На правах рукописи

Ефремов Евгений Леонидович

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КЛАССА ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ

01.01.06 — математическая логика
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток — 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель
Степанова Алёна Андреевна, доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:
Перязев Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет им. В.И. Ульянова (Ленина), профессор кафедры вычислительной техники,
Коровина Маргарита Владимировна, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем информатики им. А.П. Ершова Сибирского отделения Российской академии наук, старший научный сотрудник.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Новосибирский государственный технический университет.

Защита состоится 00 xxxxxxx 0000 г. в 00 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу math.nsc.ru.
Автореферат разослан 00 xxxxxxx 0000 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент А.И. Стукачев

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Тема диссертации относится к теоретико-модельной алгебре. Предметом исследования являются классы инъективных и слабо инъективных полигонов. С помощью современного арсенала теории моделей, включающего теорию категоричности, различные теоретико-модельные конструкции, изучаются такие свойства этих классов, как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, стабильность, примитивная нормальность и примитивная связность.

Под *левым* S*-полигоном* ${}_SA$ над моноидом S, или просто *полигоном*, понимается множество A, на котором S действует слева, причём единица S действует тождественно. Понятие полигона над моноидом относится к фундаментальным понятиям в теории представлений, алгебраической теории динамических систем и др. Большое количество работ по теории полигонов посвящено гомологической классификации полигонов, а именно, характеризации моноидов с помощью категорных свойств полигонов, таких, например, как проективность, инъективность, плоскостность. Это работы Л.А. Скорнякова[1], M. Kilp[2], U. Knauer, А.В. Михалёва[3] и др. Вопросы, связанные со свойством регулярности полигонов, рассмотрены такими математиками, как M. Kilp, U. Knauer[4], А.В. Михалёв[5], L.H. Tran[6] и др.

Полигон над моноидом определяется аналогично модулю над кольцом. Поэтому теория полигонов развивается под большим влиянием теории модулей. Аналогично понятию инъективного модуля определяется понятие инъективного полигона. Инъективные полигоны впервые были рассмотрены P. Berthiaume[7]. В теории модулей условие инъективности правого R-модуля M эквивалентно

[1]Скорняков, Л. А. О гомологической классификации моноидов // Сиб. матем. журн. — 10(5). — 1969. — С. 1139–1143.

[2]Кильп, М. К гомологической классификации моноидов // Сиб. матем. журн. — 13(3). — 1972. — С. 578–586.

[3]Kilp, M. Monoids, acts and categories / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev // De Gruyter. — 2000.

[4]Kilp, M. Characterization of monoids by properties of regular acts / M. Kilp, U. Knauer // J. of Pure and Applied Algebra. — 35(2). — 1987. — P. 193–201.

[5]Kilp, M. Wreath products of acts over monoids: I. regular and inverse acts / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev // J. of Pure and Applied Algebra. — 51. — 1988. — P. 251–260.

[6]Tran, L. H. Characterization of monoid by regular acts // Period. Math. Hungar. — 16. — 1985. — P. 273–279.

[7]Berthiaume, P. The injective envelope of S-sets // Bull. Amer. Math. Soc. — 10. — 1967. — P. 261–273.

следующему условию $(\star)$: для любого правого идеала $I \subseteq R$ любой гомоморфизм $\varphi : I_R \to M_R$ продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi} : R_R \to M_R$ (критерий Бэра[8]). Для полигонов аналог критерия Бэра не имеет места. Полигоны, для которых выполняется аналог условия $(\star)$, называются слабо инъективными. V. Gould[9] рассматривает бесконечную последовательность различных «инъективностей», а именно, для каждого кардинала $\alpha > 1$ полигон ${}_SA$ над моноидом S называется α*-инъективным*, если для него выполняется аналог условия $(\star)$, в котором правые идеалы заменяются на правые идеалы, мощность порождающего множества которых меньше α. Главно слабо инъективные полигоны (для которых $\alpha = 2$) и конечно порождённо слабо инъективные полигоны (для которых $\alpha = \omega$) впервые рассматривались в работе J. Luedeman, F. McMorris, S.–K. Sim[10]. Понятие главно слабо инъективного (конечно порождённо слабо инъективного) полигона является аналогом понятия p-инъективного (конечно инъективного) модуля.

Одной из стандартных задач теории моделей полигонов является задача описания моноидов, над которыми некоторый класс полигонов обладал бы свойством P, где под P понимается аксиоматизируемость, полнота, стабильность, примитивная нормальность, примитивная связность и др.

Вопросы аксиоматизируемости, полноты, модельной полноты, категоричности для класса регулярных полигонов рассмотрены в работах Е.В. Овчинниковой[11], А.А. Степановой[12]. Для классов плоских, проективных и свободных полигонов такое описание получено S. Bulman–Fleming, V. Gould[13], А.А. Степановой[14]. А.А. Степановой[15] доказано, что для коммутативного счётного моноида

[8]Каш, Ф. Модули и кольца // Мир. — 1981.

[9]Gould, V. Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. — 35. — 1987. — P. 193–201.

[10]Luedeman, J. Semigroups for which every totally irreducible S-system is injective / J. Luedeman, F. McMorris, S.-K. Sim // Comment. Math. Univ. Carolinae — 19. — 1978. — P. 27–35.

[11]Овчинникова, Е. В. Полные классы регулярных полигонов с конечным числом идемпотентов // Сиб. матем. журн. — 36(2). — 1995. — С. 381–384.

[12]Степанова, А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. матем. журн. — 35(1). — 1994. — С. 181–193.

[13]Bulman-Fleming, S. Axiomatisability of weakly flat, flat and projective acts / S. Bulman-Fleming, V. Gould // Communications in Algebra. — 30. —2002. — P. 5575–5593.

[14]Степанова, А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов // Алгебра и логика — 30(5). — 1991. — С. 583–594.

[15]Степанова, А. А. Аксиоматизируемость и полнота класса инъективных полигонов над коммутативным

или счётной группы S аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порождённости S. В этой же работе показано, что не существует нетривиального коммутативного моноида или группы, класс инъективных полигонов над которым полон, модельно полон или категоричен. В диссертации продолжаются упомянутые исследования для классов слабо инъективных полигонов.

Одним из центральных направлений в теории моделей является теория стабильности, в основу которой легли идеи, методы и результаты работы M. Morley[16]. Понятие стабильной теории было введено S. Shelah в 1969 г.[17] Вопросы стабильности, суперстабильности и ω-стабильности теории полигонов рассмотрены Т.Г. Мустафиным[18, 19], B. Poizat[19], А.А. Степановой[20]. В частности, доказано, что теория любого полигона над S стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид (вполне упорядоченный моноид). А.А. Степановой рассматривались стабильные, суперстабильные и ω-стабильные классы регулярных[21, 22] и плоских[23] полигонов. В диссертации изучаются вопросы стабильности и суперстабильности для классов инъективных и слабо инъективных полигонов.

В 1983 г. A. Pillay[24] ввёл понятие нормальной теории. Однако в более ранней работе Е.А. Палютина[25] это понятие использовалось в неявном виде, а именно, была доказана нормальность любой стабильной полной хорновой теории. По-

---

моноидом и над группой // Сиб. матем. жур. — 56(3). — 2015. — С. 650–662.

[16]Morley, M. Categoricity in power // Trans. Amer. Math. Soc. — 114(2). — 1965. — P. 514–538.

[17]Shelah, S. Stable theories // Isr. J. Math. — 7(3). — 1969. — P. 187–202.

[18]Мустафин, Т. Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение. — 8. — 1988. — С. 92–108.

[19]Mustafin, T. G. Polygones / T. G. Mustafin, B. Poizat // Math. Log. Quart. — 41. — 1995. — P. 93–110.

[20]Степанова, А. А. Моноиды, все полигоны над которыми ω-стабильны (доказательство гипотезы Мустафина–Пуаза) // Алгебра и логика. — 41(2). — 2002. — С. 223–227

[21]Степанова, А. А. Моноиды со стабильными теориями регулярных полигонов // Алгебра и логика. — 40(4). — 2001. — С. 430–457.

[22]Степанова, А. А. Стабильность класса регулярных полигонов // Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов. Караганда — 1995. — С. 95–102.

[23]Степанова, А. А. Моноиды со стабильными плоскими полигонами // Вестник НГУ, серия: математика, информатика, механика. — 2. — 2002. — С. 64–77.

[24]Pillay, A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 89(4). — 1983. — P. 666–672.

[25]Палютин, Е. А. Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика. — 19(5). — 1980. — С. 582–614.

нятие слабой нормальности теории, введённое A. Pillay[26], является более широким, чем понятие нормальности, но более узким, чем стабильность. С.В. Судоплатовым[27] показано, что не существует формульных критериев для нормальности или слабой нормальности теорий, подобных стабильности. Основной пример нормальных теорий — теория любого модуля, являющаяся примитивно нормальной теорией. История понятия примитивной нормальности теории восходит к применению теории классификации в универсальной алгебре[28]. Вопросам примитивной нормальности классов всех полигонов, свободных, проективных, сильно плоских полигонов посвящены работы А.А. Степановой[29,30], Д.О. Птахова[31]. А.А. Степановой также рассмотрены вопросы примитивной связности класса всех полигонов. В данной работе изучаются моноиды с примитивно нормальными и примитивно связными классами инъективных полигонов.

Цели и задачи данной работы заключаются в изучении строения моноидов с точки зрения теоретико-модельных свойств классов инъективных и слабо инъективных полигонов над ними. Исследуются такие свойства этих классов, как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, категоричность, стабильность, суперстабильность, примитивная нормальность, примитивная связность.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории моделей, такие как теорема компактности, теория категоричности, теория стабильности, различные теоретико-модельные конструкции (например, ультрапроизведения), а также методы теории полигонов.

Новизна и научная значимость работы. Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы

[26] Pillay, A. Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models // Annals of Pure and Applied Logic. — 43(2). — 1989. — P. 147–160.

[27] Судоплатов, С.В. Базируемость стабильных теорий и свойства счетных моделей с мощными типами: дис. ... канд. физико-математических наук: 01.01.06. — Новосибирск. — 1990.

[28] Shelah, S. Classification theory and the number of non-isomorphic models // Stud. Logic Found. Math. — 92. — 1978.

[29] Степанова, А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. — 47(4). — 2008. — С. 491–508.

[30] Степанова, А. А. Примитивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. — 45(3). — 2006. — С. 300–313.

[31] Птахов, Д. О. Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. — 53(5). — 2014. — С. 614–624.

в теоретико-модельной алгебре, в теории полигонов, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено описание счётных моноидов, над которыми класс слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов аксиоматизируем. Приведены примеры моноидов с аксиоматизируемыми и не аксиоматизируемыми классами слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов над ними. Результаты опубликованы в [1].

2. Получено описание моноидов, над которыми класс главно слабо инъективных полигонов полон, модельно полон, категоричен, стабилен и суперстабилен. Приведены примеры моноидов S, для которых классы инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов полны (модельно полны, категоричны) только в том случае, когда S тривиален. Дана характеризация конечных моноидов со стабильными (суперстабильными) классами инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов. Результаты опубликованы в [2].

3. Доказано, что класс всех инъективных полигонов примитивно нормален. Для реверсивного справа моноида S показано, что класс всех инъективных полигонов над S примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа. Приведено необходимое условие примитивной связности класса инъективных полигонов. Результаты опубликованы в [3].

Апробация работы. Результаты диссертации излагались автором на семинарах Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск), Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток), Дальневосточного федерального университета (г. Владивосток), а также на международных конференциях «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 2016–2018), Региональных научно-практических конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (г. Владивосток, 2016–2018).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [1–8]. Работы [1–3] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук, а также индексируемых в наукометрических системах (SCOPUS и т.д.). Работа [1] написана в неразрывном сотрудничестве со Степановой А.А.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Все утверждения занумерованы двойками индексов, из которых первый является номером главы, второй — номером утверждения в данной главе. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Общий объём диссертации 75 страниц. Библиография включает в себя 46 наименований.

Содержание работы

Во **введении** приводится постановка задачи, обосновывается актуальность темы исследования, даётся обзор результатов по исследуемым проблемам и кратко формулируются основные результаты диссертации.

В **первой главе** даются определения из теории полигонов, теории моделей и универсальной алгебры, а также формулируются факты, используемые при доказательстве полученных результатов. При формулировке утверждений будем пользоваться следующими обозначениями:

S-**Inj** — класс всех инъективных полигонов над моноидом S,

S-**WInj** — класс всех слабо инъективных полигонов над моноидом S,

S-**FGWInj** — класс всех конечно порождённо слабо инъективных полигонов над моноидом S,

S-**WInj** — класс всех главно слабо инъективных полигонов над моноидом S.

Вторая глава диссертации посвящена описанию моноидов, над которыми классы слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных и главно слабо инъективных полигонов аксиоматизируемы.

Через $\theta_{\bar{s}}$, где $\bar{s} = \langle s_1, \ldots s_n \rangle \in S$ $(n \in \omega)$, обозначим конгруэнцию $\left\{ \langle t^k, r^m \rangle \mid ts_k = rs_m, k, m \in \{1, \ldots, n\} \right\}$ полигона ${}_S S^{(n)} = \coprod\limits_{i=1}^{n} {}_S S_i$, где ${}_S S_i$ — копия полигона ${}_S S$, $r^i \in S_i$ — копия элемента $r \in S$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Теорема 1. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**FGWInj** аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_S S^{(n)}$ конечно порождена.*

Из доказательства теоремы 1 следует, что если класс слабо инъективных полигонов аксиоматизируем, то для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_S S^{(n)}$ конечно порождена, т.е. имеет место

Замечание 1. *Пусть S — счетный моноид. Если класс S-**WInj** аксиоматизируем, то класс S-**FGWInj** аксиоматизируем.*

Пусть $s \in S$. Конгруэнцию θ_s полигона ${}_S S^{(1)} = {}_S S$ можно отождествить с множеством $\left\{ \langle t, r \rangle \in S^2 \mid ts = rs \right\}$. Доказательство следующего следствия полностью повторяет доказательство теоремы 1, если положить $n = 1$.

Следствие 1. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**PWInj** аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ конгруэнция θ_s полигона ${}_SS$ конечно порождена.*

Из теоремы 1 и следствия 1 следует

Замечание 2. *Пусть S — счетный моноид. Если класс S-**FGWInj** аксиоматизируем, то класс S-**PWInj** аксиоматизируем.*

Моноид S называется *регулярным*, если для любого $s \in S$ существует $t \in S$ такой, что $s = sts$.

Следствие 2. *Если S — регулярный моноид, то класс S-**PWInj** аксиоматизируем.*

Моноид S называется *нетеровым слева*, если все его левые идеалы конечно порождены. Для класса слабо инъективных полигонов получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**WInj** аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена и S — нётеров слева моноид.*

Глава завершается примерами моноидов с аксиоматизируемыми и не аксиоматизируемыми классами слабо инъективных полигонов над ними.

В **третьей главе** рассматриваются моноиды, над которыми классы инъективных и слабо инъективных полигонов полны, модельно полны, категоричны.

Следующее замечание очевидно.

Замечание 3. *Для моноида S имеют место следующие импликации:*

*S-**PWInj** полон (модельно полон, категоричен)*

$\Downarrow$

*S-**FGWInj** полон (модельно полон, категоричен)*

$\Downarrow$

*S-**WInj** полон (модельно полон, категоричен)*

$\Downarrow$

*S-**Inj** полон (модельно полон, категоричен)*

Теорема 3. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**PWInj** полон;*

*(2) класс S-**PWInj** модельно полон;*

*(3) класс S-**PWInj** категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Моноид S называется *реверсивным справа*, если $Ss \cap St \neq \varnothing$ для любых $s, t \in S$.

Теорема 4. *Пусть S — реверсивный справа моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон;*

*(2) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) модельно полон;*

*(3) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Следствие 3. *Пусть S — коммутативный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон;*

*(2) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) модельно полон;*

*(3) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Для моноида S через T обозначим множество $\{s \in S \mid Ss = S\}$.

Теорема 5. *Пусть класс S-**WInj** полон и для любого $s \in S \setminus T$ существует $r \in S$ такой, что $r \neq 1$ и $rs = s$. Тогда $S = \{1\}$.*

Из теоремы 5 получаем следующие результаты.

Следствие 4. *Если S — регулярный моноид, T — группа и класс S-**WInj** полон, то $|S| = 1$.*

Теорема 6. *Если S — конечный моноид и класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон, то $|S| = 1$.*

В этой же главе рассмотрены вопросы стабильности и суперстабильности классов инъективных и слабо инъективных полигонов.

Полигон ${}_SA$ называется *линейно упорядоченным*, если множество $\{Sa \mid a \in A\}$ линейно упорядочено относительно включения. Моноид S называется *линейно упорядоченным*, если ${}_SS$ — линейно упорядоченный полигон.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс полигонов. Моноид S называется $\mathcal{K}$*-стабилизатором* ($\mathcal{K}$*-суперстабилизатором*), если $\mathrm{Th}({}_SA)$ стабильна (суперстабильна) для любого полигона ${}_SA \in \mathcal{K}$. Если $\mathcal{K}$ — класс всех полигонов над моноидом S, то $\mathcal{K}$-стабилизатор ($\mathcal{K}$-суперстабилизатор) S называется *стабилизатором* (*суперстабилизатором*).

Теорема 7. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S — стабилизатор;

*(2) S — S-**PWInj**-стабилизатор;*

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Утверждение 1. *Пусть S — моноид, для которого максимальный (среди левых неглавных идеалов) левый неглавный идеал R существует и конечен, множество $\{s \in \overline{S \sqcup \{\theta\}} \mid \bigwedge\limits_{r\in R} rs = r\}$ конечно, где под ${}_S\overline{S \sqcup \{\theta\}}$ понимается инъективная оболочка полигона ${}_S(S \sqcup \{\theta\})$. Тогда моноид S не является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором.*

Следствие 5. *Если S — конечный моноид, являющийся S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором, то S — линейно упорядоченный моноид.*

Теорема 8. *Пусть S — конечный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — стабилизатор;

*(2) S — S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатор;*

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Утверждение 2. *Если моноид S является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором, то в S нет бесконечного числа попарно несравнимых левых идеалов.*

Теорема 9. *Пусть S — конечный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — суперстабилизатор;

*(2) S — S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) суперстабилизатор;*

(3) S — вполне упорядоченный моноид.

Будем говорить, что полигон ${}_SA$ удовлетворяет *условию обрыва возрастающей цепи подполигонов*, если для любых подполигонов ${}_SA_i$ $(i \in \omega)$ таких, что

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots,$$

существует такой $k \in \omega$, что

$$A_k = A_{k+1} = \ldots .$$

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{K}_0$ — класс полигонов, обладающий следующим свойством: для любого полигона ${}_SA$ существует полигон ${}_SB \in \mathcal{K}_0$ такой, что ${}_SA \subseteq {}_SB$. Пусть S — $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатор, ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Тогда полигон ${}_SSa$ удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических подполигонов. Пусть S — $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатор, ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Тогда полигон ${}_SSa$ удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических подполигонов.*

Следствие 6. *Если моноид S является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) суперстабилизатором, то S удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи главных левых идеалов.*

Следствие 7. *Если моноид S является S-**PWInj**-суперстабилизатором, то S — вполне упорядоченный моноид.*

Теорема 10. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S — суперстабилизатор;

*(2) S — S-**PWInj**-суперстабилизатор;*

(3) S — вполне упорядоченный моноид.

Заметим, что эквивалентности условий (1) и (3) в теоремах 7–10 были доказаны Т.Г. Мустафиным[32].

В **четвёртой главе** изучаются моноиды, над которыми класс всех инъективных полигонов примитивно нормален и примитивно связен. Пусть T — полная теория языка L. Зафиксируем некоторую достаточно большую и достаточно насыщенную модель $\mathfrak{M} = \langle M; L\rangle$ теории T.

Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\bar{a} \in M$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$, то через $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ будем обозначать множество $\left\{\bar{b} \in M \mid \mathfrak{M} \models \Phi(\bar{b}, \bar{a})\right\}$.

Формула $\exists\bar{x}(\Phi_0 \wedge \ldots \wedge \Phi_k)$, где Φ_i $(i \leqslant k)$ — атомарные формулы языка L, называется *примитивной.* Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L, $\bar{a} \in M$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$. Множество вида $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ называется *примитивным.* Если $\bar{b} \in M$ и $l(\bar{b}) = l(\bar{y})$, то множества $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями.*

Теория T называется *примитивно нормальной,* если $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$ для любых примитивных копий X и Y. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем языка L называется *примитивно нормальным,* если теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ примитивно нормальна для любой $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Теорема 11. *Класс S-**Inj** примитивно нормален.*

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathfrak{M}$, определённая в $\mathfrak{M}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathfrak{M}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x}, \bar{x})$ и обозначается через $dom\alpha$. Если $a \in X$, то через a/α будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a.

Множество X называется Δ-*примитивным,* если существует такое семейство P примитивных множеств, что

$$X = \bigcap\{Y \mid Y \in P\}.$$

Эквивалентность α называется Δ-*примитивной,* если существует такое мно-

[32]Мустафин, Т. Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение. — 8. — 1988. — С. 92–108.

жество E примитивных эквивалентностей, что

$$\alpha = \bigcap\{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Классы X и Y одной Δ-примитивной эквивалентности α называются *Δ-примитивными копиями.* Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* — Δ-примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq dom(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным множеством (о.п. множеством).* При этом X^* называется *основой*, а α — *образующей эквивалентностью о.п. множества* X. Отождествляя одноэлементное множество $\{a\}$ с элементом a, будем считать, что Δ-примитивное и примитивное множества являются о.п. множествами. О.п. множества X, Y называются *о.п. копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X^*, Y^* являются Δ-примитивными копиями.

Формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$, называется *$(\bar{x}, \bar{y})$-рефлексивной*, если

$$T \vdash \forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}(\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \to (\exists\bar{z}\Phi(\bar{x}, \bar{x}, \bar{z}) \wedge \exists\bar{z}\Phi(\bar{y}, \bar{y}, \bar{z}))).$$

Пусть о.п. множества X_0 и X_1 являются о.п. копиями и α — их образующая эквивалентность. Говорят, что X_0 *примитивно связано с* X_1, если существует примитивная $(\bar{x}, \bar{y})$-рефлексивная формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ (с параметрами $\bar{c}$) такая, что

(а) для любых $\bar{a}_0 \in X_0^*$ и $\bar{b}_0 \in X_1^*$ существуют такие $\bar{a}_1 \in X_0^*$ и $\bar{b}_1 \in X_1^*$, что в $\mathfrak{M}$ истинны $\Phi(\bar{a}_0, \bar{b}_1, \bar{c})$ и $\Phi(\bar{a}_1, \bar{b}_0, \bar{c})$;

(б) для любого $\bar{a} \in X_0^*$ множество $\Phi(\bar{a}, \mathfrak{M}, \bar{c})$ не содержит X_1^* и $\bar{b}/\alpha \subseteq \Phi(\bar{a}, \mathfrak{M}, \bar{c})$ для любого $\bar{b} \in \Phi(\bar{a}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{c})$;

(в) для любого $\bar{b} \in X_1^*$ множество $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{c})$ не содержит X_0^* и $\bar{a}/\alpha \subseteq \Phi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{c})$ для любого $\bar{a} \in \Phi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{c})$.

Теория T называется *примитивно связной*, если она примитивно нормальна и любые о.п. копии либо примитивно связаны, либо обе одноэлементны. Класс алгебраических систем $\mathcal{K}$ языка L называется *примитивно связным*, если теория $Th(\mathfrak{B})$ примитивно связна для любой $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Ниже приводится ряд результатов, в которых описаны моноиды с примитивно связным классом инъективных полигонов над ними.

Теорема 12. *Пусть S — реверсивный справа моноид. Класс S-**Inj** является* *примитивно связным тогда и только тогда, когда S — группа.*

Следствие 8. *Если S — коммутативный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — абелева группа.*

Следствие 9. *Если S содержит нулевой элемент, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — одноэлементный моноид.*

Следствие 10. *Если S — линейно упорядоченный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.*

Теорема 13. *Если класс S-**Inj** — примитивно связный класс, то либо S — группа, либо максимальный относительно включения собственный подполигон полигона ${}_SS$ не конечно порождён.*

Следствие 11. *Если S — конечный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.*

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., доценту Степановой Алёне Андреевне за постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме исследования

1. Ефремов, Е. Л., Степанова, А. А. Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов // Сиб. матем. журн. — 58(4). — 2017. — 785–795.

2. Ефремов, Е. Л. Полнота и стабильность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика. — 59(1). — 2020. — С. 48–65.

3. Ефремов, Е. Л. Примитивная нормальность и примитивная связность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика. — 59(2). — 2020. — С. 155–168.

4. Ефремов, Е. Л. Аксиоматизируемость класса главно слабо инъективных полигонов // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. — Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т. — 2016. — С. 201–203.

5. Ефремов, Е. Л. Полнота класса слабо инъективных полигонов // Международная конференция «Мальцевские чтения». — Новосибирск. — 2016. — С. 183.

6. Ефремов, Е. Л. Полнота класса слабо инъективных полигонов // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. — Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т. — 2017. — С. 247–248.

7. Ефремов, Е. Л. Стабильность класса главно слабо инъективных полигонов // Международная конференция «Мальцевские чтения». — Новосибирск. — 2016. — С. 148.

8. Ефремов, Е. Л. Стабильность класса инъективных полигонов // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. — Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т. — 2018. — С. 218–219.