Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Попков Кирилл Андреевич

О возможностях построения легкотестируемых контактных схем и схем из функциональных элементов

Специальность 01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»

Научный консультант:

Редькин Николай Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», профессор кафедры дискретной математики механико-математического факультета

Официальные оппоненты:

Аблаев Фарид Мансурович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», заведующий кафедрой теоретической кибернетики Института вычислительной математики и информационных технологий

Алёхина Марина Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный технологический университет», заведующая кафедрой «математика и физика» факультета промышленных технологий

Винокуров Сергей Фёдорович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», профессор кафедры алгебраических и информационных систем Института математики и информационных технологий

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ»

Защита состоится 7 октября 2021 г. в 16:10 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского».

Автореферат разослан 2021 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
кандидат физико-математических наук Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Одно из важнейших направлений современной дискретной математики и математической кибернетики связано с разработкой теории управляющих систем, куда входят анализ, синтез и сложность управляющих систем, их надёжность, контроль исправности и диагностика неисправностей. Зарождение и первоначальное развитие такой теории связано с работами К. Э. Шеннона[1], О. Б. Лупанова[2], Дж. фон Неймана[3], Э. Ф. Мура и К. Э. Шеннона[4], Ю. Г. Потапова и С. В. Яблонского[5], С. В. Яблонского и И. А. Чегис[6] и других авторов.

Тестовые подходы широко применяются в различных областях науки и сферах жизни и имеют важное теоретическое и прикладное значение. Общую постановку задачи тестирования можно сформулировать следующим образом. Имеется некоторый тестируемый объект — человек, механизм, компьютерная программа и т. п.. Над объектом проводится эксперимент, заключающийся в подаче ему некоторых запросов и наблюдении реакции объекта на эти запросы. На основании указанной реакции требуется определить наличие у объекта тех или иных признаков (проверяющий тест) либо классифицировать данные признаки (диагностический тест). Основными характеристиками теста являются точность (вероятность того, что определение наличия признаков либо их классификация проведены верно) и сложность тестирования (выражаемая во времени, стоимости и т. п.). Важность проведения тестов наглядно заметна в медицине, когда в зависимости от результата тестирования пациента принимается решение о назначении ему соответствующего лечения, что в ряде случаев может спасти ему жизнь.

Конечно, методы математической теории тестов отличаются от методов, используемых, например, в медицине, педагогике и технике, однако сама концепция теста весьма схожа и хорошо вписывается в предложенную выше общую схему. Тестовый подход к математической задаче распознавания образов описан, например, в работе А. Н. Дмитриева, Ю. И. Журавлёва и Ф. П. Кренделева[7]. В диссертации разрабатываются новые методы тестирования применительно к двум классическим модельным классам управляющих систем — схемам из функциональных

[1]Shannon C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. — 1938. — Vol. 57. — P. 713–723.

[2]Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Радиофизика. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.

[3]von Neumann J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata studies (AM-34). Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. — P. 43–98. (Перевод: Дж. Нейман. Вероятностная логика и синтез надёжных организмов из ненадёжных компонент // Автоматы. Сб. статей. — М.: Изд-во иностр. литер., 1956. — С. 68–139.)

[4]Moore E. F, Shannon C. E. Reliable circuits using less reliable relays // Journ. of the Franklin Institute. — 1956. — Vol. 262, No. 3. — P. 191–208; Vol. 262, No. 4. — P. 281–297. (Перевод: Шеннон К. Э. Надёжные схемы из ненадёжных реле // Работы по теории информ. и киберн. — М.: Изд-во иностр. литер., 1963. — С. 114–153.)

[5]Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 134, № 3. — С. 544–547.

[6]Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // Успехи математических наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4 (66). — С. 182–184.

[7]Дмитриев А. Н., Журавлёв Ю. И., Кренделев Ф. П. О математических принципах классификации предметов и явлений // Дискрет. анализ. Вып. 7. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. — С. 3–15.

элементов и контактным схемам.

В конце XIX в. в связи с развитием электродинамики стали появляться электрические, а позднее, в середине XX в. — электронные устройства, работа которых основывалась на содержащихся в них дискретных управляющих системах без памяти — релейно-контактных или интегральных схемах. Статьи К. Э. Шеннона[1] и О. Б. Лупанова[2] являются одними из первых работ, в которых описаны математические модели двух указанных типов схем — контактные схемы и схемы из функциональных элементов соответственно.

При проектировании схем основное внимание, помимо их сложности, т. е числа контактов, реле, транзисторов, диодов, объёма схем и т. п., уделяется реакции схем на неисправности различного рода, которые могут в них возникать. Часто требуется, чтобы схема была надёжной, т. е. при возникновении в ней неисправностей функционировала правильно с вероятностью, а) близкой к единице или б) равной единице; возможности построения таких схем при различных допустимых в них неисправностях изучаются в математической теории надёжности схем и синтеза самокорректирующихся схем соответственно (см., например, главы II и III книги Н. П. Редькина[8], а также работы Н. В. Петри[9], С. В. Яблонского[10], М. А. Алёхиной[11,12], А. Е. Андреева[13], Д. Улига[14]).

Другим требованием к схеме является возможность её быстрого тестирования на предмет наличия в ней неисправностей. Тестирование схемы заключается в последовательной подаче на её входы некоторых наборов булевых значений, т. е. наборов из нулей и единиц (нуль отвечает отсутствию сигнала, единица — наличию сигнала), и наблюдении выдаваемых схемой значений на данных наборах; обратим внимание, что для этого не требуется вмешательство в её структуру. На основании такого эксперимента надо сделать однозначный вывод о том, правильно или неправильно функционирует схема (проверяющий тест), а также, возможно, о том, как именно она функционирует (диагностический тест). Предполагается, что в ходе эксперимента в схеме не могут произойти дополнительные неисправности и, как следствие, она не может изменить своё функционирование. Длительность тестирования схемы напрямую связана с числом подаваемых наборов булевых значений её входных переменных, называемым длиной теста, и может быть очень большой, недоступной на практике, если число n этих переменных велико (скажем, больше 50), поскольку число всевозможных наборов булевых

[8]Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во Московского университета, 1992. — 192 с.

[9]Петри Н. В. О сложности реализации функций алгебры логики контактными схемами из ненадёжных контактов при высокой требуемой надёжности // Пробл. киберн. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 159–169.

[10]Яблонский С. В. Асимптотически наилучший метод синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов // Banach center publ. — 1982. — Vol. 7. — P. 11–19.

[11]Алёхина М. А. Синтез и сложность надёжных схем из ненадёжных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 11. — М.: Физматлит, 2002. — С. 193–218.

[12]Алёхина М. А. О надёжности схем во всех полных базисах из трёхвходовых элементов при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Прикл. дискрет. матем. — 2020. — № 49. — С. 98–107.

[13]Андреев А. Е. Универсальный принцип самокорректирования // Матем. сб. — 1985. — Т. 127(169), № 2(6). — С. 147–172.

[14]Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надёжных элементов // Матем. заметки. — 1974. — Т. 15, № 6. — С. 937–944.

значений n переменных, как известно, равно 2^n. Поэтому возникает вопрос о возможности построения для конкретной схемы проверяющих или диагностических тестов, длины которых существенно меньше, чем 2^n (пример такого построения см. в §§1, 2 главы IV книги Н. П. Редькина[8]). Однако далеко не для каждой схемы удаётся построить короткие тесты; более того, бывают ситуации, когда сделать это в принципе невозможно (см., например, §5 главы IV той же книги). В связи с указанным обстоятельством ставится задача синтеза (построения) легкотестируемых схем, имеющих заданное функционирование, т. е. схем, допускающих тесты сравнительно малой длины. Основополагающей здесь следует считать работу С. В. Яблонского и И. А. Чегис 1958 г.[15], в которой такая задача была сформулирована для случая контактных схем и получены первые (наряду с работой 1955 г.[6] тех же авторов) результаты в этой области. Данный подход применим и для формализации задачи синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов (см., например, статьи С. В. Яблонского 1986 г.[16] и 1988 г.[17]).

Актуальность темы исследования подтверждается тем, что интегральные схемы являются «начинкой» большинства современных устройств и несвоевременное обнаружение в этих схемах неисправностей может привести к печальным последствиям, учитывая, что такие устройства используются, например, в авиации и военном деле. Поэтому важно проектировать схемы не только из соображений простоты их изготовления, но и с учётом быстрого обнаружения возникающих в них неисправностей. По теме диссертации и смежным темам опубликовано большое количество работ отечественных и зарубежных авторов, что отражено в разделе диссертации «Степень разработанности темы исследования».

Основные определения и обозначения

В рамках автореферата считаем известными понятия булевой функции (б. ф.), контактной схемы (КС) и схемы из функциональных элементов (СФЭ). Они подробно описаны в диссертации; также их можно найти, например, в главе I книги Н. П. Редькина[8]. Любое множество б. ф., каждая из которых существенно зависит от всех своих переменных, будем считать *базисом*. Базис называется *функционально полным* (ф. п.) или просто *полным*, если любая б. ф. может быть выражена формулой над этим базисом (определение формулы над множеством б. ф. см., например, на с. 14 той же книги). Для любого ф. п. конечного базиса B через $m(B)$ будем обозначать максимальное число переменных у функций из B.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех б. ф. от n переменных*, если отношение числа б. ф. от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех б. ф. от n переменных стремится к нулю

[15] Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

[16] Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: Изд-во Московского университета. — 1986. — С. 7–12.

[17] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

при $n \to \infty$.

Введём обозначение $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Все логарифмы, встречающиеся в дальнейшем тексте, берутся по основанию 2, которое для краткости будем опускать.

Тесты для схем

Пусть задана произвольная (двухполюсная) КС или СФЭ (с одним выходом) S, реализующая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, где $n \in \mathbb{Z}^+$ и $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$; в случае $n = 0$ полагаем, что множество переменных функции f пусто. Представим, что на схему S воздействует некоторый источник неисправностей, способный вызывать в ней неисправности заранее оговоренного вида; виды неисправностей в схемах, рассматриваемые в основной части диссертации, перечислены в следующем подразделе. В результате конкретного воздействия источника неисправностей схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ станет реализовывать некоторую б. ф. $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие б. ф. $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых неисправностях в данной схеме, называются *функциями неисправности* (ф. н.) схемы S. Любая ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ схемы S, отличная от $f(\tilde{x}^n)$, называется *нетривиальной*.

Следующие определения можно найти, например, в §§1, 3 главы IV книги Н. П. Редькина[8]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой нетривиальной ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных ф. н. $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Другими словами, проверяющий (диагностический) тест для схемы S позволяет однозначно определить путём последовательной подачи вместо входных переменных этой схемы наборов из теста и наблюдения выдаваемых схемой значений, реализует ли она «правильную» функцию $f(\tilde{x}^n)$ или же какую-то ф. н., отличную от f (соответственно какую именно б. ф. она реализует), в предположении, что известны строение исправной схемы S и перечень всех неисправностей, которые могут в ней происходить, а значит, и все возможные ф. н. данной схемы. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут происходить сколько угодно неисправностей, и *единичным*, если в схеме может произойти только одна неисправность. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем*, т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность приводит к нетривиальной ф. н..

Назовём проверяющий (диагностический) тест *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме может произойти не более k неисправностей, где $k \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем*, в которых любые не менее одной и не более k допустимых неисправностей приводят к нетри-

виальной ф. н.. Очевидно, что понятия 1-проверяющего теста, 1-диагностического теста и 1-неизбыточной схемы совпадают с понятиями единичного проверяющего теста (ЕПТ), единичного диагностического теста (ЕДТ) и неизбыточной схемы соответственно.

Для каждого из шести определённых выше типов теста: ЕПТ, k-проверяющего теста (k-ПТ), полного проверяющего теста (ППТ), ЕДТ, k-диагностического теста (k-ДТ) и полного диагностического теста (ПДТ) определим значение величины Т, характеризующей тип теста; это будет необходимо для введения дальнейших обозначений. А именно, будем говорить, что множество T является тестом типа Т для схемы S, в следующих случаях:

- T — ЕПТ для схемы S и Т = ЕП;
- T — k-ПТ для схемы S и Т = k-П;
- T — ППТ для схемы S и Т = ПП;
- T — ЕДТ для схемы S и Т = ЕД;
- T — k-ДТ для схемы S и Т = k-Д;
- T — ПДТ для схемы S и Т = ПД.

Неисправности

Перечислим виды неисправностей в схемах, рассматриваемые в основной части диссертации. Параллельно для каждого такого вида определим значения величин М (кроме случаев 1.1–1.3) и Н, характеризующие возможные «места» и типы неисправностей; это потребуется для введения обозначений из следующего подраздела.

1. Неисправности контактов в контактных схемах.

1.1. Обрывы (размыкания) контактов. Каждый контакт при обрыве начинает иметь тождественно нулевую проводимость, т. е. не проводит ни на одном наборе. Положим Н = 0.

1.2. Замыкания контактов. Каждый контакт при замыкании начинает иметь тождественно единичную проводимость, т. е. проводит на любом наборе. Положим Н = 1.

1.3. Обрывы и замыкания контактов. Каждый неисправный контакт в любой КС может быть оборван или замкнут независимо от неисправностей других контактов в этой схеме. Положим Н = 01.

В каждом из случаев 1.1–1.3 считаем, что в неисправное состояние может перейти любой контакт в любой КС (т. е. в ней нет «абсолютно надёжных» контактов).

2. Неисправности на входах схем. Данный класс неисправностей будет рассматриваться для СФЭ, но, как нетрудно видеть, множество ф. н. любой СФЭ при неисправностях произвольного вида, возникающих на её входах, зависит только от б. ф., реализуемой этой схемой в случае её исправной работы, и от вида неисправностей и не зависит от строения схемы, базиса, в котором она строится, и даже от принадлежности её классу СФЭ или каких-то других логических устройств (под

логическим устройством здесь понимается любой объект с n входами, $n \in \mathbb{Z}^+$, на которые подаются попарно различные булевы переменные (б. п.), и одним выходом, на котором реализуется некоторая б. ф. от данных n переменных).

2.1. Однотипные константные неисправности (ОКН) типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах схем. В каждом неисправном входе любой СФЭ вместо б. п., приписанной этому входу, реализуется константа p. Положим M = P (сокращение от выражения «primary input»), H = p.

2.2. Произвольные константные неисправности (ПКН) на входах схем. В каждом неисправном входе любой СФЭ вместо б. п., приписанной этому входу, реализуется одна из булевых констант $0, 1$ независимо от неисправностей других входов этой схемы. Положим M = P, H = 01.

2.3. Инверсные неисправности (ИН) на входах схем. В каждом неисправном входе любой СФЭ вместо б. п., приписанной этому входу, реализуется отрицание данной б. п.. Положим M = P, H = Inv.

В каждом из случаев 2.1–2.3 считаем, что в неисправное состояние может перейти любой вход любой СФЭ (т. е. у неё нет «абсолютно надёжных» входов).

3. Неисправности элементов в схемах из функциональных элементов.

3.1. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на константу p. Положим M = O (сокращение от слова «output»), H = p.

3.2. ПКН на выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на одну из булевых констант $0, 1$ независимо от неисправностей других элементов этой схемы. Положим M = O, H = 01.

3.3. ИН на выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на отрицание этой функции. Положим M = O, H = Inv.

3.4. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, константы p. Положим M = I (сокращение от слова «input»), H = p.

3.5. ПКН на входах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, одной из булевых констант $0, 1$ независимо от неисправностей других входов элементов в данной схеме. Положим M = I, H = 01.

3.6. ИН на входах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, отрицания данной переменной. Положим M = I, H = Inv.

3.7. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах и выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на константу p, если

неисправен выход этого элемента, либо на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, константы p, если его выход исправен. Положим $\mathrm{M} = \mathrm{IO}$, $\mathrm{H} = p$.

3.8. ПКН на входах и выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на одну из булевых констант $0, 1$, если неисправен выход этого элемента, либо на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, одной из булевых констант $0, 1$, если его выход исправен, независимо от неисправностей других входов/выходов элементов в данной схеме. Положим $\mathrm{M} = \mathrm{IO}$, $\mathrm{H} = 01$.

3.9. ИН на входах и выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, отрицания данной переменной, а затем — если неисправен выход этого элемента — на отрицание полученной функции. Положим $\mathrm{M} = \mathrm{IO}$, $\mathrm{H} = \mathrm{Inv}$.

Считаем, что в неисправное состояние может перейти выход (в случаях 3.1–3.3, 3.7–3.9) и любой вход (в случаях 3.4—3.9) любого элемента в любой СФЭ.

4. Комбинации рассмотренных выше неисправностей элементов в схемах из функциональных элементов и неисправностей на входах этих схем. В каждом их нижеследующих случаев 4.1–4.3 будем полагать $\mathrm{M} = \mathrm{PIO}$, $\mathrm{M} = \mathrm{PI}$ или $\mathrm{M} = \mathrm{PO}$ в зависимости от того, допускаются ли в схемах, помимо неисправностей на их входах, неисправности соответственно на входах и выходах, только на входах или только на выходах элементов.

4.1. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах и/или выходах элементов и на входах схем. Положим $\mathrm{H} = p$.

4.2. ПКН на входах и/или выходах элементов и на входах схем. Положим $\mathrm{H} = 01$.

4.3. ИН на входах и/или выходах элементов и на входах схем. Положим $\mathrm{H} = \mathrm{Inv}$.

Глава 1 диссертации целиком посвящена неисправностям видов 1.1–1.3; в главе 2 основное внимание уделяется неисправностям видов 3.1–3.9.

Основные оцениваемые величины

Пусть зафиксированы значения $\mathrm{T} \in \{\text{ЕП}, k\text{-П}, \text{ПП}, \text{ЕД}, k\text{-Д}, \text{ПД}\}$, $\mathrm{H} \in \{0, 1, 01\}$ и множество T является тестом типа T для некоторой контактной схемы S относительно неисправностей типа H в этой схеме (например, обрывов контактов при $\mathrm{H} = 0$). Введём следующие обозначения: $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(T)$ — длина теста T; $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(S) = \min D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(T)$, где минимум берётся по всем тестам T типа T для схемы S; $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(f) = \min D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(S)$, где $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф. и минимум берётся по всем реализующим её КС S, на которые дополнительно накладывается условие неизбы-

точности (относительно неисправностей типа H) в случае $\mathrm{T} \in \{\text{ЕП}, \text{ЕД}\}$, условие k-неизбыточности в случае $\mathrm{T} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$ и не накладывается никаких дополнительных условий в случае $\mathrm{T} \in \{\text{ПП}, \text{ПД}\}$; $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(n) = \max D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(f)$, где $n \in \mathbb{Z}^+$ и максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных. Функция $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины теста типа T для контактных схем при неисправностях типа H. Тесты для контактных схем при обрывах контактов ещё называют *тестами размыкания*, а при замыканиях контактов — *тестами замыкания*. Скажем, функция $D^{0}_{\text{ЕП}}(n)$ является функцией Шеннона длины ЕПТ размыкания для контактных схем.

Пусть зафиксированы значения $\mathrm{T} \in \{\text{ЕП}, k\text{-П}, \text{ПП}, \text{ЕД}, k\text{-Д}, \text{ПД}\}$, $\mathrm{M} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}, \mathrm{P}, \mathrm{PI}, \mathrm{PO}, \mathrm{PIO}\}$, $\mathrm{H} \in \{0, 1, 01, \mathrm{Inv}\}$ (такие значения величин T, M и H будем называть *допустимыми*) и множество T является тестом типа T для некоторой схемы из функциональных элементов S в некотором ф. п. базисе B относительно неисправностей типа H, которые могут происходить в «местах» M этой схемы (например, ПКН на входах элементов при $\mathrm{M} = \mathrm{I}$, $\mathrm{H} = 01$). Введём следующие обозначения: $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(T)$ — длина теста T; $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(S) = \min D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(T)$, где минимум берётся по всем тестам T типа T для схемы S; $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f) = \min D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(S)$, где $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф. и минимум берётся по всем реализующим её СФЭ S в базисе B, на которые дополнительно накладывается условие неизбыточности (относительно неисправностей типа H в «местах» M) в случае $\mathrm{T} \in \{\text{ЕП}, \text{ЕД}\}$, условие k-неизбыточности в случае $\mathrm{T} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$ и не накладывается никаких дополнительных условий в случае $\mathrm{T} \in \{\text{ПП}, \text{ПД}\}$; $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(n) = \max D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$, где $n \in \mathbb{Z}^+$ и максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, для которых определено значение $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$. Функция $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины теста типа T для схем из функциональных элементов в базисе B при неисправностях типа H в «местах» M. Скажем, функция $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{k\text{-Д}\,(\mathrm{PO})}(n)$ является функцией Шеннона длины k-ДТ для СФЭ в базисе B при инверсных неисправностях на выходах элементов и на входах схем.

В случае $\mathrm{M} = \mathrm{P}$, т. е. при неисправностях на входах схем, как было отмечено выше, множество ф. н. любой СФЭ при любых фиксированных допустимых H и T зависит только от б. ф., реализуемой этой схемой при отсутствии в ней неисправностей, и не зависит от строения схемы и базиса, в котором она строится. Поэтому значения всех величин $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(S)$ при различных ф. п. базисах B и схемах S, реализующих одну и ту же б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, в этих базисах, совпадают и верхний индекс B у величин $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{P})}(f)$ и $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{P})}(n)$ можно опускать.

Основное внимание в дальнейшем будет уделяться величинам $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(f)$, $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$, $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(n)$ и $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(n)$ (при различных значениях входящих в них параметров). Первые две из них определяют минимально возможную длину теста для КС или СФЭ, реализующей функцию f; последние две — наименьшее число наборов, достаточное для тестирования (специальным образом построенных) КС или СФЭ, реализующих булевы функции от n переменных, или, иначе говоря, минимально возмож-

ную длину теста для КС или СФЭ, реализующей самую труднотестируемую б. ф. от n переменных. Нахождение точных значений этих величин или их нетривиальных верхних оценок с предъявлением схем, которые дают эти оценки, позволило бы строить легкотестируемые схемы, реализующие конкретные или произвольные б. ф.; нахождение нетривиальных нижних оценок этих величин указало бы на невозможность синтеза схем, реализующих некоторые б. ф. и допускающих тесты сравнительно малой длины. Отметим, что тривиальными нижней и верхней оценками любой из четырёх указанных величин, если её значение определено, можно считать соответственно 0 и 2^n (длину тривиального теста) в предположении, что f — б. ф. от n переменных.

Схемы с фиктивными входными переменными

Две б. ф. называются *равными*, если одну из них можно получить из другой при помощи операций добавления и изъятия фиктивных, т. е. несущественных переменных (см., например, с. 12 книги С. В. Яблонского[18]).

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф. и $r \in \mathbb{Z}^+$. Будем говорить, что КС или СФЭ *содержит r фиктивных входных переменных и реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$*, если данная схема содержит r входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и реализует б. ф., не зависящую существенно от этих r переменных и равную функции $f(\tilde{x}^n)$. Условимся считать, что наборы из любого теста для схемы, содержащей r фиктивных входных переменных и реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, имеют длину $n+r$ (по общему числу переменных $x_1, \ldots, x_n$ и фиктивных входных переменных схемы).

Обозначим через $D^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$ функцию, получающуюся заменой в определении функции $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$ фразы «реализующим её СФЭ S в базисе B» на «содержащим не более r фиктивных входных переменных и реализующим её СФЭ S в базисе B». Положим $D^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(n) = \max D^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, для которых определено значение $D^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$.

Степень разработанности темы исследования

В нижеследующем литературном обзоре упомянем только те результаты, в которых получены оценки или найдены точные значения величин видов $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(n)$, $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(f)$, $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(n)$ и $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$, кроме случаев, когда f — конкретная б. ф. (например, $f(\tilde{x}^n) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$). Сначала перечислим такие результаты при рассмотрении неисправностей видов 2.1–2.3 (на входах схем).

Тесты при однотипных константных неисправностях на входах схем. Г. Р. Погосян доказал[19,20], что $D^{p}_{\mathrm{ПП}\,(\mathrm{P})}(n) = n$ для любых $n \geqslant 1$, $p \in \{0, 1\}$.

[18] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

[19] Погосян Г. Р. О длине проверяющих тестов для логических схем // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 263, № 3. — С. 546–550.

[20] Погосян Г. Р. О проверяющих тестах для логических схем. — М.: ВЦ АН СССР, 1982. — 57 с.

Тесты при произвольных константных неисправностях на входах схем. К. Д. Вайсс установил[21] равенство $D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n) = n+1$ при $n \in \{1,2,3,4,5\}$ и неравенство $D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n) \leqslant 2n-4$ при $n \geqslant 6$. В. Н. Носков усилил[22] второй из этих результатов при $n \geqslant 136$, получив равенство

$$D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n) = \begin{cases} 2n-2t-1, & \text{если } n = 2^t+t+1, \\ 2n-2t-2, & \text{если } 2^t+t+1 < n \leqslant 2^{t+1}+t+1, \end{cases}$$

где t — целое число. Г. Р. Погосян[19,20] распространил последнее равенство на случай $n \geqslant 1$ и доказал, что $D^{01}_{k\text{-П}\,(\text{Р})}(n) = D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n)$ для любых $n \geqslant 1$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. В. Н. Носков получил[22] также следующие результаты: для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕП}\,(\text{Р})}(f) = 3$ и $\frac{n}{2} \lesssim D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(f) \lesssim \frac{2n}{3}$. Он же установил[23], что $D^{01}_{k\text{-Д}\,(\text{Р})}(n) = \left(\frac{n}{k}\right)^{k(1+o(1))}$ при $n \to \infty$ и $\frac{k}{n} \to 0$, а также что $2^{\frac{n}{2}(1-o(1))} < D^{01}_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n) \leqslant 4(n+1)^3 \cdot 2^{0{,}773n}$. Г. В. Антюфеев и Д. С. Романов улучшили нижнюю оценку в последнем соотношении, доказав[24], что $D^{01}_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n) \gtrsim 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}$ (здесь и всюду далее во всех асимптотических соотношениях предполагается $n \to \infty$). В. Н. Носковым[25] при $n \geqslant 1$ доказано равенство $D^{01}_{\text{ЕД}\,(\text{Р})}(n) = 2n$, а для почти всех б. ф. f от n переменных — соотношение $\log n < D^{01}_{\text{ЕД}\,(\text{Р})}(f) < c \log n$, где $c < 17$.

О. А. Долотова для произвольного замкнутого класса б. ф. (класса Поста) $\mathcal{K}$, содержащего б. ф., существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных, при $n \in \mathbb{N}$ нашла[26] точное значение или асимптотику величины $\max D^{01}_{\text{ЕП}\,(\text{Р})}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящим от n переменных, из $\mathcal{K}$, а также значения, которые может принимать величина $D^{01}_{\text{ЕП}\,(\text{Р})}(f)$, где f — произвольная или почти любая функция от n переменных из $\mathcal{K}$, существенно зависящая от всех своих переменных. В. А. Варданян доказал[27], что $\max D^{01}_{\text{ЕП}\,(\text{Р})}(f) = 2n - 2\log n + O(\log\log n)$, $\max D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(f) = 2n - 2\log n + O(\log\log n)$, где оба максимума берутся по всем монотонным б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, и $D^{01}_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(f) \lesssim \frac{n}{2}$ для почти всех монотонных б. ф. f от n переменных.

Тесты при инверсных неисправностях на входах схем. Г. Р. Погосян при $n \geqslant 1$ установил[19,20] равенство $D^{\text{Inv}}_{\text{ЕП}\,(\text{Р})}(n) = n - t$, где $t \in \mathbb{Z}^+$ определяется из

[21] Weiss C. D. Bound of the length of terminal stuck-fault tests // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 3. — P. 305–309.

[22] Носков В. Н. О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискрет. анализ. Вып. 27. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1975. — С. 23–51.

[23] Носков В. Н. Диагностические тесты для входов логических устройств // Дискрет. анализ. Вып. 26. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. — С. 72–83.

[24] Антюфеев Г. В., Романов Д. С. Об оценках функции Шеннона длины диагностического теста при локальных константных неисправностях на входах схем // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. — 2016. — Вып. 2. — С. 49–51.

[25] Носков В. Н. О длинах минимальных единичных диагностических тестов, контролирующих работу входов логических схем // Методы дискрет. анализа в синтезе управл. систем. Вып. 32. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. — С. 40–51.

[26] Долотова О. А. О сложности контроля логических схем типа Поста: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Долотова Оксана Александровна. — М., 1991. — 101 с.

[27] Vardanian V. A. On the complexity of terminal stuck-at fault detection tests for monotone Boolean functions // Proc. IEEE VLSI Test Symp. — IEEE, 1994. — P. 182–185.

условия $2^{t-1}+t \leqslant n \leqslant 2^t+t$, а также соотношение $2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+1 \leqslant D^{\mathrm{Inv}}_{\text{ПП}\,(\mathrm{P})}(n) \leqslant n$. С. Р. Беджанова фактически доказала[28] неравенство $D^{\mathrm{Inv}}_{\text{ПД}\,(\mathrm{P})}(n) \geqslant 2^n-1$ при $n \geqslant 2$.

Далее приведём обзор результатов, касающихся неисправностей видов 1.1–1.3 (обрывов и/или замыканий контактов в контактных схемах). Для удобства разобьём его на шесть подразделов, соответствующих названиям §§2–7 диссертации.

Проверяющие тесты размыкания (§2 диссертации). Н. П. Редькин получил[29] оценку $D^0_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}+2^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}$ при $n \geqslant 0$.

Диагностические тесты размыкания (§3 диссертации). По аналогии с теоремой 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8] можно показать, что $D^0_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Х. А. Мадатян фактически установил[30], что $D^0_{\text{ПД}}(n) \geqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Н. П. Редькин доказал[31] соотношение $D^0_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n-2$ при $n \geqslant 2$.

Проверяющие тесты замыкания (§4 диссертации). Н. П. Редькин получил[29] асимптотическую оценку $D^1_{\text{ПП}}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log n}}+\frac{5}{2}}$.

Диагностические тесты замыкания (§5 диссертации). По аналогии с теоремой 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8] можно показать, что $D^1_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Х. А. Мадатян фактически установил[30], что $D^1_{\text{ПД}}(n) \geqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Н. П. Редькин доказал[31] соотношение $D^1_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n-2$ при $n \geqslant 2$.

Проверяющие тесты при обрывах и замыканиях контактов (§6 диссертации). Н. П. Редькин получил[32] оценку $D^{01}_{\text{ПП}}(n) \leqslant \frac{15}{16}\cdot 2^n$ при $n \geqslant 4$. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова доказали[33] неравенство $D^{01}_{\text{ЕП}}(n) \geqslant n+2$ при $n \geqslant 2$.

Диагностические тесты при обрывах и замыканиях контактов (§7 диссертации). В теореме 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что $D^{01}_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$. Х. А. Мадатян доказал[30] равенство $D^{0,1}_{\text{ПД}}(n) = 2^n$ при $n \geqslant 1$.

Перечислим теперь результаты, касающиеся неисправностей видов 3.1–3.9 (ОКН, ПКН либо ИН на входах и/или выходах элементов). Для удобства разобьём эти результаты на одиннадцать подразделов, первые восемь из которых соответствуют названиям §§9–16 диссертации.

Проверяющие тесты при однотипных константных неисправностях на выходах элементов (§9 диссертации). Для стандартного (классического) базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин[34] получил оценку $D^{B_0;\,p}_{\text{ПП}\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant n$ для

[28] Беджанова С. Р. О минимальных тестах для схем, реализующих дизъюнкцию // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 3–11.

[29] Редькин Н. П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискрет. анализа в оптимиз. управл. систем. Вып. 40. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — С. 87–99.

[30] Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Пробл. киберн. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.

[31] Редькин Н. П. О диагностических тестах для контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2019. — № 2. — С. 35–37.

[32] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискрет. анализа в исслед. экстрем. структур. Вып. 39. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — С. 80–87.

[33] Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах константной длины для обобщённых итеративных контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2015. — № 3. — С. 42–50.

[34] Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1988. —

$p = 0, 1$ при $n \geqslant 1$. Впоследствии эта оценка была улучшена Ю. В. Бородиной, которая установила[35], что $D^{B_0;\,p}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. Ей же для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ при $n \geqslant 1$ удалось найти точное значение[36,37] функций Шеннона $D^{B_1;\,1}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) = 1$ и $D^{B_1;\,0}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) = 1$ (второе из этих равенств получено совместно с П. А. Бородиным) и описание[38] всех булевых функций f, для которых $D^{B_1;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(f) = 1$, а для базиса $B_2 = \{x \,|\, y\}$ при $n \geqslant 2$ установить[39] неравенство $D^{B_2;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \geqslant n + 1$.

Диагностические тесты при однотипных константных неисправностях на выходах элементов (§10 диссертации). Все результаты этого подраздела справедливы для любого $p \in \{0, 1\}$. По аналогии с теоремой 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8] можно показать, что $D^{B;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$ для любого полного базиса B. Н. П. Редькин получил[40,41,42] следующие оценки: $D^{B_0;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2n + 1$ при $n \geqslant 1$, $D^{\mathtt{B}_1;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2\log\lceil n{+}1\rceil{+}1$ для бесконечного базиса $\mathtt{B}_1 = \{x_1\& \ldots \&x_t,$ $x_1 \vee \ldots \vee x_t, \overline{x} \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$ при $n \geqslant 1$ и $D^{B_0;\,p}_{\text{ПД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 2$.

Проверяющие тесты при произвольных константных неисправностях на выходах элементов (§11 диссертации). В теореме 10 на с. 116 книги Н. П. Редькина[8] с использованием метода синтеза СФЭ, предложенного С. М. Редди[43], для базиса Жегалкина B_1 была получена оценка $D^{B_1;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant n + 3$ при $n \geqslant 0$. В дальнейшем указанное неравенство было распространено С. С. Колядой[44] на случай произвольного ф. п. конечного базиса B (при $n \geqslant 1$, если $m(B) = 2$, и при $n \geqslant 3$, если $m(B) \geqslant 3$). Д. С. Романов установил[45,46] соотношения $2 \leqslant D^{\mathtt{B}_2;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 4$ для базиса $\mathtt{B}_2 = \{x\&y, x \oplus y, 1, \overline{x}(y \vee z) \vee x(y \sim z)\}$ и $2 \leqslant \hat{D}^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 4$ для любого ф. п. базиса B; наличие крышки над буквой D обусловлено тем, что в доказательстве последнего результата используется несколько

№ 2. — С. 17–21.

[35]Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

[36]Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2008. — № 5. — С. 49–52.

[37]Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

[38]Бородина Ю. В. Легкотестируемые схемы в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа «1» на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2019. — Т. 31, вып. 2. — С. 14–19.

[39]Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \,|\, y\}$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

[40]Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

[41]Редькин Н. П. О синтезе легкотестируемых схем в одном бесконечном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2007. — № 3. — С. 29–33.

[42]Редькин Н. П. К вопросу о длине диагностических тестов для схем // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 4. — С. 624–627.

[43]Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 11. — P. 1183–1188.

[44]Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Коляда Сергей Сергеевич. — М., 2013. — 77 с.

[45]Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем в одном базисе, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2012. — № 2. — С. 24–29.

[46]Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискрет. матем. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

другое определение неизбыточных схем. Для некоторых базисов B, а именно для базисов $\{\&, \oplus, \sim\}$, $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{x \,|\, y\}$, $\{x \downarrow y\}$, $\{\overline{x}, x\&\overline{y}\}$, $\{\overline{x}, x \vee \overline{y}\}$, а также любого полного базиса, содержащего обе булевы константы 0 и 1, эту крышку можно убрать.

Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин при $n \geqslant 0$ получил[47] оценку $D^{B;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$ для любого ф. п. конечного базиса B; Д. С. Романов доказал[48], что существует базис $\mathtt{B}_3$, для которого $m(\mathtt{B}_3) = 7$ и $2 \leqslant D^{\mathtt{B}_3;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 1$; Ю. В. Бородина для базиса $B_3 = \{\&, \neg\}$ установила[39] неравенство $D^{B_3;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \geqslant n + 1$ при $n \geqslant 2$. С. С. Коляда в главе 3 кандидатской диссертации[44] для любого $k \in \mathbb{N}$ получил оценку $D^{B_1;\,01}_{k\text{-П}\,(\text{O})}(n) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor + 1} C_n^i + 3$ при $n \geqslant 0$.

Диагностические тесты при произвольных константных неисправностях на выходах элементов (§12 диссертации). В теореме 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что $D^{B;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ для любого полного базиса B. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова[49] при $n \geqslant 1$ получили оценки $D^{B'_1;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 22$ и $D^{\mathtt{B}_4;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 22$ для базисов $B'_1 = \{\&, \oplus, 1\}$ и $\mathtt{B}_4 = \{\&, \oplus, \sim\}$, а также доказали существование базиса $\mathtt{B}_5$, для которого $m(\mathtt{B}_5) = 9$ и $D^{\mathtt{B}_5;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 6$.

Проверяющие тесты при однотипных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§13 диссертации). Н. П. Редькин для стандартного базиса B_0 получил[50] оценку $D^{B_0;\,p}_{\text{ПП}\,(\text{I})}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, где $p = 0, 1$.

Диагностические тесты при однотипных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§14 диссертации). Н. П. Редькин[51] доказал, что $D^{B_0;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{I})}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, а также фактически установил соотношение $D^{B_0;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{IO})}(n) = O(2^{\frac{n}{2}})$ для $p = 0, 1$.

Проверяющие тесты при произвольных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§15 диссертации). В рассуждениях на с. 116 книги Н. П. Редькина[8] показано, что $D^{B_1;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{IO})}(n) \leqslant n + 3$ при $n \geqslant 0$. Он же доказал[52], что $D^{B_0;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{I})}(n) = O\left(\frac{2^n}{\sqrt{\log n}}\right)$. Д. С. Романовым и Е. Ю. Ро-

[47] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

[48] Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

[49] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих короткие единичные диагностические тесты при константных неисправностях на выходах элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 2 (38). — С. 87–102.

[50] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Матем. — 1988. — № 7. — С. 57–64.

[51] Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискрет. матем. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.

мановой при $n \geqslant 1$ установлены[53] неравенства $D^{B_1';\,01}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$ и $D^{\mathtt{B}_4;\,01}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$; в частности, при $n \geqslant 14$ улучшен первый результат, упомянутый в этом подразделе (любая схема в базисе B_1' является также схемой в базисе B_1).

Диагностические тесты при произвольных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§16 диссертации). Результатов такого рода получено не было.

Проверяющие тесты при инверсных неисправностях на выходах элементов. С. В. Коваценко доказал[54] равенство $D^{B_1;\,\text{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$. Н. П. Редькин[55,56] получил оценку $D^{B_0;\,\text{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(n) \leqslant 2$, а для произвольного полного конечного базиса B — оценку $D^{B;\,\text{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(n) \leqslant 3$ (обе оценки справедливы при $n \geqslant 0$). Д. С. Романов доказал[57], что существует базис $\mathtt{B}_7$, для которого $m(\mathtt{B}_7) = 9$ и $D^{\mathtt{B}_7;\,\text{Inv}}_{\text{ПП (O)}}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 0$.

Диагностические тесты при инверсных неисправностях на выходах элементов. С. В. Коваценко получил[54] оценки $D^{B_1;\,\text{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant n + 1$ при $n \geqslant 1$ и $D^{B_1;\,\text{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2^{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Д. С. Романов улучшил первую из этих оценок, установив[58] равенство $D^{B_1';\,\text{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 0$; также им доказано[59] равенство $D^{B_0;\,\text{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$, причём для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ найдено точное значение величины $D^{B_0;\,\text{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(f)$. И. Г. Любич и Д. С. Романов установили[60] неравенство $D^{B;\,\text{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 4$ для любого ф. п. базиса B, содержащего хотя бы одну из функций $x\&y$, $x \vee y$, $x \,|\, y$, $x \downarrow y$, и любого $n \geqslant 1$. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова для бесконечного базиса $\mathtt{B}_8 = \{x_1\& \ldots \&x_t, x \oplus y, 1 \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$ доказали[61], что $D^{\mathtt{B}_8;\,\text{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$. Отметим, что последний результат, а также неравен-

---

[52]Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1997. — № 1. — С. 12–18.

[53]Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискрет. матем. — 2017. — Т. 29, вып. 4. — С. 87–105.

[54]Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

[55]Редькин Н. П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Междунар. конф. по пробл. теоретической киберн. (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1999. — С. 196.

[56]Редькин Н. П. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 12. — М.: Физматлит, 2003. — С. 217–230.

[57]Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2015. — № 1. — С. 30–37.

[58]Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2015. — № 4 (36). — С. 38–54.

[59]Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 3 (39). — С. 56–72.

[60]Любич И. Г., Романов Д. С. О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над некоторыми базисами // Прикл. матем. и информ. Вып. 58. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 47–61.

[61]Романов Д. С., Романова Е. Ю. Короткий диагностический тест для одного класса схем // XXI век: итоги прошлого и пробл. настоящего плюс. Сер.: Технические науки. Информ., вычисл. техника и управл. — 2017. — № 04 (38). — С. 91–93.

ство $D^{B_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (О)}}(n) \leqslant 2^{n-2}$, полученное С. В. Коваценко, относятся к тематике §17 диссертации.

Тесты при неисправностях элементов и входов схем. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ целое число t определяется из неравенств $2^t + t + 1 \leqslant n \leqslant 2^{t+1} + t + 1$. В докторской диссертации Д. С. Романова[62] получены, в частности, следующие результаты: $2n-2t-2 \leqslant D^{B;\,01}_{\text{ЕП (РО)}}(n) \leqslant 2n-2t+3$ при $n \geqslant 1$ для базисов $\{\&, \oplus, \sim\}$, $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{x \,|\, y\}$, $\{x \downarrow y\}$, $\{\overline{x}, x\&\overline{y}\}$, $\{\overline{x}, x \vee \overline{y}\}$, а также любого полного базиса, содержащего обе булевы константы 0 и 1; $2n - 2t - 2 \leqslant D^{B;\,01}_{\text{ЕП (РIO)}}(n) \leqslant 2n-2t+15$ при $n \geqslant 1$, где B — один из базисов $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{\&, \oplus, \sim\}$; $2n-2t-2 \leqslant D^{\mathtt{B}_3;\,01}_{\text{ПП (РО)}}(n) \leqslant 2n - 2t + 3$ при $n \geqslant 1$, где $\mathtt{B}_3$ — некоторый базис с $m(\mathtt{B}_3) = 7$; $2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant D^{\mathtt{B}_7;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПП (РО)}}(n) \leqslant n+4$ при $n \geqslant 3$, где $\mathtt{B}_7$ — некоторый базис с $m(\mathtt{B}_7) = 9$; $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (РО)}}(n) = 2n+O(1)$ при $n \to \infty$, где B — один из базисов $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{\&, \oplus, \sim\}$; $D^{B_1';\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (РО)}}(n) = n$ при $n \geqslant 1$; $n \leqslant D^{B_0;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (РО)}}(n) \leqslant n + 1$ при $n \geqslant 1$.

Цели и задачи

Основными целями работы являются:

- нахождение для произвольной б. ф. f точных значений длин минимальных тестов для реализующих эту функцию КС и СФЭ при различных исходных условиях, т. е. нахождение точных значений величин $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(f)$ и $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T\,(M)}}(f)$ при различных H, T, B и M;

- получение нетривиальных и не известных ранее верхних и нижних оценок (в идеале — точных значений) функций Шеннона длин тестов для КС и СФЭ при различных исходных условиях, т. е. нахождение новых и улучшение существующих оценок величин $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(n)$ и $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T\,(M)}}(n)$ при различных H, T, B, M и n;

- получение для почти всех б. ф. от n переменных нетривиальных и не известных ранее верхних и нижних оценок (в идеале — точных значений) длин минимальных тестов для реализующих эти функции КС и СФЭ при различных исходных условиях, т. е. нахождение новых и улучшение существующих оценок величин $D^{\mathrm{H}}_{\mathrm{T}}(f)$ и $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T\,(M)}}(f)$ при различных H, T, B и M для почти всех б. ф. f от n переменных.

Научная новизна

Результаты диссертации, за исключением отдельно оговоренных случаев, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории контроля и диагностики управляющих систем. Возможно включение этих результатов в образовательные программы для студентов

[62] Романов Д. С. Об оценках длин минимальных тестов для логических схем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09 / Романов Дмитрий Сергеевич. — М., 2019. — 350 с.

и аспирантов математических специальностей. Представленные в диссертации методы синтеза могут быть использованы на практике при проектировании легкотестируемых цифровых устройств и схем.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, математической теории синтеза, контроля и диагностики управляющих систем, теории булевых функций, комбинаторики, а также ряд новых предложенных автором методов синтеза и анализа контактных схем и схем из функциональных элементов. Все верхние оценки величин $D(f)$ и $D(n)$ с различными верхними и нижними индексами доказаны конструктивно, т. е. с предъявлением конкретных схем и тестов для них, дающих эти оценки.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации:

- найдены точные значения а) функций Шеннона длин единичных проверяющих, полных проверяющих и полных диагностических тестов размыкания и замыкания для контактных схем, б) длин минимальных единичного и полного проверяющих тестов размыкания при реализации произвольной булевой функции контактными схемами, в) длин минимальных единичных и полных проверяющих тестов размыкания и замыкания, а также единичного проверяющего теста относительно обрывов и замыканий контактов при реализации почти любой булевой функции контактными схемами;

- получены новые верхние оценки а) для любого натурального k — функций Шеннона длин k-диагностических тестов размыкания и замыкания для контактных схем, б) длины минимального единичного диагностического теста относительно обрывов и замыканий контактов, а также — для любого натурального k — длин минимальных k-диагностических тестов размыкания и замыкания при реализации почти любой булевой функции контактными схемами;

- получены новые нижние оценки мощностей множеств самых труднотестируемых булевых функций с точки зрения полных диагностических тестов относительно обрывов и замыканий, только обрывов или только замыканий контактов в реализующих эти функции контактных схемах;

- для ряда комбинаций полного базиса, вида неисправностей функциональных элементов и типа теста найдено точное значение длины минимального теста при реализации произвольной либо почти любой булевой функции схемами из функциональных элементов в указанном базисе и/или точное значение функции Шеннона длины теста для таких схем;

- для ряда комбинаций полного базиса, вида неисправностей функциональных элементов и типа теста получены новые оценки функции Шеннона длины теста для схем из функциональных элементов в указанном базисе и/или оценки длины минимального теста при реализации почти любой булевой функции такими схемами;

- получена новая нижняя оценка функции Шеннона длины полного диагностического теста при однотипных константных неисправностях на входах схем;

- предложен метод реализации булевых функций легко диагностируемыми схемами из функциональных элементов относительно единичных неисправностей элементов в схемах, с использованием которого получены новые верхние оценки функций Шеннона длин единичных диагностических тестов в различных полных базисах при различных неисправностях элементов.

Степень достоверности результатов

Все результаты диссертации математически строго доказаны.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2015–2020 гг.), на семинаре «Диагностика управляющих систем» под руководством профессора Н. П. Редькина (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, 2016–2019 гг.), на онлайн-семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (2020 г.), на онлайн-семинаре «Теория управляющих систем и математические модели СБИС» кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (2020 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 11–15 апреля 2016 г.), на XII Международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.), на конференции молодых учёных ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 29 ноября 2016 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 10–14 апреля 2017 г.), на XVIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.), на X Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.), в рамках школы-конференции молодых ученых «Математические модели, высокоточные алгоритмы и программное обеспечение для суперкомпьютеров–2018» (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 27–29 ноября 2018 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 8–12 апреля 2019 г.), на XIII Международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 17–22 июня 2019 г.), в рамках школы-конференции молодых ученых «Математические основы конструирования современных алгоритмов в высокопроизводительных вычислениях–2019» (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 4–5 декабря 2019 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 30 работах, 21 из которых в научных журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ; список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на восемнадцать параграфов, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, содержащего 324 наименования, и двух приложений. Общий объем диссертации — 377 страниц, включая 42 рисунка и 12 таблиц. В каждом параграфе принята сквозная нумерация теорем, лемм, утверждений, следствий, замечаний, примеров, формул, рисунков и таблиц.

Содержание диссертации

Во введении содержится обзор результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов диссертации.

В главе 1 изучаются возможности реализации булевых функций двухполюсными контактными схемами, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно обрывов и/или замыканий контактов.

В §1 устанавливается несколько вспомогательных утверждений, которые используются в §§2–7. Приведём некоторые из них.

Утверждение 1.3. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливы равенства* $D^0_{\text{ПП}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ *и* $D^1_{\text{ПП}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.

Следствие 1.2. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливы равенства* $D^0_{\text{ПП}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n)$ *и* $D^1_{\text{ПП}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n)$.

Утверждение 1.4. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *и любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства* $D^0_{k\text{-П}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ *и* $D^1_{k\text{-П}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.

Следствие 1.3. *Для любых* $n \geqslant 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства* $D^0_{k\text{-П}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n)$ *и* $D^1_{k\text{-П}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n)$.

Из утверждений 1.3, 1.4 и следствий 1.2, 1.3 вытекает, что для любых $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливы равенства

$$D^0_{\text{ПП}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f) = D^0_{k\text{-П}}(f), \tag{1.1}$$
$$D^0_{\text{ПП}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n) = D^0_{k\text{-П}}(n), \tag{1.2}$$
$$D^1_{\text{ПП}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f) = D^1_{k\text{-П}}(f), \tag{1.3}$$
$$D^1_{\text{ПП}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n) = D^1_{k\text{-П}}(n). \tag{1.4}$$

Далее перечислим основные результаты главы 1.

В §2 рассматриваются проверяющие тесты для КС относительно обрывов контактов. В формулировке нижеследующей теоремы присутствует величина $m(f)$, которая может быть достаточно просто вычислена по столбцу значений б. ф. $f(\tilde{x}^n)$.

Определение этой величины ввиду своей громоздкости здесь не приводится; его можно найти в §2 диссертации.

Теорема 2.1. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ЕП}}(f) = m(f)$.

Следствие 2.1. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ЕП}}(n) = n$.

Следствие 2.2. *Для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^0_{\text{ЕП}}(f) = 2$.

С использованием соотношений (1.1)–(1.4) из основных результатов §2 и §4 можно получать новые результаты. Например, из следствия 2.1 и (1.2) вытекает равенство $D^0_{\text{ПП}}(n) = n$, существенно улучшающее неравенство $D^0_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ из работы Н. П. Редькина 1983 г.[29].

В §3 рассматриваются диагностические тесты для КС относительно обрывов контактов.

Теорема 3.2. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0,1,2\}, \\ n+1, & \text{если } n = 3, \\ n + k(n-2), & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 3.1. *Для любых* $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *справедливо неравенство* $D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \leqslant n + k(n-2)$.

Следствие 3.2. *Справедливо неравенство*

$$D^0_{\text{ЕД}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0,1,2\}, \\ n+1, & \text{если } n = 3, \\ 2n-2, & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 3.2 улучшает оценку $D^0_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, которую можно получить по аналогии с теоремой 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8].

Теорема 3.3. *При условии* $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ *для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^0_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$.

Следствие 3.3. *Для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^0_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$.

Следствие 3.4 (из теоремы 3.4). *Для любого* $n \geqslant 1$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$.

Следствие 3.4 улучшает неравенство $D^0_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ из работы Н. П. Редькина 2019 г.[31], полученное для $n \geqslant 2$.

Положим $w(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Следствие 3.5 (из теоремы 3.5). *Число б. ф.* f *от* n *переменных, для которых* $D^0_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, *при* $n \geqslant 2$ *не меньше*

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left(\frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$.

Следствие 3.5 с учётом следствия 3.4 показывает, что существует достаточно много б. ф. f от n переменных, для которых $D^0_{\text{ПД}}(f) = D^0_{\text{ПД}}(n)$, т. е. самых труднотестируемых б. ф. от n переменных с точки зрения ПДТ размыкания для реализующих эти функции контактных схем.

В §4 рассматриваются проверяющие тесты для КС относительно замыканий контактов.

Теорема 4.2. *Для почти всех б. ф. f от n переменных выполняется равенство $D^1_{k\text{-П}}(f) = 2$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 4.4. *Для любых $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $D^1_{k\text{-П}}(n) = n$.*

Из теоремы 4.4 и соотношения (1.4) вытекает равенство $D^1_{\text{ПП}}(n) = n$, существенно улучшающее асимптотическое неравенство $D^1_{\text{ПП}}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log n}}+\frac{5}{2}}$ из работы Н. П. Редькина 1983 г.[29].

В §5 рассматриваются диагностические тесты для КС относительно замыканий контактов.

Теорема 5.1. *При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$.*

Следствие 5.1. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$.*

Теорема 5.3. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n + 1, & \text{если } n = 3, \\ n + k(n - 2), & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 5.2. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant$ $\leqslant n + k(n - 2)$.*

Следствие 5.3. *Справедливо неравенство*

$$D^1_{\text{ЕД}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n + 1, & \text{если } n = 3, \\ 2n - 2, & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 5.3 улучшает оценку $D^1_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, которую можно получить по аналогии с теоремой 9 на с. 113 книги Н. П. Редькина[8].

Следствие 5.4 (из теоремы 5.4). *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^1_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$.*

Следствие 5.4 улучшает неравенство $D^1_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ из работы Н. П. Редькина 2019 г.[31], полученное для $n \geqslant 2$.

Следствие 5.5 (из теоремы 5.5). *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^1_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, при $n \geqslant 2$ не меньше*

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left(\frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$.

(Здесь так же, как и в формулировке следствия 3.5, полагаем $w(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$.)

В §6 рассматриваются единичные проверяющие тесты для КС относительно обрывов и замыканий контактов. Назовём б. ф. $f_2(\tilde{x}^n)$ *родственной* б. ф. $f_1(\tilde{x}^n)$, если существуют такие попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$. Здесь и всюду далее используется обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0, \end{cases}$$

где $x \in \{0, 1\}$.

Теорема 6.1. *Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф.. Справедливо равенство*

$$D^{01}_{\text{ЕП}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ 2, & \text{если } f \text{ родственна функции } x_1, \\ 3, & \text{если } f \text{ родственна одной из функций } x_1x_2,\ x_1 \vee x_2. \end{cases}$$

В остальных случаях $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant 4$.

Теорема 6.1 даёт описание всех б. ф. f, для которых величина $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)$ равна 0, 1, 2 и 3. Оказывается, в большинстве других случаев эта величина принимает значение 4.

Теорема 6.3. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) = 4$.*

Отметим, что единую константную верхнюю оценку величины $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)$ для любой б. ф. f получить невозможно, поскольку $D^{01}_{\text{ЕП}}(n) \geqslant n + 2$ при $n \geqslant 2$, как показано в работе Д. С. Романова и Е. Ю. Романовой 2015 г.[33].

В §7 рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для КС относительно обрывов и замыканий контактов.

Теорема 7.2. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$.*

Следствие 7.1 (из теорем 7.4 и 7.5). *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^{01}_{\text{ПД}}(f) = 2^n$, при $n \geqslant 2$ не меньше $4 \cdot 2^{2^{n-2}} - 6$.*

Следствие 7.1 с учётом равенства $D^{01}_{\text{ПД}}(n) = 2^n$, установленного в работе Х. А. Мадатяна 1970 г.[30], показывает, что существует достаточно много самых труднотестируемых б. ф. от n переменных с точки зрения ПДТ относительно обрывов и замыканий контактов в реализующих эти функции контактных схемах (при этом в указанной работе фактически было получено равенство $D^{01}_{\text{ПД}}(f) = 2^n$ для двух случаев: $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$, где $n \geqslant 1$).

В главе 2 изучаются возможности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в различных полных базисах, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно однотипных константных, произвольных константных либо инверсных неисправностей на входах и/или выходах элементов.

В §8 устанавливается несколько вспомогательных утверждений, которые используются в §§9–18. В частности, получен аналог принципа двойственности (см., например, с. 24 книги С. В. Яблонского[18]) для задачи синтеза легкотестируемых СФЭ. Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого ф. п. базиса B обозначим через $f^*(\tilde{x}^n)$ двойственную к f б. ф. $\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$; а через B^* — базис, получающийся из B заменой всех содержащихся в нём б. ф. на двойственные. Положим

$$\mathrm{H}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{H} = 0, \\ 0, & \text{если } \mathrm{H} = 1, \\ \mathrm{H}, & \text{если } \mathrm{H} \in \{01, \mathrm{Inv}\}. \end{cases}$$

Утверждение 8.9. *Для любого ф. п. базиса B, любых допустимых* M, H, T *и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство $D^{B^*;\,\mathrm{H}^*}_{\mathrm{T\,(M)}}(f^*) = D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T\,(M)}}(f)$, если значение его правой части определено.*

Следствие 8.1. *Для любого ф. п. базиса B, любых допустимых* M, H, T *и любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B^*;\,\mathrm{H}^*}_{\mathrm{T\,(M)}}(n) = D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T\,(M)}}(n)$, если значение его правой части определено.*

С использованием утверждения 8.9 и следствия 8.1 из основных результатов главы 2, содержащихся в §§9–18 и приведённых ниже, можно получать двойственные им результаты.

В §9 рассматриваются единичные и полные проверяющие тесты для СФЭ относительно ОКН типа 1 или типа 0 на выходах элементов. Обозначим через P_2 множество всех б. ф, а через M — множество всех монотонных б. ф. (определение монотонной б. ф. см., например, на с. 36 книги С. В. Яблонского[18]). В следующей теореме описан достаточно обширный класс ф. п. базисов B, для которых $D^{B;\,1}_{\mathrm{ЕП\,(O)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$.

Теорема 9.3. *Пусть $B \subseteq (\mathsf{M} \cup \{\overline{x}_1 \vee h \mid h \in P_2\}) \setminus \{1\}$ — такой ф. п. базис, что отождествлением и переименованием переменных из монотонных функций этого базиса можно получить функции $x\&y$ и $x \vee y$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,1}_{\mathrm{ЕП\,(O)}}(n) = 2$.*

Рассмотрим стандартный базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Выделим возможное представление б. ф. $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{8.1}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной по переменной x_i*, где $n \geqslant 1$ и $i \in \in \{1, \ldots, n\}$, если для любых булевых констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n$ справедливо неравенство $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \leqslant f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Через m_f обозначим число переменных, по которым функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна, а через $\tilde{\sigma}_f$ — двоичный набор длины n, i-я компонента которого равна 0 тогда и только тогда, когда данная функция монотонна по переменной x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 9.4. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_0;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1) или } f \equiv 1, \\ 2, & \text{если } \mathrm{m}_f \leqslant n-2 \text{ и } f(\tilde{\sigma}_f) = 1, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 9.4 уточняет равенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) = 2$ из работы Ю. В. Бородиной 2008 г.[35], полученное для $n \geqslant 2$.

Выделим четыре возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = 0,\ \overline{x}_i \text{ или } x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2}\ldots\&x_{i_k}, \tag{9.6}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_{i_1}\&\overline{x}_{i_2}\&x_{i_3}\&\ldots\&x_{i_k} \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2})^{\sigma_2}\&x_{i_3})^{\sigma_3}\&\ldots\&x_{i_k})^{\sigma_k}, \tag{9.7}$$

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1}\&\ldots\&x_{i_k}^{\sigma_k}, \tag{9.15}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2}^{\sigma_2})^{\delta_1}\&x_{i_3}^{\sigma_3})^{\delta_2}\&\ldots\&x_{i_k}^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}, \tag{9.16}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (9.15) и $2 \leqslant k \leqslant n$ в представлениях (9.6), (9.7), (9.16); $i, i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, индексы $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1} \in \{0, 1\}$, причём в представлении (9.7) хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0 и если $k = 2$, то полагаем $x_{i_3}\&\ldots\&x_{i_k} \equiv 1$, а в представлении (9.16) хотя бы одно из чисел $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ равно 0.

В формулировках следующих двух теорем и следствий из них под B понимается произвольное ф. п. подмножество множества $\{\overline{x}, x_1\&\ldots\&x_m \mid m \geqslant 2\}$, например, множество $B_3 = \{\&, \neg\}$.

Теорема 9.5. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B;\,1}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.6)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.7)}, \\ 3, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B;\,1}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(f)$ не определено.

Следствие 9.1. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,1}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) = 3$.*

Теорема 9.6. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B;\,0}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.15), но не в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.16)}, \\ 3, & \text{если } f \text{ не представима в видах (8.1), (9.15), (9.16).} \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ *или* $f \equiv 1$, *то значение* $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ *не определено.*

Следствие 9.2. *Для любого* $n \geqslant 2$ *справедливо равенство* $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 3$.

В §10 рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для СФЭ относительно ОКН типа 1 или типа 0 на выходах элементов.

Теорема 10.1. *Для любого ф. п. конечного базиса* B *и любого* $p \in \{0, 1\}$ *справедливо неравенство* $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 2$ *при* $n > m(B)$, *причём для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 2$.

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \vee \ldots \vee K_m, \tag{10.1}$$

где $m \geqslant 1$ и каждое слагаемое K_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j} x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Теорема 10.2. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$, *отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.1), но не в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.1)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, *то значение* $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ *не определено.*

Следствие 10.1. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо равенство* $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$.

Следствие 10.1 улучшает неравенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 2n+1$ из работы Н. П. Редькина 1992 г.[40], которое было получено для $n \geqslant 1$.

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$. Выделим два возможных представления функции f:

$$f(\tilde{x}^n) = 0 \text{ или } x_i, \tag{10.8}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$$f(\tilde{x}^n) = 1 \text{ или } L_1 \& \ldots \& L_m, \tag{10.9}$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель L_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j} \oplus x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Теорема 10.3. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство*

$$D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.9), но не в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима ни в одном из видов (10.8), (10.9)}. \end{cases}$$

Следствие 10.2. *Для любого* $n \geqslant 2$ *справедливо равенство* $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$.

Следствия 10.1 и 10.2 показывают, что неравенство $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 2$ из теоремы 10.1 в общем случае неулучшаемо.

Теорема 10.4. *При* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $D^{0}_{\text{ПД (Р)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$.

Теорема 10.4 напрямую не относится к тематике §10 и, более того, является единственным основным результатом диссертации, касающимся неисправностей (а именно ОКН типа 0) на входах схем. Однако её доказательство тесно связано с доказательством следующего результата.

Рассмотрим базис $B_2 = \{x \,|\, y\}$ (штрих Шеффера).

Теорема 10.5. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство* $D^{B_2;\,1}_{\text{ПД}\,(\text{O})}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}$.

В §11 рассматриваются единичные и полные проверяющие тесты для СФЭ относительно ПКН на выходах элементов. В следующей теореме описан достаточно обширный класс ф. п. базисов B, для которых $D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$; в этот класс, в частности, входят все полные базисы (с точностью до переименования переменных), состоящие из функций от не более чем двух переменных и не содержащие констант.

Теорема 11.1. *Пусть B — произвольное ф. п. подмножество множества* $\{(x_1^\sigma \& \ldots \& x_n^\sigma)^\delta, (x_1 \& \overline{x}_2 \& h)^\delta, x_1 \oplus x_2 \oplus c \mid n \in \mathbb{N};\ h \in P_2;\ \sigma, \delta, c \in \{0,1\}\} \setminus \{0,1\}$. *Тогда $D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$, причём для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(f) \geqslant 3$.*

Рассмотрим базис $B_4 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$.

Теорема 11.2. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(f)$ не определено.

Следствие 11.1. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) = 2$.*

Следствие 11.1 показывает, что при рассмотрении в качестве B базиса B_4, содержащего, помимо б. ф. от одной и двух переменных, только одну, причём «просто устроенную», функцию от трёх переменных, неравенство $D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \geqslant 3$ из теоремы 11.1 уже не выполняется.

Рассмотрим базис $B_5 = \{h^{\sigma_1}(x,y,z,t), (x \oplus y \oplus z)^{\sigma_2}\}$, где σ_1, σ_2 — фиксированные булевы константы, хотя бы одна из которых равна 0, а $h(x,y,z,t)$ — б. ф., заданная следующей таблицей (вместо звёздочки может стоять как 0, так и 1):

x	y	z	t	$h(x,y,z,t)$	x	y	z	t	$h(x,y,z,t)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	$*$	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Теорема 11.4. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 11.3. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(n) = 2$.*

Отметим, что базис B_5, особенно в случае $h(x, y, z, t) = x(y \sim zt) \vee y\overline{z}$, возникающем, когда в таблице вместо звёздочки стоит 0, существенно проще базиса $\mathtt{B}_3$, для которого Д. С. Романов получил[48] оценку $D^{\mathtt{B}_3;\,01}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 0$, а сама оценка из следствия 11.3 при этом ниже и точнее (установлено точное равенство).

Рассмотрим базисы $B_6 = \{\&, \vee, \oplus, 1\}$, $B_6' = \{\&, \vee, \oplus, \to\}$.

Теорема 11.5. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B_6;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f) \leqslant 4$.*

В следующих двух теоремах рассматриваются СФЭ, содержащие не более одной фиктивной входной переменной и реализующие заданные булевы функции.

Теорема 11.6. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_6;\,01\,(+1)}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 5$.*

Теорема 11.7. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_6';\,01\,(+1)}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 4$.*

В §12 рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для СФЭ относительно ПКН на выходах элементов.

Следствие 12.1 (из теоремы 12.1). *Если B — произвольный ф. п. конечный базис и $n > m(B)$, то $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 3$ и для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 3$.*

Рассмотрим базис $B_7 = \{\overline{\varphi}(\tilde{x}^6)\}$, где $\varphi(\tilde{x}^6)$ — б. ф., определение которой ввиду своей громоздкости здесь не приводится; его можно найти в §12 диссертации. Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = \varphi^\sigma(x_{i_1}, \ldots, x_{i_6}), \tag{12.6}$$

где $i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sigma \in \{0, 1\}$.

Теорема 12.3. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (12.6), но не в виде (8.1)}, \\ 3, & \text{если } f \text{ не представима в виде (12.6)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 12.3. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 3$.*

Следствие 12.3 демонстрирует, что неравенство $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 3$ из следствия 12.1 в общем случае неулучшаемо.

Отметим, что базис B_7 проще базиса $\mathtt{B}_5$, для которого Д. С. Романов и Е. Ю. Романова установили[49] неравенство $D^{\mathtt{B}_5;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 6$ при $n \geqslant 1$ (базис $\mathtt{B}_5$ состоит из одной б. ф. от девяти переменных, одной б. ф. от четырёх переменных, а также из

функций $x\&y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$), а сама оценка из следствия 12.3 при этом ниже и точнее (получено точное равенство).

Рассмотрим базис $B_3 = \{\&, \neg\}$.

Теорема 12.4. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство* $D^{B_3;\,01}_{\text{ПД (O)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}$.

В §13 рассматриваются k-проверяющие тесты для СФЭ относительно ОКН типа 0 или типа 1 на входах и выходах, а также только на входах элементов. В §§13–15, а также в теореме 16.1 и следствии 16.1 из §16 предполагается, что k — произвольное натуральное число, и приведены примеры ф. п. конечных базисов B, для которых найдены константные (не зависящие от n и k) точные значения величин $D^{B;\,\text{H}}_{\text{T (M)}}(n)$ и $D^{B;\,\text{H}}_{\text{T (M)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ при некоторых $\text{M} \in \{\text{I}, \text{IO}\}$, $\text{H} \in \{0, 1, 01\}$ и $\text{T} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$.

Рассмотрим базис $B_8(k) = \{\varphi(\tilde{x}^m), \overline{x}\}$, где $m = \max(k+1; 3)$ и $\varphi(\tilde{x}^m) = x_1 \ldots x_m \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m$.

Теорема 13.1. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1)}. \end{cases}$$

Следствие 13.1. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство* $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$.

В формулировке следующей теоремы полагаем $(\tilde{1}^n) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$.

Теорема 13.2. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 0, *справедливо равенство*

$$D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1) и } f(\tilde{1}^n) = 1, \\ 2, & \text{если } f(\tilde{1}^n) = 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 13.2. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство* $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 2$.

В §14 рассматриваются k-диагностические тесты для СФЭ относительно ОКН типа 0 или типа 1 на входах и выходах, а также только на входах элементов.

Рассмотрим базис $B_9(k) = \{\psi(\tilde{x}^q), \overline{\psi}(\tilde{x}^q)\}$, где $q = 2k + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2$, а $\psi(\tilde{x}^q)$ — б. ф., определение которой ввиду своей громоздкости здесь не приводится; его можно найти в §14 диссертации.

Теорема 14.1. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1)}. \end{cases}$$

Следствие 14.1. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство* $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$.

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_s}, \tag{14.1}$$

где $s \in \{1, \ldots, n\}$ и $i_1, \ldots, i_s$ — попарно различные индексы от 1 до n.

Теорема 14.2. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 0, *справедливо равенство*

$$D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (14.1), но не в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (14.1)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 14.2. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 2$.*

В §15 рассматриваются k-проверяющие тесты для СФЭ относительно ПКН на входах и выходах, а также только на входах элементов.

Рассмотрим базис $B_{10}(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \psi(\tilde{x}^{k+1}), \overline{x}, 0\}$, где $\psi(\tilde{x}^{k+1}) = x_1 \ldots x_{k+1} \vee \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{k+1}$, а $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — б. ф., определение которой для краткости здесь не приводится; его можно найти в §15 диссертации.

Теорема 15.1. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.8)}. \end{cases}$$

Следствие 15.1. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(n) = 2$.*

Назовём б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ *палиндромной*, если на любой паре двоичных наборов длины n, различающихся во всех компонентах, она принимает одинаковые значения.

Теорема 15.2. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1)} \\ & \text{и не является палиндромной}, \\ 3, & \text{если } f \text{ — палиндромная функция и } f \not\equiv 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 15.2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 3$.*

В §16 рассматриваются k-диагностические тесты для СФЭ относительно ПКН на входах и выходах, а также только на входах элементов.

Рассмотрим базис $B_{11}(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2}), \overline{x}, 0\}$, где $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — функция из базиса $B_{10}(k)$, а $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ и $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ — б. ф., определения которых для краткости здесь не приводятся; эти определения можно найти в §16 диссертации.

Теорема 16.1. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство*

$$D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.8)}. \end{cases}$$

Следствие 16.1. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо равенство* $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 2$.

Б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной*, если $f^* = f$ (см., например, с. 34 книги С. В. Яблонского[18]).

В следующей теореме и следствии из неё рассмотрен случай $k = 1$.

Теорема 16.2. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$, *отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f = \overline{x}_i \text{ для некоторого } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ 3, & \text{если } f \text{ — несамодвойственная функция и } f \not\equiv 0, \\ 4, & \text{если } f \text{ — самодвойственная функция} \\ & \text{и } f \notin \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, *то значение* $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f)$ *не определено.*

Следствие 16.2. *Для любого* $n \geqslant 3$ *справедливо равенство* $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(n) = 4$.

Теорема 16.3. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство* $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 4$ *при* $n \geqslant 3$, *причём в случае* $k \geqslant 2$ *для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = 4$.

В §17 рассматриваются полные диагностические тесты для СФЭ относительно ИН на выходах элементов. Приведён пример ф. п. конечного базиса B, для которого найдена константная верхняя оценка величины $D^{B;\,\text{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n)$. А именно, рассмотрим базис $B_{12} = \{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$.

Теорема 17.1. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливы неравенства* $1 \leqslant D^{B_{12};\,\text{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant$ $\leqslant 2$.

В §18 предложен метод построения СФЭ в произвольном ф. п. базисе, допускающих короткие единичные диагностические тесты относительно ОКН, ПКН либо ИН на входах и/или выходах элементов, основанный на существовании схем в том же базисе, допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно неисправностей такого же типа — **теорема 18.1**. Формулировка данного результата ввиду своей громоздкости здесь не приводится. С использованием теоремы 18.1 получен ряд новых верхних оценок функций Шеннона длины ЕДТ для схем в различных базисах при различных неисправностях элементов; эти оценки сформулированы в следующих пяти теоремах.

Рассмотрим базис $B_8(1) = \{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3, \overline{x}\}$.

Теорема 18.2. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_8(1);\,0}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3$.

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$.

Теорема 18.3. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_1';\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 3$.

Рассмотрим базис $B_{10}(1)$, получаемый из определённого выше семейства базисов $B_{10}(k)$ при $k = 1$.

Теорема 18.4. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_{10}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 4$.

Рассмотрим базис $B_4 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$.

Теорема 18.5. *Для любого* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 4$.

Теорема 18.6. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_1';\,\text{Inv}}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3$.

В заключении подводятся итоги выполненного исследования, перечисляются основные нерешённые проблемы по тематике диссертации, указываются различные обобщения рассмотренных в диссертации постановок задач.

В приложениях А и Б приведены сводные таблицы результатов по тематикам глав 1 и 2 диссертации.

Заключение

В диссертации рассмотрены задачи реализации булевых функций легкотестируемыми контактными схемами и схемами из функциональных элементов. Получен ряд новых верхних и нижних оценок длин минимальных проверяющих и диагностических тестов для схем, реализующих заданные, произвольные или почти все булевы функции от n переменных; во многих случаях найдены точные значения этих длин. Результаты диссертации существенно расширяют известные ранее теоретические факты о возможностях реализации булевых функций легкотестируемыми схемами и могут найти применение на практике при проектировании современных цифровых устройств и схем, имеющих заданное функционирование и допускающих короткие тесты.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Николаю Петровичу Редькину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, всем сотрудникам сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша РАН и лично Алексею Дмитриевичу Яшунскому и Юлии Владиславовне Бородиной за рецензирование и ценные замечания в подготовке статей, а также всем сотрудникам кафедры дискретной математики механико-математического факультета и кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова и лично Вадиму Васильевичу Кочергину, Дмитрию Сергеевичу Романову и Андрею Анатольевичу Вороненко за поддержку и доброжелательное отношение.

Публикации автора по теме диссертации

1. Попков К. А. Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем // Прикладная дискретная математика. — 2016. — № 4 (34). — С. 65–73.

2. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 3 (39). — С. 3–18.

3. Попков К. А. О тестах замыкания для контактных схем // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, вып. 1. — С. 87–100. (Перевод: Popkov K. A. Tests of contact closure for contact circuits // Discrete Math. Appl. — 2016. — Vol. 26, No. 5. — P. 299–308.)

4. Попков К. А. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Прикладная дискретная математика. — 2017. — № 38. — С. 66–88.

5. Попков К. А. Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, вып. 2. — С. 53–69. (Перевод: Popkov K. A. Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits // Discrete Math. Appl. — 2019. — Vol. 29, No. 1. — P. 23–33.)

6. Попков К. А. О проверяющих тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, вып. 4. — С. 66–86. (Перевод: Popkov K. A. On fault detection tests of contact break for contact circuits // Discrete Math. Appl. — 2018. — Vol. 28, No. 6. — P. 369–383.)

7. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 80–103. (Перевод: Popkov K. A. On the exact value of the length of the minimal single diagnostic test for a particular class of circuits // J. Appl. Ind. Math. — 2017. — Vol. 11, No. 3. — P. 431–443.)

8. Попков К. А. Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, вып. 3. — С. 99–116. (Перевод: Popkov K. A. Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates // Discrete Math. Appl. — 2019. — Vol. 29, No. 5. — P. 321–333.)

9. Попков К. А. Полные диагностические тесты длины 2 для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов // Труды МИАН. — 2018. — Т. 301. — С. 219–224. (Перевод: Popkov K. A. Complete diagnostic length 2 tests for logic networks under inverse faults of logic gates // Proc. Steklov Inst. Math. — 2018. — Vol. 301. — P. 207-–212.)

10. Попков К. А. Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 2. — С. 62–81. (Перевод: Popkov K. A.

Complete fault detection tests of length 2 for logic networks under stuck-at faults of gates // J. Appl. Ind. Math. — 2018. — Vol. 12, No. 2. — P. 302–312.)

11. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2018. — Т. 22, вып. 3. — С. 131–147.

12. Попков К. А. Короткие единичные проверяющие тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23, вып. 3. — С. 97–130.

13. Попков К. А. Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2019. — Т. 26, № 1. — С. 89–113. (Перевод: Popkov K. A. Short complete fault detection tests for logic networks with fan-in two // J. Appl. Ind. Math. — 2019. — Vol. 13, No. 1. — P. 118–131.)

14. Попков К. А. Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2019. — № 4. — С. 54–57. (Перевод: Popkov K. A. Minimal complete fault detection tests for circuits of functional elements in standard basis // Mosc. Univ. Math. Bull. — 2019. — Vol. 74, No. 4. — P. 171–173.)

15. Попков К. А. О диагностических тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. — 2019. — Т. 31, вып. 2. — С. 124–143. (Перевод: Popkov K. A. On diagnostic tests of contact break for contact circuits // Discrete Math. Appl. — 2020. — Vol. 30, No. 2. — P. 103–116.)

16. Попков К. А. О полных диагностических тестах для контактных схем при обрывах и/или замыканиях контактов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2019. — № 3 (51). — С. 3–24.

17. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Прикладная дискретная математика. — 2019. — № 43. — С. 78–100.

18. Попков К. А. Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей // Прикладная дискретная математика. — 2019. — № 46. — С. 38–57.

19. Попков К. А. Короткие единичные диагностические тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2020. — Т. 24, вып. 1. — С. 143–152.

20. Попков К. А. Короткие тесты замыкания для контактных схем // Математические заметки. — 2020. — Т. 107, вып. 4. — С. 591–603. (Перевод: Popkov K. A. Short tests of closures for contact circuits // Math. Notes. — 2020. — Vol. 107, No. 4. — P. 653–662.)

21. Попков К. А. Оценки функций Шеннона длин тестов замыкания для контактных схем // Дискретная математика. — 2020. — Т. 32, вып. 3. — С. 49–67.

22. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2016» (Москва, 11–15 апреля 2016 г.) [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2016/data/8438/uid25014_report.pdf

23. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в некоторых базисах // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. — С. 153–155.

24. Попков К. А. О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2017» (Москва, 10–14 апреля 2017 г.) [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2017. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10843/uid25014_report.pdf

25. Попков К. А. Некоторые вопросы теории контроля и диагностики схем из функциональных элементов // Материалы XVIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 194–197.

26. Попков К. А. Тесты для схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Труды X Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23—25 мая 2018 г.). — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 225–228.

27. Попков К. А. Короткие единичные диагностические тесты для схем из функциональных элементов // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2017» (Москва, 8–12 апреля 2019 г.) [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2019. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16177/88131_uid25014_report.pdf

28. Попков К. А. О проверяющих и диагностических тестах для контактных схем // Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 17–22 июня 2019 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2019. — С. 137–140.

29. Попков К. А. О возможностях реализации булевых функций схемами, допускающими короткие тесты // Материалы заочного семинара XIX международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — Казань, 2020. — С. 91–95.

30. Попков К. А. Об оценках функций Шеннона длин тестов замыкания для контактных схем // Материалы заочного семинара XIX международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — Казань, 2020. — С. 96–98.