На правах рукописи

Евдокимова Екатерина Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ОКРУЖЕННЫХ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Саратов 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Могилевич Лев Ильич

Официальные оппоненты: Андрейченко Дмитрий Константинович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов

Барулина Марина Александровна
доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией анализа и синтеза динамических систем в прецизионной механике федерального бюджетного учреждения науки «Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук», г. Саратов

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный технический университет», г. Ульяновск

Защита состоится «09» июня 2021 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.242.08 при СГТУ имени Гагарина Ю.А. по адресу: 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, корп. 1, ауд. 319.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке СГТУ имени Гагарина Ю.А. и на сайте www.sstu.ru

Автореферат разослан «_____» апреля 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета М.В. Алонова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование уединенных волн деформаций (солитонов) в упругих оболочках, является важным направлением современной нелинейной волновой динамики. Результаты исследований можно использовать для акустической диагностики трубопроводов.

Математическое моделирование продольных диспергирующих волн в упругих и вязкоупругих стержнях и пластинах были получены Г. Нариболи, Л. А. Островским, А. М. Сутининым и В. И. Ерофеевым. Исследование уединенных волн деформации в геометрически и физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках проведено в работах Л. И. Могилевича, А. И. Землянухина, Г.А. Аршинова. В этих работах отсутствует учет влияния окружающей среды в продольном и нормальном направлениях, а также влияние вязкой несжимаемой жидкости в оболочках на распространение солитонов.

А.Н. Кореньков рассмотрел влияние идеальной жидкости на волны в оболочках. В работах Л.И.Могилевича, Ю.А. Блинкова, С.В. Иванова, И.А. Ковалевой исследуется влияние вязкой жидкости в рамках теории смазки без учета инерции ее движения на волновой процесс и не рассмотрено влияние окружающей среды в продольном и нормальном направлениях.

Представляется целесообразным исследовать влияние вязкой несжимаемой жидкости, находящей внутри упругой оболочки с учетом инерции её движения и влияние упругой окружающей среды как в нормальном, так и в касательном направлениях, на распространение нелинейных волн деформации. Кроме того, важно исследовать влияние вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между и внутри соосных упругих оболочек с учетом инерции ее движения и влияние окружающей внешнюю оболочку упругой среды.

Использование аналитических методов анализа математических моделей для исследования эволюции солитонов в случае оболочки, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью и окруженной упругой средой, затруднительно. Универсальным представляется использование для исследования, предложенных в данной работе, моделей переход к их дискретным аналогам. Он основан на применении компьютерной алгебры с применением техники базисов Грёбнера, изложенной в работах Ю. А. Блинкова и В. В. Мозжилкина.

Изложенное выше определяет актуальность и цель данной работы.

Целью работы является развитие методов математического и компьютерного моделирования нелинейной волновой динамики цилиндрических оболочек, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью с учетом инерции её движения и окруженных упругой средой, действующей как в нормальном, так и касательном направлениях, на основе методов компьютерной алгебры с использованием базисов Грёбнера. Это же относится и к двум соосным упругим оболочкам, окруженным упругой средой и содержащим вязкую несжимаемую жидкость как между ними, так и во внутренней оболочке.

Для достижения цели работы поставлены задачи:

1. Вывод эволюционных уравнений, моделирующих распространение уединенных волн деформаций в упругой нелинейной цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей внутри вязкую несжимаемую жидкость и в двух соосных нелинейных цилиндрических оболочках, окруженных упругой средой и содержащих вязкую несжимаемую жидкость как между ними, так и во внутренней оболочке;

2. Генерация разностных схем с использованием компьютерной алгебры и базисов Грёбнера для решения полученных уравнений, обобщающих уравнение Островского и систем уравнений, одно из которых обобщает уравнение Островского, а другое обобщает уравнение Кортевега-де-Вриза;

3. Численное исследование моделей нелинейных оболочек, содержащих вязкую несжимаемую жидкость с учетом инерции её движения и окруженных упругой средой, с использованием начальных условий (при $t=0$) в виде точных решений системы обобщенных уравнений Островского и Кортевега-де-Вриза.

Научная новизна работы:

1. Построена новая математическая модель волнового процесса в цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, отличающаяся учетом инерции движения жидкости и влияния в нормальном и касательном направлениях, окружающей оболочку упругой среды, в виде нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, обобщающего уравнение Островского (соответствует п.п. 1, 2, 5 паспорта специальности 05.13.18)

2. Построены новые математические модели волновых процессов в двух соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость как между оболочками, так и во внутренней оболочке, отличающиеся учетом инерции ее движения и влиянием окружающей внешнюю оболочку упругой среды в виде системы уравнений, состоящих из обобщенного уравнения Островского и обобщенного уравнения Кортевега-де-Вриза. (соответствует п.п. 1 ,2, 5 паспорта специальности 05.13.18)

3. С помощью компьютерной алгебры, в частности аппарата базисов Грёбнера, получены разностные схемы. Предложен эффективный вычислительный алгоритм и создан программный комплекс для расчета нелинейных волн в упругой квадратически нелинейной оболочке, окруженной упругой средой, содержащую внутри вязкую несжимаемую жидкость с учетом инерции ее движения (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020660219, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31.08.2020). А так же создан программный комплекс для расчета нелинейных уединенных волн деформации в двух упругих соосных оболочках, окруженных упругой средой и содержащих вязкую несжимаемую жидкость как между ними, так и во внутренней оболочке (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020662885, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.10.2020 (соответствует п.п. 4, 5 паспорта специальности 05.13.18)

4. На основе предложенной модели и программного обеспечения показано влияние на волновой процесс вязкости и инерции движения

жидкости, а также окружающей оболочку внешней среды. При этом, вязкость жидкости уменьшает амплитуду солитона, инерция ее движения уменьшает скорость солитона, а окружающая среда увеличивает скорость движения солитона. (соответствует п.п. 4, 5 паспорта специальности 05.13.18)

5. На основе математической модели и программного обеспечения показано влияние на волновой процесс вязкости и инерции движения жидкости, находящейся между оболочками, а также влияние окружающей внешнюю оболочку упругой среды. Наличие вязкостного трения жидкости, как и инерция ее движения, связывают уравнения динамики внешней и внутренней оболочек в систему. Происходит падение амплитуд солитонов, при этом скорости солитонов во внешней и внутренней оболочках отличаются из-за окружающей внешнюю оболочку упругой среды. Отмечено, что во внутренней оболочке падение амплитуды происходит быстрее. А при наличие жидкости и во внутренней оболочке происходит более быстрое падение амплитуд солитонов в обеих оболочках, то есть разрушение исходных солитонов и появление волнообразования. (соответствует п.п. 1,2, 5 паспорта специальности 05.13.18)

Апробация работы. Основные результаты докладывались на: семинарах кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А.; IV Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Вятичи, 15-19 февраля 2016 г.), III Международной научно-практической конференции «Повышение надежности и безопасности транспортных сооружений и коммуникаций» (Саратов, 15-16 ноября 2017); V Международной юбилейной научной конференции «Проблемы управления, обработки и передачи информации» (УОПИ-2017) (Саратов, 2017); III Международной научно-практической конференции «Повышение надежности и безопасности транспортных сооружений и коммуникаций» (Саратов, 15-16 ноября 2017 г.); I Международной научно-практической конференции «Наука и образование: достижения и перспективы» (Саратов, 2018); II Международной научно-практической конференции «Наука и образование: достижения и перспективы» (Саратов. 2019).

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математической постановки задач гидроупругости на базе известной теории оболочек Кирхгофа-Лява и уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости в рамках сформулированных допущений. Вывод новых уравнений для нелинейных волн в упругих оболочках, окруженных упругой средой и содержащих вязкую несжимаемую жидкость, проведен с помощью апробированного асимптотического метода двухмаштабных разложений. Методы компьютерной алгебры, использованные в работе, апробированы и обоснованы в научной литературе.

Результаты работы в частных случаях совпадают с результатами других авторов.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы как для выявления скрытых поврежденностей трубопроводов, заполненных жидкостью и расположенных в грунте, так и для идентификации параметров исследуемой системы акустическими методами. Материалы работы могут быть использованы в высшей школе в процессе обучения бакалавров, специалистов и магистров в лекционных курсах по математическому моделированию, механике сплошных сред, компьютерной алгебре, численным методам.

Теоретическая значимость работы. Полученные математические модели являются составной частью фундаментальных научных исследований процессов распространения нелинейных дисперсионных волн в упругих оболочках, окруженных упругой средой и содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Они позволяют с помощью вычислительного эксперимента, на основе методов компьютерной алгебры, выявить новые закономерности в процессе распространения этих волн в оболочках.

Работа выполнена в рамках Комплексной научно-инновационной программы СГТУ имени Гагарина Ю. А. на 2016-2018 гг 01В.02Г «Нелинейные дисперсионные волны в двух соосных упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними» (СГТУ 203) и является основой гранта РФФИ 16-01-00175-à

Личное участие автора заключается в выборе цели работы, построении и исследовании новых математических моделей, а также в разработке разностных схем и программного обеспечения для численного решения поставленных задач по моделированию нелинейных уединенных волн деформации. Свидетельства о регистрации программ получены автором единолично.

Тема соответствует п.п. 1, 2, 4, 5 паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

На защиту предоставляются следующие положения и результаты:

1) новые математические модели волновых процессов в цилиндрической оболочке в виде уравнения динамики упругой оболочки с квадратической нелинейностью, выведенного асимптотическим методом двухмасштабных разложений и содержащего члены, учитывающие как наличие вязкой несжимаемой жидкости внутри, так и упругой среды, окружающей оболочку;

2) математические модели волновых процессов в двух соосных цилиндрических оболочках в виде системы уравнений динамики упругих оболочек с квадратической нелинейностью, выведенных асимптотическим методом двухмасштабных разложений, содержащих члены, учитывающие наличие вязкой несжимаемой жидкости как между оболочками, так и во внутренней оболочке и учитывающие наличие упругой окружающей среды;

3) разностные схемы, сгенерированные с применением аппарата компьютерной алгебры и эффективный вычислительный алгоритм, построенный на базе этих схем;

4) анализ результатов численного моделирования волновых процессов в оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью показывает влияние вязкости жидкости на падение амплитуды солитона в оболочке и уменьшение ее скорости. Окружающая оболочку среда увеличивает скорость движения солитона;

5) результаты численного моделирования волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью, показывают влияние вязкости жидкости на падение амплитуд солитонов в оболочках при наличии жидкости во внутренней оболочке, с одной стороны, и на передачу энергии от одной оболочки к другой при наличии жидкости между ними с другой стороны. Инерция движения жидкости приводит к падению скоростей. Окружающая внешнюю оболочку среда увеличивает скорости движения волн в обеих оболочках

Структура и содержание работы. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы выбор и актуальность темы исследования, изложена история вопроса, сформулированы цель, задачи, научная новизна исследования, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов, представлены положения, выносимые на защиту и данные об апробации диссертационной работы.

В первом разделе поставлена задача гидроупругости. Рассмотрена бесконечно длинная упругая цилиндрическая оболочка, окруженная упругой средой. Внутри оболочки находится вязкая несжимаемая жидкость.

Возникновение уединенных волн деформации в оболочках достигается ударным воздействием на торцы или воздействием пьезоэлектрического элемента, переводящего электрический сигнал в механический.

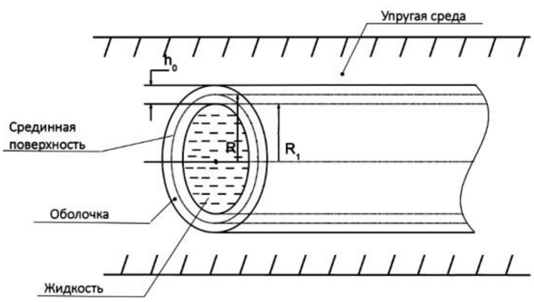

Рисунок 1. Бесконечно длинная упругая оболочка

На рисунке 1 представлена упругая цилиндрическая оболочка бесконечной длины, окруженная упругой средой. Реакция этой среды в нормальном направлении характеризуется безразмерным коэффициентом жесткости k_1. В продольном направлении она обладает жесткостью с мягкой кубической нелинейностью, характеризуемой безразмерными коэффициентами жесткости k_2, k_3. R_1 – внутренний радиус оболочки; R – радиус срединной поверхности оболочки; h_0 – толщина оболочки $h_0 = 2(R - R_1)$ и $h_0 << R$.

Уравнение динамики упругой оболочки с квадратичной нелинейностью, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость, в безразмерных переменных, полученное асимптотическим методом двухмасштабных разложений, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1 + \frac{4m}{\sqrt{3}E}\left(\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2\right)^{1/2}\right]\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} + k_1\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} -$$
$$- \frac{2}{\sqrt{1-\mu_0^2}}\left[k_3 u_{10} - k_2 u_{10}^3\right] = -\frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon\rho_0 h_0}\left\{\frac{\nu}{R_1 c_0}\rho 4\left[1-2\mu_0\right]^2\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi} - \frac{R_1}{l}\rho\frac{1}{6}\sqrt{1-\mu_0^2}\left[\left(1-2\mu_0\right)^2 + 12\mu_0^2\right]\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}\right\}. \quad (1)$$

Здесь u_{10} – безразмерное продольное перемещение оболочки, u_m - характерное значение перемещения, $u_{30} = \mu_0 \partial u_{10} / \partial \xi$ – безразмерный прогиб, согласно линейного приближения, ξ – безразмерная бегущая координата, τ – безразмерное медленное время, l – длина волны, ρ_0 – плотность материала оболочки, E – модуль Юнга , m – постоянная материала физически нелинейной оболочки, μ_0 – коэффициент Пуассона, μ_1 и μ_2 зависят от μ_0, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости, c_0 – скорость продольных волн в оболочке.

Полагая $\dfrac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_3 \varphi$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, из (1) получено уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + (\sigma_2 - \sigma_4)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \sigma_1 \varphi - \sigma_3 \int \varphi d\eta + \sigma_5 \left(\int \varphi\right)^3 d\eta = 0, \qquad (2)$$

значения c_1, c_2, c_3 и введены обозначения σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, которые определяются через параметры задачи, входящих в коэффициенты разрешающего уравнения. Коэффициент σ_1, описывающий вязкостное трение жидкости, принимает значение 0 при $\mu_0 = 1/2$ и при отсутствии жидкости; σ_2, σ_3, σ_5 описывают влияние жесткости упругой окружающей среды в нормальном и касательном направлениях; σ_4 описывает влияние инерции движения жидкости.

При несжимаемости материала оболочки ($\mu_0 = 1/2, \sigma_1 = 0$) получим обобщение уравнения Островского

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + (\sigma_2 - \sigma_4)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma_3 \int \varphi d\eta + \sigma_5 \left(\int \varphi\right)^3 d\eta = 0 \qquad (3)$$

которое имеет точное решение

$$\varphi = \frac{\sigma_3}{2\sigma_5} ch^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_5}}\left[\eta - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_5} + 2\sigma_5 + \sigma_2 - \sigma_4\right)t\right]\right\} = 2k^2 ch^{-2}\left\{k\left[\eta - \left(4k^2 + 2\sigma_5 + \sigma_2 - \sigma_4\right)t\right]\right\} \qquad (4)$$

Здесь $k = 0.5\sqrt{\sigma_3/\sigma_5}$ – волновое число, зависящее от коэффициентов жесткости упругой среды в продольном направлении; при отсутствии окружающей среды в продольном направлении это волновое число является произвольной величиной, σ_2 – коэффициент жесткости упругой среды в нормальном направлении; $\sigma_3/\sigma_5 + 2\sigma_5 + \sigma_2 - \sigma_4$ – фазовая скорость, зависящая как от коэффициентов жесткости упругой среды σ_5, σ_2 так и от инерции движения жидкости σ_4. Как видно из формулы (4), коэффициенты жесткости упругой окружающей среды в продольном, σ_5 и в нормальном, σ_2 направлениях увеличивают фазовую скорость в то время как, инерция движения жидкости, определяемая коэффициентом σ_4, уменьшает фазовую скорость. Если фазовая скорость положительна, то скорость солитона – сверхзвуковая.

При μ_0, отличном от 1/2 ($\sigma_1 \neq 0$), проведено численное исследование уравнения (2) при начальном условии в виде точного решения при t=0

$$\varphi(\eta,0) = 2k^2 \cosh^{-2}\{k\eta\}, \qquad (5)$$

с использованием разностной схемы.

Запишем уравнение (2) в виде системы в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega}(-3\varphi^2-\varphi_{\eta\eta}-(\sigma_2-\sigma_4)\varphi)dt+\varphi d\eta+\iint\limits_{\Omega}(\sigma_1\varphi-\sigma_3\psi+\sigma_5\psi^3)dtd\eta=0 \qquad (6)$$

$$\int\limits_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_\eta^{(i)}d\eta=u^{(i)}(t,\eta_{j+1})-u^{(i)}(t,\eta_j),\ \int\limits_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta}^{(i)}d\eta=u_\eta^{(i)}(t,\eta_{j+2})-u_\eta^{(i)}(t,\eta_j),$$

$$\int\limits_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u^{(i)}d\eta=U(t,\eta_{j+2})-U(t,\eta_j)$$

Выберем шаблон (базовый контур) для уравнения (6), показанный на рисунке 2.

В системе компьютерной алгебры Maple получена искомая разностная схема

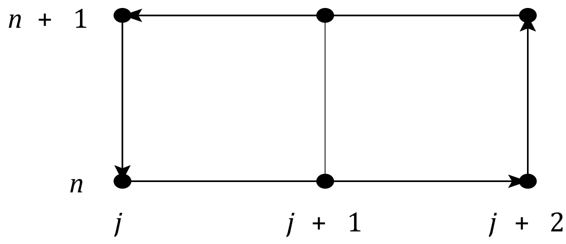

Рисунок 2. Базовый контур

$$\frac{u_1^{n+1}-u_j^n}{\tau}+3\frac{({u^2}_{j+1}^{n+1}-{u^2}_{j-1}^{n+1})+({u^2}_{j+1}^{n}-{u^2}_{j-1}^{n})}{4h}+\frac{(u_{j+2}^{n+1}-2u_{j+1}^{n+1}+2u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})+(u_{j+2}^{n}-2u_{j+1}^{n}+2u_{j-1}^{n}-u_{j-2}^{n})}{4h^3}+$$

$$+(\sigma_2-\sigma_4)\frac{(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})+(u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n})}{4h}+\sigma_1\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}-\sigma_3\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2}+\sigma_5\frac{{U^3}_j^{n+1}+{U^3}_j^n}{2}=0, \qquad (7)$$

$$\frac{U_{j+2}^n-2U_{j+1}^n+U_j^n}{h^2}-\frac{u_{j+2}^n-u_j^n}{2h}=0.$$

В результате вычислительного экперимента с использованием разностной схемы (7) получено решение уравнений (2) с начальным условием (5) при учете наличия вязкости жидкости и окружающий упругой среды, приведенное на рисунке 3.

На рис. 4 приведен конкретный пример, в размерных единицах, представленного на рис. 3 решения.

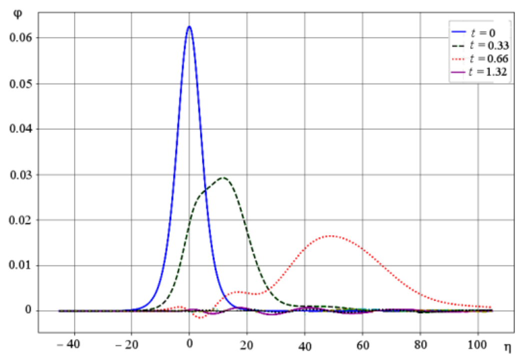

Рисунок 3. График численного решения при $\sigma_1=1$, $\sigma_2-\sigma_4=-4$, $\sigma_3=1$, $\sigma_5=8$

Материал оболочки – органическое стекло: $\rho_0=1.18\cdot10^3 кг\cdot м^{-3}$; $E=3\cdot10^9 Па$; $m=1.44\cdot10^9 Па$; $\mu_0=0.35$. Жидкость внутри оболочки: $\rho=1.8\cdot10^3 кг\cdot м^{-3}$; $\nu=2.5\cdot10^{-4} м^2\cdot c^{-1}$. Радиус срединной поверхности оболочки: $R=5\cdot10^{-3} м=5мм$. Толщина оболочки $h_0=5\cdot10^{-5} м=50мкм$, малый параметр задачи $\varepsilon=h_0/R=10^{-2}$ Максимальная величина размерного прогиба $W=h_0u_{30}=h_0\mu_0\partial u_{10}/\partial\xi=0{,}33\cdot10^{-5} м=3.3мкм$. Длина волны $l=R/\sqrt{\varepsilon}=10\cdot R=5\cdot10^{-2} м$

Размерный коэффициент жесткости окружающей среды в нормальном направлении $K_1=4.7\cdot10^7 Па\cdot м^{-1}$,размерные коэффициенты жесткости окружающей среды в касательном направлении при первой степени зависимости от продольной составляющей U- $K_3=7.4\cdot10^6 Па\cdot м^{-1}=3.7\cdot10^2\cdot R^{-1}$, при третьей степени U- $K_2=7.4\cdot10^{15} Па\cdot м^{-3}=9.25\cdot10^8\cdot R^{-3}$.

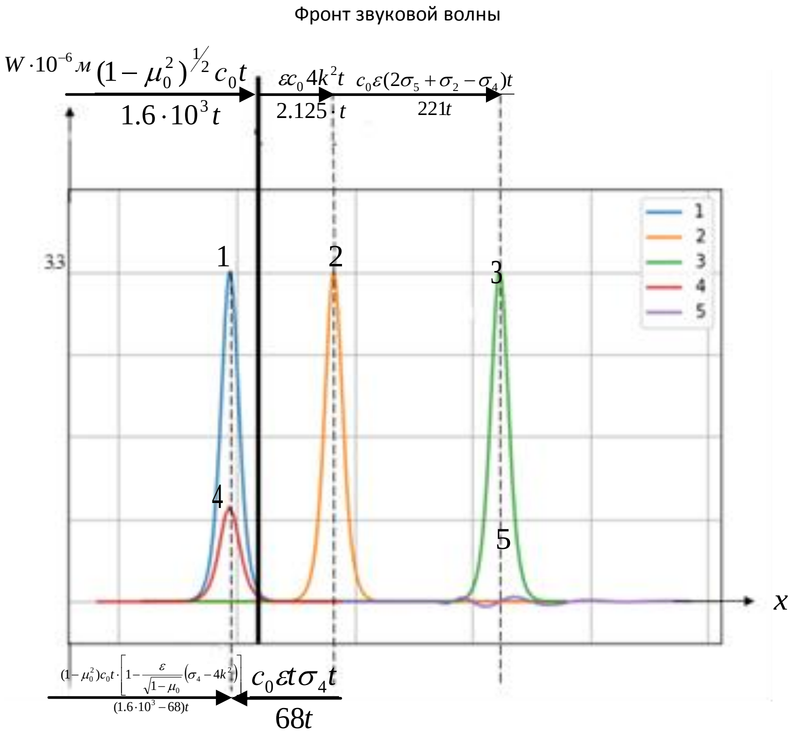

Рисунок 4. График численного решения в размерных переменных
1 – учет инерции движения жидкости (σ_4=1, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0$); 2 – без учета окружающей среды, вязкости жидкости и инерции движения ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$); 3 – учет влияния окружающей среды и инерции движения жидкости ($\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1, \sigma_5 = 8$); 4 – учет влияния инерции движения жидкости и вязкости жидкости ($k = 0.18, \sigma_4 = 4, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0$)
5 – совместный учет влияния окружающей среды, инерции движения жидкости и вязкости жидкости ($\sigma_1 = 1, \sigma_2 - \sigma_4 = -4, \sigma_3 = 1, \sigma_5 = 8$)

Таким образом, представленные на рис. 3, .4 результаты расчетов позволяют дать следующую трактовку проведенного моделирования. Без учета окружающей среды, вязкости жидкости и инерции движения скорость солитона сверхзвуковая (кривая 2). Учет инерции движения жидкости уменьшает скорость солитона, которая становится дозвуковой (кривая 1), а дополнительный учет упругой окружающей среды приводит к возрастанию скорости солитона и она снова становится сверхзвуковой (кривая 3), вязкость жидкости, без учета окружающей среды, ведет к падению амплитуды солитона (кривая 4), совместный учет всех факторов приводит к разрушению солитона (кривая 5).

Во втором разделе построены математические модели, описывающие продольные волны в соосных упругих оболочках с квадратичной нелинейностью, окруженные упругой средой, с вязкой жидкостью между ними.

Аналогично первой главе приводится постановка задачи гидроупругости.

На рисунке 5 представлены две соосные упругие цилиндрические оболочки бесконечной длины с вязкой несжимаемой жидкостью между ними. Внешняя оболочка окружена упругой средой. В нормальном направлении эта среда характеризуется безразмерным коэффициентом жесткости k_1. В продольном направлении она характеризуется безразмерными коэффициентами жесткости k_2, k_3.

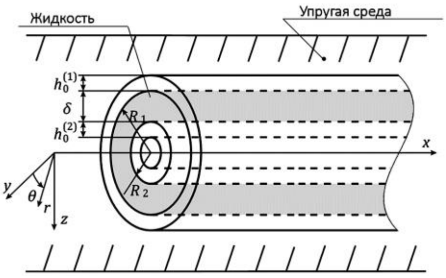

Рисунок 5. Соосные оболочки

$R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$ – внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$ - внешний радиус внутренней оболочки; $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ – радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек; $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}$ – их толщины. Все механические величины для внутренней оболочки обозначены индексом $i=2$ сверху, а для внешней – индексом $i=1$, $\delta = R_1 - R_2$ – толщина слоя жидкости между оболочками; ρ_0 – плотность материала оболочек, E – модуль Юнга , m- постоянная материала физически нелинейной оболочек, μ_0- коэффициент Пуассона, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости.

С помощью пьезоэлектрического элемента создается возмущение в виде волны, распространяющейся как вдоль внешней, так и вдоль внутренней оболочки (продольная волна деформации).

Разрешающая система уравнений динамики двух соосных оболочек, окруженных упругой соедой, содержащих вязкю жидкость между ними, полученные асимптотическим методом двухмасштабных разложений, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{m}{E}(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2)^{1/2}\right]\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi\partial\xi} + \mu_0^2\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^4} + k_1\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}[k_3 u_{10}^{(1)} - k_2 u_{10}^{(1)^3}] = -6\mu_0^2\frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(1)}}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right) - \frac{1}{10}\tilde{\mathrm{R}}\mathrm{e}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^2}\right)\right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{m}{E}(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2)^{1/2}\right]\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi\partial\xi} + \mu_0^2\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^4} =$$

$$= -6\mu_0^2\frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(2)}}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}\right) - \frac{1}{10}\tilde{\mathrm{R}}\mathrm{e}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2}\right)\right]$$

Здесь $u_{10}^{(i)}$ – безразмерные продольные перемещения оболочек, $u_{30}^{(i)} = \mu_0 \partial u_{10}^{(i)}/\partial\xi$-безразмерные прогибы.

Можно ввести $\partial u_{10}^{(i)}/\partial\xi = c_3\varphi^{(i)}$, $\eta = c_1\xi$, $t = c_3\tau$ и из системы (8) получить систему уравнений

$$\varphi_t^{(1)} + 6\varphi^{(1)}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - \sigma_1(\varphi_\eta^{(1)} - \varphi_\eta^{(2)}) + \sigma_2\varphi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\varphi^{(1)}d\eta + \sigma_5\left(\int\varphi^{(1)}d\eta\right)^3 = 0$$

$$\varphi_t^{(2)} + 6\varphi^{(2)}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) - \sigma_1(\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)}) = 0 \quad (9)$$

значения c_1, c_2, c_3 и введены обозначения σ_1, σ_2, σ_3, σ_5. Коэффициент σ_1, описывает влияние инерции движения жидкости между оболочками, σ_2, σ_3, σ_5, описывают влияние жесткости упругой окружающей среды в нормальном и касательном направлениях.

При отсутствии жидкости система (9) распадается на два независимых уравнения. Первое из них, обобщающее уравнение Островского,
$\varphi_t^{(1)}+6\varphi^{(1)}\varphi_\eta^{(1)}+\varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)}+\sigma_2\varphi_\eta^{(1)}-\sigma_3\int\varphi^{(1)}d\eta+\sigma_5\left(\int\varphi^{(1)}d\eta\right)^3=0$

имеет точное решение $\varphi^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{\sigma_3}{\sigma_5}\cosh^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_5}}\left[\eta-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_5}+2\sigma_5+\sigma_2\right)t)\right]\right\}$

и второе - уравнение Кортовега-де-Вриза $\varphi_t^{(2)}+6\varphi^{(2)}\varphi_\eta^{(2)}+\varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)}=0$

с точным решением $\varphi^{(2)}=2k^2\cosh^{-2}\{k[\eta-4k^2t)]\}$, где k произвольное число, которое для удобства можно положить равным $0.5\cdot\sqrt{\sigma_3/\sigma_5}$

Далее проводится численное исследование построенной математической модели с использованием разностной схемы с начальными условиями.

При t=0 имеем $\varphi^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{\sigma_3}{\sigma_5}\cosh^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_5}}\eta\right\}$, $\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\frac{\sigma_3}{\sigma_5}\cosh^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_5}}\eta\right\}$ (10)

Вместо начального условия (10) для $\varphi^{(2)}$ можно взять начальное условие $\varphi^{(2)}=0$ – отсутствие возмущения в начальный момент времени во внутренней оболочке.

Получена следующая неявная разностная схема для уравнения (9), аналогично схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\frac{u^{(1)}{}_j^{n+1}-u^{(1)}{}_j^n}{\tau}+3\frac{(u^{(1)2}{}_{j+1}^{n+1}-u^{(1)2}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(1)2}{}_{j+1}^{n}-u^{(1)2}{}_{j-1}^{n})}{4h}+\frac{u^{(1)}{}_{j+2}^{n+1}-2u^{(1)}{}_{j+1}^{n+1}+2u^{(1)}{}_{j-1}^{n+1}-u^{(1)}{}_{j-2}^{n+1}}{4h^3}+$$

$$+\frac{u^{(1)}{}_{j+2}^{n}-2u^{(1)}{}_{j+1}^{n}+2u^{(1)}{}_{j-1}^{n}-u^{(1)}{}_{j-2}^{n}}{4h^3}+\ (\sigma_2-\sigma_1)\frac{(u^{(1)}{}_{j+1}^{n+1}-u^{(1)}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(1)}{}_{j+1}^{n}-u^{(1)}{}_{j-1}^{n})}{4h}+$$

$$+\sigma_1\frac{(u^{(2)}{}_{j+1}^{n+1}+u^{(2)}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(2)}{}_{j+1}^{n}-u^{(2)}{}_{j-1}^{n})}{4h}-\sigma_3\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2}+\sigma_5\frac{U^3{}_j^{n+1}+U^3{}_j^n}{2}+\frac{u^{(1)}{}_j^{n+1}+u^{(1)}{}_j^n}{2}$$

$$-\frac{u^{(2)}{}_j^{n+1}+u^{(2)}{}_j^n}{2}=0;\quad (u^{(1)}{}_{j+1}^n+4u^{(1)}{}_j^n+u^{(1)}{}_{j-1}^n)\cdot\frac{h}{3}-(U_{j+1}-U_{j-1})=0;\qquad (11)$$

$$\frac{u^{(2)}{}_j^{n+1}-u^{(2)}{}_j^n}{\tau}+3\frac{(u^{(2)2}{}_{j+1}^{n+1}-u^{(2)2}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(2)2}{}_{j+1}^{n}-u^{(2)2}{}_{j-1}^{n})}{4h}+\frac{u^{(2)}{}_{j+2}^{n+1}-2u^{(2)}{}_{j+1}^{n+1}+2u^{(2)}{}_{j-1}^{n+1}-u^{(2)}{}_{j-2}^{n+1}}{4h^3}+$$

$$+\frac{(u^{(2)}{}_{j+2}^{n}-2u^{(2)}{}_{j+1}^{n}+2u^{(2)}{}_{j-1}^{n}-u^{(2)}{}_{j-2}^{n}}{4h^3}\quad-\sigma_1\frac{(u^{(2)}{}_{j+1}^{n+1}-u^{(2)}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(2)}{}_{j+1}^{n}-u^{(2)}{}_{j-1}^{n})}{4h}+$$

$$+\sigma_1\frac{(u^{(1)}{}_{j+1}^{n+1}-u^{(1)}{}_{j-1}^{n+1})+(u^{(1)}{}_{j+1}^{n}-u^{(1)}{}_{j-1}^{n})}{4h}+\frac{u^{(2)}{}_j^{n+1}+u^{(2)}{}_j^n}{2}-\frac{u^{(1)}{}_j^{n+1}+u^{(1)}{}_j^n)}{2}=0$$

В результате вычислительного экперимента с использованием разностной схемы получено в безразмерных переменных решение уравнения (9) с одинаковыми начальными условиями (10), приведеное на рисунке 6.

На рис. 7 приведен конкретный пример в размерных единицах решения, представленного на рис. 6.

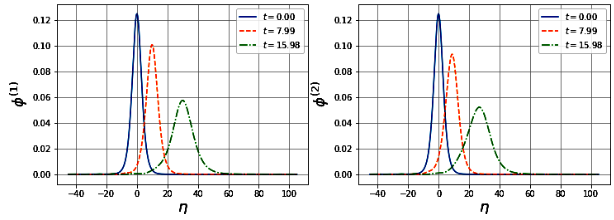

Рисунок 6. Графики численного решения при $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1 \quad \sigma_3 = 0.2, \sigma_5 = 0.8$

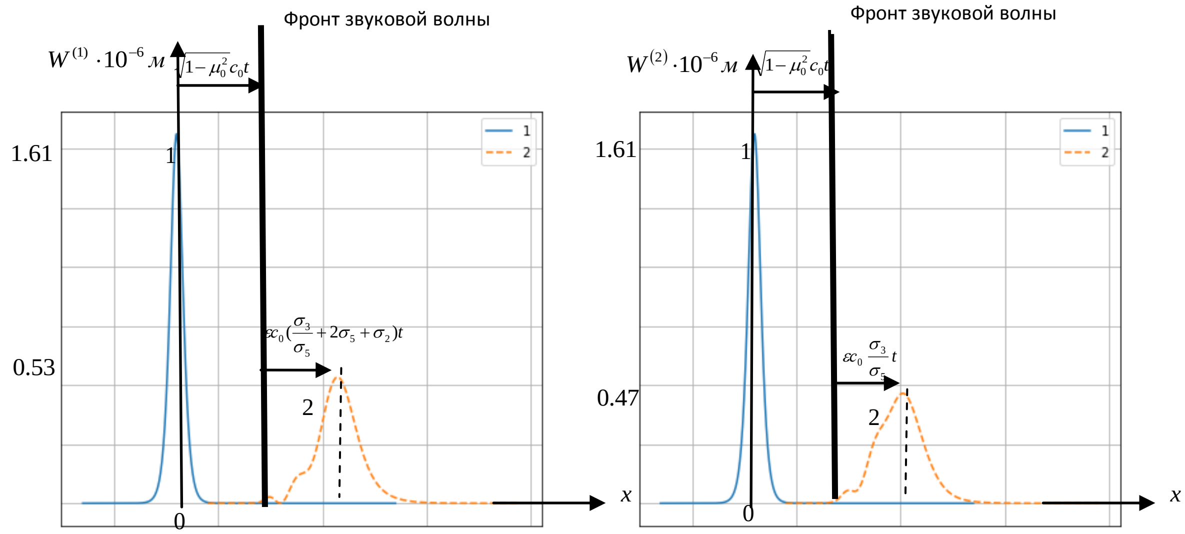

Рисунок 7. График решения в размерных переменных:
1 – солитон в начальный момент времени; 2 – учет влияния окружающей среды, вязкости жидкости и инерции движения жидкости

Материал оболочки – органическое стекло: $\rho_0 = 1.18 \cdot 10^3 кг \cdot м^{-3}$; $E = 3 \cdot 10^9\, Па$; $m = 1.44 \cdot 10^9\, Па$; $\mu_0 = 0.35$. Толщины оболочек $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = 5 \cdot 10^{-5} м = 50 мкм$ Между оболочками находится воздух: $\rho = 1.29 кг \cdot м^{-3}$, $\nu = 1.33 \cdot 10^{-5} м^2 \cdot с^{-1}$.

Радиусы срединных поверхностей оболочек $R^{(1)} = 5{,}55 \cdot 10^{-3} м$, $R^{(2)} = 5 \cdot 10^{-3} м$. Малый параметр задачи $\varepsilon = 10^{-2}$. Зазора между оболочками $\delta = 5 \cdot 10^{-4} м$.

Максимальная величина размерного прогиба $W = h_0 u_{30} = 0{,}161 \cdot 10^{-5} м = 1.61 мкм$

Размерный коэффициент жесткости окружающей среды в нормальном направлении $K_1 = 4.7 \cdot 10^7\, Па \cdot м^{-1}$.

Размерные коэффициенты жесткости окружающей среды в касательном направлении при первой степени зависимости от продольной составляющей U- $K_3 = 1.48 \cdot 10^6\, Па \cdot м^{-1}$, при третьей степени U- $K_2 = 7.4 \cdot 10^{14}\, Па \cdot м^{-3}$

Как видно из рис.6, 7, при движении солитонов происходит падение амплитуд и увеличение длин солитонов в обеих оболочках (кривые 2). При этом во внутренней оболочке этот процесс происходит быстрее. Влияние окружающей среды в нормальном направлении (σ_2) приводит к увеличению скорости солитона во внешней оболочке, и как следствие, во внутренней. Реакция окружающей среды в продольном направлении (σ_3, σ_5), действующая на внешнюю оболочку, уменьшает амплитуды солитонов в обеих оболочках, в этом случаи система уравнений (9) не имеет точного решения.

В третьем разделе построена математическая модель волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью с учетом инерции ее движения и окруженных упругой средой.

Аналогично разделу II, проводен асимптотический анализ методом двухмасштабных разложений и получена система разрешающих уравнений

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{m}{E}(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2)^{1/2}\right]\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi\partial\xi}+$$
$$\mu_0^2\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^4}+\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\left[k_1\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2}-k_3u_{10}^{(1)}+k_2u_{10}^{(1)^3}\right]+$$
$$+6\mu_0^2\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{10}\tilde{\mathrm{Re}}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^2}\right)\right]=0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{m}{E}(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2)^{1/2}\right]\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi\partial\xi}+\mu_0^2\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^4}+$$
$$+6\mu_0^2\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{Rc_0\varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{10}\tilde{\mathrm{Re}}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial\xi^2}\right)\right]+$$
$$+2(1-2\mu_0)^2\frac{\tilde{\rho}l}{\rho_0h_0\varepsilon}\frac{\tilde{\nu}}{Rc_0}\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}-\frac{\tilde{\rho}l}{\rho_0h_0\varepsilon}\frac{R}{l}\frac{1}{12}\sqrt{1-\mu_0^2}[(1-2\mu_0)^2+12\mu_0^2]\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi\partial\xi}=0$$

Здесь $\tilde{\rho},\tilde{\nu}$ – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости во внутренней оболочке.

Можно также ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)}=c_3\phi^{(1)}, u_{10\xi}^{(2)}=c_3\phi^{(2)}, \eta=c_1\xi, t=c_2\tau$.

Получаем из системы (12) систему уравнений

$$\begin{gathered}\phi_t^{(1)}+6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)}+\phi_{\eta\eta\eta}^{(1)}+\phi^{(1)}-\phi^{(2)}-\sigma_1(\phi_\eta^{(1)}-\phi_\eta^{(2)})+\sigma_2\phi_\eta^{(1)}-\sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta+\sigma_5\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3=0,\\ \phi_t^{(2)}+6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)}+\phi_{\eta\eta\eta}^{(2)}+\phi^{(2)}-\phi^{(1)}-\sigma_1\left(\phi_\eta^{(2)}-\phi_\eta^{(1)}\right)+\sigma\phi^{(2)}-\sigma_4\phi_\eta^{(2)}=0.\end{gathered} \qquad (13)$$

значения c_3, c_1, c_2 и введены обозначения σ, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 . Они введены с той же целью - для уменьшения количества коэффициентов уравнения, что и в первом разделе. Коэффициент σ принимает значение 0 при $\mu_0=0.5$ и при отсутствии жидкости. Эта система уравнений не имеет точного решения.

При отсутствии влияния окружающей среды ($\sigma_2=\sigma_3=\sigma_5=0$) и отсутствии жидкости во внутренней оболочке ($\sigma=\sigma_4=0$) получим систему

$$\varphi_t^{(1)} + 6\varphi^{(1)}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} - \sigma_1(\varphi^{(1)}_\eta - \varphi^{(2)}_\eta) = 0$$
$$\varphi_t^{(2)} + 6\varphi^{(2)}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma_1(\varphi^{(2)}_\eta - \varphi^{(1)}_\eta) = 0$$

с точным решением

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 2k^2 \cosh^{-2}\{k(\eta - 4k^2 t)\}, \tag{14}$$

где k произвольное число, которое для удобства вычислений можно положить равным $0.5\cdot\sqrt{\sigma_3/\sigma_5}$

Далее проводится численное исследование построенной математической модели с начальным условием в виде точного решения с использованием разностной схемы.

Получаем следующую разностную схему для уравнения (13),

$$\frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 3\frac{(u^{(1)2\,n+1}_{j+1} - u^{(1)2\,n+1}_{j-1}) + (u^{(1)2\,n}_{j+1} - u^{(1)2\,n}_{j-1})}{4h} + \frac{u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2}}{4h^3} +$$
$$+\frac{(u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2}}{4h^3} + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} +$$
$$+\sigma_1\frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} - \sigma_3\frac{U^{n+1}_j + U^n_j}{2} + \sigma_5\frac{U^{3\,n+1}_j + U^{3\,n}_j}{2} + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} -$$
$$-\frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} = 0; \qquad (u^{(1)n}_{j+1} + 4u^{(1)n}_j + u^{(1)n}_{j-1})\cdot\frac{h}{3} - (U_{j+1} - U_{j-1}) = 0; \tag{15}$$

$$\frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 3\frac{(u^{(2)2\,n+1}_{j+1} - u^{(2)2\,n+1}_{j-1}) + (u^{(2)2\,n}_{j+1} - u^{(2)2\,n}_{j-1})}{4h} + \frac{u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2}}{4h^3} +$$
$$+\frac{u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2}}{4h^3} - \sigma_1\left[\frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} +\right.$$
$$\left.+\sigma_1\frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h}\right] + (1+\sigma)\frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j)}{2} = 0$$

В результате вычислительного экперимента с использованием разностной схемы (15) получено решение в безразмерных переменных уравнения (13) с одинаковыми начальными условиями, взятыми из решения (14) при t=0. Решение приведено на рисунке 8.

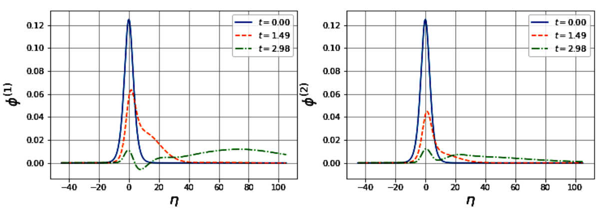

Рисунок 8. Графики численного решения при $\sigma = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0.2, \sigma_4 = 0.1, \sigma_5 = 0.8$

На рисунке 9 рассмотрен пример, в котором параметры задачи сопадают с примером из второй главы. Жидкость, находящаяся во внутренней оболочке имеет плотность $\tilde{\rho} = 1.8\cdot 10^3 кг\cdot м^{-3}$ и коэффициент кинематической вязкости $\tilde{\nu} = 2.5\cdot 10^{-4} м^2\cdot с^{-1}$ в отличие от жидкости, находящейся между оболочками.

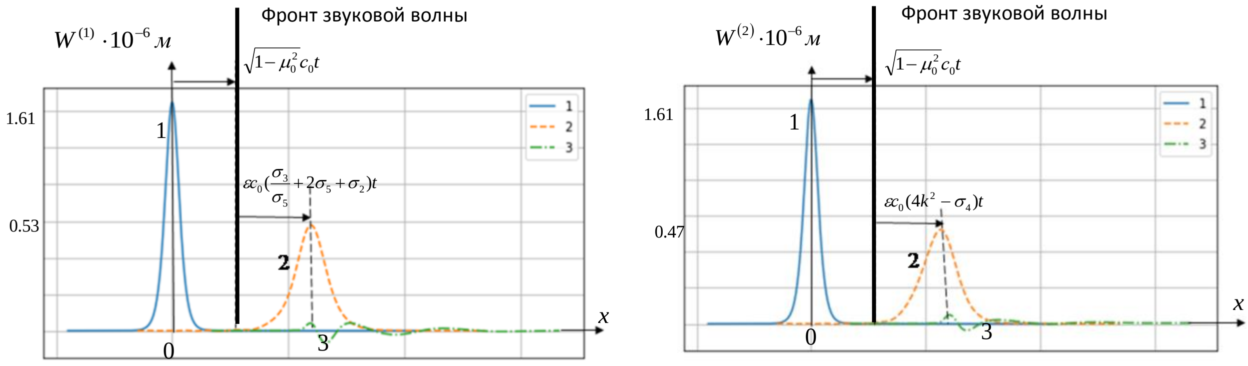

Рисунок 9. График решения в размерных переменных:
1 – солитоны в начальный момент времени; 2 – учет влияния среды, окружающей внешнюю оболочку и инерции движения жидкости во внутренней оболочке (σ=0, σ_1=1, σ_2=1, σ_3=0.2, σ_4=0.1, σ_5=0.8); 3 – учет влияния среды, окружающей внешнюю оболочку, инерции движения жидкости во внутренней оболочке и вязкости жидкости во внутренней оболочке (σ=1, σ_1=1, σ_2=1, σ_3=0.2, σ_4=0.1, σ_5=0.8)

Как видно из рис. 8 и 9, при движении солитонов происходит уменьшение амплитуд (кривые 1,2). При этом во внутренней оболочке этот процесс происходит быстрее. Наличие жидкости во внутренней оболочке приводит к более быстрому падению амплитуд солитонов в обеих оболочках, то есть к разрушению солитонов и появлению волнообразования (кривые 3).

Влияние окружающей среды, действующее в продольном направлении (σ_3, σ_5), на внешнюю оболочку, приводит к дополнительному волнообразованию в обеих оболочках.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Построена новая математическая модель в виде нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Оно обобщает уравнение Островского, которое описываете волновые процессы в цилиндрических оболочках, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью и окруженных упругой средой и систем уравнений, состоящих из обобщенного уравнения Островского и обобщенного уравнения Кортевега-де-Вриза, описывающих волновые процессы в двух соосных цилиндрических оболочках, содержащих несжимаемую жидкость как внутри, так и между оболочками с учетом влияния упругой окружающей среды в нормальном и продольных направлениях;

С помощью аппарата базисов Грёбнера получены разностные схемы, на основе которых предложен эффективный вычислительный алгоритм и созданы программные комплексы (Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ No 2017660612, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31.08.20220 и No 2020662885, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.10.20220), позволяющие произвести необходимые расчеты и построить графики, наглядно показывающие динамику волнового процесса для численного исследования полученных моделей.

На основе построенной математической модели и проведенных с помощью разработанного программного комплекса численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

В случае одной оболочки, заполненной жидкостью и изготовленной из несжимаемого материала ($\mu_0 = 1/2$) вязкостное трение жидкости не оказывает влияния на распространение уединенной волны. При этом окружающая среда увеличивает скорость солитона, а инерция движения жидкости её уменьшает. Для сжимаемого материала оболочки ($\mu_0 < 1/2$) наличие вязкостного трения жидкости приводят к падению амплитуды уединенной волны. В случае двух соосных оболочек, окруженных упругой средой и содержащих жидкость между ними, при движении солитона происходит падение амплитуды и увеличение длины солитона. При этом во внутренней оболочке этот процесс происходит быстрее. Это происходит из-за влияния окружающей среды в продольном направлении. Влияние окружающей среды в нормальном направлении приводит к увеличению скорости солитона во внешней оболочке.

Если дополнительно во внутренней оболочке имеется вязкая несжимаемая жидкость, то при движении солитонов происходит более быстрое падение амплитуд солитонов в обеих оболочках и появление волнообразования. Вязкостное трение жидкости перестает влиять на поведение солитонов в оболочке из несжимаемого материала ($\mu_0 = 1/2$).

Единственным случаем сохранения амплитуд солитонов и их скоростей является наличие упругой среды, окружающей внешнюю оболочку и ее наличие во внутренней оболочке, когда между оболочками имеется вязкая несжимаемая жидкость. В этом случае разрешающие уравнения обладают симметрией, и численное решение совпадает с точным решением системы уравнений, обобщающих уравнение Островского.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 26 печатных работ, из них 5 – в периодических изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России для публикации научных работ, 3 – входят в базу SCOPUS и Web of Science (ESCI), получены 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах Scopus и в журналах перечня ВАК Минобрнауки России

1. Математическое моделирование нелинейных волн в упругой цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость / Ю. А. Блинков, А. Ю. Блинкова, Е. В. Евдокимова, Могилевич Л.И. // Акустический журнал РАН. 2018. Т. 64. № 3. С. 1-7.

2. Евдокимова, Е. В. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении / Ю. А. Блинков, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018 Т. 26. Вып. 6. С. 32-47.

3. Моделирование волновых процессов в двух оболочках с жидкостью между ними и окруженных упругой средой / Ю.А. Блинков, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич, А.Ю. Ребрина // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. Т. 81. № 6. С. 4-17.

4. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окружённых упругой средой / Ю. А. Блинков, Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, А. Ю. Ребрина // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2018. Т. 26. № 3. С. 203-215.

5. Моделирование продольных волн в оболочке с физически квадратичной нелинейностью, заполненной жидкостью и окруженной упругой средой / Т. В. Быкова, Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Труды МАИ. 2020. Вып. № 111. 04/24/2020.

Публикации в других изданиях

6. Евдокимова, Е. В. Моделирование волн в физически нелинейной оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость с учетом воздействия упругой окружающей среды / Ю. А. Блинков, Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докл. IV Междунар. науч. семинара. Вятичи, 15-19 февраля 2016 г. / Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2016. С. 31-32.

7. Колебания геометрически нерегулярной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем жидкости / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Е. В. Попова // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докл. IV Междунар. науч. семинара / Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2016. С 61-66.

8. Евдокимова, Е. В. Волны в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними и окруженные упругой средой / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках: электронный научный журнал. 2017. № 2.

9. Евдокимова, Е. В. Динамика вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Повышение надежности и безопасности транспортных сооружений и коммуникаций: сб. тр. III Междунар. науч.-практ. конф. Саратов, 15-16 ноября 2017 г. Саратов: Изд-во СГТУ, 2017. С. 506-510.

10. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений / Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Ковалева И.А. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3.

11. Евдокимова, Е. В. Динамика осесимметрического течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового сечения (статья) / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Проблемы управления,

обработки и передачи информации (УОПИ-2017): сб. тр. V Междунар. юбилейн. науч. конф. / Саратов: ООО СОП «Лоди». 2017. С. 429-432.

12. Евдокимова, Е. В. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кольцевого сечения / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич // Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2017): сб. тр. V Междунар. юбилейн. науч. конф. Саратов: ООО СОП «Лоди», 2017. С. 433-436.

13. Евдокимова, Е. В. Моделирование волновых процессов в двух оболочках окруженных упругой средой, с жидкостью между ними / Е. В. Евдокимова, А. Ю. Ребрина, Л. И. Могилевич // Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2017): сб. тр. V Междунар. юбилейн. науч. конф. Саратов: ООО СОП «Лоди», 2017. С. 468-473.

14. Численное моделирование нелинейных волн дисперсии в оболочке с учетом конструкционного демпфирования при воздействии упругой окружающей среды / Ю. А. Блинков, Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Прикладная математика и механика (Ульяновск). 2017. № 11. С. 86-93.

15. Евдокимова, Е. В. Волны в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними и внутри, окруженных упругой средой / Е. В. Евдокимова // Повышение надежности и безопасности транспортных сооружений и коммуникаций: сб. тр. III Междунар. науч.-практ. конф. Саратов, 15-16 ноября 2017 г. Саратов: Изд-во СГТУ, 2017. С. 506-510.

16. Евдокимова, Е. В. Гидроупругие колебания трехслойной пластины на упругом основании, взаимодействующей с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Наука и образование: достижения и перспективы: материалы I Междунар. науч.-практ. конф. Саратов, 30 мая 2018. Саратов: Филиал СамГУПС в г. Саратове, 2018. С.178-184.

17. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость с учетом инерции ее движения, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении / Ю.А. Блинков, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич, Д.В. Кондратов // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 1.

18. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках заполненных вязкой жидкостью с учетом инерции ее движения и окруженных упругой средой / Ю.А. Блинков, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич, Д.В. Кондратов // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 2.

19. Евдокимова Е.В., Иванов С.В., Могилевич Л.И. Моделирование волнового процесса в оболочке с физической квадратической нелинейностью с учетом демпфирования и окружающей среды / Е. В. Евдокимова, С.В. Иванов, Л. И. Могилевич // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 2.

20. Волны в цилиндрической оболочке с квадратичной нелинейностью, содержащей вязкую жидкость с учетом инерции её движения, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении / Е.В. Евдокимова, С.В. Иванов, Л.И. Могилевич, Д.В. Кондратов //

Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 1.

21.Евдокимова Е.В. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках с вязкой жидкостью между ними с учетом инерции её движения, окруженных упругой средой / Е. В. Евдокимова // Наука и образование: достижения и перспективы. Материалы II Международной научно-практической конференции, Саратов, 30 мая 2019. Саратов: Филиал СамГУПС в г. Саратове, 2019. С.144-157.

22. Евдокимова, Е. В. Моделирование продольных волн в оболочке с физически квадратичной нелинейностью / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2020. № 5 (44). С. 386-389.

23. Волны в соосных квадратично нелинейных оболочках, окруженных упругой средой, содержащих жидкость / Ю.А. Блинков, Е.В. Евдокимова, Л.И. Могилевич, Е.В. Попова // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2020. Т. 5. С. 41-44.

24. Евдокимова, Е. В. Использование систем компьютерной алгебры MAXIMA в учебном процессе / Н. Д. Евдокимов, Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич // Наука и образование: достижения и перспективы: материалы III Междунар. науч.-практ. конф. Саратов, 2020. С. 101-104.

Свидетельства о государственной регистрации программ

25. Евдокимова, Е.В. Расчет нелинейных волн в упругой квадратически нелинейной оболочке, окруженной упругой средой, содержащих внутри вязкую несжимаемую жидкость с учетом инерции ее движения: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2020660219. Федеральная служба по интеллект. собственности 31.08.2020.

26. Евдокимова, Е. В. Расчет нелинейных волн в двух упругих квадратически нелинейных оболочках, окруженной упругой средой, содержащих внутри вязкую несжимаемую жидкость с учетом инерции ее движения: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2020662885. Федеральная служба по интеллект. собственности 20.10.2020.

Подписано в печать 31.03.2021 Формат 60×84 1/16

Бум. офсет. Усл. печ. л. 1,0 Уч.-изд. л. 1,0

Тираж 100 экз. Заказ 13 Бесплатно

Саратовский государственный технический университет

410054, Саратов, ул. Политехническая, 77

Отпечатано в Издательстве СГТУ. 410054, Саратов, Политехническая ул., 77

Тел.: 8 (8452) 99-87-39, e-mail: izdat@ssitu.ru