E **62**(6), 7627-7631, 2000.

⁶Kuramoto Y., Battogtokh D., Nonlin. phenom. comp. syst. **5**(4), 380-385, 2002.

⁷Abrams D.M., Strogatz S.H., Phys. Rev. Lett. **93**(17), 174102, 2004.

⁸Panaggio M.J., Abrams D.M., Nonlinearity **28**(3), R67-R87, 2015.

связей⁹. В ряде работ¹⁰ было показано, что в двумерных ансамблях динамических систем возможно возникновение отличных от одномерного случая химерных автоволн на основе спиральных волн. Кластеры некогерентности спирально-волновых химер представляют собой группу осцилляторов в виде круглого ядра, окружающие осциллятор, который является источником возбуждения спиральной волны. Существование химерных состояний подтверждается не только с помощью численных или аналитических методов, но и в эксперименте¹¹. Однако далеко не в полном объеме исследованы механизмы возникновения и свойства химерных волновых структур в одномерных и двумерных ансамблях с непрерывным и дискретным временем.

В связи с обнаружением различных химерных структур особое внимание исследователей привлечено к исследованиям динамики многослойных сетей¹², которые представляют собой системы взаимодействующих ансамблей, реализующих различные пространственно-временные структуры и в которых наблюдаются различные формы синхронизации сложных структур, включая химерные: кластерная синхронизация¹³, обобщенная синхронизация¹⁴, фазовая синхронизация¹⁵, межслойная синхронизация¹⁶, синхронизация сетей с запаздывающими и адаптивными связями¹⁷, удаленная синхронизация,¹⁸ взрывная синхронизация¹⁹. Однако исследование эффектов вынужденной и взаимной синхронизации остается актуальным, поскольку практически не изучен вопрос о синхронизации автоволновых структур, включая химерные, в сетях связанных двумерных ансамблей.

Актуальность исследования условий образования и эволюции пространственно-временных структур, включая химерные, связана с решением ряда прикладных задач в области информационных и радиосистем²⁰,

⁹Hizanidis J. et al., Scientific Reports **6**(1), 19845(2016).

¹⁰Shima S., Kuramoto Y., Phys. Rev. E **69**, 036213, 2004; Laing C.R., Physica D **238**(16), 1569-1588, 2009; Martens E.A. et al., Phys. Rev. Lett. **104**(4), 044101, 2010; Tian C.-H. et al., Front. Phys. **12**, 128904, 2017; Totz J.F. et al., Nat. Phys. **14** 282–285, 2018.

¹¹Tinsley M. et al., Nat. Phys. **8**, 662-665, 2012; Hagerstrom A.M. et al., Nat. Phys. **8**(9), 658-661, 2012.

¹²Boccaletti S. et al., Phys. Rep. **544**, 1-122, 2014; De Domenico M. et al., Nat. Phys. **12**(10), 901-906, 2016.

¹³Pecora L.M. et al., Nat. Comm. **5**, 4079, 2014; Kanakov O.I. et al., Chaos **17**(1), 015111, 2007; Singh A. et al., Europhys. Lett. **111**(3), 30010, 2015; Jalan S., Singh A., Europhys. Lett. **113**(3), 30002, 2016.

¹⁴Короновский А.А. и др., Изв. РАН. Серия физическая **80**(2), 208, 2016; Andrzejak R.G. et al., Chaos **27**(5), 053114, 2017

¹⁵Andrzejak R.G. et al., Chaos **28**(9), 091101, 2018.

¹⁶Sevilla-Escoboza R. et al., Chaos **26**(6), 065304, 2016; Leyva I. et al., Sci. Rep. **7**, 45475, 2017.

¹⁷Клиньшов В.В., Некоркин В.И., УФН **183**, 1323-1336, 2013; Масленников О.В., Некоркин В.И., УФН **187**, 745-756, 2017

¹⁸Zhang L. et al., Phys. Rev. Lett. **118**(17), 038701, 2015; Leyva I. et al., Sci. Rep. **7**, 45475, 2017.

¹⁹Zhang X. et al., Phys. Rev. Lett. **114**(3), 038701, 2015; Wang Z. et al., Sci. Rep. **7**, 561, 2017.

²⁰S. Hong, C. Chun. Soc. Choice Welf. **34** 441 (2010)

энергосетей, систем экологии и экономики, а также в области нейродинамики и медицины²¹.

Приведенные данные о направлениях работ и уже имеющихся результатах убедительно свидетельствуют о том, что анализ автоволновых структур и их синхронизация в ансамблях связанных осцилляторов различной природы и степени сложности являются современными и актуальными научными проблемами нелинейной теории колебаний и волн, традиционно относящимися к задачам радиофизики.

Цель диссертационной работы. Целью работы являются выявление условий возникновения полученных ранее и новых автоволновых химерных структур в сетях связанных осцилляторов с различной периодической и хаотической динамикой, формирующихся на основе стоячих и бегущих волн в одномерных ансамблях и на основе спиральных и концентрических волн в двумерных решетках, изучение влияния начальных и граничных условий, шумового воздействия и топологии связей на реализацию этих структур и исследование эффектов вынужденной, взаимной и удаленной синхронизации химерных волновых структур в многослойных сетях нелинейных осцилляторов.

Для достижения поставленной цели определены и сформулированы **основные задачи** диссертационного исследования:

1. выявление механизма формирования различных типов химерных состояний в кольце нелокально связанных хаотических генераторов Анищенко-Астахова;
2. анализ динамических свойств и статистических характеристик автоволновых пространственно-временных структур спирального и концентрического типа в двумерных ансамблях связанных осцилляторов при введении нелокальной связи на примере двумерных решеток связанных осцилляторов различного типа, демонстрирующих периодические колебания;
3. анализ влияния топологии связей и внешнего шумового воздействия в одномерных ансамблях связанных нелинейных осцилляторов различного типа, начальных и граничных условий в двумерных решетках дискретных отображений;
4. выявление особенностей вынужденной и взаимной синхронизации химерных структур в связанных одномерных ансамблях и двумерных волновых химерных структур в связанных решетках нелокально взаимодействующих нелинейных осцилляторов;

²¹N.C. Rattenborg, et al. *Neurosci. Biobehav. Rev.* **24** 817 (2000), F.H. Fenton, et al. *Chaos* **12** 852 (2002).

5. установление возможности реализации эффекта противофазной удаленной синхронизации спиральных и концентрических волновых структур и химерных структур на их основе в трехслойной гетерогенной сети нелокально связанных нелинейных осцилляторов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. При переходе от пространственно-когерентного режима к некогерентному с уменьшением силы нелокальной связи от максимального значения до 0 в одномерных ансамблях нелокально связанных осцилляторов, демонстрирующих бифуркационный сценарий Фейгенбаума, возникают амплитудные химерные структуры на основе стоячих и бегущих волн. Некогерентный кластер химерной структуры на основе бегущей волны локализован в пространстве ансамбля и остается неподвижным несмотря на вращение когерентной бегущей волны вдоль кольца.
2. При введении нелокальной связи в двумерных ансамблях связанных нелинейных осцилляторов на основе спиральных и концентрических волн возникают химерные волновые структуры, характеризующиеся сосуществованием в пространстве ансамбля области когерентной динамики и некогерентного ядра в центре волны. В случае спирально-волновой химеры колебания когерентных осцилляторов являются периодическими, тогда как осцилляторы в некогерентном ядре демонстрируют хаотическую динамику. В режиме концентрической волновой химеры динамика всех осцилляторов является квазипериодической с различающимися аттракторами для элементов когерентной и некогерентной областей, что соответствует режиму химеры уединенных состояний.
3. В связанных двумерных ансамблях нелинейных осцилляторов реализуются эффекты частичной синхронизации спирально-волновых химерных структур и полной синхронизации концентрических волновых химер. Несинхронными всегда остаются некогерентные ядра спирально-волновых химер, в то время как некогерентные области концентрических химерных состояний являются ведущими в процессе синхронизации.
4. В неоднородной трехслойной сети связанных двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов, в которой внешние слои не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через средний слой, наблюдается эффект противофазной удаленной синхронизации концентрических химерных структур, при котором колебания осцилляторов удаленных ансамблей синхронизируются противофазно, оставаясь асинхронными с колебаниями осцилляторов промежуточного (передающего) слоя.

Научная новизна. Диссертационная работа содержит решение принципиально новых радиофизических задач анализа автоволновых химерных состояний в ансамблях взаимодействующих нелинейных осцилляторов с периодической и хаотической динамикой. Постановка задач по изучению свойств автоволновых структур спирального и концентрического типа в двумерных ансамблях нелокально связанных осцилляторов и выявление особенностей эффектов синхронизации химерных автоволновых структур в многослойных ансамблях является приоритетной. Результаты диссертации находятся в соответствии с уже установившимися представлениями в этой области знаний, гармонично расширяя и дополняя их. Несомненная новизна основных результатов работы подтверждается их публикацией в целом ряде научных статей в высокорейтинговых отечественных и зарубежных физических журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ. Содержание диссертационной работы соответствует паспорту специальности «1.3.4. – Радиофизика».

В работе впервые получены следующие научные результаты:

1. В кольце связанных генераторов Анищенко-Астахова наряду с классическими химерными состояниями на основе стоячей волны впервые обнаружены химерные состояния амплитудного типа на основе бегущей волны, некогерентный кластер которой остается неподвижным, несмотря на вращение основной волны вдоль кольца. Продемонстрировано явление мультистабильности и показаны особенности поведения осцилляторов некогерентных кластеров фазовых и амплитудных химерных состояний.
2. Установлено, что поведение одномерных ансамблей связанных осцилляторов различной природы может существенно зависеть от типа топологии связи между элементами, изменение которой приводит к изменению длины волны в пространстве ансамбля, увеличивает или уменьшает количество кластеров некогерентности и влияет на характер перехода от когерентности к некогерентности.
3. Проанализировано влияние шума на амплитудные и фазовые химерные состояния на примере хаотических отображений. Показано, что оно приводит как к разрушению реализующихся структур при достаточно большой интенсивности, так и к индуцированным переходам между химерными структурами различного типа и возникновению новых кластеров некогерентности.
4. На примере двух связанных колец хаотических отображений показано, что в случае диссипативного характера связи между ансамблями име-

ет место полная вынужденная и взаимная синхронизация структур для идентичных ансамблей и эффективная (с заданной точностью) синхронизация для случая неидентичных ансамблей. При инерционном типе связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями синхронизация невозможна.

5. Проведен анализ динамики решетки локально связанных генераторов ван дер Поля и обнаружены режимы спиральных и концентрических волн. Показано, что на длины волн реализуемых структур оказывают влияние как управляющий параметр возбуждения, так и сила локальной связи. Обнаружено явление мультистабильности, когда при одних и тех же значениях управляющих параметров генераторов и параметров связи возможна реализация как спиральных, так и концентрических волн в зависимости от выбора начальных условий.
6. Впервые обнаружен и описан новый тип химерной структуры – концентрическая волновая химера, возникающая в двумерной решетке генераторов ван дер Поля на основе концентрической волны при увеличении нелокальности связи. Показано, что увеличение степени нелокальности связи ансамбля в режимах спиральных и концентрических волн приводит к увеличению кластера некогерентности, который характеризуется хаотизацией колебаний осцилляторов в центре спирально-волновых химер и уединенными состояниями с регулярными колебаниями в центре концентрических волновых химерных состояний.
7. Впервые установлены и исследованы эффекты вынужденной и взаимной синхронизации спиральных и концентрических волновых структур, включая химерные на их основе, в двух связанных решетках нелинейных осцилляторов различной природы и при различном характере межслойной связи. Установлено, что в случае спиральных волн и спирально-волновых химерных структур имеет место частичная синхронизация, тогда как для режимов концентрических волн и химерных структур на их основе характерна полная синхронизация. Впервые показано, что в первом случае ведущими в процессе синхронизации являются области с когерентной динамикой, а во втором случае лидирующая роль в синхронизации принадлежит осцилляторам некогерентных кластеров.
8. Впервые обнаружено и изучено явление противофазной удаленной синхронизации в трехслойной гетерогенной сети нелинейных осцилляторов. Данный эффект был установлен с помощью расчета коэффициента взаимной корреляции между соответствующими парами осцилляторов в случае концентрических химерных структур в удаленных слоях и спиральных волн в связующем их слое.

Научная и практическая значимость. Результаты исследований механизмов формирования и свойств автоволновых структур в одномерных и двумерных ансамблях связанных нелинейных осцилляторов различной природы, а также эффектов синхронизации сложных пространственно-временных структур в многослойных ансамблях и сетях дополняют и расширяют имеющиеся представления современной теории нелинейных колебаний и волн, радиофизики и нелинейной динамики. Выявлены отличительные особенности спирально-волновых и концентрических волновых химерных структур и показаны принципиальные различия в процессах их синхронизации. Установлен эффект противофазной удаленной синхронизации концентрических волновых химер во внешних двумерных решетках неоднородной трехслойной сети, связанных через средний (передающий) слой, находящийся в режиме спиральной волны.

Прикладное значение результатов исследования формирования сложных структур и эффектов их синхронизации определяется важностью их использования при моделировании и анализе процессов передачи информации в инфокоммуникационных системах и системах радиосвязи. Большой интерес полученные результаты могут также представлять для нейродинамики и медицины (при моделировании передачи электрических сигналов в мозге и динамики сердечной мышцы).

Достоверность полученных результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается: а) применением обоснованных методов теоретического и численного анализа нелинейных процессов в радиофизических системах, демонстрирующих сложное поведение; б) использованием специальных программных комплексов, разработанных и протестированных на широком классе задач нелинейной динамики; в) согласованностью с данными, полученными другими авторами.

Личный вклад. Защищаемые результаты диссертационной работы получены соискателем лично. Автором разработаны оригинальные программные комплексы и программы, с помощью которых проводились все численные расчеты и обработка экспериментальных данных. Планирование и постановка задач, интерпретация и обсуждение результатов, написание научных статей осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами.

Апробация результатов работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах: «Chimera states» (Саратов, 2016); «Saratov Fall Meeting» (Саратов, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020); «Control of Self-Organizing Nonlinear Systems» (Виттенберг, Германия, 2017, Варнемюнде, Германия, 2018); «Нелинейные волны» (Нижний Новгород,

2018, 2020); «Analysis and Modeling of Complex Oscillatory Systems», (Барселона, Испания, 2018); «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2018); «DPG Spring Meeting» (Регенсбург, Германия, 2019); «Patterns of Synchrony: Chimera states and beyond» (Триест, Италия, 2019); «Хаос: хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2019); «Shilnikov WorkShop» (Нижний Новгород, 2020); «NODYCON: Nonlinear Dynamics Conference» (Рим, Италия, 2021); «СНАОС» (Афины, Греция, 2021).

Результаты работы также неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ и Института теоретической физики Технического университета г. Берлина (Германия) по приглашению проф. E. Schöll и проф. А. Захаровой.

Гранты. Результаты диссертации получены в рамках выполнения грантов РФФИ (проекты № 20-52-12004 и № 19-32-90005 – исследование поведения решеток в случае нелокальной связи), РФФИ (проекты № 20-12-00119 и № 16-12-10175 – синхронизация двухслойных и трехслойных сетей и обнаружение противофазной удаленной синхронизации), Минобрнауки РФ в рамках базовой части Государственного задания (проект № 3.8616.2017 – исследование динамики двумерных решеток и обнаружение концентрических химер) и Немецкого Физического Общества (DFG) в рамках проекта SFB 910.

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликованы 23 статьи в центральных реферируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук. Всего по теме диссертации опубликовано 23 статьи в журналах, индексируемых в базе данных Web of Science и Scopus и получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Диссертационная работа содержит 211 страниц текста, включая 93 иллюстрации. Список литературы включает 225 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулированы цель работы и задачи исследований, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные результаты и положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** диссертации приведены результаты численного анализа динамики одномерных ансамблей осцилляторов различной природы с различной топологией связей и динамики двух связанных колец хаотических отображений. Динамика кольца связанных осцилляторов в общем виде задается следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i) + \frac{\sigma}{B_i} \sum_j \mathbf{S}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) + \mathbf{E}_i, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t)$ – вектора динамических переменных; $i = 1, 2, \dots, N$ – порядковый номер осциллятора; N – общее количество элементов в ансамбле; $\hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i$ – операторы эволюции для осцилляторов с непрерывным временем $t \in [0 : T]$ и $\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i(n+1)$ – в случае систем с дискретным временем $n = 1, 2, \dots, T$. Динамика осцилляторов в кольце (1) задается оператором \mathbf{F} . Второе слагаемое в (1) определяет связь элементов кольца между собой, которая может задаваться двумя способами: $\mathbf{S}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i)$ или $\mathbf{S}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$. Коэффициент σ определяет силу связи между элементами в кольце (1). Параметр B_i соответствует числу элементов, с которым связан i -й элемент ансамбля. Слагаемое \mathbf{E}_i позволяет ввести внешнее воздействие и полагается нулевым, $\mathbf{E}_i = 0$, при отсутствии другого определения.

Для исследования явления синхронизации пространственно-временных структур используется модель двух связанных колец, которая описывается следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_i^k = \mathbf{F}^k(\mathbf{u}_i^k) + \frac{\sigma^k}{B_i^k} \sum_{j^k} \mathbf{S}^k(\mathbf{u}_j^k, \mathbf{u}_i^k) + \gamma^{lk} \mathbf{G}(\mathbf{u}_i^l, \mathbf{u}_i^k) + \mathbf{E}_i^k, \quad (2)$$

где индексы $k, l = 1, 2$ отвечают номеру слоя, функция \mathbf{G} задает межслойную связь: $\mathbf{G}(\mathbf{u}_i^l, \mathbf{u}_i^k) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^l) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^k)$ или $\mathbf{G}(\mathbf{u}_i^l, \mathbf{u}_i^k) = \mathbf{u}_i^l - \mathbf{u}_i^k$, γ^{lk} – силы межслойных связей. Остальные обозначения аналогичны случаю системы (1).

В разделе 1.3 приводится подробное описание динамики модели кольца нелокально связанных генераторов с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова²². Генератор Анищенко-Астахова является реальной радиотехнической моделью и представляет большой практический интерес для радиофизики. Обнаружены режимы стоячих и бегущих волн и впервые описаны механизмы формирования химер на основе волновых структур. Впервые обнаруженные химерные структуры на основе бегущих волн (рисунок 1) представляют собой амплитудные химерные состояния. В разделе 1.3 также приведены результаты детального сравнения амплитудных и фазовых химер и показаны

²²Anishchenko V.S., Dynamical Chaos – Models and Experiments. World Scientific, 1995; Anishchenko V.S. et al., Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments. Springer, 2007.

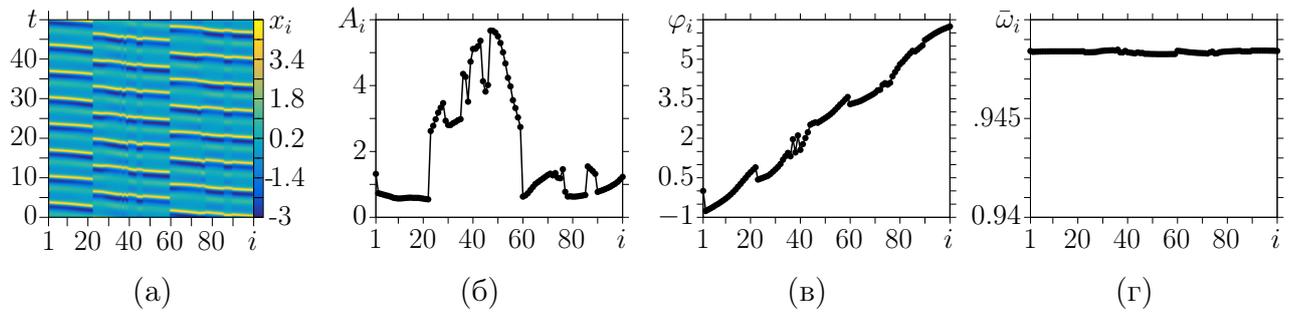


Рисунок 1 – Химерная структура при $P = 20$, $\sigma = 0.04$, возникающая на основе бегущей волны с волновым числом $n = 1$. Пространственно-временная диаграмма амплитуд осцилляторов x_i (а); пространственный профиль мгновенных амплитуд колебаний A_i (б); пространственный профиль мгновенных значений сдвигов фаз φ_i (в); средние значения частот хаотических колебаний элементов $\bar{\omega}_i$ (г).

примеры реализации мультистабильности для химерных состояний в кольце генераторов Анищенко-Астахова.

В разделе 1.4 исследуется влияние топологии связей (нелокальной, отражающей и комбинации нелокальной с диагональными связями) и типа парциального элемента на динамику одномерных ансамблей логистических отображений, отображений Курбажа-Некоркина и осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Показано, что изменение топологии межэлементной связи, может приводить к изменению длины волны в пространстве ансамбля, увеличивать или уменьшать количество кластеров некогерентности и влиять на характер перехода от когерентности к некогерентности. В разделе 1.5 приводятся результаты анализа влияния внешнего шумового воздействия на фазовые и амплитудные химерные состояния в ансамблях нелокально связанных логистических отображений и модифицированных отображений Рикера в хаотическом режиме. Амплитудные и фазовые химерные состояния демонстрируют устойчивость к шуму достаточно большой интенсивности и шум может индуцировать амплитудные химерные состояния. Возможны индуцированные шумом переходы между амплитудными и фазовыми химерными состояниями. Результаты исследования особенностей эффектов вынужденной и взаимной синхронизации динамики колец нелокально связанных логистических отображений для случаев диссипативного и инерционного типа межслойной связи приведены в разделе 1.6. В случае диссипативной связи для идентичных ансамблей возможна полная синхронизация химерных состояний, а для неидентичных ансамблей наблюдается их эффективная синхронизация.

Во **второй главе** диссертационной работы приводятся результаты численного исследования динамики двумерных решеток связанных осциллято-

ров, которые в общем виде задаются следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}) + \frac{\sigma}{B_{i,j}} \sum_{m,g} \mathbf{S}(\mathbf{u}_{m,g}, \mathbf{u}_{i,j}) + \mathbf{E}_{i,j}, \quad (3)$$

где $\mathbf{u}_{i,j}$ – вектора динамических переменных состояния осцилляторов с номерами $i = 1, 2, \dots, N$ и $j = 1, 2, \dots, N$; $N \times N$ – общее количество элементов. Индексы (m, g) определяют связи между элементами решетки. Остальные обозначения аналогичны системе (1). В разделе 2.2 описаны модели двумерных ансамблей связанных генераторов ван дер Поля ($\dot{x} = y$, $\dot{y} = \varepsilon(1 - x^2)y - \omega^2 x$, где ε – параметр возбуждения и ω – собственная частота), осцилляторов ФитцХью-Нагумо и отображений Курбажа-Некоркина. В разделе 2.3 приведены результаты детального анализа динамики указанных выше моделей решеток в случае локальной связи. Установлено, что при определенных значениях управляющих параметров и силы связи реализуются режимы спиральных волн во всех трех случаях и концентрических волн в решетке генераторов ван дер Поля. На примере решетки генераторов ван дер Поля продемонстрировано, что увеличение параметра ε приводит к уменьшению длины волны, тогда как усиление локальной связи вызывает её увеличение. Проиллюстрированы явление мультистабильности и реализация индуцированных шумом переходов от концентрической волны к спиральным волнам с различными центрами.

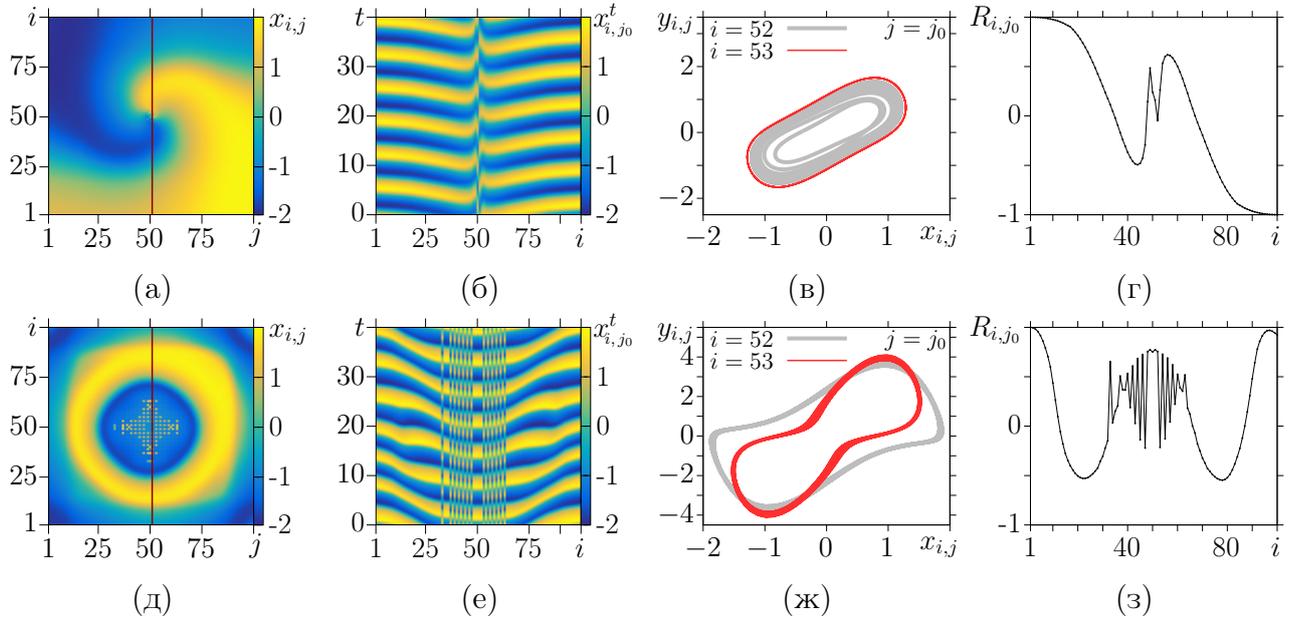


Рисунок 2 – Особенности режимов спирально-волновой ($P = 16$, $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 1$, $\omega = 0.9$) и концентрической ($P = 8$, $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 0.9$) химер в решетке генераторов ван дер Поля. Мгновенные пространственные профили $x_{i,j}$ (а,д), пространственно-временные диаграммы при $j_0 = 51$ (б,е), фазовые портреты для осцилляторов из некогерентной области (в,ж) и распределения взаимных корреляций с элементом $i = 1$ при $j_0 = 51$ (г,з).

В разделе 2.4 показано, что введение нелокальной связи между элементами в решетках генераторов ван дер Поля, осцилляторов ФитцХью-Нагумо, отображений Курбажа-Некоркина и Рутькова приводит к возникновению спирально-волновых химерных структур, которые характеризуются сосуществованием в пространстве системы когерентной области (волны) и ядра некогерентности, формирующегося в центре вращения волны (пример приведен на рисунке 2,а,б). Было также показано, что при довольно большом диапазоне нелокальной связи в решетке генераторов ван дер Поля возникает новый тип химерной структуры, *концентрическая волновая химера* (рисунки 2,д,е), впервые обнаруженный и описанный в диссертационной работе. Выявлены механизмы возникновения режимов волновых химер и проведен детальный сравнительный анализ динамики осцилляторов в ядрах некогерентности спиральной (рисунок 2,а-г) и концентрической (рисунок 2,д-з) химерных структур с помощью сравнения фазовых портретов (рисунок 2,в,ж) и распределений значений коэффициента взаимной корреляции:

$$R_{i,j_0} = \frac{\langle \tilde{x}_{i,j_0} \tilde{x}_{0,j_0} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_{i,j_0}^2 \rangle \langle \tilde{x}_{0,j_0}^2 \rangle}}, \quad \tilde{x}_{i,j} = x_{i,j} - \langle x_{i,j} \rangle, \quad (4)$$

приведенных на рисунке 2,г,з. Показано, что осцилляторы некогерентного кластера спирально-волновой химеры характеризуются хаотической динамикой, в то время как некогерентный кластер концентрической химеры включает осцилляторы в режиме уединенных состояний с регулярной динамикой.

Третья глава диссертации посвящена исследованиям эффектов синхронизации в многослойных сетях двумерных решеток осцилляторов различной природы, задаваемых следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l = \mathbf{F}^l(\mathbf{u}_{i,j}) + \frac{\sigma^l}{B_{i,j}^l} \sum_{m,g} \mathbf{S}^l(\mathbf{u}_{m,g}^l, \mathbf{u}_{i,j}^l) + \sum_{p=1}^k \gamma^{pl} \mathbf{\Gamma}^{pl}(\mathbf{u}_{i,j}^p, \mathbf{u}_{i,j}^l), \quad (5)$$

где индексы $l, p = 1, 2, \dots, k$ отвечают номеру слоя, k – количество слоев в сети, оператор $\mathbf{\Gamma}^{pl}$ задает связь между решетками, γ^{pl} – силы межслойных связей. Остальные обозначения аналогичны случаю системы (3).

В разделе 3.3 и 3.4 рассматриваются эффекты вынужденной и взаимной синхронизации спиральных и концентрических волн, включая химерные структуры на их основе в двух связанных решетках осцилляторов ван дер Поля и отображений Курбажа-Некоркина. Рассмотрены случаи однонаправленной и взаимной межслойной связи и выявлены механизмы синхронизации различных волновых структур при различных типах межслойной связи. Впервые установлены особенности и различия в эффектах синхронизации спиральных, концентрических волн и химерных структур на их основе.

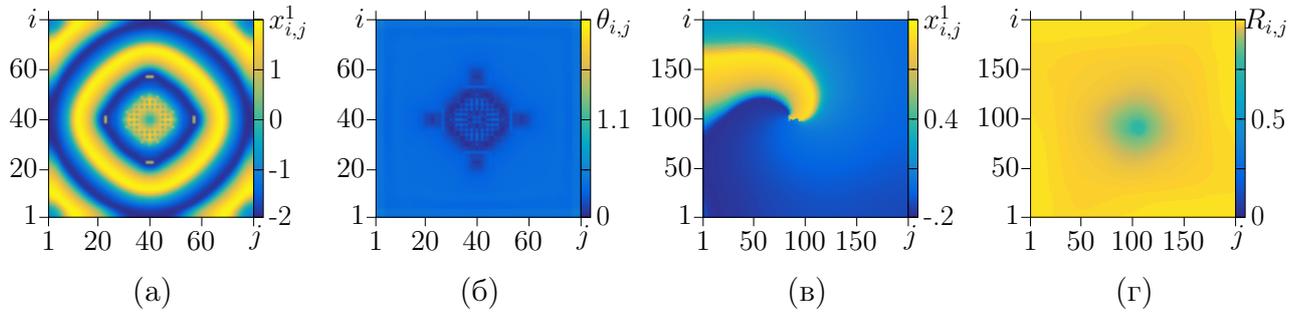


Рисунок 3 – Мгновенные пространственные профили динамики решетки осцилляторов ван дер Поля при $\gamma = 0.25$, $P^1 = 3$, $P^2 = 4$ (а) и отображений Курбажа-Некоркина при $\gamma = 0.06$, $P^1 = 4$, $P^2 = 22$ (в) в установившемся режиме синхронизации; распределение значений среднеквадратичного отклонения связанных пар осцилляторов ван дер Поля (б) и значений коэффициентов взаимной корреляции связанных пар отображений Курабажа-Некоркина (г).

Результаты, представленные в разделе 3.4, показывают, что синхронизация концентрических химер начинается с некогерентных кластеров, что подтверждается минимальными значениями среднеквадратичного отклонения

$$\theta_{i,j} = \sqrt{\langle (x_{i,j}^2 - x_{i,j}^1)^2 \rangle_t} \quad (6)$$

в центральных элементах решетки (рисунки 3,а,б). Синхронизация спирально-волновых химер начинается с когерентного кластера, в котором значения коэффициента взаимной корреляции

$$R_{i,j}^{l,p} = \frac{\langle \tilde{x}_{i,j}^l \tilde{x}_{i,j}^p \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_{i,j}^l)^2 \rangle \langle (\tilde{x}_{i,j}^p)^2 \rangle}}, \tilde{x}_{i,j} = x_{i,j} - \langle x_{i,j} \rangle. \quad (7)$$

близки к единице при увеличении силы межслойной связи (рисунки 3,в,г). В случае двух решеток $R_{i,j}^{l,p} = R_{i,j}^{1,2} = R_{i,j}$. При этом эффект частичной синхронизации реализуется в случае спиральных волн и спирально-волновых химер, а эффект полной синхронизации – для режимов концентрических волн и химер на их основе. В разделе 3.5 впервые описан и проиллюстрирован эффект противофазной удаленной синхронизации волновых структур в неоднородной трехслойной сети связанных осцилляторов. Два внешних слоя, представляющих собой решетки нелокально связанных генераторов ван дер Поля в режиме концентрических волновых химер, не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через промежуточный слой, заданный двумерным ансамблем связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме спирально-волновой химеры. На основе расчетов коэффициента взаимной корреляции (7) между симметричными элементами ансамблей показано, что при определенных значениях силы межслойной связи волновые структуры во внешних слоях сети синхронизируются в противофазе (рисунок 4,а,в,г; значения

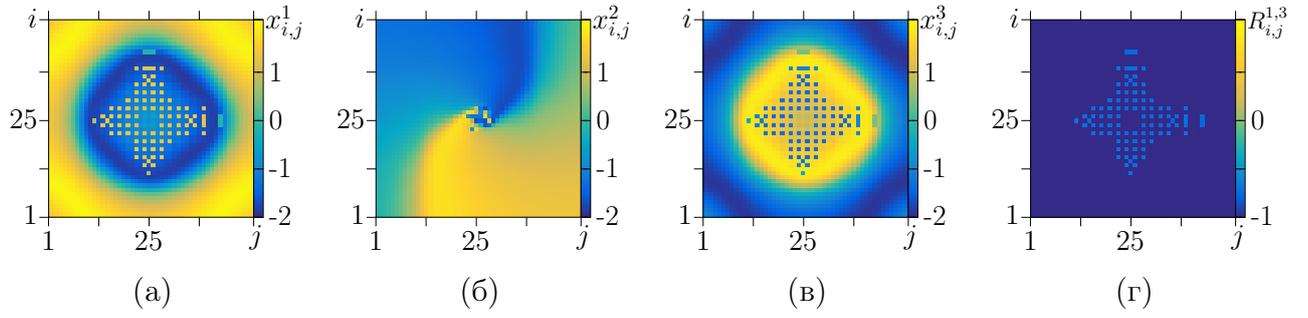


Рисунок 4 – Противофазная удаленная синхронизация трехслойной сети ($\gamma^{12} = \gamma^{23} = 0.03$) решеток генераторов ван дер Поля в удаленных слоях при $P^1 = P^3 = 6$, $\sigma^{1,3} = 0.65$ (а,в) и решетки осцилляторов ФитцХью-Нагумо в среднем слое при $P^2 = 10$, $\sigma^2 = 0.08$ (б). Мгновенные пространственные профили для переменных $x_{i,j}^1$ (а), $x_{i,j}^2$ (б) и $x_{i,j}^3$ (в) и распределения значений взаимных корреляций соответствующих элементов удаленных слоев (г).

$R_{i,j}^{1,3} \approx -1$), в то время как структура в передаточном слое остается полностью отличной от них (рисунок 4,б; $R_{i,j}^{1,2} \approx 0$, $R_{i,j}^{2,3} \approx 0$).

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы **основные результаты и выводы**:

1. В кольце связанных генераторов Анищенко-Астахова наряду с классическими химерными состояниями на основе стоячей волны впервые обнаружены химерные состояния амплитудного типа на основе бегущей волны, некогерентный кластер которой остается неподвижным, несмотря на вращение основной волны вдоль кольца. Продемонстрировано явление мультистабильности и показаны особенности поведения осцилляторов некогерентных кластеров фазовых и амплитудных химерных состояний.
2. Установлено, что поведение одномерных ансамблей связанных осцилляторов различной природы может существенно зависеть от типа топологии связи между элементами, которая может приводить к изменению длины волны в пространстве ансамбля, увеличивать или уменьшать количество кластеров некогерентности и влиять на характер перехода от когерентности к некогерентности.
3. Проанализировано влияние шума на амплитудные и фазовые химерные состояния на примере хаотических отображений. Показано, что шум может приводить как к разрушению реализующихся структур при достаточно большой интенсивности, так и к индуцированным переходам между химерными структурами различного типа и к возникновению новых кластеров некогерентности.
4. На примере двух связанных колец хаотических отображений показано, что в случае диссипативного характера межслойной связи имеет место

полная вынужденная и взаимная синхронизация структур для идентичных ансамблей и эффективная (с заданной точностью) синхронизация для случая неидентичных ансамблей. При инерционном типе связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями синхронизации структур достичь не удается.

5. Проведен анализ динамики решетки локально связанных генераторов ван дер Поля и обнаружены режимы спиральных и концентрических волн. Показано, что на длины волн реализуемых структур оказывают влияние как управляющий параметр возбуждения, так и сила локальной связи. Обнаружено явление мультистабильности, когда при некоторых значениях управляющих параметров генераторов и параметров связи возможна реализация как спиральных, так и концентрических волн в зависимости от выбора начальных условий.
6. Впервые обнаружен и описан новый тип химерной структуры – концентрическая волновая химера, возникающая в двумерной решетке генераторов ван дер Поля на основе концентрической волны при увеличении нелокальности связи. Проведен детальный сравнительный анализ спиральных волн, концентрических волн, волновых режимов с уединенными состояниями и различных химерных структур на их основе. Показано, что увеличение степени нелокальности связи ансамбля в режимах спиральных и концентрических волн приводит к увеличению кластера некогерентности, который характеризуется хаотизацией колебаний осцилляторов в центре спирально-волновых химер и уединенными состояниями с регулярными колебаниями в центре концентрических волновых химерных состояний. Осцилляторы некогерентных кластеров концентрических волновых химер, химер уединенных состояний и режимов уединенных состояний демонстрируют качественно одинаковую периодическую динамику.
7. Впервые установлены и исследованы эффекты вынужденной и взаимной синхронизации спиральных и концентрических волновых структур, включая химерные на их основе, в двух связанных решетках нелинейных осцилляторов различной природы и при различном характере межслойной связи. Впервые показано, что в случае спиральных волн и спирально-волновых химерных структур ведущими в процессе синхронизации являются связанные пары осцилляторов, принадлежащие когерентным кластерам, а в случае концентрических волн и химерных состояний на их основе лидирующая роль в синхронизации принадлежит осцилляторам некогерентных кластеров. Установлено, что только частичная синхронизация достигается в случае режимов спиральных волн и

химер на их основе, в то время как эффект полной синхронизации характерен для режимов концентрических волн и соответствующих химерных структур.

8. Впервые обнаружено и изучено явление противофазной удаленной синхронизации в трехслойной гетерогенной сети связанных особым образом двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов. Данный эффект был установлен с помощью расчета коэффициента взаимной корреляции между соответствующими парами осцилляторов в случае концентрических химерных структур в удаленных слоях и спиральных волн в связующем их слое.

Публикации по теме диссертации

1. Anti-phase relay synchronization of wave structures in a heterogeneous multiplex network of 2D lattices / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 143, no. 5. — P. 110545.
2. Synchronization effects for dissipative and inertial coupling between multiplex lattices / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2021. — Vol. 93. — P. 105489.
3. Bukh, A.V. Synchronization features of target wave structures with an incoherent center / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 139. — P. 110002.
4. Bukh, A.V. Spiral and target wave chimeras in a 2D network of nonlocally coupled van der Pol oscillators / A.V. Bukh, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 131. — P. 109492.
5. Role of solitary states in forming spatiotemporal patterns in a 2D lattice of van der Pol oscillators / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S.S. Muni, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 135. — P. 109725.
6. Bukh, A.V. Features of the Synchronization of Spiral Wave Structures in Interacting Lattices of Nonlocally Coupled Maps / A.V. Bukh, V.S. Anishchenko // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2020. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 243–257.
7. Quantifying the Transition from Spiral Waves to Spiral Wave Chimeras in a Lattice of Self-sustained Oscillators / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S.S. Muni, V.S. Anishchenko // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2020. — Vol. 25, no. 6. — Pp. 597–615.
8. Бух, А.В. Автоволновые структуры в двумерных решетках нелокально связанных осцилляторов / А.В. Бух, Е.В. Рыбалова, В.С. Анищенко // *Известия вузов. ПНД*. — 2020. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 299–323.
9. Бух, А.В. Отражающая, нелокальная и диагональная связи в сетях связанных динамических элементов различной природы / А.В. Бух, А.С. Косенкова, В.С. Анищенко // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2020. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 16–28.
10. Эффекты синхронизации двухслойной сети нелокально связанных хаотических отображений с диссипативной и инерционной связью / Т.Р. Богатенко, А.В. Бух,

- В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2020. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 42–54.
11. *Bukh, A. V.* Spiral Wave Patterns in Two-Layer 2D Lattices of Nonlocally Coupled Discrete Oscillators. Synchronization of Spiral Wave Chimeras / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2019. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 166–177.
 12. *Bukh, A. V.* Synchronization of spiral wave patterns in two-layer 2D lattices of nonlocally coupled discrete oscillators / A.V. Bukh, E. Schöll, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 5. — P. 053105.
 13. *Bukh, A. V.* Spiral wave patterns in a two-dimensional lattice of nonlocally coupled maps modeling neural activity / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2019. — Vol. 120. — Pp. 75–82.
 14. *А.В., Бух.* Спиральные, концентрические и химерные волновые структуры в двумерном ансамбле нелокально связанных генераторов Ван дер Поля / Бух А.В., Анищенко В.С. // *Письма в журнал технической физики*. — 2019. — Vol. 45, no. 13. — Pp. 40–43.
 15. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models / E.V. Rybalova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 10. — P. 101104.
 16. Stability and Noise-induced Transitions in an Ensemble of Nonlocally Coupled Chaotic Maps / A.V. Bukh, A.V. Slepnev, V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2018. — Vol. 23. — Pp. 325–338.
 17. *Bukh, A. V.* Synchronization of Chimera States in Coupled Networks of Nonlinear Chaotic Oscillators / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 419–433.
 18. Local sensitivity of spatiotemporal structures / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S. Ruschel, S. Yanchuk, T.E. Vadivasova // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 94, no. 2. — Pp. 1019–1027.
 19. Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2018. — Vol. 54. — Pp. 50–61.
 20. *Slepnev, A. V.* Stationary and non-stationary chimeras in an ensemble of chaotic self-sustained oscillators with inertial nonlinearity / A.V. Slepnev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 88. — Pp. 2983–2992.
 21. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 90, no. 4. — Pp. 2317–2330.
 22. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction / I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Physics Letters A*. — 2017. — Vol. 16, no. 16. — Pp. 1398–1404.
 23. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps / A.V. Bukh, E.V. Rybalova, N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 111102.

24. Стрелкова, Г.И. Исследование процессов формирования волновых структур в решетках нелокально связанных моделей нейронов / Г.И. Стрелкова, А.В. Бух, Е.В. Рыбалова // № 2021619437. — 2021.
25. Бух, А.В. Программа для моделирования сетей динамических элементов со сложными связями / А.В. Бух, В.С. Анищенко // № 2018618877. — 2018.
26. Бух, А.В. Компьютерная программа для моделирования сетей динамических элементов, описываемых одномерными или двумерными матрицами связи / А.В. Бух, И.А. Шепелев // № 2017612340. — 2017.

Подписано в печать _____.____.2021. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Times. Печать офсетная. Печ. л. 1,2.

Тираж 100 экз. Заказ № _____

Типография «Техно-Декор»,
Саратов, ул. Московская, 160, тел.: 77-07-48, www.sar-print.ru