

На правах рукописи

Куренной Дмитрий Святославович

**ОБРАТНОЕ СТРЕСС-ТЕСТИРОВАНИЕ КРЕДИТНОГО
ПОРТФЕЛЯ БАНКА НА ОСНОВЕ СИСТЕМНО-
ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАЕМЩИКОВ**

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва, 2021

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Голембиовский Дмитрий Юрьевич**
доктор технических наук,
Публичное акционерное общество «Промсвязьбанк», директор
департамента по управлению финансовыми рисками

Официальные оппоненты: **Крянев Александр Витальевич**,
доктор физико-математических наук,
Национальный исследовательский ядерный университет
«Московский инженерно-физический институт», профессор
кафедры Прикладной математики

Полянский Юрий Николаевич,
кандидат технических наук,
Банк России, Начальник отдела валидации внутренних методик
и моделей оценки кредитного риска Управления
моделирования рисков Департамента банковского
регулирования

Ведущая организация: Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования «Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации»

Защита состоится ____ 2021 г. в ____ часов на заседании диссертационного
совета Д 002.073.04 на базе Федерального государственного учреждения «Федеральный
исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ
ИУ РАН) по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, 9 (конференц-зал, 1-й
этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: г. Москва, ул.
Вавилова, д. 40 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН: : <http://www.frccsc.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба
направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, ученому секретарю
диссертационного совета Д 002.073.04

Автореферат разослан ____ 2021 г.
Телефон для справок: +7 (499) 135-51-64.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
Д 002.073.04,
д-р. техн. наук, профессор

В. Н. Крутько

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. *Стресс-тестирование*¹ является важным современным инструментом анализа рисков финансовых организаций, который позволяет оценить их устойчивость по отношению к различным потенциально возможным сценариям, способным вызвать резкие и существенные (далее – шоковые) изменения значимых факторов конкретного вида риска. Классическая процедура стресс-тестирования капитала, в частности, дает возможность оценить уровень непредвиденных потерь организации вследствие реализации кредитного риска, обусловленной осуществлением конкретного стресс-сценария.

Однако, финансовый кризис 2008 года выявил в данном подходе ряд недостатков², связанных с его невысокой точностью в быстро меняющихся экономических условиях. Дело в том, что стресс-сценарии факторов риска, разработанные в результате макроэкономического анализа, существенно отличаются от шоковых событий, реализующихся в действительности. С другой стороны, стресс-тесты, опирающиеся на исторические данные об изменениях факторов риска, могут не в полной мере учитывать все условия и нюансы наступающего экономического кризиса. Методы стресс-тестирования, основанные на проверке гипотетических сценариев, сталкиваются также с проблемой оценки вероятности рассматриваемых гипотетических шоковых событий. Поэтому в настоящее время регуляторы банковской сферы в качестве одной из главных процедур оценки рисков предписывают проведение банками *обратного стресс-тестирования*³.

Обратное стресс-тестирование состоит в построении наиболее реалистичных шоковых сценариев, приводящих к заданному уровню финансовых потерь, либо в построении наиболее опасных стресс-сценариев, максимизирующих финансовые потери в рамках заданного критерия правдоподобия. Результаты обратного стресс-тестирования могут быть использованы, в частности, для принятия управленческих решений, позволяющих смягчить последствия реализации негативных сценариев.

В рамках оценки кредитного риска осуществляется обратное стресс-тестирование кредитного портфеля, которое заключается в построении стресс-сценариев, обуславливающих непредвиденные потери, которые возникают вследствие дефолта заемщиков, формирующих кредитный портфель. Однако, не все модели оценки кредитного

¹ Principles for sound stress testing practices and supervision / Basel committee on banking supervision. 2009. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.bis.org/publ/bcbs147.pdf> (дата обращения 09.10.2018).

² Risk Management Lessons from the Global Banking Crisis of 2008. / Senior Supervisors Group. – 2009. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.sec.gov/news/press/2009/report102109.pdf> (дата обращения 09.10.2018).

³ Guidelines on stress testing / Committee of European banking supervisors. 2010. [Электронный ресурс]. – URL: https://www.eba.europa.eu/documents/10180/16094/ST_Guidelines.pdf (дата обращения 09.10.2018).

риска, распространенные на данный момент времени, приспособлены для решения задач обратного стресс-тестирования. Например, модели могут учитывать не все особенности организационной и деловой структур конкретных компаний, не позволять исследовать развитие кризисных явлений во времени и/или предполагать обязательное наличие большой выборки данных об аналогичных предприятиях и ситуациях.

Данная работа демонстрирует возможность решения задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля банка на основе системно-динамических моделей заемщиков⁴. Предлагаемый подход позволяет преодолеть некоторые из указанных недостатков.

Системная динамика представляет собой парадигму имитационного моделирования, предназначенную для описания структуры и динамики сложных систем на основе концепции потоков, накопителей и обратных связей, которым соответствует формальное представление в виде системы дифференциальных уравнений. Такой метод был впервые предложен Джейм Форрестером в 1950-х годах для анализа текучести кадров в компании, с которой он сотрудничал. При помощи построенных моделей ему удалось показать, что главная причина нестабильности рабочих мест была связана с внутренней структурой самой фирмы и не зависела от внешних факторов.

В последующие годы идея представления сложных объектов и явлений в виде системно-динамических моделей получила активное распространение, формальное описание и собственные средства компьютерного моделирования.

Разработка системно-динамической модели предполагает описание структуры исследуемого объекта или явления в виде потоковых диаграмм, а также определение характеристик взаимодействия его различных частей. Представленная в такой форме модель уточняется при помощи компьютерной симуляции, тестирования различных гипотез о ее поведении и проверки построенных взаимосвязей на исторических данных.

Таким образом, решение оптимизационной задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля, основанного на системно-динамических моделях, является на данный момент актуальным исследованием.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы являются разработка и исследование алгоритма решения задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля, представляемого системно-динамическими моделями предприятий-заемщиков. Для достижения цели исследования были поставлены следующие задачи:

⁴ Forrester J. W. Industrial Dynamics / MIT Press. 1961.

1. Построить системно-динамические модели предприятий из нескольких ключевых отраслей российской экономики, учитывающие структуру и динамику производственно-финансовой деятельности каждой компании. Провести анализ полученных моделей.

2. Построить многомерную ARIMA-GARCH-модель макроэкономических переменных, являющуюся основой для построения сценариев значимых факторов кредитного риска, способных повлечь максимум финансовых потерь кредитного портфеля в результате дефолтов заемщиков.

3. Разработать и исследовать алгоритм, основанный на принципах приближенного динамического программирования и решающий задачу обратного стресс-тестирования. Изучить ключевые свойства полученного алгоритма.

Реализовать разработанный метод с помощью современных средств программирования и провести ряд численных экспериментов, реализующих процедуру обратного стресс-тестирования на основе полученного алгоритма и с использованием построенных системно-динамических моделей. Сравнить результаты разработанного метода с генетическим алгоритмом.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются математические методы и модели, предназначенные для анализа и оценки кредитного риска. Предметом исследования являются оптимизационные алгоритмы и имитационные модели, обеспечивающие решение задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля.

Методы исследования. В работе применены математические методы исследования операций, в том числе имитационного моделирования, теории оптимизации, статистические методы анализа временных рядов и регрессионного анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем.

1. В сфере математического моделирования.

1.1. Предложен новый подход к проведению процедуры обратного стресс-тестирования, учитывающий структуру предприятий-заемщиков и динамику их показателей во времени.

1.2. Разработаны системно-динамические модели предприятий, обеспечивающие возможность анализа производственной и финансовой деятельности исследуемых компаний.

1.3. Продемонстрированы возможности использования системно-динамической модели для оценки вероятности банкротства предприятия. Подтверждена адекватность системно-динамических моделей путем сравнения оценок вероятности дефолта

предприятия, полученных с применением разработанных моделей, с соответствующими оценками, полученными рейтинговыми агентствами.

1.4. Идентифицирована многомерная ARIMA-GARCH-модель, являющаяся основой для определения сценариев факторов риска, которые вызывают максимум финансовых потерь кредитного портфеля.

2. В сфере численных методов.

2.1. Разработан и исследован метод решения оптимизационной задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля банка на основе системно-динамических моделей заемщиков.

2.2. Доказаны утверждения, которые позволяют сделать выводы о свойствах и применимости данного метода. Эти утверждения указывают на свойства функций, фигурирующих в подзадачах разработанного алгоритма, и обосновывают корректность применения метода последовательного квадратичного программирования к данным подзадачам.

3. В сфере программирования.

3.1. Создан комплекс программ, реализующий полученный алгоритм и позволяющий строить сценарии обратного стресс-тестирования.

3.2. Выполнены численные эксперименты по построению сценариев обратного стресс-тестирования для кредитного портфеля из шести заемщиков на временном периоде пяти лет, которые демонстрируют применение разработанного метода к задаче построения макроэкономических сценариев. Результаты разработанного численного метода сравниваются с результатами решения задачи при помощи классического генетического алгоритма.

Теоретическая и практическая значимость. Разработан общий подход к построению системно-динамических моделей заемщиков, используемых для решения оптимизационной задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля.

Представлен способ оценки вероятности дефолта предприятий с помощью системно-динамических моделей.

Разработан алгоритм, позволяющий формировать сценарии, способные привести к убытку кредитного портфеля, который соответствует локальному экстремуму оптимизационной задачи. При этом обеспечивается заданный уровень правдоподобия сценариев. Доказанные утверждения обосновывают корректность некоторых этапов разработанного алгоритма.

Результаты применения алгоритма могут быть использованы для принятия управленческих решений, позволяющих смягчить последствия реализации полученных сценариев.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается строгостью постановки задачи, применяемых при ее решении научных методов и математических доказательств. Результаты находятся в согласии с результатами, полученными другими авторами.

Соответствие работы паспорту научной специальности (направленности). Исследование соответствует пунктам 1, 3, 4, 5 специальности (направленности) «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (05.13.18) – «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были представлены на 8-й Московской международной конференции по исследованию операций ORM 2016, на 12-ой профильной конференции по управлению рисками «XII Russia Risk Conference» 2016 года, на 9-й Московской международной конференции по исследованию операций ORM 2018, на конференции «Тихоновские чтения 2018», на семинаре ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН и научных семинарах кафедры исследования операций ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова.

Публикации. По теме диссертации имеется 7 публикаций. Основные результаты исследования опубликованы в 4 статьях в журналах из списка ВАК и в 2 статьях в сборниках трудов конференций.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 113 источников. Полный объем работы составляет 135 страниц, включает 104 рисунков и 6 таблиц.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, формулируются цели и задачи работы. Описывается

предлагаемый подход к решению поставленных задач, характеризуется степенью новизны полученных результатов и их апробация, обосновывается достоверность представленных научных положений и выводов, их теоретическая и практическая значимость.

Первая глава содержит описание методов, используемых в диссертации для построения алгоритма решения задачи обратного стресс-тестирования, а также анализ соответствующих им работ.

В разделе 1.1 представлены процедуры стресс-тестирования и обратного стресс-тестирования, являющиеся методами анализа рисков и устойчивости различных систем и явлений.

Основные подходы к моделированию кредитного риска приведены, например, в статьях Sorge M.⁵, Quagliariello M.⁶ и Drehmann M.⁷. Ключевым объектом анализа, рассматриваемым в указанных работах, является стресс-тестирование, которое позволяет вычислить уровень потерь финансовых организаций, обусловленный осуществлением конкретного стресс-сценария. В указанных работах описываются основные методы, применяемые в рамках стресс-тестирования, и приводится их классификация.

Однако в настоящее время в качестве одной из главных процедур оценки рисков рассматривается обратное стресс-тестирование, ключевые аспекты которого содержатся в методологических указаниях для банков со стороны регуляторов банковской сферы^{8,9,10}. В работах Flood M.D., Korenko G.G. и Glasserman P., Kang C., Kang W. изложена и исследована основная концепция данного подхода. Авторы первой из указанных статей¹¹ описывают алгоритм построения наиболее правдоподобных макроэкономических сценариев с известным распределением факторов риска, приводящих к фиксированному уровню финансовых потерь. Вторая работа¹² посвящена описанию подходов к построению стресс-сценариев с неизвестным распределением факторов риска, обуславливающих заданный уровень потерь. На данный момент предложен также альтернативный подход¹³, решающий

⁵ Sorge M. Stress-testing financial systems: an overview of current methodologies // BIS Working Papers. - 2004. - N 165.

⁶ Quagliariello M. Stress-testing the banking system: methodologies and applications / Cambridge University Press. 2009.

⁷ Drehmann M. Macroeconomic stress-testing banks: a survey of methodologies. In Stress-testing the Banking System: Methodologies and Applications / edited by Quagliariello M. Cambridge University Press. - 2009.

⁸ Supervisory and bank stress testing: range of practices / Basel committee on banking supervision. 2017. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.bis.org/bcb/publ/d427.pdf> (дата обращения 09.10.2018).

⁹ Указание Банка России от 07.12.2015 N 3883-У [Электронный ресурс]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_190733/ (дата обращения 09.10.2018).

¹⁰ Указание Банка России от 15.04.2015 N 3624-У [Электронный ресурс]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_180268/ (дата обращения 09.10.2018).

¹¹ Flood M.D., Korenko G.G. Systematic scenario selection: stress testing and the nature of uncertainty // Office of financial research. – 2013.

¹² Glasserman P., Kang C., Kang W. Stress scenario selection by empirical likelihood // Office of financial research. 2012.

¹³ Breuer, T., Jandacka, M., Mencia, J., and Summer, M. A systematic approach to multi-period stress testing of portfolio credit risk. Technical Report Working Paper 1018 // Banco de Espana. – 2010.

задачу определения макроэкономических сценариев факторов риска, максимизирующих финансовые потери кредитного портфеля и удовлетворяющих заданному уровню правдоподобия.

Часть 1.2 содержит описание концепций системной динамики, которая используется для изучения структуры и динамики сложных систем. Системно-динамическое моделирование, родоначальником которого считается Джей Форрестер, является важным компонентом данной диссертационной работы. С помощью предложенных Форрестером моделей в 1950-х годах удалось показать, что нестабильность числа рабочих мест компании, с которой он сотрудничал, была обусловлена внутренней структурой самой фирмы и не зависела ни от каких внешних факторов. Эта работа послужила началом системной динамики. Впоследствии идея представления сложных объектов и явлений в виде системно-динамических моделей получила активное распространение, формальное описание и собственные средства компьютерного моделирования.

Первым фундаментальным трудом, посвященным системной динамике, считается книга Форрестера «Индустриальная динамика»¹⁴, которая излагает основные принципы указанного подхода и демонстрирует возможности его применения для воспроизведения обобщенных схем производства и сбыта продукции предприятия. В данной работе описываются ключевые элементы системно-динамических моделей (потоки, накопители, переменные и обратные связи), представляются базовые подходы к построению и оценке таких моделей. Дальнейшее развитие идеи системной динамики получили в ставшей классической книге Форрестера - «Динамика развития города»¹⁵. Данная работа расширила границы применения системной динамики, продемонстрировав ее потенциал в исследовании сложных социально-экономических систем. Затем были рассмотрены еще более сложные объекты, включающие в себя не только социальные, экономические аспекты жизни человека, но и естественную окружающую среду. Результаты этих исследований изложены в книге Форрестера «Мировая динамика»¹⁶.

Классическим фундаментальным трудом, посвященным системной динамике, можно назвать также работу Д. Стермана «Бизнес динамика»¹⁷, в которой описаны основные подходы к решению актуальных практических и теоретических задач различных отраслей научного знания.

¹⁴ Forrester J. W. Industrial Dynamics / MIT Press. 1961.

¹⁵ Forrester J. W. Urban Dynamics / Pegasus Communications. 1969.

¹⁶ Forrester J. W. World Dynamics / Wright-Allen Press. 1971.

¹⁷ Sterman J.D. Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World. Boston: McGraw-Hill Companies. 2000.

В разделе 1.3 обсуждаются ключевые принципы представления нестационарных временных рядов при помощи ARIMA-GARCH-моделей. Принципы интегрированных моделей авторегрессии-скользящего среднего (ARIMA) изложены в работах Бокса Дж. и Дженкинса Т¹⁸. Описанию концепции GARCH-моделей посвящены труды Bollerslev, T¹⁹ и Engle, R.F²⁰. Общие ARIMA-GARCH-модели применяются в эконометрике для моделирования нестационарных случайных процессов, а в рамках данной работы они лежат в основе построения искомых сценариев факторов риска.

Часть 1.4 посвящена описанию принципов приближенного динамического программирования, которые лежат в основе построенного в данной диссертации многошагового метода последовательной оптимизации, нацеленного на решение задачи обратного стресс-тестирования. Возникновение динамического программирования²¹ связывают с именем американского ученого Р. Беллмана, который в начале 50-х годов XX века применил к ряду конкретных задач прием, названный впоследствии принципом оптимальности. В основе метода лежит идея последовательного поиска решения путем разбиения исходной задачи на следующие друг за другом этапы. В работах Powell W.B.²² и Bertsekas, D.²³ описан подход, направленный на решение проблемы, которая возникает в работе метода динамического программирования при увеличении размерности задачи, путем замены исходной целевой функции ее аппроксимацией.

Раздел 1.5 описывает постановку оптимизационной задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля, основанного на системно-динамических моделях заемщиков. Процедура обратного стресс-тестирования формализуется двумя разными способами. Первый подход предполагает построение наиболее реалистичных сценариев, приводящих к заданному уровню финансовых потерь. Второй способ заключается в определении стресс-сценариев, максимизирующих финансовые потери и удовлетворяющих определенному критерию правдоподобия. Данная работа посвящена описанию метода решения задачи обратного стресс-тестирования следующего вида:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^{T \times N}} f(x), \quad (1)$$

$$L(x) \geq l, \quad (2)$$

¹⁸ Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974.

¹⁹ Bollerslev, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. - 1986. - N 31. - P. 309-328.

²⁰ Engle, R.F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the UK inflation // Econometrica. - 1982. - N 50. - P. 987-1008.

²¹ Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.

²² Powell W.B. Approximate dynamic programming: Solving the curses of dimensionality / Wiley. 2011.

²³ Bertsekas, D. Dynamic Programming and Optimal Control / Athena Scientific. – 2000.

где x – матрица сценариев факторов риска;

N – число факторов риска;

T – количество кварталов, определяющих временной период, на котором осуществляется построение стресс-сценариев;

$f(x)$ – функция финансовых потерь кредитного портфеля, возникающих вследствие дефолтов заемщиков;

$L(x)$ – функция правдоподобия;

l – константа, определяющая уровень правдоподобия искомых сценариев.

При этом на целевую функции (1) и функцию ограничений (2) не накладываются условия гладкости, выпуклости и т.д., что приводит к необходимости решения, вообще говоря, негладкой задачи условной оптимизации.

В рамках данной работы в качестве факторов риска рассматриваются макроэкономические переменные (Таблица 1), динамика которых представляется при помощи многомерной ARIMA-GARCH-модели²⁴:

$$(1-V)^d X_t = c + \left(\sum_{i=1}^p a_i \cdot V^i\right)(1-V)^d X_t + \left(1 + \sum_{i=1}^q b_i \cdot V^i\right)\varepsilon_t, \quad (3)$$

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} \cdot e_t. \quad (4)$$

Здесь $X_t = (\ln(x_t^1), \dots, \ln(x_t^N))'$ – значение вектора логарифмов макропараметров в квартале с номером t ;

$V : VX_t = X_{t-1}$ – лаговый оператор;

$a_1, \dots, a_p$ и $b_1, \dots, b_q$ – матрицы действительных чисел, являющиеся коэффициентами соответствующей части модели (авторегрессии и скользящего среднего);

c – действительное число, являющееся константой регрессионной зависимости;

p , q и d – натуральные числа, каждое из которых определяет порядок соответствующей части модели;

$\{e_t\}$ – вектор остатков регрессионной модели независимых одинаково распределенных по стандартному нормальному закону случайных величин;

H_t – положительно определенная матрица ковариаций между остатками, представимая следующем виде²⁵:

²⁴ Engle, R.F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the UK inflation // *Econometrica*. - 1982. - N 50. - P. 987-1008.

²⁵ Engle R.F., Kroner, K.F.. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH // *Econometric Theory* – 1995. - N 11. - P. 122-150

$$H_t = B' B + \sum_{k=1}^r U_k' \varepsilon_{t-1} (\varepsilon_{t-1})' U_k + \sum_{k=1}^r J_k' H_{t-1} J_k, \quad (5)$$

где B , U_k , J_k – матрицы параметров размерностью $N \times N$, причем B – верхнетреугольная матрица.

Калибровка ARIMA-GARCH-модели производилась на основе исторических квартальных данных периода 2004-2014 гг. Значения параметров ($p = 3$, $d = 2$, $q = 2$, $r = 1$) обусловлены минимальной величиной Байессовского информационного критерия ($BIC = 2353,2$). Статистическая значимость компонент модели и ее точность оценены при помощи асимптотического теста Фишера и анализа стандартных ошибок коэффициентов авторегрессий. Ошибки аппроксимации полученных макроэкономических переменных, рассчитанные по формуле (6), не превышают 9,8% (средняя ошибка равна 4,9%).

$$\overline{err}_i = \frac{1}{n_{hist}} \sum_{t=1}^T \left| \frac{x_t^i - \tilde{x}_t^i}{x_t^i} \right| \cdot 100\%, i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где n_{hist} – объем выборки ($n_{hist} = 40$), $\tilde{x}_t^i$ – исторические значения i -ой макроэкономической переменной, x_t^i – значения, полученные моделью ARIMA-GARCH для i -ого макропараметра.

При заданных коэффициентах ARIMA-GARCH-модели поведение внешних факторов определяется случайными величинами e_t , функция правдоподобия которых для случая нормального распределения $N(0,1)$ записывается следующим образом:

$$\prod_{t=2}^T \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}(e_t)' e_t}.$$

В результате задача (1)-(2) принимает вид:

$$\max_{\{e \in \mathbb{R}^{T \times N} | e = (e_1, \dots, e_T)\}} f(e) \quad (7)$$

$$\prod_{t=2}^T \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}(e_t)' e_t} \geq l. \quad (8)$$

Вторая глава посвящена описанию общих принципов системно-динамического моделирования (раздел 2.1) и построению моделей предприятий (раздел 2.2). В разделе 2.3 продемонстрирована возможность использования разработанных моделей для оценки вероятности дефолта предприятия. Сравнение рассчитанной вероятности банкротства компании с данными рейтинговых агентств позволяет обосновать адекватность системно-динамической модели, описывающей производственные и финансовые процессы предприятия – заемщика.

Системная динамика представляет собой подход имитационного моделирования, предназначенный для описания структуры и динамики сложных систем на основе концепции потоков, накопителей и обратных связей, которым соответствует формальное представление в виде системы дифференциальных уравнений.

При разработке системно-динамической модели выделяют два основных этапа. На первом этапе должно быть получено описание модели в виде потоковых диаграмм и определены характеристики взаимодействия различных ее частей. Затем, на втором этапе, полученная модель уточняется с помощью компьютерной симуляции, тестирования различных гипотез о ее поведении и проверки построенных взаимосвязей на тестовых данных.

На основе финансовой отчетности компаний (Таблица 1), являющихся крупными представителями различных отраслей российской экономики, за период 2007-2015 гг. и информации из других открытых источников были разработаны системно-динамические модели для этих предприятий: нефтедобывающей и нефтеперерабатывающей компании, сельскохозяйственного холдинга, производителей алюминиевого профиля и микроэлектроники, дистрибьютора алкогольной продукции, официального дилера российских и зарубежных производителей автомобилей.

В указанных моделях можно условно выделить две компоненты, непрерывно взаимодействующие между собой: производственную (операционную) и финансовую. Основные накопители производственной части модели агрегируют материальные факторы, являющиеся сырьевыми ресурсами или готовой для продажи продукцией конкретного предприятия. Потоки обеспечивают взаимосвязь данных накопителей и представляют, таким образом, производственный процесс. Одним из основных элементов финансовой части является накопитель «Долг», который отражает текущий объем долговых обязательств компании. Входящие и исходящие потоки данного накопителя позволяют отразить особенности кредитной политики предприятия.

Ключевыми компонентами всех системно-динамических моделей заемщиков, входящими в финансовую часть и обобщающими деятельность компании, являются накопителями «Средства в рублях» и соответствующие им потоки. Значения данных накопителей образует вектор, который фигурирует в целевой функции исходной задачи (7)-(8). Отрицательное значение или равенство нулю i -ого накопителя «Средства в рублях» означает дефолт i -ого предприятия.

Название компании	Сайт компании	Рассматриваемые макроэкономические переменные.
«АРОМА»	http://aroma.ru/	- курс доллара к рублю; - ставка привлекаемых, погашаемых кредитов (Mosprime); - цены на шампанское, вино, крепкий алкоголь дорогих и обычных сортов на внутреннем и внешнем рынке.
«ВМК»	http://vmk-etm.ru/	- мировые цены на нефть; - курс доллара к рублю; - ставка привлекаемых, погашаемых кредитов (Mosprime); - мировые цены на алюминий; - цены алюминиевого профиля: экспортная и российская.
«Ангстрем»	https://www.angstrem.ru/ru	- мировые цены на нефть; - курс доллара к рублю; - ставка привлекаемых, погашаемых кредитов (Mosprime); - цены на кремний в России.
«У Сервис+»	http://www.uservice.ru/	- мировые цены на нефть; - курс доллара к рублю; - ставка привлекаемых, погашаемых кредитов (Mosprime); - закупочные цены автомобилей российских и иностранных марок экономического и бизнес классов; - цены автомобилей на внутреннем рынке российских и иностранных марок экономического и бизнес классов.
«Агросила»	http://agrosila-holding.ru/	- мировые цены на нефть; - курс доллара к рублю; - ставка привлекаемых, погашаемых кредитов (Mosprime); - цены на бензин на внутреннем рынке; - цены на продукцию которой торгует компания: сахар, семена, корм, мясо, зерновые, молоко, яйца, куриное мясо.
«Башнефть»	http://bashneft.ru/	- экспортные и внутренние цены на нефть, дизель, мазут, бензин; - курс доллара к рублю; - ставка привлекаемых, погашаемых кредитов (Mosprime); - удельные себестоимости добычи и переработки нефти; - базовая ставка НДС.

Таблица 1. Заемщики и рассматриваемые макроэкономические переменные.

Совокупность моделей заемщиков позволяет сформировать пример кредитного портфеля банка и связать уровень его потерь со сценариями макроэкономических параметров, обуславливающими дефолты рассматриваемых предприятий. В качестве основных макропараметров, которые представлены в моделях независимыми переменными, выступают мировые цены на нефть, курс доллара к рублю, ставка привлекаемых и погашаемых кредитов и цены на продукцию, которой торгуют компании (Таблица 1).

Третья глава содержит постановку задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля как задачу динамической оптимизации, описание разработанного метода решения задачи, представление программного комплекса, реализующего данный метод, и полученные с помощью него численные результаты. Доказанные утверждения позволяют сделать некоторые выводы о свойствах и применимости указанного алгоритма.

Раздел 3.1.1 посвящен краткому описанию проблем классического метода динамического программирования применительно к исходной задаче (7)-(8) и изложению общей схемы метода приближенного динамического программирования, применяемого для решения модифицированной задачи и основанного на концепции «движения вперед», использование которой обусловлено тем, что в момент времени T проблематично определить необходимые для анализа состояния накопителей системно-динамических моделей и варианты банкротств заемщиков портфеля в связи с их количеством.

Принцип динамического программирования Беллмана с «движением вперед» для задачи описывается классическими уравнениями:

$$W_1 = \max_{e_1 \in E_1} f(S_0, e_1),$$

$$W_i = \max_{e_i \in E_i} [f(S_{i-1}, e_i) + W_{i-1}], i = 2, \dots, T.$$

В данном случае под состояниями системы $S_{i-1} \in \mathbb{S}_{i-1}$ понимается совокупность состояний всех накопителей системно-динамических моделей портфеля, значений факторов риска и значений функции правдоподобия перед шагом i . Величина E_i представляет собой множество допустимых значений e_i . В качестве критерия рассматривается сумма кредитов, которые предоставлены заемщикам, претерпевшим дефолт.

Данную задачу затруднительно решить классическим методом динамического программирования вследствие «проклятия размерности», из-за которого не представляется возможным найти решение за практически приемлемое время. Это обуславливает необходимость использования метода приближенного динамического программирования. В данном случае состояния системы определяются только значениями функции

правдоподобия. Ограничения для функции правдоподобия задаются сеткой значений, характеризующих возможные состояния. При этом для каждого состояния системы выбираются состояния накопителей системно-динамических моделей, соответствующие оптимальному значению критерия задачи. На каждом этапе описанного метода используется приближенный критерий минимума взвешенной суммы средств на счетах неразорившихся заемщиков. Таким образом, в рамках процедуры приближенного динамического программирования (approximate dynamic programming) критерий (7) на каждом этапе t заменяется критерием минимума (9). При этом весами являются соответствующие объемы выданных кредитов:

$$\min_{\{e_t \in \mathbb{R}^N\}} (\beta_t \otimes \theta) \cdot R_{t+1}(e_t), \quad (9)$$

где $\otimes$ - прямое (покомпонентное) произведение векторов-строк;

θ – вектор сумм выданных кредитов (постоянный по времени);

β_t – вектор, i -я компонента которого принимает значение 0 в случае дефолта i -ого заемщика в любом из предыдущих моментов времени, иначе - 1;

R_t – вектор, характеризующий количество средств, которыми располагает каждая компания к моменту времени t . Величина R_t определяется запуском системно-динамических моделей. Равенство нулю i -й компоненты вектора R_t означает дефолт i -ого заемщика.

Соответствующие описанному подходу уравнения Беллмана имеют следующий вид:

$$Z_1 = \min_{e_1 \in E_1(S_1)} F(S_0, e_1) = \min_{e_1 \in E_1(S_1)} [(\beta_1(S_0) \otimes \theta) \cdot R(e_1)],$$

$$Z_i = \min_{e_i \in E_i(S_i)} [F(S_{i-1}, e_i) + Z_{i-1}], i = 2, \dots, T,$$

где $S_{i-1} \in \mathbb{S}_{i-1}$ – возможные состояния системы перед шагом i , задаваемые сеткой значений для ограничений функции правдоподобия;

$E_i(S_i)$ - множество допустимых значений величин e_i .

Процесс разработки и формализации предложенного алгоритма можно разбить на несколько пунктов в соответствии с общими принципами динамического программирования:

- 1) Выбор способа разбиения исходной задачи на этапы.
- 2) Формализация понятия состояний, рассматриваемых на каждом этапе. При этом каждому состоянию должны соответствовать конкретные значения параметров задачи и искомых переменных.

- 3) Обоснование способа определения оптимального перехода из одного состояния в другое. Постановка оптимизационных задач, решаемых для этого на каждом этапе.
- 4) Определение способа получения решения динамической задачи на основе информации о состояниях и оптимальных переходах между ними.

В рассматриваемом случае процедура построения стресс-сценариев разбивается на T этапов в соответствии с количеством кварталов, на которых исследуется изменение макроэкономических переменных. В качестве основной характеристики состояний рассматривается величина l , задающая ограничения на текущее значение логарифмической функции правдоподобия, фигурирующей в (8). Таким образом, состояние определяет ограничения на величину функции правдоподобия в конкретный момент времени.

Для определения оптимального перехода между состояниями решаются оптимизационные подзадачи для каждой пары состояний: текущего этапа (в момент времени t) и следующего за ним этапа (в момент времени $t+1$). В результате на каждом этапе t определяются состояния, переход из которых в каждое новое состояние следующего этапа $t+1$ дает наилучшее значение критерия оптимизации. Таким парам состояний соответствуют изменения макроэкономических параметров (e_t), обеспечивающие переход между ними. В итоге всем состояниям назначаются оптимальные с точки зрения критерия оптимизации значения e_t , определяющие сценарии факторов риска. Общая схема одного этапа алгоритма иллюстрируется на Рисунок 1. Сплошные стрелки указывают на пары состояний найденного оптимального перехода из состояния в момент времени t в состояние шага $t+1$, пунктиром отображаются все рассматриваемые пары.



Рисунок 1. Общая схема одного шага алгоритма приближенного динамического программирования.

На шаге T определяется конечное состояние (m^*), соответствующее минимуму целевой функции задачи (8)-(9) и соответствующие значения $e_T^{m^*}$. Применяемая после этого процедура обратного хода алгоритма позволяет определить искомый сценарий макроэкономических переменных с учетом полученной в процессе прямого хода информации об оптимальных переходах между состояниями. Так, зная номер (n_m^*) состояния момента времени $T-1$, обеспечивающего оптимальный переход в состояние m^* , можно определить соответствующие значения величин $e_{T-1}^{n_m^*}$. Данная процедура повторяется до начального момента времени. Полученная последовательность величин $e_t, t=1, \dots, T$ с учетом (3) и (4) задает искомый стресс-сценарий.

В разделе 3.1.2 представлено формальное описание алгоритма решения задачи (7)-(8) и доказан ряд утверждений, обосновывающих некоторые из его этапов.

Введем следующие обозначения:

$t=1, \dots, T$ – рассматриваемые в моделях заемщиков моменты времени. $t=1$ соответствует начальному моменту;

K – число заемщиков в портфеле;

$\mathcal{N}_t$ – число рассматриваемых состояний факторов неопределенности (в дальнейшем ФН) в момент времени t (в начальный момент времени состояние одно);

β_t^n – вектор дефолтности заемщиков в момент времени t в состоянии ФН n , $n=1, \dots, \mathcal{N}_t$. Размерность вектора равна K , элементы вектора равны 1 для недефолтных заемщиков и равны 0 для заемщиков, находящихся в дефолте;

β_{t+1}^{nm} – вектор дефолтности заемщиков в момент времени $t+1$ в состоянии ФН m при условии, что в момент t ФН находились в состоянии n ;

θ – константный вектор сумм кредитов заемщикам (размерности K);

R_{t+1}^{nm} – вектор состояний накопителей «средства в рублях» всех заемщиков в момент времени $t+1$ в состоянии ФН m , если в момент t ФН находились в состоянии n ; данный вектор определяется в результате запуска системно-динамических моделей.

A_t^n – вектор состояний остальных накопителей системно-динамической модели в момент t , если ФН находятся в состоянии; данный вектор определяется в результате запуска системно-динамических моделей.

Векторы A_1^1 и R_1^1 известны в момент решения оптимизационной задачи – это начальные состояния накопителей системно-динамических моделей;

$\mathbf{e}_t^{nm}$ – вектор остатков многомерной ARIMA-GARCH модели, соответствующий переходу ФН из состояния n в момент времени t в состояние m . в момент времени $t+1$;

$\mathbf{H}_t^n$ – матрица ковариаций ошибок многомерной ARIMA-GARCH модели, соответствующая состоянию ФН n в момент времени t . Матрица $\mathbf{H}_1^1$ известна в момент решения оптимизационной задачи;

G_t^n – значение логарифмической функции правдоподобия в момент времени t в состоянии ФН n ;

$M_t^n, t = 2, \dots, T$ – номер состояния ФН в момент времени $t-1$, переход из которого в состояние n в следующий момент времени t дает наилучшее значение критерия оптимизации.

Ограничение на величину функции правдоподобия представим в виде

$$\prod_{t=2}^T \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{e}_t)' \mathbf{e}_t} \geq e^{\underline{G}}, \quad (10)$$

В формуле (10) константа, определяющая уровень правдоподобия, представлена в виде $e^{\underline{G}}$ для более простой записи результата логарифмирования.

Логарифмируя обе части неравенства (10), получим:

$$-\frac{N(T-1)}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T (\mathbf{e}_t)' \mathbf{e}_t \geq \underline{G}. \quad (11)$$

Таким образом, минимальное значение логарифмической функции правдоподобия равно $\underline{G}$.

Следующая лемма обосновывает формулу вычисления максимального значения ($\bar{G}$) данной функции.

Лемма. Пусть функция правдоподобия задана с помощью формулы (11), e_t – независимые случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону. Тогда $\bar{G}$ вычисляется следующим образом:

$$\bar{G} = -\frac{N(T-1)}{2} \ln(2\pi), \quad (12)$$

Состоянию ФН n , $n = 1, \dots, \mathcal{N}_t$ в момент времени t будет соответствовать значение функции правдоподобия $\bar{G}_t^n = \underline{G} + \frac{n-1}{\mathcal{N}_t-1} (\bar{G} - \underline{G})$.

Алгоритм приближенного динамического программирования

A. Получить значение $\bar{G}$ из формулы (12) и значение $\underline{G}$ на основе (11). Рассчитать величины $\bar{G}_t, t = 2, \dots, T, n = 1, \dots, \mathcal{N}_t$.

B. $t := 1$.

C. $\beta_t^n := 1, L_t^n := 0, n = 1, \dots, \mathcal{N}_t$.

D. Решить оптимизационные задачи

$$F_{t+1}^{nm} := \min_{\mathbf{e}_t^{nm}} [(\beta_t^n \otimes \theta) \cdot \mathbf{R}_{t+1}^{nm}], \quad (13)$$

$$G_t^n - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_t^{nm})' \mathbf{e}_t^{nm} \geq \bar{G}_{t+1}^m. \quad (14)$$

$$n = 1, \dots, \mathcal{N}_t, \quad m = 1, \dots, \mathcal{N}_{t+1}.$$

Если какая-либо из задач (10), (11) не имеет решения, то переход из n в m исключается.

E. По результатам п.D по состояниям системно-динамических моделей для каждого m найти

$$n^* = \arg \min_n \theta \cdot (\beta_{t+1}^{nm})'. \quad (15)$$

Если существует несколько различных значений n , удовлетворяющих условию (15) то выбрать в качестве n^* те из них, для которого меньше величина F_{t+1}^{nm} .

Присвоить

$$\begin{aligned} M_{t+1}^m &= n^*, \quad \beta_{t+1}^m := \beta_{t+1}^{n^*m}, \quad \mathbf{R}_{t+1}^m := \mathbf{R}_{t+1}^{n^*m}, \quad \mathbf{A}_{t+1}^m := \mathbf{A}_{t+1}^{n^*m}, \\ G_{t+1}^m &:= G_t^{n^*} - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_t^{n^*m})' \mathbf{e}_t^{n^*m} \end{aligned} \quad (16)$$

F. $t := t + 1$. Если $t < T$, то идти к п. D.

G. Найти $m^* = \arg \min_m \theta \cdot (\beta_t^m)'$. Заданная в обратном порядке последовательность состояний $m^*, M_T^{m^*}, M_{T-1}^{m^*}, \dots, 1$ и соответствующие значения инноваций $\mathbf{e}_t^{n_t^* m_{t+1}^*}, t = 1, \dots, T-1$ определяют сценарий обратного стресс-тестирования.

H. Конец.

На каждом шаге общего описанного алгоритма рассматривается совокупность задач оптимизации следующего вида:

$$\min_{\mathbf{e}_t^{nm} \in \mathbb{R}^N} [(\beta_t^n \otimes \theta) \cdot \mathbf{R}_{t+1}^{nm}], \quad (17)$$

$$G_t^n - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_t^{nm})' \mathbf{e}_t^{nm} \geq \bar{G}_{t+1}^m. \quad (18)$$

Средства, которыми располагают заемщики $\mathbf{R}_{t+1}^{nm}(\mathbf{e}_1^{1,2}, \dots, \mathbf{e}_t^{nm})$ в фиксированный момент времени $t+1$, определяются запуском системно-динамической модели из момента t

с учетом того, что на вход данной модели подаются величины e_t . В терминах системной динамики средства заемщиков представляют собой накопитель «Средства в рублях». Значение данного накопителя (R) и других накопителей системно-динамических моделей (A) определяются на основе входящих и исходящих потоков, которые могут включать в себя как положительные, так и отрицательные обратные связи, и выражаются с помощью соответствующих функциональных зависимостей.

Реализация системно-динамических моделей осуществляется через разностные уравнения, но для простоты модели традиционно представляются в дифференциальной форме:

$$\frac{dR(e(t))}{dt} = f_R^+(e(t)) - f_R^-(e(t)) \Leftrightarrow R(e(t)) = \int_0^t [f_R^+(e(\tau)) - f_R^-(e(\tau))] d\tau, \quad (19)$$

$$\frac{dA(e(t))}{dt} = f_A^+(A, e(t)) - f_A^-(A, e(t)) \Leftrightarrow A(e(t)) = \int_0^t [f_A^+(A, e(\tau)) - f_A^-(A, e(\tau))] d\tau \quad (20)$$

$$R(e(t_0)) = R_0, A(e(t_0)) = A_0. \quad (21)$$

Функции $f_R^+(e(t))$, $f_A^+(A, e(t))$ представляют собой сумму входящих в соответствующие накопители потоков, $f_R^-(e(t))$, $f_A^-(A, e(t))$ - сумму исходящих потоков.

Следующие утверждения позволяют обосновать применимость квазиньютоновских методов к задаче (17)–(18) и сделать выводы о свойствах каждого шага алгоритма приближенного динамического программирования.

Задача (17)–(18) решается на каждом отдельном шаге при фиксированном t , поэтому для обоснования применимости метода последовательного квадратичного программирования необходимо доказать гладкость целевой функции и функции ограничений относительно $e_t \in \mathbb{R}^N$.

Утверждение 1. При описанном способе построения системно-динамических моделей зависимости $f_R^+(e_t)$, $f_R^-(e_t)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми по $e_t \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство: Из описанных общих принципов построения системно-динамических моделей^{26,27} следует, что данные функции представляют собой сумму входящих и исходящих потоков накопителя «Средства в рублях», каждый из которых

²⁶ Куренной Д. С., Голембиовский Д. Ю. Построение сценариев дефолта предприятий на основе системно-динамических моделей в системе insightmaker // Прикладная информатика. 2017. №05. С. 11-28.

²⁷ Куренной Д. С., Голембиовский Д. Ю. Системно-динамическая модель кредитного риска нефтедобывающей и нефтеперерабатывающей компании // Проблемы анализа риска. 2017. №01. С. 6-22.

является суперпозицией нескольких функциональных зависимостей, объединяющих воздействующие на указанные потоки элементы модели:

$$f_R^+(e_t) = Q_1(f_1^+(e_t), \dots, f_{q_1}^+(e_t)),$$

$$f_R^-(e_t) = Q_2(f_1^-(e_t), \dots, f_{q_2}^-(e_t)).$$

В данных формулах, вообще говоря, не все функции могут зависеть от полного набора переменных. При этом, $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot)$ представляют собой комбинации операций сложения и вычитания и не влияют на свойство дифференцируемости, следовательно, гладкость указанных в условии функций определяется только дифференцируемостью $f_1^+(e_t), \dots, f_{q_1}^+(e_t)$ и $f_1^-(e_t), \dots, f_{q_2}^-(e_t)$. Таким образом, чтобы доказать утверждение, необходимо рассмотреть все типы функций, используемых при построении системно-динамических моделей, и обосновать их гладкость относительно e_t .

1. Величина e_t вводится при описании ARIMA-GARCH-моделей, соответствующих макропараметрам и определяющих линейную зависимость макропараметров от e_t . Отсюда следует непрерывная дифференцируемость функций, соответствующих макропараметрам, по e_t до второго порядка включительно.
2. Типы функций, выражающих зависимости остальных элементов модели от функций макропараметров, следующие:
 - а) полиномиальные зависимости различного (ненулевого) порядка, полученные в результате регрессионного анализа;
 - б) обратные зависимости вида $\frac{1}{x}$.

Очевидно, что в случае 2-а) непрерывная дифференцируемость до второго порядка включительно сохраняется с учетом приведенного пункта 1. Гладкость в случае 2-б) обеспечивается за счет того, что рассматриваемые макропараметры не принимают нулевых значений.

3. Типы функций, выражающие зависимости между различными элементами модели (потоками, накопителями и вспомогательными переменными). Данные функции являются суперпозициями следующих функций:
 - а) полиномиальные зависимости различного (ненулевого) порядка, полученные в результате регрессионного анализа;
 - б) e^x ; в) $\frac{1}{x}, x \neq 0$; г) $\ln(x), x > 0$.

В описанных случаях и с учетом того, что операции сложения, вычитания, умножения на константу не влияют на свойство дифференцируемости, можно утверждать непрерывную дифференцируемость e_t от до второго порядка включительно.

Заметим, что порядок гладкости по e_t функций, соответствующих накопителям ($A(e_t)$), через которые проходят обратные связи, определяется порядком гладкости функций входящих и исходящих потоков этих накопителей:

$$\frac{dA(e_t)}{de_t} = \frac{d[A_{t-1} + f_A^+(e_t) - f_A^-(e_t)]}{de_t} = \frac{d(f_A^+(e_t) - f_A^-(e_t))}{de_t},$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. При описанном способе построения системно-динамических моделей целевая функция и функция ограничений задачи (17)–(18) дважды непрерывно дифференцируемы на $e_t \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство: Гладкость целевой функции задачи (17)–(18) определяется дифференцируемостью функции $R(e_t)$, так как величина β_t^n в фиксированный момент времени t является константным вектором из нулей и единиц. При этом:

$$\frac{dR(e_t)}{de_t} = \frac{d[R_{t-1} + f_R^+(e_t) - f_R^-(e_t)]}{de_t} = \frac{d(f_R^+(e_t) - f_R^-(e_t))}{de_t}, \quad (22)$$

где R_{t-1} - значение функции $R(\cdot)$ в предшествующий момент времени. Аналогично:

$$\frac{d^2R(e_t)}{d^2e_t} = \frac{d^2(f_R^+(e_t) - f_R^-(e_t))}{d^2e_t}. \quad (23)$$

Функции $f_R^+(e_t)$, $f_R^-(e_t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по e_t согласно утверждению 1. Отсюда следует, что $R(e_t)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Функция ограничений представляет собой квадратичную функцию с положительно определенной матрицей коэффициентов (единичная матрица), следовательно, является дважды непрерывно дифференцируемой. Утверждение доказано.

Данные утверждения позволяют обосновать применимость квазиньютоновских методов к задаче (17)–(18) и сделать выводы о свойствах каждого шага алгоритма приближенного динамического программирования. Следующее утверждение является прямым следствием теоремы сходимости метода последовательного квадратичного программирования²⁸ и утверждения 2.

²⁸ Izmailov A.F., Solodov M.V. Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems / Springer International Publishing, 2014.

Следствие. Пусть $\bar{e}_t \in \mathbb{R}^N$ - локальное решение задачи (17)–(18). Системно-динамические модели, определяющие значения функции (17) построены описанным в гл.2 способом. Тогда целевая функция и функция ограничений задачи (17)–(18) дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\bar{e}_t$ и, если $\bar{e}_t$ удовлетворяет строгому условию Мангасариана-Фромовица и достаточному условию второго порядка оптимальности вместе с отвечающим ей множителем Лагранжа $\bar{\lambda}_t$, метод последовательного квадратичного программирования генерирует траекторию из любого начального приближения, достаточно близкого к $(\bar{e}_t, \bar{\lambda}_t)$, и любая такая траектория сходится к $(\bar{e}_t, \bar{\lambda}_t)$ сверхлинейно.

В разделе 3.1.3 приведен пример, когда описанный алгоритм приближенного динамического программирования не позволяет найти оптимальное решение задачи обратного стресс-тестирования. Причиной является способ выбора n^* (представлен формулой (15)), согласно которому алгоритм отдает предпочтение состояниям, обеспечивающим немедленные дефолты заемщиков. При этом может возникнуть ситуация, когда состояния, не приводящие к дефолту в текущем квартале, гарантируют разорение предприятий с большим весом в более поздние моменты времени, однако они будут отвергнуты на основе указанного принципа определения n^* .

Раздел 3.2 посвящен описанию комплекса программ, реализующего полученный метод. Современные средства программирования, которые способны обеспечить возможность реализации разработанного алгоритма приближенного динамического программирования, должны обладать инструментами для построения системно-динамических моделей и решения оптимизационных задач. В рамках данного исследования рассмотрены возможности двух систем: веб-среды моделирования Insightmaker и пакета прикладных программ Matlab.

Распространение системно-динамического подхода к решению различных прикладных задач способствует появлению и развитию средств имитационного моделирования, одним из которых является Matlab Simulink.

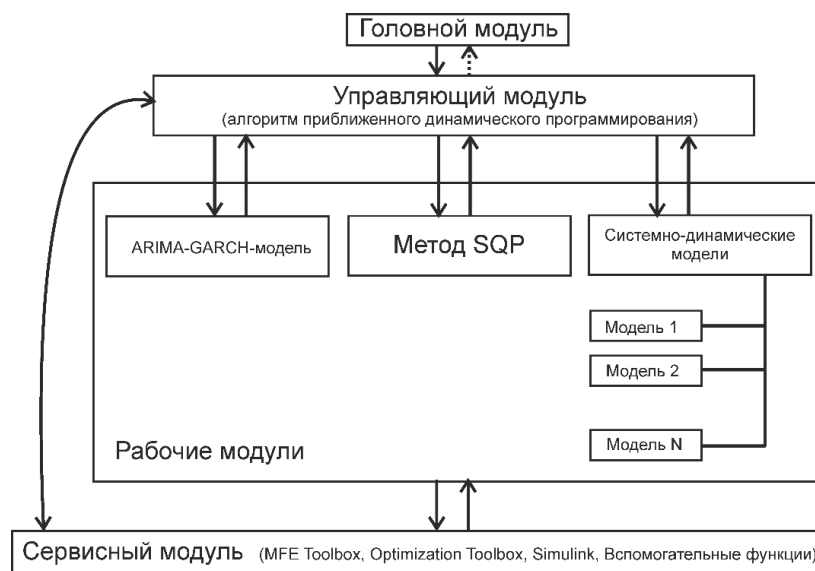


Рисунок 2. Структура программного комплекса, реализующего алгоритм приближенного динамического программирования.

Matlab, оснащенный встроенным языком программирования, обладает широким спектром эффективных инструментов математического моделирования. Одним из компонентов Matlab является графическая среда имитационного моделирования Simulink, которая позволяет создавать полноценные системно-динамические модели и применять их совместно с оптимизационными алгоритмами, что обеспечивает возможность реализации описанного алгоритма решения задачи обратного стресс-тестирования. Программный комплекс, реализующий полученный алгоритм приближенного динамического программирования, разработан с помощью средств пакета прикладных программ Matlab. Структура данного комплекса (Рисунок 2) состоит из четырех основных модулей (блоков): головного, управляющего, рабочего и сервисного.

Описанный комплекс программ не имеет полноценного графического интерфейса, но содержит все инструменты, необходимые для реализации процедуры обратного стресс-тестирования.

В разделе 3.3 приведены численные результаты, которые позволяют оценить эффективность разработанного метода и провести его сравнение с генетическими алгоритмами в контексте решения задачи обратного стресс-тестирования. В данном разделе содержится доказательство утверждения, описывающего изменение значения задачи обратного стресс-тестирования, соответствующего решению, в зависимости от требований к правдоподобию искомых сценариев.

В результате применения описанного алгоритма построены макроэкономические стресс-сценарии факторов риска, которые приводят к максимальным финансовым потерям

кредитного портфеля, заданного системно-динамическими моделями, при заданном ограничении на уровень правдоподобия. Полученные сценарии основных макроэкономических параметров представлены на Рисунок 3 – Рисунок 5.

В данном случае для портфеля компаний разных отраслей российской экономики критичным является следующее поведение ключевых макропараметров: снижение мировых цен нефти до 50 долларов за баррель, стабилизация курса доллара в районе 67 рублей, установление ставки Mosprime на уровне 12%. В результате реализации такого макроэкономического сценария в течение пяти с половиной лет дефолт претерпевают четыре заемщика (из шести) с общей суммой кредитов 167 миллионов рублей: нефтеперерабатывающее и нефтедобывающее предприятие, импортер алкогольной продукции, металлургическая компания и производитель микроэлектроники.

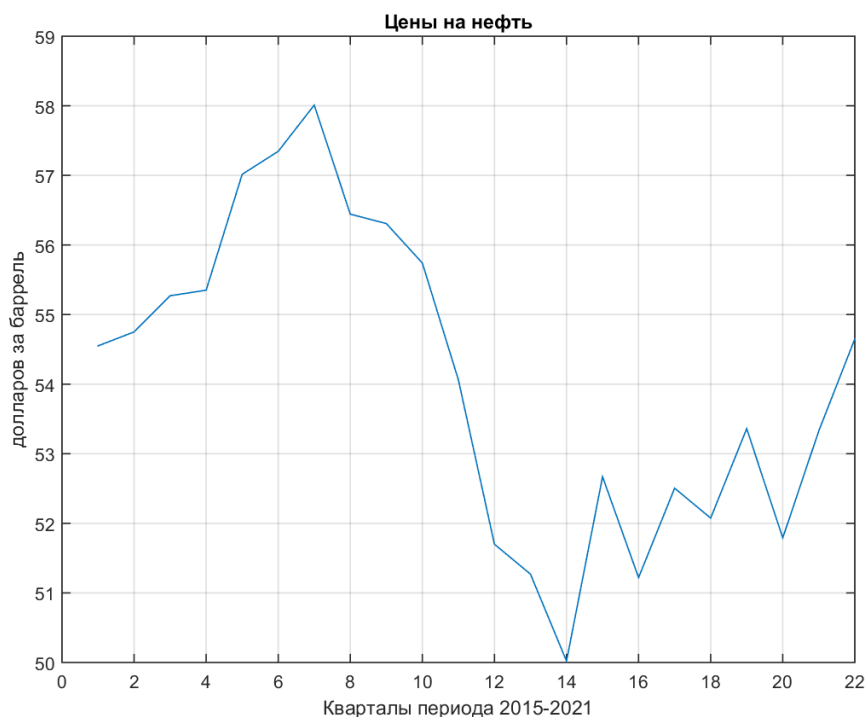


Рисунок 3 Динамика мировых цен на нефть в найденном сценарии.

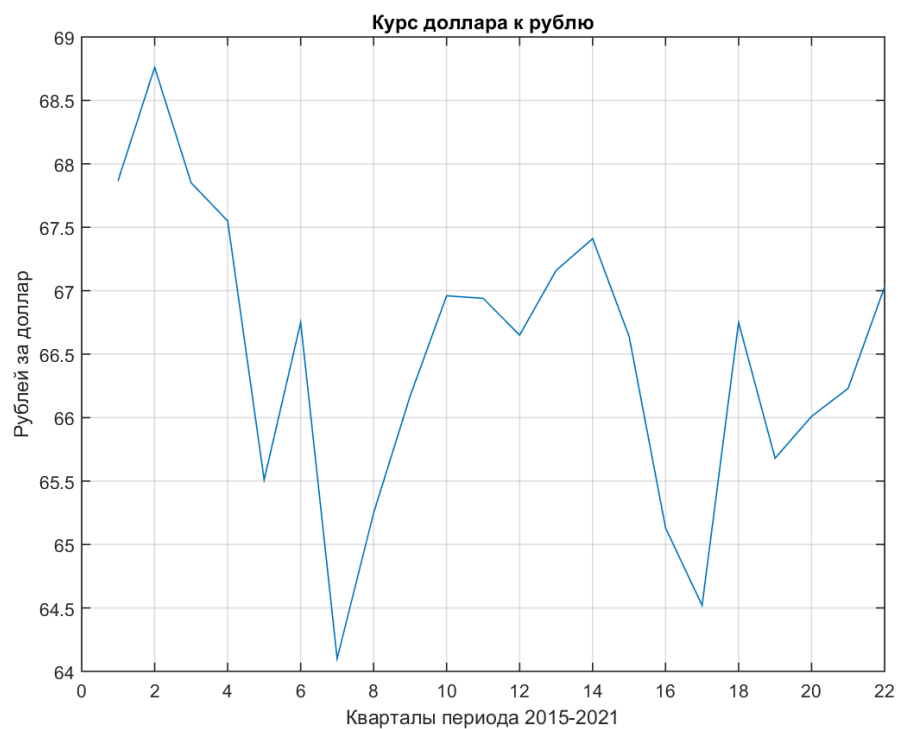


Рисунок 4 Динамика курса доллара в найденном сценарии.

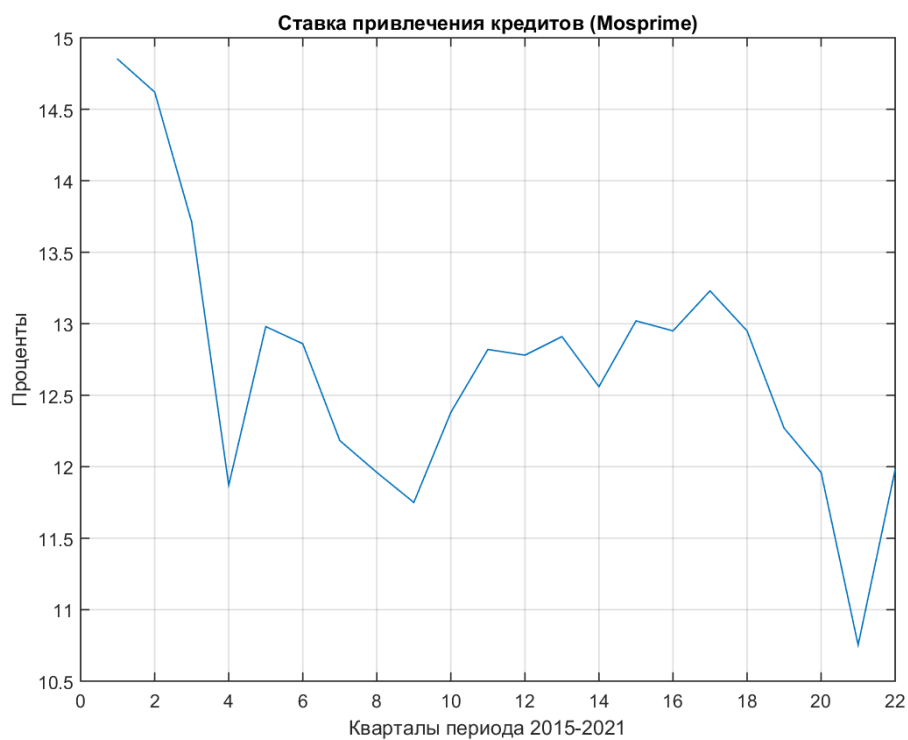


Рисунок 5 Динамика ставки Mosprime в найденном сценарии.

Проведенные в рамках данного исследования эксперименты показывают, что при усилении требований к правдоподобию искомым макроэкономическим сценариев найденное значение соответствующей оптимизационной задачи на максимум будет не больше, чем значение аналогичной задачи с ослабленным требованием к правдоподобию. Данный факт доказан в следующем утверждении.

Утверждение 3. Пусть e_1^* – глобальное решение задачи:

$$\begin{aligned} \max_{e \in \mathbb{R}^N} f(e), \\ L(e) \leq l_1 \end{aligned} \quad (24)$$

и e_2^* – глобальное решение задачи:

$$\begin{aligned} \max_{e \in \mathbb{R}^N} f(e), \\ L(e) \leq l_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда если $l_1 \leq l_2$, то $f(e_1^*) \leq f(e_2^*)$.

Доказательство. Предположим обратное: $l_1 \leq l_2$ и $f(e_1^*) > f(e_2^*)$. Тогда будет верно следующее: $L(e_1^*) \leq l_1 \leq l_2$. Таким образом e_1^* – удовлетворяет ограничению задачи (25), при этом $f(e_1^*) > f(e_2^*)$, что противоречит глобальности решения e_2^* . Утверждение доказано.

График, изображенный на Рисунок 6, иллюстрируют зависимость времени работы разработанного метода и классического генетического алгоритма (с фиксированными размером популяции и разрядностью генов, с использованием случайного скрещивания, кроссинговера и мутации) от объема рассматриваемого портфеля. В данном случае метод динамического программирования (соответствующий график изображен сплошной линией) демонстрирует большую производительность и значительно меньшую зависимость скорости работы от количества рассматриваемых заемщиков, чем генетический алгоритм (результат показан пунктирной линией). Графики, представленные на Рисунок 7, демонстрируют способность методов строить сценарии, обеспечивающие наибольший уровень финансовых потерь. При различных фиксируемых значениях G убыток, который находил генетический алгоритм (изображен пунктирной линией), меньше, чем потери, определяемые разработанным методом (изображен сплошной линией).

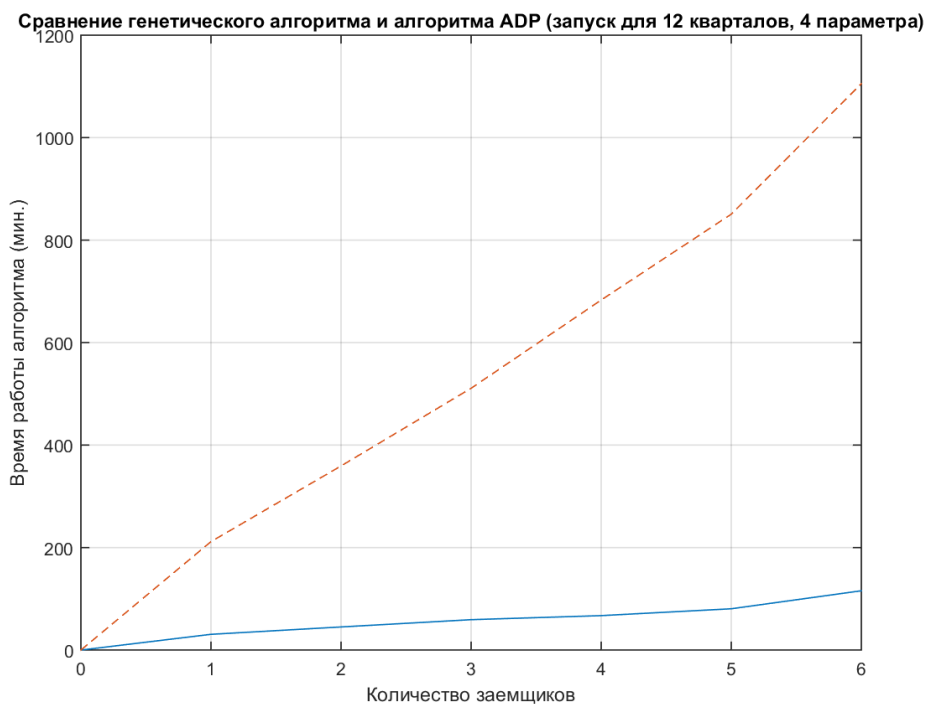


Рисунок 6 Время работы генетического алгоритма (пунктирная линия) и приближенного динамического программирования (сплошная линия).

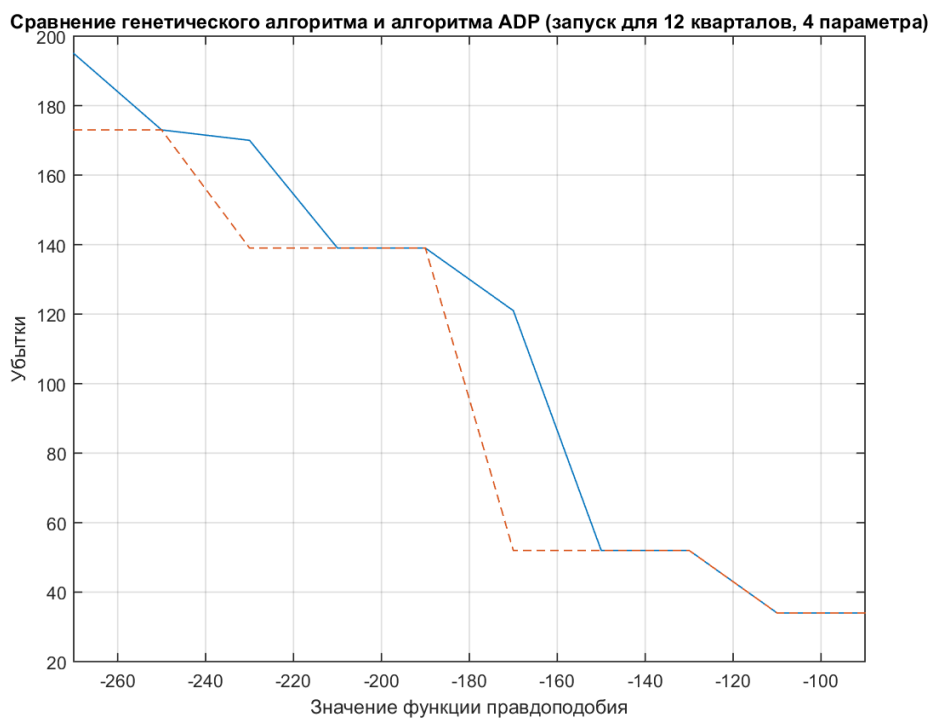


Рисунок 7 Сходимость к оптимальным макроэкономическим сценариям генетического алгоритма (пунктирная линия) и метода приближенного динамического программирования (сплошная линия).

В заключении перечислены основные результаты представленного исследования.

Заключение

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. В сфере моделирования.

1.1. Разработаны и исследованы системно-динамические модели компаний различных отраслей российской экономики, описывающие структуру и динамику исследуемых предприятий. Модели используются для задания целевой функции, фигурирующей в задаче обратного стресс-тестирования.

1.2. Продемонстрирована возможность использования системно-динамической модели для оценки вероятности дефолта соответствующей компании. Близость полученных оценок вероятности дефолта к соответствующим оценкам рейтинговых агентств свидетельствует об адекватности модели реальным процессам реализации кредитного риска предприятий-заемщиков.

1.3. Идентифицирована многомерная ARIMA-GARCH-модель, являющаяся основой для макроэкономических стресс-сценариев факторов риска.

2. В сфере численных методов.

2.1. Разработан метод решения оптимизационной задачи обратного стресс-тестирования, относящийся к классу методов приближенного динамического программирования.

2.2. Доказаны утверждения, позволяющие сделать выводы о свойствах и применимости данного алгоритма. Эти утверждения описывают свойства функций, фигурирующих в подзадачах разработанного алгоритма, и обосновывают корректность применения метода последовательного квадратичного программирования к данным подзадачам.

3. В сфере программирования.

3.1. Создан комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм и обеспечивающий возможность проведения экспериментов, которые оценивают эффективность метода.

3.2. Получены результаты, подтверждающие преимущество разработанного алгоритма над классическим генетическим алгоритмом во времени работы и поиске стресс-сценариев, приводящих к наибольшим потерям.

Личный вклад автора состоит в непосредственном участии в получении изложенных в работе результатов исследования, в личном участии в апробации результатов исследования на четырех научных конференциях, многочисленных научных семинарах, в

подготовке семи публикаций, в том числе четырех статей в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

Публикации автора по теме диссертации

1. Куренной Д. С., Голембиовский Д. Ю. Системно-динамическая модель кредитного риска нефтедобывающей и нефтеперерабатывающей компании // Проблемы анализа риска. 2017. №01. С. 6-22.
2. Куренной Д. С., Голембиовский Д. Ю. Построение сценариев дефолта предприятий на основе системно-динамических моделей в системе insightmaker // Прикладная информатика. 2017. №05. С. 11-28.
3. Куренной Д. С., Голембиовский Д. Ю. Оценка вероятности дефолта компании на основе системно-динамической модели // Проблемы анализа риска. 2018. №02. С. 86-92.
4. Куренной Д. С. Алгоритм решения задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля банка на основе системно-динамических моделей заемщиков // International Journal of Open Information Technologies. 2018. №10. С. 9-21.
5. Куренной Д. С. Алгоритм решения оптимизационной задачи обратного стресс-тестирования кредитного портфеля // Тихоновские чтения: Научная конференция / МГУ им. М. В. Ломоносова. – М.: МАКС Пресс, 2018.
6. Kurennoy D. S. System dynamics credit risk model of a corporate borrower // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016): Moscow, October 17-22, 2016: PROCEEDINGS: Vol.1. – М.: MAKS Press, 2016. P. 102-104.
7. Kurennoy D. S., Golembiovskiy D. Yu. Estimating the probability of company default based on system dynamics model. // IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2018): Moscow, October 22-27, 2018: PROCEEDINGS: Vol.1. – М.: MAKS Press, 2018. P. 218-222.