

На правах рукописи

Бутурлакин Александр Александрович

**Специальные классы подгрупп и
строение локально конечных групп**

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Новосибирск
2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор

Васильев Андрей Викторович

Официальные оппоненты:

Всемирнов Максим Александрович,

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН,

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук,

временно исполняющий обязанности директора

Мясников Алексей Георгиевич,

доктор физико-математических наук, профессор,

Технологический институт Стивенса, г. Хобокен, США,

выдающийся профессор

Нужин Яков Нифантьевич,

доктор физико-математических наук, профессор,

Институт математики и фундаментальной информатики Федерального

государственного автономного образовательного учреждения высшего

профессионального образования «Сибирский федеральный университет»,

профессор кафедры алгебры и математической логики

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт

математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения

Российской академии наук

Защита диссертации состоится 13 мая 2021 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Акад. Коптюга 4, Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте <http://math.nsc.ru>.

Автореферат разослан «___» марта 2021 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

к.ф.-м.н., доцент

Стукачев Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Постановка задачи. Основным объектом изучения в диссертации являются локально конечные группы, т. е. группы, в которых любое конечное множество элементов содержится в конечной подгруппе. При этом решаются задачи двух естественных типов: первый — это получение информации о всей группе из информации о подгруппах из некоторого класса, и второй, обратный к первому, — по информации о группе получить информацию о подгруппах данного класса. В работе рассматривается три класса подгрупп: циклические подгруппы, холловы подгруппы и централизаторы.

Уже из определения ясно, что классы конечных и локально конечных групп довольно близки. Однако класс локально конечных групп гораздо менее исследован. Дело в том, что многие существенные результаты о конечных группах не переносятся непосредственным образом на бесконечные. В связи с этим для получения содержательных результатов часто накладываются некоторые дополнительные условия, в том числе различные ограничения на некоторый класс подгрупп: условия минимальности/максимальности, разрешимость, субнормальность подгрупп определенного класса и т. п. Одним из таких условий является ограничение на s -размерность группы, т. е. максимальную длину цепи строго вложенных централизаторов, которое является естественным усилением классического условия минимальности для централизаторов. Современный интерес к группам с этим условием связан с теорией моделей: универсально эквивалентные группы имеют одинаковую s -размерность. В диссертации мы исследуем структуру локально конечных групп конечной s -размерности, решая таким образом задачу первого типа.

Ко второму типу относится задача описания спектров конечных простых групп. Спектр $\omega(G)$ группы G — это множество порядков всех ее циклических подгрупп или, что то же самое, множество порядков ее элементов. В диссертации дается описание спектров конечных простых исключительных групп лиева типа, что завершает решение общей задачи описания спектров конечных простых групп. При изучении конечных групп лиева типа одним из основных методов является погружение конечной группы в соответствующую (локально конечную) группу лиева типа над алгебраически замкнутым полем. При этом конечные подгруппы выделяются в бесконечных группах как группы неподвижных точек специального класса отображений, так называемых эндоморфизмов Стейнберга. Преимущество указанного метода состоит в том, что

группы лиева типа над алгебраически замкнутыми полями устроены гораздо более регулярно, чем их конечные аналоги.

Со спектрами связана и следующая проблема, изучаемая в диссертации: для данного множества $\mathcal{M}$ натуральных чисел требуется определить, совпадает ли оно со спектром некоторой конечной группы G , и если совпадает, то найти все конечные группы с таким свойством. В общей постановке эта задача, по-видимому, слишком трудна. Однако спектры простых групп известны, а значит, в случае простой группы G задача имеет очевидное теоретическое решение, и вопрос (который и исследуется в диссертации) состоит скорее в том, можно ли найти подходящую простую группу G за полиномиальное время. Отметим, что если такая группа нашлась, то в большинстве случаев можно решить исходную задачу, т.е. предъявить список всех конечных групп, чей спектр равен $\mathcal{M}$, причем их цоколи (подгруппы, порожденные всеми минимальными нормальными подгруппами) будут изоморфны G .

Если информация о порядках циклических подгрупп позволяет частую «распознать» простую группу, то из существования определенных бипримарных подгрупп можно иногда вывести разрешимость всей группы или некоторых ее подгрупп. Так, хорошо известно, что конечная группа G разрешима, если она содержит $\{p, q\}$ -холлову подгруппу для любой пары p и q простых делителей порядка группы G . В диссертации мы усилим этот результат, заменив соответственно множество всех простых делителей порядка группы на произвольное множество простых чисел π , а разрешимость всей группы — на существование разрешимой π -холловой подгруппы.

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Понятие s -размерности было введено в 2004 г. в работе А.Г. Мясникова и П.В. Шумяцкого, посвященной дискриминируемым группам [38]. В последней работе s -размерность применяется как инвариант универсальной эквивалентности. Локально конечные группы конечной s -размерности нужно рассматривать скорее как подкласс $\mathfrak{M}_s$ -групп, т.е. групп с условием минимальности для централизаторов. Напомним, что группа обладает условием минимальности для некоторого класса подгрупп, если любая убывающая цепочка подгрупп данного класса стабилизируется за конечное число шагов. Локально конечные $\mathfrak{M}_s$ -группы возникли как естественное обобщение периодических линейных групп и имеют много общих свойств с последними. Например, локально конечная $\mathfrak{M}_s$ -группа удовлетворяет теореме Силова (Р.М. Брайант, 1979 г. [17]), периодические локально разрешимые $\mathfrak{M}_s$ -группы разрешимы (Р.М. Брайант и Б. Хартли, 1979 г. [18]). Хотя структура

локально конечных $\mathcal{M}_c$ -групп не описана, имеется результат О. Кегеля [33, теорема 4.4] о более широком классе групп, дающий довольно сильные ограничения на их строение. В нем описываются локально конечные группы, удовлетворяющие сильной теореме Силова для некоторого простого числа $p \geq 5$. Напомним, что группа удовлетворяет сильной теореме Силова, если в любой ее подгруппе все максимальные p -подгруппы сопряжены (в силу упомянутого выше результата локально конечные $\mathcal{M}_c$ -группы удовлетворяют сильной теореме Силова для любого простого числа). В частности, теорема Кегеля утверждает, что фактор-группа такой группы по p -разрешимому радикалу является группой автоморфизмов прямого произведения конечного числа простых линейных групп.

Естественным подходом при изучении локально конечных групп конечной c -размерности является усиление имеющихся результатов об $\mathcal{M}_c$ -группах. Например, основной результат работы Е. И. Хухро 2009 г. [34] усиливает упоминавшийся выше результат о периодических локально разрешимых $\mathcal{M}_c$ -группах. В частности, в этой работе показано, что ступень разрешимости периодической локально разрешимой группы конечной c -размерности k ограничена в терминах k . Кроме того, было показано, что фактор-группа такой группы по второму радикалу Хирша–Плоткина содержит абелеву подгруппу, чей индекс ограничен в терминах k . По аналогии с последним утверждением А. В. Боровик сформулировал гипотезу, приведенную в [34], о строении произвольных локально конечных групп конечной c -размерности. Изучение справедливости этой гипотезы явилось началом и составляет существенную часть исследования, результаты которого изложены в первой главе. Для формулировки этой гипотезы нам понадобятся некоторые определения и обозначения. Радикалом Хирша–Плоткина $F(G)$ группы G называется максимальная нормальная локально нильпотентная подгруппа группы G . Компонентой группы называется субнормальная квазипростая подгруппа. Подгруппа, порожденная всеми компонентами данной группы G , называется слоем и обозначается $E(G)$. Обобщенная подгруппа Фиттинга $F^*(G)$ группы G — это произведение подгрупп $F(G)$ и $E(G)$.

Гипотеза Боровика–Хухро. Пусть G — это локально конечная группа конечной c -размерности k . Пусть S — это полный прообраз обобщенной подгруппы Фиттинга $F^*(G/F(G))$ в G . Тогда

- (1) число неабелевых композиционных факторов группы G конечно и ограничено в терминах k ;
- (2) G/S содержит абелеву подгруппу конечного индекса, ограниченного в терминах k .

В диссертации доказывается первое утверждение гипотезы и строится контрпример ко второй части. Однако более важным результатом является полученное описание строения локально конечных групп конечной s -размерности в духе результата Кегеля. В частности, показано, что фактор-группа такой группы по локально разрешимому радикалу является группой автоморфизмов прямого произведения простых линейных групп, совокупный «размер» которых ограничен в терминах s -размерности, а образ этого фактора в группе внешних автоморфизмов почти абелев с индексом абелевой подгруппы, также ограниченным в терминах s -размерности. Кроме того, было показано, что s -размерность фактора по локально разрешимому радикалу ограничена в терминах s -размерности исходной локально конечной группы. Этот факт представляет отдельный интерес, поскольку в общей ситуации при факторизации s -размерность ведет себя непредсказуемо.

Отметим, что наши результаты о локально конечных группах конечной s -размерности обобщают некоторые известные результаты о периодических линейных группах. Известно, что количество неабелевых композиционных факторов конечной линейной группы ограничено в терминах размерности представления этой группы (М. И. Каргаполов, 1962–63 гг. [9, 10]). Обобщение этого результата на случай периодических линейных групп может быть найдено в монографии Б. А. Ф. Верфрица [41, теорема 9.30]. Полученное нами доказательство первого утверждения гипотезы Боровика–Хухро обобщает эти результаты.

Согласно теореме Жордана–Шура периодическая группа, имеющая конечномерное представление степени n над полем характеристики 0, почти абелева с минимальным индексом абелевой подгруппы, ограниченным функцией от n . Существует аналог этого утверждения для конечных групп над полями положительной характеристики. Для его формулировки нам понадобится следующее обозначение. Для простого числа p обозначим через $E_p(G)$ подгруппу группы G , порожденную всеми компонентами, чей фактор по центру является группой Лиева типа над полем характеристики p . Известно, что если G — это подгруппа общей линейной группы $GL_n(F)$, где F — поле положительной характеристики p , то группа $\overline{G} = G/O_p(G)$ содержит нормальную абелеву подгруппу N такую, что порядок фактор-группы $\overline{G}$ по N $E_p(\overline{G})$ ограничен функцией от n (точное значение этой функции для достаточно больших n найдено в работе М. Дж. Коллинза 2008 г. [20]). Аналогичное утверждение о периодических линейных группах с тривиальным унипотентным радикалом, имеющих конечномерное представление над полем положительной характеристики, можно найти, например, в лекци-

ях о локально конечных группах У. Мейерфранкенфельда [36, теорема 15.12]. Отметим, что прямое произведение линейных групп (имеющих представление над полями разных характеристик) может не быть линейной группой, однако имеет конечную s -размерность. Таким образом, естественно при попытках обобщить эти результаты на группы конечной s -размерности заменять p -радикал на радикал Хирша–Плоткина, а подгруппу $E_p(G)$ на слой $E(G)$. Как упоминалось выше, такое обобщение, и даже второе утверждение гипотезы Боровика–Хухро, неверно. Тем не менее, удастся показать, что если заменить в гипотезе радикал Хирша–Плоткина на разрешимый радикал, то утверждение становится верным.

Последнее утверждение о линейных группах, которое мы хотим здесь упомянуть — это теорема Д. Дж. Уинтера 1968 г. [42], которая говорит, что периодическая линейная группа содержит нормальную унипотентную подгруппу не более чем счетного индекса. Одним из следствий основных результатов диссертации является утверждение о том, что локально конечная группа конечной s -размерности является не более чем счетным расширением нильпотентной группы, что является прямым обобщением теоремы Уинтера.

Отметим, что описание строения локально конечных групп конечной s -размерности было независимо и почти одновременно с автором диссертации получено А. В. Боровиком и У. Кархумаки в 2019 г. [14]. Эта работа построена на иной идее, чем наше доказательство, — она построена вокруг понятия ограниченной (constrained) группы. По определению группа ограничена, если ступени разрешимости всех ее разрешимых подгрупп ограничены в совокупности. Легко видеть, что любая секция локально конечной группы конечной s -размерности является ограниченной. Основным результатом работы А. В. Боровика и У. Кархумаки дает только качественное описание строения, но не дает количественных оценок на параметры группы (за исключением оценки на ступень разрешимости локально разрешимого радикала, взятой из работы Е. И. Хухро [34]).

Важной частью теории конечных групп является изучение свойств и различных параметров конечных простых групп, ставшее особенно актуальным в ходе и после получения их классификации. К числу наиболее естественных изучаемых характеристик конечных простых групп относятся индексы и строение максимальных подгрупп, таблицы характеров, неприводимые представления и многие другие, в том числе и изучаемые в диссертации спектры.

Обозначим через $\mu(G)$ подмножество спектра, состоящее из максимальных по делимости элементов. Скажем, что спектр конечной группы G описан, если указано множество натуральных чисел $\nu(G)$ такое, что $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$, действительно, как несложно понять, $\omega(G)$ однозначно определяется любым множеством $\nu(G)$, удовлетворяющим этому условию. Согласно классификации конечных простых групп все конечные неабелевы простые группы делятся на три класса: знакопеременные группы, группы лиева типа и спорадические группы. Спектры знакопеременных групп известны и их описание не представляет особого труда. Спектры спорадических групп указаны, например, в атласе конечных групп [21]. Спектры классических групп известны (А. А. Бутурлакин, 2008, 2010 гг. [1, 2]). Спектры групп Ри и Сузуки также известны (см., например, работы М. Сузуки 1962 г. [39], Р. Брандла и В. Дж. Ши 1993 г. [16], Х. В. Дэна и В. Дж. Ши 1999 г. [22]). Описание спектров групп $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$ может быть получено из работ В. М. Кантора и А. Сереша 2002 г. [31] и Д. И. Деризиотиса 1984 г. [23] и содержится, например, в работах А. В. Васильева и А. М. Старолетова 2013 г. [5] и М. А. Гречкосеевой и М. А. Звездиной 2016 г. [27]. Таким образом, для завершения описания спектров конечных простых групп требуется дать описание спектров групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$, что и сделано в диссертации. Для этих групп некоторую информацию о спектре можно извлечь из ряда известных результатов. Приведем наиболее здесь важные из них.

Если G — конечная группа лиева типа над полем характеристики p , то все элементы группы делятся на три естественных класса: полупростые (порядка взаимно простого с p), унитарные (p -элементы) и остальные («смешанных» порядков). В работе Д. М. Тестерман 1995 г. [40] содержится формула, позволяющая вычислять максимальный порядок унитарных элементов в любой конечной группе лиева типа. В работе Д. И. Деризиотиса и А. П. Факиоласа 1991 г. [24] дано описание максимальных торов в универсальных группах типов $E_l(q)$, где $l \in \{6, 7, 8\}$, и ${}^2E_6(q)$, что дает в качестве следствия описание полупростой части спектра этих групп. Для элементов смешанных порядков базовым является тот факт, что любой элемент группы лиева типа может быть помещен специальным образом в централизатор полупростого элемента. Структура последних в группах лиева типа изучалась, например, Д. И. Деризиотисом в работе 1984 г. [23], но имеющиеся описания не позволяют вычислить спектр точно.

Подход, при котором некоторые свойства простых групп определяются по набору порядков элементов, используется во многих задачах.

Наиболее близкой к решаемой в диссертации задаче является проблема распознавания групп по спектру. Известно, что все знакопеременные группы достаточно большой степени и все простые группы лиева типа достаточно большого лиева ранга почти распознаваемы по спектру, т.е. для каждой из них существует конечное число конечных групп с тем же спектром (см. работу И. Б. Горшкова 2013 г. о знакопеременных группах [7] и обзор результатов о группах лиева типа в работе А. В. Васильева и М. А. Гречкосевой 2015 г. [26]). Таким образом, в диссертации получена некоторого рода алгоритмическая версия этого результата.

Кроме того, такой подход используется при построении различных алгоритмов, а также компьютерных вычислениях в конечных группах. Особенно широкое применение он имеет в области так называемых black-box алгоритмов, т.е. алгоритмов, которые не используют особенности конкретного представления группы. Например, Л. Бабаи, В. М. Кантор, П. П. Палфи и А. Сереш в 2002 г. [13] предложили полиномиальный вероятностный алгоритм, который, получая на вход матричную группу, про которую известно, что она является простой группой лиева типа, и характеристику поля определения этой группы, определяет ее стандартное имя, используя информацию о порядках случайной достаточно равномерно распределенной выборки элементов конечной простой группы. М. Либек и Э. О'Брайен в 2007 г. [35] предложили вероятностный алгоритм для нахождения характеристики поля определения конечной простой группы лиева типа, также имеющий полиномиальное время работы. В 2009 г. В. М. Кантор и А. Сереш [32] предложили другой вероятностный алгоритм, определяющий характеристику абсолютно неприводимой квазипростой матричной группы, основанный на том факте, что три наибольших порядка элементов простой группы однозначно определяют характеристику поля определения группы.

Более того, имеющиеся алгоритмы используются в различных компьютерных системах вычислений для практического распознавания конечных простых групп. Таким образом, наш результат имеет теоретическое значение. С точки зрения практических вычислений представляется, что некоторые методы и понятия, разработанные при его доказательстве, могут найти применение при построении новых алгоритмов (понятие AD -графа, его применение для нахождения лиева ранга группы и др.).

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Подгруппа H конечной группы G называется π -холловой, если H — это π -подгруппа, а индекс H в G не делится на числа из π (является π' -числом). В работе 1956 г. Ф. Холл [30] выдвинул гипотезу, что группа, содержащая

$\{p, q\}$ -холлову подгруппу для любой пары простых чисел p и q , является разрешимой. Эта гипотеза была доказана З. Арадом и М. Б. Уордом в 1982 г. [12] с использованием классификации конечных простых групп. В диссертации показано, что если π — некоторое конечное множество простых чисел и G — конечная группа, то G содержит разрешимую π -холлову подгруппу тогда и только тогда, когда G содержит $\{p, q\}$ -холлову подгруппу для любой пары простых $p, q \in \pi$. Этот критерий очевидно усиливает результат Арада и Уорда. Кроме того, он дает положительный ответ на вопрос Ф. Гросса из работы 1995 г. [29], в которой он, в частности, доказал этот критерий для некоторых серий классических групп в предположении, что двойка и характеристика не лежат в π [29, теорема 4.9]. Кроме того, аналогичный результат только для нильпотентных холловых подгрупп в конечных простых группах был получен в 2013 г. А. Морето [37, лемма 3.2].

Основные результаты диссертации.

1. Описано строение локально конечных групп конечной s -размерности.

2. Получено описание спектров конечных простых исключительных групп лиева типа, тем самым задача описания спектров решена для всех конечных простых групп.

3. Изучена проблема: по данному множеству натуральных чисел M эффективно определить, существует ли конечная простая группа G , множество порядков элементов которой совпадает с M . Предложен полиномиальный алгоритм, оставляющий не более одного кандидата для группы G , более того, множество порядков элементов этого кандидата содержит M . В частности, если M — это множество порядков элементов некоторой конечной простой группы, то алгоритм определяет эту группу однозначно.

4. Доказан критерий существования разрешимой холловой подгруппы в терминах существования бипримарных холловых подгрупп, тем самым, в частности, дан положительный ответ на вопрос Ф. Гросса 1995 г.

Результаты пункта 1 получены совместно с А. В. Васильевым и Д. О. Ревиным [44, 49, 50], при этом вклад автора диссертации является решающим. Результаты пункта 2 получены автором лично [43, 47, 48]. Результат пункта 3 получен в неразделимом соавторстве с А. В. Васильевым [46, 51]. Результат пункта 4 получен в неразделимом соавторстве с ученицей автора А. П. Храмовой [53].

Научная новизна и значимость работы. Работа носит теоретический характер. Все полученные результаты являются новыми. Как говорилось выше, описание строения локально конечных групп конечной s -размерности обобщает многие известные результаты. Информация о спектрах конечных простых групп бывает полезна не только при решении задач теории групп, но и других областей математики, а методы, разработанные при его получении, могут использоваться для описания спектров других классов групп близких к простым (например, почти простых или квазипростых групп). Алгоритм распознавания простых групп по спектру имеет в первую очередь теоретическое значение, однако конструкции, полученные при его построении, могут использоваться при построении других алгоритмов распознавания простых групп по наборам порядков элементов. Критерий существования разрешимой холловой подгруппы дает усиленную версию гипотезы Холла, а утверждения, полученные при его доказательстве, могут использоваться для доказательства других утверждений о разрешимых холловых подгруппах конечных групп. Результаты диссертации могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. Все основные результаты диссертации используют классификацию конечных простых групп.

При изучении локально конечных групп конечной s -размерности помимо стандартных фактов теории конечных групп и локально конечных групп используется более специальная информация. Так, при описании строения этих групп используется упоминавшийся ранее результат О. Кегеля о локально конечных группах, удовлетворяющих сильной теореме Силова для p -подгрупп, где p — простое число, большее 5. Несколько раз используется лемма Е.И. Хухро о s -размерности естественного полупрямого произведения p -группы P и элементарной абелевой q -группы, точно действующей на P . При построении контрпримеров ко второй части гипотезы Боровика–Хухро используются глубокие факты из теории чисел, в частности, доказательство ослабленной версии гипотезы Диксона о простых значениях в наборах целочисленных арифметических прогрессий для некоторого частного случая, полученное в работе К. Аллады, Р. Соломона и А. Тёрела 2000 г. [11]. Однако основную часть доказательств составляют оригинальные результаты. Например, получено новое ограничение на s -размерность конечного расширения группы конечной s -размерности (предыдущая, известная автору оценка, была получена в работе 2006 г. А. Дж. Дункана, И. В. Казачкова и В. Н. Ремесленникова [25], которая также содержит

хороший обзор групп конечной c -размерности и их свойств). Важным инструментом при описании строения локально конечных групп конечной c -размерности, имеющий самостоятельный интерес, является доказанное в диссертации утверждение о том, что c -размерность фактора по локально разрешимому радикалу такой группы ограничена в терминах c -размерности исходной группы.

При описании спектров конечных исключительных групп лиева типа используется подход, при котором эти группы рассматриваются как группы неподвижных точек эндоморфизмов Стейнберга соответствующих алгебраических групп. При этом применяется метод описания так называемых связанных централизаторов полупростых элементов, разработанный в работе 1978 г. Р.В. Картера [19]. Заметим, что связанный централизатор всегда является редуктивной подгруппой максимального ранга и в диссертации изучаются классы сопряженности последних. При этом аккуратный выбор корневых подсистем редуктивных подгрупп максимального ранга во многих случаях позволяет избежать непосредственных вычислений. В остальных случаях используются компьютерные вычисления в системе МАГМА [15]. При описании порядков полупростых элементов в универсальных группах рассматриваемых типов используются результаты 1991 г. Д.И. Деризиотиса и А.П. Факиоласа [24].

При построении полиномиального алгоритма распознавания конечных простых групп по спектру используется довольно большое количество различных фактов о порядках элементов этих групп. Среди наиболее важных отметим описание графов простых чисел конечных простых групп, полученное А.В. Васильевым и Е.П. Вдовиным в 2005 г. [4]; результат В.М. Кантора и А. Сереша 2009 г. о том, что характеристика конечной простой группы лиева типа, если она нечетна, однозначно определяется тремя наибольшими порядками элементов этой группы [32], а также полученное при его доказательстве описание этих наибольших порядков (для большинства групп описаны два наибольших порядка, поскольку третий порядок необходим только в некоторых случаях); описание спектров конечных простых классических групп, полученное автором в [1, 2]. Кроме того, важным инструментом при построении алгоритма является введенное в диссертации понятие графа атомарных делителей группы.

При изучении холловых подгрупп первым шагом доказательства является сведение вопроса к почти простым группам с помощью доказательства частичного аналога теоремы 3.5 из работы Ф. Гросса 1986 г. [28]. В случае простых групп широко применяется классифи-

кация холловых подгрупп в конечных простых группах (см. обзор по этой теме в работе Е.П. Вдовина и Д.О. Ревина [6]).

Апробация результатов. Результаты работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях, удовлетворяющих требованиям, предъявляемым Положением о присуждении ученых степеней [43–53].

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: международная конференция «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 2012, 2014, 2015, 2017, 2019, 2020 гг.), международная конференция по теории групп, посвященная 70-летию В. Д. Мазурова (г. Новосибирск, 16–20 июля 2013 г.), международная конференция «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (г. Екатеринбург, 09–15 августа 2015 г.), международная конференция «Groups, Rings, and Their Automorphisms» (г. Линкольн, Великобритания, 31 августа–02 сентября 2016 г.), XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию А. А. Махнева (г. Геленджик, 13–20 мая 2018 г.), международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (г. Москва, 23 - 25 мая 2018 г.).

Результаты первой главы излагались в миникурсе лекций, прочитанным автором на международной конференции «Finite Groups and Their Automorphisms 2017» (г. Болу, Турция, 3–6 мая 2017 г.). Результаты второй и третьей глав послужили материалом для миникурса лекций на 47-ой Всероссийской молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 31 января–06 февраля 2016).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из 4 глав, введения, заключения и списка литературы. Она изложена на 103 страницах, включает 23 таблицы и 1 рисунок, библиография содержит 100 наименований.

Основное содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на вступительную часть и параграфы. Во вступительной части главы дается краткое содержание главы и во всех главах, кроме первой, сформулированы основные утверждения главы. Теоремы имеют одинарную сквозную нумерацию. Вспомогательные утверждения (леммы и предложения) имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа в текущей главе, третья — номер утверждения в текущем параграфе. Таблицы и рисунки имеют сквозную нумерацию.

Во **введении** содержится постановка задачи, обосновывается актуальность темы исследования, освещается степень ее разработки; изложены цели, задачи, методы исследования и основные результаты диссертации; отражены новизна и научная значимость работы и данные об апробации. Также приведены сведения о публикации результатов диссертации.

Первая глава посвящена локально конечным группам конечной c -размерности. В первом параграфе данной главы доказывается первое утверждение гипотезы Боровика–Хухро.

Теорема 1. *Пусть G — локально конечная группа c -размерности k . Тогда количество неабелевых композиционных факторов группы G меньше $5k$.*

Поскольку локально конечная локально разрешимая простая группа является циклической, теорема 1 напрямую следует из соответствующего утверждения для конечных групп (предложение 1.1.7). В случае конечных групп мы пользуемся тем фактом, что фактор-группа конечной группы по разрешимому радикалу вкладывается в группу автоморфизмов прямого произведения некоторого набора конечных неабелевых простых групп $S_1, \dots, S_n$. Группа внешних автоморфизмов такого произведения является расширением разрешимой группы с помощью некоторой группы из симметрической группы Sym_n . В лемме 1.1.6 показано, что количество неабелевых композиционных факторов подгруппы группы Sym_n не превосходит $(n-1)/4$. Таким образом, для доказательства предложения 1.1.7 нужно показать, что n не превосходит $4k$. При этом используется следующая лемма.

Лемма 1.1.2. [34, лемма 3] *Если элементарная абелева p -группа E порядка p^n действует точно на конечной нильпотентной p' -группе Q , то существует серия подгрупп $E = E_0 > E_1 > E_2 > \dots > E_n = 1$ такая, что все включения $C_Q(E_0) < C_Q(E_1) < \dots < C_Q(E_n)$ строгие.*

Во втором параграфе главы строится контрпример ко второму утверждению гипотезы Боровика–Хухро.

Пусть r — нечетное простое число и p — такое простое число, что r делит $p-1$. Известно, что общая линейная группа $GL_{r^n}(p)$ содержит полупрямое произведение $X_{n,r}$ экстраспециальной группы порядка r^{2n+1} и периода r и подгруппы ее группы автоморфизмов, изоморфной симплектической группе $Sp_{2n}(r)$. Естественное полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^{r^n} и группы $X_{n,r}$ обозначим через $G_{n,r}$. Поскольку формулировка теоремы 2 требует большого числа обозначений и предварительной информации, мы ее не приводим.

Однако в силу этой теоремы для любого натурального n существует такая константа k_n , что среди групп $G_{n,r}$ есть бесконечно много групп, чья s -размерность не превосходит k_n . Несложно показать, что факторгруппа $G_{n,r}$ по подгруппе $S_{n,r}$, где $S_{n,r}$ — прообраз обобщенной подгруппы Фиттинга группы $G_{n,r}/F(G_{n,r})$ в группе $G_{n,r}$, изоморфна $Sp_{2n}(r)$. Единственная собственная нормальная подгруппа группы $Sp_{2n}(r)$ — это ее центр порядка 2, чей индекс зависит от r . Следствием этих построений является следующая теорема.

Теорема 3. *Утверждение (2) гипотезы Боровика–Хуэро не выполнено.*

В третьем параграфе доказывается один из основных результатов диссертации.

Теорема 5. *Пусть G — локально конечная группа конечной s -размерности k . Существует нормальный ряд*

$$R \leq L \leq A \leq G,$$

такой, что выполнены следующие утверждения.

- (1) R — (локально) разрешимый радикал, чья ступень разрешимости ограничена в терминах k .
- (2) L/R — цокль группы G/R и $C_{G/R}(L/R) = 1$. Группа L/R является прямым произведением линейных простых групп, причем число $\lambda(L/R)$ ограничено линейной функцией от k .
- (3) A/L — абелева группа и число $l(A/L)$ ограничено в терминах k .
- (4) Индекс A в G ограничен в терминах k .

Определение функции λ из этого утверждения довольно громоздко и дается в тексте диссертации после доказательства леммы 1.3.6. Опуская технические детали, можно сказать, что $\lambda(L/R)$ — это сумма «размеров» простых факторов групп L/R . При этом размером группы лиева типа мы считаем ее лиев ранг, знакопеременной группы — ее степень, для спорадических групп размер берем равным единице. Функция $l(G)$ — это длина максимальной цепи строго вложенных подгрупп группы G .

Пункт (1) теоремы 5 — это прямое следствие основного результата работы [34]. При доказательстве этой теоремы мы считаем, что $R = 1$, в силу следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть G — локально конечная группа конечной s -размерности k . Пусть $\bar{G}$ — ее фактор по локально разрешимому радикалу. Тогда s -размерности группы $\bar{G}$ ограничена в терминах k .*

Пункт (2) теоремы 5 доказан в предложении 1.3.14. Доказательство это предложения опирается на следующую лемму.

Лемма 1.3.12. [33, теорема 4.3] *Пусть $p > 3$ — простое число. Если локально конечная группа G не является p -разрешимой и удовлетворяет сильно теореме Силова для p , то цокль $\text{Soc}(X)$ фактор-группы $X \simeq G/S_p(G)$ — это прямое произведение конечного числа линейных простых p -совершенных подгрупп. Более того, централизатор $C_X(\text{Soc}(X))$ тривиален.*

Из пункта (2) следует, что группа G/R вкладывается в группу автоморфизмов группы L/R . Группа A/L — это группа, состоящая из произведений полевых автоморфизмов тех факторов L/R , которые являются группами лиева типа. В частности, A/L абелева. Кроме того, при таком выборе группы A/L , пункт (4) напрямую следует из (2). Таким образом, остается показать ограниченность числа $l(A/L)$. При доказательстве этого факта используется следующая лемма.

Лемма 1.3.11. *Пусть G — группа такая, что слой $E(G)$ — это группа лиева типа S над локально конечным полем F и $G \leq S\Phi_S$. Если s -размерность группы G конечна и равна k , то $l(G/S) \leq k$.*

Здесь Φ_S обозначает группу полевых автоморфизмов группы S .

В 1979 г. Р. М. Брайант показал, что периодическая локально нильпотентная $\mathcal{M}_c$ -группа почти нильпотентна [17]. В четвертом параграфе первой главы мы усиливаем это утверждение для класса групп конечной s -размерности. Мы начинаем с p -групп и доказываем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть G — локально нильпотентная p -группа s -размерности k . Тогда индекс ее нильпотентного радикала ограничен в терминах p и k .*

Отсюда непосредственно следует, что индекс нильпотентного радикала в произвольной периодической локально нильпотентной группе s -размерности k ограничен в терминах k и наибольшего p такого, что силовская p -подгруппа в данной группе неабелева (следствие 1.4.1). Существование такого p следует из конечности s -размерности. Доказательство этого утверждения в основном следует доказательству соответствующего результата из [17]. При этом удается получить точную оценку на индекс радикала (см. теорему 8). Кроме того, нам удалось уточнить оригинальный результат Брайанта, доказав следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть G — периодическая локально нильпотентная группа с условием минимальности на централизаторы, N — ее нильпотентный радикал. Тогда $Z_1(N) = C_G(N)$.

Напомним, что через $Z_i(N)$ обозначается i -ый гиперцентр группы N , в частности, $Z_1(N)$ — это ее центр.

Результаты этого параграфа получены совместно с И. Е. Девятковой [52].

Вторая глава посвящена описанию спектров конечных простых исключительных групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$. В вводной части сформулированы основные утверждения главы. В качестве примера, мы сформулируем здесь утверждение для простых групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, которые в теореме обозначаются $E_6^+(q)$ и $E_6^-(q)$ соответственно. Пусть p — простое число и Φ — некоторая система корней. Обозначим через $p(\Phi)$ наименьшую степень числа p , большую максимальной высоты корня системы Φ .

Теорема 10. Пусть G — простая группа $E_6^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$ и q — степень простого числа p . Положим $d = (3, q - \varepsilon 1)$. Пусть множество $\nu(G)$ есть объединение следующих множеств:

- 1) $\{ \frac{q^6-1}{d}, \frac{q^6+\varepsilon q^3+1}{d}, \frac{(q^2+\varepsilon q+1)(q^4-q^2+1)}{d}, \frac{(q-\varepsilon 1)(q^2+1)(q^3+\varepsilon 1)}{d}, \frac{(q^2-1)(q^4+1)}{d}, \frac{(q+\varepsilon 1)(q^5-\varepsilon 1)}{d}, q^5 - \varepsilon 1 \},$
- 2) $p \cdot \{ \frac{q^6-1}{d(q-\varepsilon 1)}, \frac{q^5-\varepsilon 1}{d}, q^4 - 1, (q^3 - \varepsilon 1)(q + \varepsilon 1), \frac{(q-\varepsilon 1)(q^3+\varepsilon 1)}{d} \},$
- 3) $p(A_2) \cdot \{ \frac{(q^3-\varepsilon 1)(q+\varepsilon 1)}{d}, \frac{q^4+q^2+1}{d}, \frac{q^4-1}{d} \},$
- 4) $p(A_3) \cdot \{ \frac{(q^2+1)(q-\varepsilon 1)}{d}, q^2 - 1 \},$
- 5) $p(D_4) \cdot \{ q - \varepsilon 1, \frac{(q^2-1)}{d}, \frac{(q^2+\varepsilon q+1)}{d} \},$
- 6) $p(D_5) \cdot \{ \frac{(q-\varepsilon 1)}{d} \},$
- 7) $\{ p(E_6) \}.$

Тогда $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

Напомним, что если G — конечная группа лиева типа над полем характеристики p , то спектр $\omega(G)$ может быть представлен как объединение трех подмножеств: множества $\omega_p(G)$ порядков всех унитарных элементов, т.е. элементов, чей порядок является степенью числа p , множества $\omega_{p'}(G)$ порядков всех полупростых элементов, т.е. элементов, чей порядок взаимно прост с p , и множества $\omega_m(G)$ всех остальных, «смешанных», порядков. Порядки унитарных элементов для всех групп лиева типа известны и могут быть найдены, например, в [40]. Таким образом, для описания спектра необходимо определить только порядки полупростых и смешанных элементов.

В первом параграфе главы вычисляются порядки полупростых элементов простых групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и $E_7(q)$. Поскольку любой полупростой элемент группы лиева типа содержится в максимальном торе, задача сводится к изучению периодов максимальных торов. Циклическое строение максимальных торов в универсальных группах лиевых типов $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ и E_8 найдено в [24]. Простые группы $E_8(q)$ совпадают с универсальными, поэтому их полупростые элементы не требуют рассмотрения. Центр универсальной группы $E_6^\varepsilon(q)$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ имеет порядок $(3, q - \varepsilon 1)$. Порядок центра универсальной группы $E_7(q)$ равен $(2, q - 1)$. Поскольку максимальный тор всегда содержит центр редуктивной группы, периоды циклических торов могут быть определены из результатов Деризиотиса и Факиоласа. Для остальных торов групп $E_6^\varepsilon(q)$ ответ дает следующее утверждение. В нем $\overline{G}$ — это универсальная группа типа E_6 над алгебраическим замыканием поля порядка p , а σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$, действующее на корневых подгруппах по правилу $x_r(t) \mapsto x_r(t^q)$. При этом группа неподвижных точек $\overline{G}_\sigma$ — это универсальная группа лиева типа E_6 над полем порядка q .

Предложение 2.2.2. *Пусть S — это некоторый нециклический максимальный тор группы $\overline{G}_\sigma$. Тогда периоды тора S и фактор-группы тора S по центру группы $\overline{G}_\sigma$ совпадают.*

Доказательство этого предложения опирается на тот факт, что если силовская 3-подгруппа содержит подгруппу вида $C \times C$, где C — это циклическая группа, порядок которой совпадает с 3-периодом тора, то период этого тора сохраняется при факторизации. Под это соображение подпадают все кроме пяти классов сопряженности максимальных торов. Для оставшихся пяти классов лемма доказывается непосредственными вычислениями с помощью системы MAGMA.

В случае групп типа $E_7(q)$ используются те же соображения, однако требуется намного больше прямых вычислений (предложение 2.2.3).

В остальных параграфах главы вычисляются порядки смешанных элементов. Основой для вычисления смешанных порядков являются следующие соображения. Произвольный элемент g группы лиева типа G может быть единственным образом представлен в виде произведения su , где элемент s полупрост, а u — это унитарный элемент из $C_G(s)$. При этом так называемый связный централизатор $C_G(s)^0$ является редуктивной подгруппой максимального ранга группы G и содержит s и u . Таким образом, изучение смешанных порядков сводится к вычислениям в редуктивных подгруппах максимального ранга. Следующая лемма дает удобную параметризацию редуктивных подгрупп.

Лемма 2.1.1. [19, предложение 3] Пусть $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа и σ — отображение Фробениуса группы $\overline{G}$. Пусть $\overline{G}_1$ — σ -инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$. Пусть $\mathfrak{C}$ — множество всех σ -инвариантных подгрупп, сопряженных с $\overline{G}_1$ в группе $\overline{G}$, и $\mathfrak{C}/\overline{G}_\sigma$ — множество $\overline{G}_\sigma$ -орбит в $\mathfrak{C}$. Функция π , отображающая подгруппу $\overline{G}_1^g$ в элемент $W_1\pi(g^\sigma g^{-1})$, индуцирует биекцию между множеством $\mathfrak{C}/\overline{G}_\sigma$ и классами σ -сопряженных элементов группы $N_W(W_1)/W_1$.

Поскольку в нахождении смешанных порядков используется даже больше вычислений, чем в нахождении полупростых, естественной целью является уменьшение числа редуктивных подгрупп, требующих рассмотрения. Во-первых, можно зафиксировать некоторый σ -инвариантный максимальный тор, содержащийся в редуктивной подгруппе. Во-вторых, можно рассматривать только подгруппы, чьи системы корней не эквивалентны относительно действия группы Вейля всей группы. В-третьих, довольно простое рассуждение показывает, что в случае разложимой корневой системы редуктивной подгруппы можно считать, что все ее неразложимые компоненты изоморфны, а соответствующий элемент группы Вейля переставляет эти компоненты по циклу. Некоторые случаи удается исключить с помощью результата Д. И. Деризюта из [23], который говорит, что если редуктивная подгруппа является центризатором полупростого элемента, то ее фундаментальная система может быть вложена с помощью группы Вейля в множество $\Pi \cup \{-r_0\}$, где Π — это фундаментальная система корней группы G , а r_0 — корень максимальной высоты. Во многих случаях компьютерные вычисления не требуются в силу того, что удается показать, что центры редуктивных групп с заданной системой корней образуют множество максимальных тором в группе, p' -часть спектра которой известна (см., например, лемму 2.3.2).

В третьем параграфе рассматриваются группы $E_6^\pm(q)$. В 1952 г. Е. Б. Дынкин дал классификацию корневых подсистем всех систем корней с точностью до действия группы Вейля [8]. В частности, в таблице 11 этой работы указаны класс всех собственных ненулевых подсистем исключительных систем корней. Из нее следует, что в системе корней E_6 если две подсистемы изоморфны, то они эквивалентны. Все классы изоморфных подсистем указаны в таблице 3. В лемме 2.3.2 разобраны случаи редуктивных подгрупп с системами корней A_1 и A_2 . В остальных случаях используются вычисления в системе MAGMA. Результаты этих вычислений приведены в таблицах 4–11.

В четвертом параграфе рассматриваются группы $E_7(q)$. В таблице 12 приведены все классы эквивалентности подсистем системы корней E_7 . В таблице 13 приведены представители рассматриваемых классов корневых подсистем и соотношения, выполненные в центре редуктивной группы максимального ранга с такой системой корней. В предложении 2.4.3 и следствии 2.4.4 собраны все случаи, в которых центры редуктивных групп образуют множество максимальных торов в некоторых группах лиева типа. В предложении 2.4.5 указаны результаты прямых вычислений для остальных случаев.

В пятом параграфе рассматриваются группы $E_8(q)$. В таблице 14 указаны классы эквивалентности подсистем системы E_8 , а в таблице 15 — представители рассматриваемых подсистем и соотношения центров. Предложение 2.5.2 — это аналог предложения 2.4.3. В качестве иллюстрации мы приведем здесь формулировку предложения 2.5.3, в котором указаны результаты прямых вычислений для всех случаев, не разобранных ранее. Для редуктивной подгруппы H обозначим через $\eta(H)$ произведение периода центра и максимального порядка унитарного элемента из H . Пусть $v(\Psi)$ — это множество всех чисел $\eta(H)$, где H пробегает все редуктивные группы максимального ранга группы $E_8(q)$ с системой корней Ψ . Для множества натуральных чисел M обозначим через $\omega(M)$ множество натуральных делителей элементов этого множества. Для множеств натуральных чисел A и B будем писать $A \sim B$, если $\omega(A) = \omega(B)$.

- Предложение 2.5.3.** 1) $v(A_6) \sim p(A_6) \cdot \{q^2 - 1\}$,
 2) $v((A_7)_1) \sim p(A_7) \cdot \{(q-1)(2, q-1), (q+1)(2, q-1)\}$,
 3) $v((A_7)_2) \sim p(A_7) \cdot \{q-1, q+1\}$,
 4) $v(A_8) \sim p(A_8) \cdot \{(3, q^2-1)\}$,
 5) $v(D_7) \sim p(D_7) \cdot \{q-1, q+1\}$,
 6) $v(D_8) \sim p(D_8) \cdot \{(2, q-1)\}$,
 7) $v((2A_3)_1) \sim p(A_3) \cdot \{(2, q-1)(q^2-1)\}$,
 8) $v((2A_3)_1) \sim p(A_3) \cdot \{q^2-1, q^2+1\}$.

Третья глава посвящена построению алгоритма распознавания конечной простой группы по спектру. Более точно, решается следующая задача. Пусть дано конечное множество натуральных чисел M . Требуется определить, является ли M спектром некоторой конечной неабелевой простой группы, и если является, то определить соответствующую группу. Построен полиномиальный алгоритм, который оставляет не более одного кандидата. Для более точной формулировки результата необходимо ввести некоторые определения.

Пусть G — конечная группа. Назовем конечное множество натуральных чисел $\mathcal{M}$ *почти G -спектральным*, если $\mathcal{M} \subseteq \omega(G)$ и $\omega(H) \neq \omega(\mathcal{M})$ для любой конечной неабелевой простой группы H , чей спектр отличается от спектра группы G . Для конечного множества натуральных чисел $\mathcal{M}$ обозначим через $\Omega(\mathcal{M})$ множество всех неабелевых простых групп G таких, что множество $\mathcal{M}$ почти G -спектрально. Если $\omega(\mathcal{M}) = \omega(G)$ для некоторой неабелевой простой группы G , то $\Omega(\mathcal{M})$ состоит либо из одного элемента, либо совпадает с одним из множеств $\{O_8^+(2), S_6(2)\}$, $\{O_8^+(3), O_7(3)\}$ [3]. Если такой простой группы не существует, то мощность $\Omega(\mathcal{M})$ может иметь различные значения (например, если $\mathcal{M} = \{2\}$, то $\Omega(\mathcal{M})$ состоит из всех неабелевых простых групп).

Следующая теорема является основным результатом главы.

Теорема 15. *Пусть $\mathcal{M}$ — конечное множество натуральных чисел, $t = |\mathcal{M}|$ и $M = \max \mathcal{M}$. Тогда существует алгоритм, который получая на вход множество $\mathcal{M}$, выдает либо элемент множества $\Omega(\mathcal{M})$, либо пустое множество. В последнем случае не существует конечной неабелевой простой группы H такой, что $\omega(H) = \omega(\mathcal{M})$. Время работы алгоритма ограничено полиномом от $t \log M$.*

В первом параграфе главы вводятся необходимые обозначения и приводятся предварительные результаты. Во втором параграфе вводятся понятия атомарных делителей и AD-графа множества натуральных чисел и изучаются их свойства.

Определение 3.2.1. *Для непустого множества $\mathcal{S}$ множества $\mathcal{M}$ обозначим через $v = v_{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ наибольшее натуральное число такое, что v делит каждый элемент $\mathcal{S}$ и взаимно просто с элементами $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}$. Положим $V(\mathcal{M}) = \{v_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) > 1 \mid \emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}\}$. Элементы множества $V(\mathcal{M})$ называются атомарными делителями множества $\mathcal{M}$.*

Определение 3.2.3. *Назовем AD-графом $\text{AD}(\mathcal{M})$ множества $\mathcal{M}$ граф со множеством вершин $V(\mathcal{M})$, в котором две вершины v_1 и v_2 смежны тогда и только тогда, когда $v_1 v_2 \in \omega(\mathcal{M})$.*

Отметим, что AD-граф может быть достаточно большим по сравнению с размером множества $\mathcal{M}$. Тем не менее, его можно строить достаточно эффективно.

Лемма 3.2.4. *Существует алгоритм, который по данному натуральному числу l и множеству $\mathcal{M}$, строит граф $\text{AD}(\mathcal{M})$, если число атомарных множества $\mathcal{M}$ не превосходит l , либо сообщает, что это условие не выполнено. Время работы алгоритма ограничено полиномом от $lm \log M$.*

В третьем параграфе главы вводится понятие графа атомарных делителей группы.

Определение 3.3.1. *Граф атомарных делителей (AD-граф) $\text{AD}(G)$ группы G — это граф $\text{AD}(\mu(G))$.*

Через $V(G)$ обозначается множество вершин графа $\text{AD}(G)$.

Граф атомарных делителей простой группы оказывается в большинстве случаев расщепляемым (лемма 3.2.2), т.е. его множество вершин есть объединение вершин клики и коклики.

Для классической группы G обозначим через $\text{prk}(G)$ размерность группы G в случае линейных и унитарных групп и лиев ранг G в случае симплектических и ортогональных групп. Следующая лемма дает ограничение для количества вершин графа атомарных делителей.

Лемма 3.3.3. *Пусть G — конечная классическая группа с $\text{prk}(G) \geq 12$ или знакопеременная группа. Пусть M — это максимальный элемент множества $\omega(G)$. Тогда число элементов множества $V(G)$ не превосходит $C(M) = \max(140, (\ln(2M)/0.99)^2, 2(\log M + 3))$.*

Центральным утверждением этого параграфа является лемма 3.3.4, в которой дается описание множества вершин графа $\text{AD}(G)$ для простых классических групп G достаточно большой размерности. Как следствия этого описание получают верхняя и нижняя оценки для размера $V(G)$ в терминах лиева ранга группы G .

В четвертом параграфе строятся вспомогательные алгоритмы, которые фактически являются отдельными шагами алгоритма из теоремы 15.

Лемма 3.4.1. *Существует алгоритм, который по заданному конечному множеству натуральных чисел M , выдает либо знакопеременную группу из $\Omega(M)$, либо пустое множество, если такой группы не существует. Время работы алгоритма ограничено полиномом от $m \log M$.*

Эта лемма устанавливает существование искомого алгоритма для знакопеременных групп и позволяет исключить их из дальнейшего рассмотрения. Следующая лемма 3.4.2 устанавливает существование полиномиального алгоритма, который по заданному лиеву рангу и числу B формирует список простых групп лиева G заданного лиева ранга, определенных над полями нечетных характеристик, таких, что B — это максимальный порядок элемента в G . Доказательство этой леммы опирается на результаты работы [31], где, в частности, были найдены выражения для двух максимальных порядков элементов во всех конечных простых группах лиева типа над полями нечетных характеристик.

В лемме 3.4.3 устанавливается справедливость теоремы 15 при условии, что мы ищем группу лиева типа заданного лиева ранга, в частности, эта лемма позволяет исключить из рассмотрения группы лиева типа малых рангов, в том числе все исключительные группы.

В последнем параграфе этой главы доказывается теорема 15.

Четвертая глава посвящена холловым подгруппам конечных групп. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 16. *Пусть G — конечная группа и π — это некоторое множество простых чисел. Группа G содержит разрешимую π -холлову подгруппу тогда и только тогда, когда G содержит $\{p, q\}$ -холлову подгруппу для любых $p, q \in \pi$.*

В первом параграфе главы приводятся предварительные сведения и обозначения. Во втором параграфе доказывается следующее утверждение, позволяющее свести доказательство теоремы 16 к случаю конечных простых групп. Если H/K — это некоторая секция группы G , то нормализатор $N_G(H/K)$ секции H/K в G — это пересечение $N_G(H) \cap N_G(K)$, а его образ в группе автоморфизмов $\text{Aut}(H/K)$ называется группой индуцированных автоморфизмов и обозначается $\text{Aut}_G(H/K)$.

Теорема 17. *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Пусть композиционный ряд*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

является уплотнением главного ряда группы G . Если группа индуцированных автоморфизмов $\text{Aut}_G(G_i/G_{i-1})$ обладает разрешимой π -холловой подгруппой для любого $1 \leq i \leq n$, то группа G обладает разрешимой π -холловой подгруппой.

Доказательство в основном следует доказательству теоремы 3.5 из [28].

В третьем параграфе исследуется случай простых групп.

Предложение 4.3.1. *Пусть S — конечная простая группа, и π — это некоторое множество простых чисел такое, что $|\pi \cap \pi(S)| \geq 3$. Группа S содержит $\{p, q\}$ -холлову подгруппу для любых $p, q \in \pi$ тогда и только тогда, когда S содержит разрешимую π -холлову подгруппу. Кроме того, все классы сопряжённости таких подгрупп инвариантны относительно группы автоморфизмов.*

Доказательство этого предложения опирается на классификацию холловых подгрупп конечных простых групп (см. обзор в работе Е. П. Вдовина и Д. О. Ревина [6]) и состоит из разбора большого числа случаев.

В четвертом параграфе доказывается теорема 16.

В пятом параграфе строится пример группы с неизоморфными p -дополнениями, т. е. p' -холловыми подгруппами. Таким примером является естественное полупрямое произведение общей линейной групп $GL_3(2)$ и естественного трехмерного модуля V над полем из двух элементов. Группа $GL_3(2)$ содержит два класса сопряженности 7-дополнений — это два класса максимальных параболических подгрупп (стабилизатор прямой и гиперплоскости). Если обозначить некоторые представители этих классов через H и K , то 7-дополнения HV и KV соответствующего полупрямого произведения неизоморфны, что и дает требуемый пример. Этот результат получен в совместной работе с Д. О. Ревиным [45].

Заключение

В диссертации решены следующие проблемы:

- 1) доказано первое утверждение гипотезы Боровика–Хухро об ограниченности числа неабелевых композиционных факторов локально конечной группы конечной s -размерности (теорема 1; совместно с А. В. Васильевым);
- 2) построен контрпример ко второму утверждению гипотезы Боровика–Хухро о строении локально конечной группы конечной s -размерности (теорема 3; совместно с А. В. Васильевым и Д. О. Ревиным);
- 3) описано строение локально конечных групп конечной s -размерности (теорема 5);
- 4) показано, что s -размерность фактор-группы локально конечной группы конечной s -размерности k по локально разрешимому радикалу ограничена в терминах k (теорема 4);
- 5) получено ограничение на индекс нильпотентного радикала в периодической локально нильпотентной группе конечной s -размерности (следствие 1.4.1; совместно с И. Е. Девятковой);
- 6) описаны спектры конечных простых исключительных групп лиевых типов E_6 , 2E_6 , E_7 и E_8 (теоремы 10, 12, 14);
- 7) построен полиномиальный алгоритм распознавания конечной простой группы по спектру (теорема 15; совместно с А. В. Васильевым);

- 8) получен критерий существования разрешимой холловой подгруппы (теорема 16; совместно с А. П. Храмовой);
- 9) построен пример конечной группы с неизоморфными p -дополнениями (параграф 4.5; получено в совместной работе с Д. О. Ревинным).

Результаты о локально конечных группах дают достаточно точное описание их строения и предоставляют новые методы изучения этих групп. Отметим, что если сравнить формулировку опровергнутого утверждения гипотезы Боровика–Хухро и теорему 5 (или даже более близкую к нему по форме теорему 6), то очевидно, что между ними есть зазор. Например, естественным является вопрос о том, можно ли в формулировке теоремы 6 третий радикал Хирша–Плоткина заменить на второй. Кроме того, из результатов о группах c -размерности 2, т. е. группах с абелевыми централизаторами, следует, что для них гипотеза Боровика–Хухро справедлива в полном объеме. Контрпримеры, построенные в диссертации, имеют размерность, не превосходящую 50. Таким образом, неизвестно для каких значений c -размерности гипотеза Боровика–Хухро справедлива в полном объеме.

Описание спектров исключительных групп завершило описание спектров конечных простых групп. Кроме того, методы, разработанные при их вычислении, можно использовать для вычисления спектров групп внутренне-диагональных автоморфизмов исключительных групп.

Как говорилось выше, алгоритм распознавания простой группы по спектру не только представляет самостоятельный интерес, но и может служить источником полезных инструментов для построения других алгоритмов распознавания конечных простых групп по порядкам элементов. Также он актуализирует и без того интересную задачу эффективного вычисления спектра конечной простой группы по набору ее стандартных параметров.

В связи с доказательством критерия существования разрешимой холловой подгруппы отметим теорему 17, сводящую вопрос существования разрешимой подгруппы к изучению групп автоморфизмов некоторого ее субнормального ряда. Здесь есть два направления дальнейшего развития. Во-первых, эта теорема дает достаточное условие существования разрешимой холловой подгруппы, по-видимому, оно является и необходимым, но это только гипотеза. Во-вторых, полезно было бы иметь аналогичные утверждения для других классов групп, помимо разрешимых.

Благодарности

Я глубоко признателен своему научному консультанту Андрею Викторовичу Васильеву за научное сотрудничество и помощь при подготовке текста диссертации. Я благодарен Даниле Олеговичу Ревину, а также своим ученицам Антонине Павловне Храмовой и Ирине Евгеньевне Девятковой за плодотворное сотрудничество. Я признателен Виктору Даниловичу Мазурову, Евгению Ивановичу Хухро, Андрею Витальевичу Заварнищину, Евгению Петровичу Вдовину и другим сотрудникам лаборатории за замечательную творческую и профессиональную атмосферу, в которой была выполнена диссертация. Я благодарен своей жене Марии Александровне Гречкосеевой за неизменную поддержку.

Список литературы

- [1] Бутурлакин А. А. Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика — 2008. — Т. 47, № 2. — С. 157–173.
- [2] Бутурлакин А. А. Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Матем. тр. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 33–83.
- [3] Buturlakin A. A. Isospectral finite simple groups // Сиб. электрон. матем. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 111–114.
- [4] Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика — 2005. — Т. 44, № 6. — С. 682–725.
- [5] Васильев А. В., Старолетов А. М. Распознаваемость групп $G_2(q)$ по спектру // Алгебра и логика — 2013. — Т. 52, № 1. — С. 3–21.
- [6] Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Теоремы силовского типа // УМН — 2011. — Т. 66, № 5(401). — С. 3–46.
- [7] Горшков И. Б. Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика — 2013. — Т. 52, № 1. — С. 57–63.
- [8] Дынкин Е. Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Матем. сб. — 1952. — Т. 30(72), № 2. — С. 349–462.
- [9] Каргаполов М. И. О периодических группах матриц // Сиб. матем. ж. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 834–838.

- [10] Каргаполов М. И. Замечания к статье [автора] «О периодических группах матриц» // Сиб. матем. ж. — 1963. — Т. 4, № 5. — С. 1198–1199.
- [11] Alladi K., Solomon R., Turull A. Finite simple groups of bounded subgroup chain length // J. Algebra— 2000. — Vol. 231. — P. 374–386.
- [12] Arad Z., Ward M. B. New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra— 1982. — Vol. 77, no. 1. — P. 234–246.
- [13] Babai L., Kantor W. M., Pálffy P. P., and Seress Á. Black-box recognition of finite simple groups of Lie type by statistics of element orders // J. Group Theory— 2002. — Vol. 5, no. 4. — P. 383–401.
- [14] Borovik A. V., Karhumäki U. Locally finite groups of finite centralizer dimension // J. Group Theory— 2019. — Vol. 22, no. 4. — P. 729–740
- [15] Bosma W., Cannon J., Playoust C. The Magma algebra system. I. The user language. // J. Symbolic Comput.— 1997. — Vol. 24. — P. 235–265.
- [16] Brandl R., Shi W. J. A characterization of finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ricerche Mat.— 1993. — Vol. 42, no. 1. — P. 193–198.
- [17] Bryant R. M. Groups with the minimal condition on centralizers // J. Algebra— 1979. — Vol. 60. — P. 371–383.
- [18] Bryant R. M., Hartley B. Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralizers // J. Algebra— 1979. — Vol. 61. — P. 328–334.
- [19] Carter R. W. Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // Proc. Lond. Math. Soc. (3).— 1978. — Vol. 37. — P. 491–507.
- [20] Collins M. J. Modular analogues of Jordan’s theorem for finite linear groups // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal).— 2008. — Vol. 2008 Iss. 624. — P. 143–171.
- [21] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., and Wilson R. A. Atlas of finite groups // Clarendon Press, Oxford.— 1984. — 252 pp.
- [22] Deng H. W., Shi W. J. The characterization of Ree groups ${}^2F_4(q)$ by their element orders // J. Algebra— 1999. — Vol. 217, no. 1. — P. 180–187.

- [23] Deriziotis D. I. Conjugacy classes of centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // Vol.11 of Vorlesungen Fachbereich Math. Univ. Essen.— Universität Essen Fachbereich Mathematik, Essen, 1984.
- [24] Deriziotis D. I., Fakiolas A. P. The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6 , E_7 and E_8 // Commun. Algebra— 1991. — Vol. 19, no. 3. — P. 889–903.
- [25] Duncan A.J., Kazatchkov I.V., Remeslennikov V.N. Centraliser dimension and universal classes of groups. // Sib. Elektron. Mat. Izv.— 2006. — Vol. 3. — P. 197–215.
- [26] Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory— 2015. — Vol. 18, no. 5. — P. 741–759 .
- [27] Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A. On spectra of automorphic extensions of finite simple groups $F_4(q)$ and ${}^3D_4(q)$ // J. Algebra Appl. — 2016. — Vol. 15, no. 4. — 1650168 [13 pages].
- [28] Gross F. On the existence of Hall subgroups // J. Algebra— 1986. — Vol. 98, no. 1. — P. 1–13.
- [29] Gross F. Odd order Hall subgroups of the classical linear groups // Proc. London Math. Soc.(3)— 1995. — Vol. 220. — P. 317–336.
- [30] Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc.— 1956. — Vol. s3-6, no. 2. — P. 286–304.
- [31] Kantor W. M., Seress Á Prime power graphs for groups of Lie type // J. Algebra— 2002. — Vol. 247, no. 2. — P. 370–434.
- [32] Kantor W. M., Seress Á Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups // J. Algebra— 2009. — Vol. 322, no. 3. — P. 802–832.
- [33] Kegel O. H. Four lectures on Sylow theory in locally finite groups // in Group theory: Proceedings of the Singapore Group Theory Conference held at the National University of Singapore, June 8–19, 1987. — Ed. by Kai Nah Cheng and Yu Kiang Leong. — Berlin; New York: de Gruyter, 1989.
- [34] Khukhro E. I. On solubility of groups with bounded centralizer chains // Glasgow Math. J. — 2009. — Vol. 51. — P. 49–54.

- [35] Liebeck M. W., O'Brien E. A. Finding the characteristic of a group of Lie type // J. Lond. Math. Soc. (2). — 2007. — Vol. 75, no. 3. — P. 741–754.
- [36] Meierfrankenfeld U. Locally finite groups // <https://users.math.msu.edu/users/meier/Classnotes/LFG/LFG.pdf>.
- [37] Moretó A. Sylow numbers and nilpotent Hall subgroups // J. Algebra — 2013. — Vol. 379. — P. 80–84.
- [38] Myasnikov A., Shumyatsky P. Discriminating groups and c -dimension // J. Group Theory — 2004. — Vol. 7. — P. 135–142.
- [39] Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. (2) — 1962. — Vol. 75. — P. 105–145.
- [40] Testerman D. M. A_1 -type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups // J. Algebra — 1995. — Vol. 177, no. 1. — P. 34–76.
- [41] Wehrfritz B. A. F. Infinite linear groups. — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 76, Springer-Verlag. — 1973. — P. 232+xiii.
- [42] Winter D.J. Representations of locally finite groups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 74. — P. 145–148.

Публикации автора по теме диссертации

- [43] Бутурлакин А. А. Спектры конечных простых групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Алгебра и логика — 2013. — Т. 52, № 3. — С. 284–304.
- [44] Бутурлакин А. А., Васильев А. В. О локально конечных группах с ограниченными рядами централизаторов // Алгебра и логика — 2013. — Т. 52, № 5. — С. 553–558.
- [45] Buturlakin A. A., Revin D. O. On p -complements of finite groups // Сиб. электрон. матем. изв. — 2013. — Т. 10. — С. 414–417.
- [46] Бутурлакин А. А., Васильев А. В. О конструктивном распознавании конечных простых групп по порядкам их элементов // Алгебра и логика — 2014. — Т. 53, № 4. — С. 541–544.

- [47] Бутурлакин А. А. Спектры конечных простых групп $E_7(q)$ // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 988–998.
- [48] Бутурлакин А. А. Спектры групп $E_8(q)$ // Алгебра и логика — 2018. — Т. 57, № 1. — С. 3–13.
- [49] Buturlakin A. A., Revin D. O., Vasil'ev A. V. Groups with bounded centralizer chains and the Borovik–Khukhro conjecture // J. Group Theory — 2018. — Vol. 21, no. 6. — P. 1095–1110.
- [50] Buturlakin A. A. The structure of locally finite groups of finite c -dimension // J. Algebra Appl. — 2019. — Vol. 18, no. 12. — 1950223, 12 pp.
- [51] Buturlakin A. A., Vasil'ev A. V. The graph of atomic divisors and recognition of finite simple groups // J. Algebra — 2019. — Vol. 537. — P. 478–502.
- [52] Buturlakin A. A., Devyatkova I. E. Periodic locally nilpotent groups of finite c -dimension // Сиб. электрон. матем. изв. — 2020. — Т. 17. — С. 1100–1105.
- [53] Buturlakin A. A., Khramova A. P. A criterion for the existence of a solvable π -Hall subgroup in a finite group // Comm. Algebra — 2020. — Vol. 48, no. 3. — P. 1305–1313.

Бутурлакин Александр Александрович

**Специальные классы подгрупп и
строение локально конечных групп**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук