На правах рукописи

Луканкин Сергей Анатольевич

УТОЧНЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕЧНО-СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ВЫСОКОТОЧНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук

Казань – 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ».

Научный консультант:	**Паймушин Виталий Николаевич**, академик АН РТ, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Прочности конструкций ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
Официальные оппоненты:	**Антуфьев Борис Андреевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
	Серазутдинов Мурат Нуриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретической механики и сопротивления материалов» ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет
	Султанов Ленар Усманович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Ведущая организация:	Государственный научный центр, федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского»

Защита состоится «26» марта 2021 г. в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного Совета Д 212.079.10, созданного на базе ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ», по адресу: 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д.10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» http://old.kai.ru/science/disser/.

Автореферат разослан «__» ________202_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент   Каляшина Анна Викторовна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Обширный класс современных инженерных конструкций составляют топологически сложные составные оболочечно-стержневые структуры сложной геометрии. Использование в них композиционных материалов позволяет получать конструкции, наделенные рядом взаимоисключающих свойств и обладающих одновременно большей весовой отдачей, высокими ресурсными показателями, радиопрозрачностью, звуко- и теплоизоляционными свойствами и т.д., имея при этом требуемую степень технологичности и минимальную трудоемкость изготовления. Приведенные причины объясняют интерес исследователей к проблемам математического моделирования механического поведения указанных конструкций в реальных условиях их функционирования и стимулируют продолжение исследований, целью которых является разработка методов достоверного определения пределов несущий способности и ресурсного потенциала конструкций, что обеспечивается решением комплекса задач моделирования статического деформирования, устойчивости и динамического поведения разрабатываемых конструкций.

Современное развитие математических моделей механики деформирования оболочек и стержневых элементов, численных методов их исследования позволяет создавать эффективные расчетные схемы и вычислительные процедуры, имитирующие фактические условия функционирования конструкций. Однако ориентация на более глубокую проработку процессов деформирования, механизмов потери устойчивости и колебаний, общая доминирующая тенденция на снижение степени риска при разработке новых образцов техники заставляет исследователей уделять пристальное внимание проблемам детализации и адекватности описания структуры реального элемента конструкции в соответствующих математических моделях при максимально полном учете специфики его работы в нормальных и экстремальных условиях.

Аргументируя актуальность темы исследований, следует указать на одну из негативных тенденций, характеризующих современное состояние этапа разработки новой техники в нашей стране, а именно использование иностранных программных комплексов твердотельного и конечно-элементного моделирования и почти полное отсутствие отечественных разработок в этой области. Такое положение выводит на первый план задачу создания отечественных проблемно-ориентированных программных комплексов, имеющих более мощный и развитый функционал, чем используемые зарубежные аналоги. В связи с этим представленные в работе результаты теоретических и численных исследований могут служить основой для создания новых типов конечных элементов, имеющих более высокие функциональные свойства в плане описания и охвата расчетных схем реальных многослойных оболочечных элементов конструкций. Разработанные в диссертационной работе вычислительные методы и реализующие их алгоритмы могут быть использованы в качестве алгоритмической и программной основы для разработки альтернативных, основанным на конечно-элементном подходе, программных комплексов или использоваться для решения вопросов оценки точности, практической сходимости и пределов применимости вновь разрабатываемых вычислительных процедур. Полученные с помощью разработанного в рамках работы над диссертацией программного обеспечения численные решения могут служить в качестве эталонных решений как на этапе тестирования новых программных комплексов, так и при решении различных задач для реальных элементов конструкций.

В этой связи разработка уточненных математических моделей механики деформирования и устойчивости стержневых и оболочечных элементов, составленных из них конструкций, разработка высокоточных вычислительных методов и реализующих их программных комплексов является актуальной задачей.

Степень разработанности темы исследования. Использование в современных изделиях авиационной техники, судостроения, других отраслей машиностроения высокомодульных и высокопрочных композиционных материалов, сталей и сплавов с повышенными физико-механическими и прочностными характеристиками привело к широкому распространению тонкостенных конструкций, построенных по моноблочным конструктивносиловым схемам. В отличие от традиционных конструкций, конструктивно-силовые схемы которых содержат элементы с явно выраженными «направлениями» силового набора и воспринимающими «свои» части нагрузки, моноблочные конструкции воспринимают нагрузку как «единое целое», что обеспечивает их явное весовое превосходство. Выделенные элементы таких конструкций находятся, преимущественно, в сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС).

Широкое применение в композитных тонкостенных конструкциях находят трехслойные элементы, использование которых обеспечивает дополнительную весовую отдачу, технологичность и снижение общей себестоимости конструкции. Следует особо отметить, что принятый универсализм трехслойных конструкций (обеспеченный современными конструкционными материалами) приводит к появлению в них большого числа конструктивных нерегулярностей: закладных деталей, местных усилений, усложнений структуры пакета слоев, зон резких изменений геометрических параметров и т.д. Такое положение приводит к необходимости усложнения разрабатываемых математических моделей и, прежде всего, в плане учета в них произвольности геометрии слоев элемента конструкции. Естественным образом оценка несущей способности тонкостенных конструкций должна включать и обязательный расчет на устойчивость их равновесного состояния, т.к. наиболее часто причинами разрушения или нарушения работоспособности рассматриваемых конструкций является именно потеря устойчивости всей конструкции или части ее элементов.

Начавшееся на рубеже пятидесятых годов прошлого века широкое использование трехслойных и многослойных конструкций из композиционных материалов потребовало проведение интенсивных исследований в области их механического поведения, что привело к созданию в механике деформируемого твердого тела отдельного направления, связанного с моделированием механики деформирования многослойных пластин и оболочек. Основным направлением развития здесь стало обобщение ранее разработанных математических моделей для однослойных, а позднее и трехслойных пластин и оболочек на более широкие классы исследуемых объектов – многослойные оболочки, структура пакета слоев которых может быть самой разнообразной. Следует отметить значительный вклад отечественных ученых в развитие теории трехслойных и многослойных конструкций и, прежде всего, фундаментальные работы А.Я.Александрова, В.В.Болотина, Э.И.Григолюка, В.И.Королева, Л.М.Куршина, А.П.Прусакова, П.П.Чулкова, а также работы ученых Казанской школы механики – Х.М.Муштари, Н.К.Галимова, В.Н.Паймушина, А.В.Саченкова, И.Г.Терегулова и других.

Многовариантность математических моделей, основанных на методе гипотез и разработанных для описания механики трехслойных пластин и оболочек, послужила причиной появления широкого разнообразия моделей и разрешающих уравнений для многослойных пластин и оболочек. Точность и пределы применимости этих моделей, как правило, определяются принятыми системами базовых гипотез и допущений. Э.И.Григолюк и Ф.А.Коган разделили подходы к построению математических моделей многослойных пластин и оболочек на два направления. К первому направлению они отнесли непрерывно-структурные математические модели, основанные на привлечении единых гипотез для всего пакета слоев оболочки. В этом случае порядок системы уравнений не зависит от числа слоев. Ко второму направлению они отнесли дискретно-структурные математические модели, предполагающие послойное принятие систем гипотез, при этом порядок системы уравнений уже определяется количеством слоев в пакете. Особое место дискретно-структурные модели занимают в задачах устойчивости, которые составляют отдельное направление исследований и связаны с определением критических нагрузок и форм потери устойчивости (ФПУ) элементов тонкостенных конструкций. В основополагающих работах В.Н.Паймушина рассматриваются современное состояние и пути развития теории устойчивости трехслойных пластин и оболочек, анализируются уравнения и особенности построения различных математических моделей, исследуется необходимость учета тех или иных параметров докритического НДС. На основе полученных результатов введена наиболее полная в настоящее время классификация ФПУ трехслойных оболочек. В ней к ранее известным классическим синфазным и антифазным ФПУ добавлены выявленные: смешанная ФПУ, сдвиговая ФПУ в тангенциальных направлениях, смешанные изгибные и изгибно-сдвиговые ФПУ. В своих работах В.Н.Паймушин анализирует все аспекты реализации той или иной неклассической ФПУ в конструкции и отмечает необходимость проведения дальнейших исследований в этом направлении. Здесь же определяются требования к дискретно-структурным моделям механики деформирования трехслойных и многослойных пластин и оболочек, позволяющим корректно описывать механизмы их потери устойчивости и выявлять все возможные классические и неклассические ФПУ.

При построении нелинейных уравнений моделей устойчивости, как правило, используют введенные В.В. Новожиловым нелинейные кинематические соотношения, принимаемые ранее как абсолютно точные. Необходимость в их ревизии возникла на основании результатов исследований, проведенных В.Н.Паймушиным в соавторстве с В.И.Шалашилиным, где рассматривалась проблема появления ложных точек бифуркации при решении ряда задач устойчивости, имеющих в основе соотношения В.В.Болотина. Проведенный анализ нелинейных кинематических соотношений позволил определить абсолютно корректные, позволяющие выявлять только физически реализующиеся ФПУ соотношения, названные авторами «непротиворечивым вариантом кинематических соотношений в квадратичном приближении», а теории устойчивости, построенные на базе таких соотношений, получили название «непротиворечивых». Проведенные исследования выявили насущную необходимость ревизии всех ранее полученных результатов для задач устойчивости упругих тел (стержней, оболочек, трёхслойных тонкостенных конструкций) с целью выявления и исследования реализации их неклассических ФПУ по непротиворечивым моделям.

Исследования, проведенные в области механики статического деформирования и устойчивости многослойных пластин и оболочек, позволили к настоящему времени решить многие важные проблемы как в области создания математических моделей, так и методов расчета конструкций на их основе. Однако эти исследования, по существу, касаются только многослойных пластин и оболочек, имеющих канонические очертание контура и форму поверхностей раздела слоев. Как правило, они однозначно допускают аналитическую параметризацию слоев. Совершенно ясно, что такие оболочки не исчерпывают всего многообразия элементов многослойных оболочечных конструкций. Использование в технике тонкостенных конструкций, расчетные схемы которых можно трактовать, как сложные структуры, составленные из многослойных оболочек сложной геометрии (обладающие сложной пространственной формой и неканоническим очертанием контура), выводит на первый план геометрическую проблему построения согласованной параметризации областей на поверхностях приведения каждого слоя и поверхностях раздела слоев таких оболочечных подструктур относительно основной базовой поверхности. Цикл исследований, связанных с разработкой аналитических и численно - аналитических методов параметризации поверхности приведения оболочек сложной геометрии, выполнен в работах В.Н.Паймушиным. На их основе созданы методы и программные комплексы для решения различных задач механики деформирования оболочечных конструкций сложной геометрии, в том числе и многослойных. Конструктивные алгоритмы согласованной параметризации многослойных оболочек со слоями сложной геометрии впервые были предложены и реализованы И.Х.Саитовым.

Анализ существующих математических моделей механики деформирования многослойных оболочек показывает, что в настоящее время лишь некоторые из них способны с достаточной степенью полноты удовлетворить совокупности требований прочностного анализа сложных тонкостенных конструкций и обеспечить в рамках единого методологического подхода универсальность при выборе расчетных схем для тонкостенных элементов, требуемую степень детализации реальной структуры конструкции в расчетной модели, исследовать все физически реализуемые ФПУ, обеспечить возможность последовательного уточнения расчетной схемы в рамках единой математической модели. В соответствии с этим **целью диссертационной работы** является разработка нового, удовлетворяющего представленным требованиям подхода к моделированию процессов статического деформирования и устойчивости как отдельных стержневых и оболочечных элементов, так и составленных из них пространственных конструкций и связанного с созданием новых функциональных математических моделей высокоточных численных методов и реализующих их комплексов программ, основанных на эффективных алгоритмах построения дискретных аналогов математической модели.

Достижение поставленной цели потребовало решение следующих задач:

1. Разработка нового подхода математического моделирования статического деформирования и устойчивости сложных составных оболочечно-стержневых структур, включающего:
- решение проблемы, связанной с требуемым геометрическим описанием многослойного континуума оболочки сложной геометрии при формировании математических моделей ее деформирования,
- решение проблемы определения адекватности описания математической моделью реального класса многослойных оболочек сложной геометрии с точки зрения требуемого учета ее геометрических параметров и их изменяемости,
- решение проблемы построения «обозримых» соотношений дискретно-структурных математических моделей механики многослойных оболочек со слоями сложной геометрии, наделенных индивидуальной метрикой,
- разработку новой нелинейной дискретно-структурной комбинированной модели многослойных оболочек со слоями сложной геометрии как универсальной модели описания оболочечных подструктур в расчетных схемах сложных оболочечно-стержневых конструкций,
- разработку конструктивных алгоритмов учета ограничений для глобальных несвободных вариационных задач статики и устойчивости составных конструкций с целью создания легко реализуемой процедуры получения полной замкнутой системы разрешающих соотношений математической модели,
- разработку методов определения достоверных значений физико-механических и прочностных характеристик параметров, используемых в математических моделях;

2. Разработка высокоточных численных методов и эффективных алгоритмов построения соответствующих дискретных аналогов соотношений математических моделей;
3. Проведение комплексного численного исследования по выявлению и изучению достоверных ФПУ по непротиворечивым математическим моделям для выделенных стержневых и оболочечных подструктур и составных из них конструкций в целом для подтверждения эффективности разработанных методов.

Научная новизна работы:

1. *Разработан концептуальный подход моделирования* статического деформирования и устойчивости топологически сложных составных оболочечно-стержневых конструкций, включающий:
- *новую методологию формирования математических моделей* механики деформирования многослойных оболочек, использующую разработанную систему априорных оценок, отражающих реальную геометрию многослойного континуума оболочки, использование которой позволяет определять требуемую степень учета изменения метрики в уравнениях, проводить оценку слагаемых в разрешающих соотношениях, отвечающих за изменяемость геометрических параметров в тангенциальных направлениях и минимизировать сложность решения задачи согласованной параметризации многослойной оболочки, имеющей слои сложной геометрии, наделенные индивидуальной метрикой,
- *новую классификацию* математических моделей – классификацию моделей многослойных оболочек по геометрическим параметрам, характеризующим относительную толщину слоев пакета оболочки и их изменяемость в тангенциальных направлениях и позволяющую определять место каждого из вариантов математической модели по отношению к адекватно описываемому этой моделью класса конструкций,
- *формирование геометрической модели* многослойной оболочки как составной части математических моделей механики деформирования оболочек, включающую совокупность основанных на положениях теории множеств и теории гладких дифференциально-

геометрических структур, базовых понятий и определений с наложенными на них ограничениями, обеспечивающих требуемое геометрическое описание реального многослойного оболочечного континуума в уравнениях математической модели,
- *методологию* записи и преобразований соотношений математических моделей механики многослойных оболочек, представляющую развитие аппарата бескомпонентных тензорных преобразований, на класс геометрических объектов с периодической слоистой структурой, слои которой наделены индивидуальной метрикой,
- *новую* нелинейную комбинированную дискретно-структурную *математическую модель* многослойных оболочек со слоями сложной геометрии и ее использование в качестве универсальной математической модели для оболочечных подструктур сложных составных оболочечно-стержневых конструкций в задачах статического деформирования и устойчивости;
- *комплексную процедуру* учета ограничений (кинематических связей стержневых и оболочечных подструктур) и обеспечивающую формирование глобальной эквивалентной свободной вариационной задачи с получением полной замкнутой системы разрешающих соотношений математической модели статического деформирования и устойчивости составных оболочечно-стержневых конструкций,
- *новый вычислительно-экспериментальный метод* определения достоверных значений физико-механических и прочностных характеристик трансверсально-мягких заполнителей,
- *алгоритм* оптимального численного определения достоверных значений параметра критической нагрузки и функций ФПУ многослойных оболочек со слоями переменной толщины;

2. *Разработана* уточненная нелинейная *математическая модель* среднего изгиба трехслойных сферических и цилиндрических оболочек со слоями переменной толщины, описывающая их механическое поведение при статическом термосиловом нагружении и полученная модифицированием соотношений комбинированной модели с определением реальных законов распределения температурных полей в поперечном направлении из послойного решения уравнений теплопроводности при удовлетворении условий на лицевых поверхностях и условий идеального теплового контакта между слоями оболочки;

3. *Разработан (с программной реализацией и проведенным численным исследованием достоверности и практической сходимости) новый эффективный численный метод* решения одномерных краевых задач статики и устойчивости оболочек типа С.П.Тимошенко, основанный на высокоточной лагранжевой конечно-элементной схеме с численным интегрированием и использующий векторно-матричное представление численных алгоритмов с возможностью их реализации на многопроцессорных платформах;

4. *Разработан (с программной реализацией и проведенным численным исследованием достоверности и практической сходимости) новый численный метод* решения двумерных краевых задач механики деформирования и устойчивости оболочек типа С.П.Тимошенко, основанный на использовании специальных конечно-элементных схем, учитывающих разномасштабность производных решения в различных направлениях и относящийся к классу метода конечных элементов гибридной схемы с численным интегрированием;

5. *Разработан (с программной реализацией и проведенным численным исследованием достоверности и практической сходимости) эффективный численный метод* решения уравнений механики деформирования и устойчивости стержневых и оболочечных элементов конструкций, основанный на высокоточном алгоритме модифицированного метода интегрирующих матриц и использующий векторно-матричное представление численных алгоритмов формирования дискретного аналога модели;

6. *Разработаны эффективные векторно-матричные алгоритмы* формирования дискретных матричных аналогов одномерных и двумерных соотношений математических моделей статического деформирования и устойчивости оболочек, используемые при программной реализации разработанных численных методов;

7. *Разработан алгоритм и реализующая его вычислительная процедура в виде комплекса программ* для численного исследования устойчивости цилиндрических оболочек по

статическому и динамическому критерию с целью выявления и исследования всех возможных (классических и неклассических) ФПУ при действии внешнего давления;

8. *Разработана и реализована вычислительная процедура* выявления и исследования в рамках непротиворечивой модели неклассических форм потери устойчивости составной конструкции в виде подкрепленной стержнем пластины с проведением комплекса численных исследований;

9. *Разработана и реализована вычислительная процедура* выявления и исследования в рамках непротиворечивой модели неклассических форм потери устойчивости цепной составной конструкции в виде соединенных через шпангоут цилиндрических оболочек с проведением комплекса численных исследований;

10. *Получены новые результаты численного исследования* задач статического деформирования и потери устойчивости для ряда составных конструкций.

Теоретическая значимость диссертационного исследования заключается в разработке нового подхода к комплексному решению проблемы оценки несущей способности сложных составных тонкостенных конструкций из композиционных материалов и связанного с разработкой новых фундаментальных основ математического моделирования топологически сложных оболочечно - стержневых конструкций, созданием уточненных математических моделей их механики деформирования и устойчивости, который может служить основой для разработки семейства конечных элементов для уточненного описания реальных слоистых элементов конструкций и обеспечивающих требуемую функциональность при решении задач прочностного анализа.

Практическая значимость диссертации заключается в разработке высокоточных численных методов, разработке методов определения достоверных значений физико-механических и прочностных параметров композитных материалов и разработке эффективных алгоритмов формирования дискретных аналогов уравнений моделей. Разработанные в рамках работы над диссертацией комплексы программ могут служить поверочным программным обеспечением, а полученные с их помощью решения могут быть использованы в качестве эталонных решений.

Результаты диссертационной работы внедрены в ПАО «МЗИК» (г.Екатеринбург), используются при проектировании новых образцов техники в АО «НЦВ Миль и Камов» (г.Москва) и Инжиниринговом центре «КАИ-Композит» КНИТУ-КАИ. Акты внедрения приведены в Приложении к диссертации.

Методы исследования, применяемые при решении поставленных задач, базируются на использовании методов классического математического и тензорного анализа, дифференциальной геометрии, вариационного исчисления, методах, основанных на положениях теории множеств и теории гладких дифференциально геометрических структур. При разработке численных процедур используются положения и методы разделов вычислительной математики. Математическое моделирование механики конструкций использует апробированные гипотезы, положения и модели разделов классической и нелинейной теории упругости, механики оболочек и стержней.

Основные положения, выносимые на защиту.

В соответствии с паспортом научной специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» на защиту выносятся следующие результаты:

1. Разработка *нового подхода математического моделирования* статического деформирования и устойчивости составных оболочечно-стержневых конструкций с многослойными оболочечными элементами сложной геометрии, включающий:

- *разработку новой методологии формирования математических моделей* механики деформирования многослойных оболочек, базирующегося на использовании разработанной системы априорных оценок, отражающих реальную геометрию многослойного континуума оболочки, использование которой позволяет определить требуемую степень учета изменения метрики в соотношениях, позволяет проводить оценки слагаемых с производными геометрических параметров в разрешающих соотношениях, минимизирует сложность решения задачи согласованной параметризации континуума многослойной оболочки со слоями сложной геометрии, наделенных индивидуальной метрикой,

- *разработку новой* классификации математических моделей – классификации математических моделей многослойных оболочек по геометрическим параметрам, характеризующим относительную толщину слоев оболочки и их изменяемость в тангенциальных направлениях, позволяющей определять соответствие каждого варианта математической модели адекватно описываемому этой моделью классу реальных оболочечных конструкций,
- *разработку геометрической модели* многослойной оболочки как составной части математических моделей механики деформирования оболочек, включающую, описанную с привлечением положений теории множеств и теории гладких дифференциально-геометрических структур, совокупность базовых понятий и определений с наложенными на них ограничениями, которая позволяет естественным путем интегрировать реальную геометрию многослойного оболочечного континуума в соотношения математической модели,
- *развитие математического аппарата* бескомпонентных тензорных преобразований на класс «оболочечных» геометрических объектов сложной геометрии с периодической слоистой структурой, слои которой наделены индивидуальной метрикой,
- *разработку для моделирования* механики статического деформирования и устойчивости оболочечных подструктур сложных конструкций новой нелинейной комбинированной дискретно-структурной математической модели многослойных оболочек со слоями сложной геометрии, функциональные возможности которой позволяют рассматривать ее в качестве универсальной математической модели для широкого класса расчетных схем многослойных оболочечных элементов в составе тонкостенных конструкций,
- *разработку* комплексной процедуры учета кинематических связей стержневых и оболочечных подструктур (учет ограничений вариационной задачи посредством их общего решения и использования метода неопределенных множителей Лагранжа) составной конструкции, доставляющую конструктивный алгоритм сведения глобальной несвободной вариационной задачи к эквивалентной свободной с получением полной замкнутой системы разрешающих соотношений математической модели статического деформирования и устойчивости составной оболочечно-стержневой конструкции,
- *разработку вычислительно-экспериментального метода,* включающего проведение специальных натурных экспериментов для разработанных тест-образцов и обеспечивающего определение достоверных значений физико-механических и прочностных характеристик трансверсально-мягких заполнителей,
- *разработку и реализацию алгоритма оптимального* численного определения достоверных значений параметра критической нагрузки и функций формы потери устойчивости многослойных оболочек со слоями переменной толщины;

2. *Новая* уточненная нелинейная *математическая модель* среднего изгиба трехслойных сферических и цилиндрических оболочек со слоями переменной толщины, описывающая статическое деформирование оболочек указанных классов при их термосиловом нагружении, полученная модифицированием соотношений комбинированной модели и включающая определение реальных послойных законов распределения температурных полей в поперечном направлении из решения уравнений теплопроводности;

3. *Новый высокоточный численный метод (его программная реализация, оценка практической сходимости и достоверности)* решения одномерных краевых задач статики и устойчивости оболочек типа С.П.Тимошенко, основанный на высокоточной лагранжевой конечно-элементной схеме с численным интегрированием и использующий векторно-матричное представление численных алгоритмов с возможностью их реализации на многопроцессорных платформах;

4. *Новый эффективный численный метод (его программная реализация, оценка практической сходимости и достоверности)* решения двумерных краевых задач статики оболочек типа С.П.Тимошенко, основанный на использовании специальных конечно-

элементных схем, учитывающих разномасштабность производных решения в различных направлениях и относящийся к классу метода конечных элементов гибридной схемы с численным интегрированием;

5. *Новый высокоточный численный метод (его программная реализация, оценка практической сходимости и достоверности)* решения одномерных задач механики деформирования и устойчивости стержневых и оболочечных элементов конструкций, основанный на алгоритмах модифицированного метода интегрирующих матриц и использующий эффективные векторно-матричные алгоритмы формирования дискретных аналогов уравнений;

6. *Эффективные векторно-матричные алгоритмы* формирования дискретных матричных аналогов одномерных и двумерных соотношений математических моделей статического деформирования и устойчивости элементов конструкций, используемые в разработанных вычислительных процедурах и обеспечивающие возможность многопроцессорной реализации, минимизацию трудоемкости и упрощенный контроль ошибок при разработке проблемно ориентированных комплексов программ;

7. *Новая вычислительная процедура* служащая для выявления и исследования по статическому и динамическому критерию устойчивости всех возможных ФПУ цилиндрических оболочек при действии внешнего давления;

8. *Новая высокоточная вычислительная процедура* выявления и исследования в рамках непротиворечивой математической модели неклассических форм потери устойчивости составной конструкции в виде подкрепленной стержнем пластины;

9. *Новая высокоточная вычислительная процедура* выявления и исследования в рамках непротиворечивой математической модели неклассических форм потери устойчивости цепной составной конструкции в виде соединенных через шпангоут цилиндрических оболочек;

10. *Результаты комплексного численного исследования* статического деформирования и устойчивости ряда составных конструкций.

Соответствие темы диссертации требованиям паспорта специальностей ВАК. Результаты диссертационного исследования соответствуют областям исследований 1, 2, 4, 5 и 7 паспорта научной специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» Высшей аттестационной комиссии при Министерстве науки и высшего образования РФ.

Достоверность и обоснованность. Полученные при выполнении диссертационной работы теоретические и практические результаты и выводы обосновываются использованием апробированных научных положений, имеющих в своей основе положения классических разделов математики, дифференциальной геометрии, вычислительной математики и механики деформированного твердого тела. Для всех представленных в работе новых численных методов и процедур проведены и представлены численные исследования их достоверности и практической сходимости. Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается их обсуждением на научных конференциях и форумах, сравнением с известными результатами теоретических, численных и экспериментальных исследований, практическим использованием вычислительных процедур при выполнении работ по разработке новых образцов техники и технологий их изготовления.

Диссертационная работа выполнялась:

– в рамках реализации проектов федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы:

1. «Нелинейные проблемы механики деформируемого твердого тела с приложениями к задачам аэроупругости, устойчивости и разрушения элементов конструкций» (шифр «2009-1.1-112-049-024»),

2. «Разработка теоретико-экспериментального метода исследования затухающих колебаний с учетом внутреннего и аэродинамического внешнего демпфирования и исследование задач о прохождении звуковой волны сквозь однослойные и трехслойные панели с созданием методик расчета параметров шумопоглощения» (шифр « 2012-1.2.1-12-000-1002-030»);

– выполнении работ по проектам, финансируемых Российским фондом фундаментальных исследований (1998-2014 г.г., проекты № 00-01-00106, №03-01-00535, №06-01-00443, №09-01-00323, №09-08-00431, №12-01-00279, №12-08-00392);
– выполнении научно-исследовательских работ по Плану приоритетных фундаментальных и прикладных исследований Академия наук Республики Татарстан в 2000-2010 гг.

Луканкину С.А. в составе коллектива авторов за работу «Создание перспективных авиационных конструкций из композиционных материалов и разработка серийных технологических процессов их изготовления на производственной площадке Инжинирингового центра «КАИ-Композит» присуждена премия имени Х.М.Муштари Академии наук Республики Татарстан в области математики, механики и технических наук за 2015 г.

Внедрение и реализация результатов работы. Основные научные результаты выполненных исследований использованы при выполнении ряда научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ:

— комплексных проектов по реализации постановления Правительства Российской Федерации № 218:

1. «Разработка модернизированного вертолета АНСАТ с гидромеханической системой управления. Модернизация производства ОАО “Казанский вертолетный завод» под выпуск модернизированного вертолета АНСАТ» (шифр «2010-218-01-190») (ПАО КВЗ, 2010-2012 г.г.);
2. «Создание перспективной модульной авариестойкой топливной системы многоцелевого вертолета промежуточного класса, как элемента комплексной системы обеспечения выживаемости экипажа и пассажиров. Модернизация производства ОАО «Кумертаусское авиационное производственное предприятие», обеспечивающего выпуск авариестойкой модульной топливной системы» (шифр «2013-218-04-200») (АО «Вертолеты России», 2013-2014 г.г.);
3. «Разработка и изготовление опытных образцов композитного планера беспилотного летательного аппарата большой продолжительности полета, осуществляющего функции мониторинга протяжённых инфраструктурных объектов. Модернизация производства ОАО НПО «ОКБ им.М.П.Симонова» под выпуск крупногабаритных элементов авиационных конструкций с высокой весовой отдачей из композиционных материалов» (шифр «2014-218-05-092») (ОАО НПО «ОКБ им.М.П.Симонова», 2014-2016 г.г.);
4. «Разработка технологий конструирования и организация высокотехнологичного производства семейства модульных коммунальных машин и подъемно-транспортного оборудования с широким использованием композиционных материалов» (шифр «2017-218-09-015») (ПАО «МЗиК», 2017-2019 г.г.).

— работ по выполнению составных частей НИР и ОКР:

1. «Разработка и запуск в серийное производство композитного моноблочного крыла и композитного оперения воздушной мишени «Дань М» (АО «ОКБ им. М.П.Симонова», 2013-2014 г.г.);
2. «Разработка и изготовление опытного образца элементов фонаря кабины экипажа вертолета Ка-226Т (исполнение 226.54)» (АО «Камов», 2018-2020 г.г.);
3. «Разработка и изготовление опытного образца мотогондолы вертолета Ка-226Т (исполнение 226.54)» (АО «Камов», 2018-2020 г.г.).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 24 международных симпозиумах и конференциях, на 4 всероссийских и региональных научных конференциях, среди которых можно выделить:

1. Восьмой всероссийский съезд по теоретической и прикладной механики. (Пермь, 2001 г.);
2. XVI, XVIII, XIX Международные конференции по теории оболочек и пластин (1994-1999 г.г.);
3. VII, VIII, IX, XI, XIII, XIV, XV, XVII, XVIII, XIX, XXI, XXVI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2001-2020 г.г.);
4. International Conference. Fundamental Research and aerospace science. (Zhukovsky, 1994);

5. Международной конференции BEM/FEM (Санкт-Петербург, 2000 г.).

Публикации. По проблеме диссертационного исследования опубликованы 66 печатных работ, в том числе 24 статьи в журналах из «Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук» и приравниваемых к ним, из них 15 статей, индексируемых в базах Web of Science и Scopus. Получены 3 патента на изобретение и полезную модель и 7 свидетельств государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертационной работы: разработка математических моделей, алгоритмов, численных методов и реализующих их проблемно-ориентированных программных комплексов, результаты численных и натурных экспериментов автором получены лично или при его непосредственном участии на всех основных этапах проведения работ.

Диссертационная работа в основной ее части является продолжением и развитием идей, методов и подходов, предложенных и разработанных научным консультантом д.ф.-м.н., профессором Паймушиным В.Н.

Модифицированный метод интегрирующих матриц разработан профессором, д.ф.-м.н. Даутовым Р.З. Идея и обоснование гибридной конечно-элементной схемы с численным интегрированием предложена профессором, д.ф.-м.н. Карчевским М.М. Метод решения двумерных краевых задач статики оболочек типа С.П.Тимошенко основан на подходах, предложенных Рахманкуловым Н.У. и разработан с ним совместно.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, восьми глав и заключения. В ней содержится 419 страниц печатного текста, приводится 137 рисунков и 40 таблиц, а также приложение объемом 6 страниц. Список литературы содержит 238 наименований на 20 страницах текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, дан обзор современного состояния проблемы, характеризующий степень разработанности диссертационного исследования. Определены научно-технические задачи, которые рассматриваются в диссертации. Представлены объект, предмет и цели диссертационного исследования. Формулируется научная новизна поднятых в диссертации вопросов и их теоретическая и практическая значимость. Представлены основные положения, выносимые на защиту в соответствии с паспортом научной специальности. Приведено обоснование достоверности результатов работы. Представлены сведения по реализации результатов диссертационной работы, ее апробации на научных симпозиумах и конференциях. Указано число публикаций и их характер, отражено личное участие автора в получении результатов работы.

В первой главе, посвященной решению геометрических вопросов, сопровождающих разработку математических моделей механики деформирования и устойчивости многослойных оболочек, сформирована геометрическая модель оболочки сложной геометрии, представляющая собой совокупность понятий и определений, использующих описание с привлечением положений теории гладких дифференциально-геометрических структур и теории множеств и позволяющей естественным путем интегрировать геометрию многослойного оболочечного континуума в соотношения математической модели, придавая им ясный смысл и определяя структуру и форму реально описываемого этой моделью геометрического объекта.

Введенные положения геометрической модели оболочки позволяют использовать при построении соотношений математических моделей механики оболочек аппарат бескомпонентного тензорного анализа, получивший в работе развитие на класс физических объектов, наделенных периодической структурой из слоев сложной геометрии с индивидуальными параметрами внутренней геометрии. Такой подход позволяет избежать основного недостатка "компонентной" формы представления тензорных величин, в которой тензоры отождествляются с системами их образов при координатных представлениях, проявляющейся в излишней громоздкости индексов при получении довольно сложных соотношений дискретно-структурных моделей. Принципиальным моментом использования «бескомпонентного» аппарата является инвариантная, относительно выбора системы координат, форма соотношений, предоставляющая им ясный физический смысл.

Требуемая для численной реализации соотношений математической модели компонентная форма представления соотношений легко достигается на последнем этапе построения посредством координатного изоморфизма используемых линейных пространств.

В соответствии с вышеизложенным далее будем обозначать через $T^pW = \bigcup_{M \in W} T_M^p W$ тензорное (при $p=1$ - касательное) расслоение над открытым ограниченным гладким многообразием (континуумом оболочки) W, где гладкие отображения $s: W \to T^pW$ (такие, что $\forall M \in W$ следует, что $s(M) = T_M^p W$), являются тензорными (при $p=1$ - векторными) полями на W, а $T_M^p W$ - тензорное пространство в произвольной точке $M \in W$. При $p=1$, через $T_M W$ обозначим евклидово векторное пространство касательных векторов в точке $M \in W$, которое канонически отождествляется с векторным пространством $V^3\big|_W \subset V^3$, ассоциированным с точечным подпространством $W \in E_3$, имеющим полюс в точке $M \in W$.

Евклидова структура векторного пространства $T_M W$ (определяющаяся заданием на элементах из $T_M W$ симметричной билинейной формы, называемой скалярным произведением и обозначаемой в дальнейшем символом " $\cdot$ ") позволяет отождествлять пространство $T_M W$ и сопряженное к нему пространство $T_M^* W$ линейных форм, определенных на векторах из $T_M W$. Такое отождествление приводит к существенному упрощению структуры тензорного произведения пространств $T_M W$ и $T_M^* W$ и позволяет считать $T_M^P W$ линейным пространством тензоров р-го ранга, опуская различия между ко- и контравариантными тензорами. Так, обозначая через $\otimes$ операцию тензорного произведения векторных пространств, будем записать $T_M^p W = \overset{p}{\otimes} T_M W$.

Будем считать поверхность $\sigma \subset E_3$ поверхностью приведения для любой оболочки $\bar{W}$ с границей ∂W. Тогда, без ограничения общности, полагаем, что любое векторное пространство $T_M W$ в произвольной точке $M \in \sigma$ представляется в виде разложения:

$$T_M W = T_M \sigma \oplus T_M N \quad ,$$

где $T_M \sigma$ - евклидово векторное пространство касательных (плоских) векторов к поверхности σ в точке М, а $T_M N$ - евклидово векторное пространство (ортогональное дополнение к $T_M \sigma$) касательных векторов к N (одномерному гладкому многообразию с индуцированной гладкостью), и $N \cap W$ представляет собой множество точек оболочки, образующих всевозможные нормали $\vec{m}$ к σ. На компонентном уровне это представление определяет возможное разложение произвольного геометрического вектора на нормальную и касательную части.

Совершенно ясно, что результатом тензорного произведения р-экземпляров векторных пространств $T_M \sigma$ является линейное тензорное пространство $T_M^p \sigma \subset T_M^p W$, элементы которого интерпретируются как "плоские" тензоры. Такие объекты можно рассматривать как тензоры, для которых нормаль является главной осью с нулевым собственным значением. Тогда различные скалярные произведения указанных плоских тензоров с тензорами из пространства $T_M^p N = \overset{p}{\otimes} T_M N$ приводят к нулевому результату (нулю, нулевому вектору или нулевому тензору соответствующего ранга).

Далее будем использовать символические векторные поля для записи дифференциальных операций – набла-оператор Гамильтона $\tilde{\nabla}=\vec{R}^{\alpha}\partial_{\alpha,\ \alpha\in[\overline{1,3}]}$ и его поверхностный аналог $\nabla=\vec{r}^{\,i}\partial_{i,i\in\ [\overline{1,2}]}$, которые связаны известным соотношением:

$$\tilde{\nabla}=\hat{\mathrm{Z}}^{-1}\cdot\nabla+\vec{m}\partial_{z}\ ,$$

где через $\hat{\mathrm{Z}}=\nabla\otimes\vec{R}=(\hat{\mathrm{a}}-z\,\hat{\mathrm{b}})\in T_{M}^{2}\boldsymbol{\sigma}$ обозначен геометрический тензор сдвига, а тензоры $\hat{a}=\nabla\otimes\vec{r}\in T_{M}^{2}\boldsymbol{\sigma}$ и $\hat{b}=-\nabla\otimes\vec{m}\in T_{M}^{2}\boldsymbol{\sigma}$ обозначают, соответственно, первый и второй метрические тензоры поверхности приведения σ.

Введенные объекты, отражающие геометрический аспект математических моделей механики оболочек, являются исчерпывающими – представляют часть описания оболочки, как геометрического объекта, и появляются в соотношениях математической модели естественным образом.

Далее излагается построение новой классификации математических моделей (теорий) многослойных оболочек по геометрическим параметрам. Для этого использована идея метода нормальной фиктивной деформации поверхностей, разработанного В.Н.Паймушиным для построения конструктивных алгоритмов параметризации областей неканонической формы.

В соответствии с указанным подходом введем поверхность $\sigma_0\subset E_3$, как одну из поверхностей многослойной оболочки с известной геометрией. С практической точки зрения в качестве σ_0 предпочтительно выбирать срединную поверхность одного из слоев оболочки. Рассмотрим взаимно - однозначное отображение требуемого класса гладкости поверхности $\sigma_0\subset E_3$ на поверхность $\sigma\subset E_3$, где σ будем считать совпадающей с одной из лицевых поверхностей рассматриваемого слоя. Определим указанное отображение векторным равенством

$$\vec{r}=\vec{r}_0+H\vec{m}_0\,, \qquad (1)$$

где $\vec{r}_0=\vec{r}_0(\alpha^i),\ (\vec{r}_0:\sigma_0\to V^3,\ \forall M\in\sigma_0\Rightarrow\vec{r}_0(M_0)=\overrightarrow{OM_0})$ - радиус вектор точек поверхности σ_0, параметризованной гауссовыми координатами (α^1,α^2); $\vec{m}_0=\vec{m}_0(\alpha^i),\ (\vec{m}_0:\sigma_0\to V^3)$ - единичный вектор нормали к σ_0; $\vec{r}=\vec{r}(\alpha^i),\ \ (\vec{r}\,:\sigma\ \to V^3,\ \forall M_0\in\sigma_0\Rightarrow\vec{r}\,(M_0)=M)$ - радиус вектор точек поверхности σ; $H=H(\alpha^i)$ - расстояние между некоторой точкой M_0 поверхности σ_0 и ее проекцией на σ (точкой M).

Будем рассматривать отображение $\sigma_0\to\sigma$ как процесс фиктивного деформирования поверхности σ_0.

Тогда величина $H:\sigma_0\to\sigma\wedge H:\partial\sigma_0\to\partial\sigma,\ \forall M_0\in\sigma_0\Rightarrow H(M_0)=M\in\sigma$ имеет смысл перемещения в направлении нормали $\vec{m}_0$ в каждой точке σ_0 при фиктивном деформировании поверхности σ_0. Будем называть функцию $H=H(\alpha^i)$ - функцией превышения поверхности σ над поверхностью σ_0.

Известно, что деформация поверхности полностью описывается соответствующим тензором (в данном случае фиктивной) деформации Коши-Грина, который характеризует изменение длин «материальных волокон» поверхности при ее деформировании (т. е. определяет изменение внутренней метрики деформирующейся поверхности) и тензора фиктивных изгибных деформаций поверхности, определяющего изменение кривизны деформирующейся поверхности. Использованный подход позволяет получить для указанных тензоров выражения, содержащие только геометрические параметры (и их производные) поверхности σ_0 (считая их заданными) и функции превышения с ее производными до второго порядка включительно.

Устанавливая для этих величин границы областей изменения, вычислим соответствующий этим ограничениям порядок значений тензоров фиктивной деформации по локальной тензорной норме, что позволит вынести суждение о величине фиктивной деформации, претерпеваемой поверхностью σ_0. Понятно, что при малых деформациях можно не учитывать различие в геометрических параметрах поверхностей σ_0 и σ, отождествляя тем самым их геометрию в математических моделях. При больших (конечных) деформациях σ_0 это, как известно, делать нельзя. Следует отметить, что большими деформациями поверхности σ_0 описывается геометрия большинства реальных слоистых элементов конструкций, при этом величины тензоров, определяющих изменение внутренней геометрии поверхности и изменение ее кривизны при ее фиктивной деформации, могут иметь существенно разный порядок.

Для использования в описании процесса фиктивного деформирования поверхности σ_0 теории деформирования трехмерных тел, воспользуемся подходом, заключающимся в продолжение отображения (1) в трехмерный континуум, примыкающий к σ_0. Тогда тензор фиктивных деформации Коши - Грина поверхности σ_0, отвечающий отображению (1), может быть вычислен по формуле:

$$2\hat{\Lambda}_0 = \hat{G}_0 - \hat{a}_0 = -2H\hat{b}_0 + H^2\hat{b}_0 \cdot \hat{b}_0 + \nabla_0 H \otimes \nabla_0 H .$$

Тензор фиктивной деформации $\hat{K}_0 \in T_M^2(\sigma_0)$, описывающий изменение кривизны деформирующейся поверхности определим в виде:

$$\hat{K}_0 = \hat{B}_0 - \hat{b}_0 ,$$

где $\hat{B}_0 \in T_M^2(\sigma_0)$ - аналог тензора меры деформации Коши - Грина вычисляется в виде

$$\hat{B}_0 = [\nabla_0 \otimes (\nabla_0 \otimes \vec{r})] \cdot \vec{m} . \tag{2}$$

Можно показать, что (2) может быть преобразовано в равенство:

$$\hat{B}_0 = \frac{1}{\sqrt{\overset{(2)}{I}_2(\hat{G}_0)}} \{\hat{Q}_0 + \hat{D}_0 + H[\overset{(2)}{I}_1(\hat{b}_0)(\hat{Q}_0 - \hat{D}_0) + \hat{L}_0 + (\nabla_0 H \otimes \hat{b}_0 - \hat{\eta}_0) \cdot \hat{b}_0 \cdot \nabla_0 H] + H^2[\overset{(2)}{I}_2(\hat{b}_0)(\hat{Q}_0 -$$

$$- \overset{(2)}{I}_1(\hat{b}_0)\hat{L}_0 + (\nabla_0 \otimes \hat{b}_0) \cdot \hat{b}_0 \cdot \nabla_0 H]\}.$$

Здесь введены тензоры:

$$\hat{Q}_0 = \hat{b}_0 + \nabla_0 \otimes \nabla_0 H,\ \hat{D}_0 = (\nabla_0 H \otimes \hat{b}_0 - \hat{\eta}_0) \cdot \nabla_0 H,\ \hat{L}_0 = (\nabla_0 \otimes \hat{b}_0) \cdot \nabla_0 H, \quad \hat{Q}_0, \hat{D}_0, \hat{L}_0 \in T_M^2(\sigma_0)$$

и ($\overset{(2)}{I}_1(...)$, $\overset{(2)}{I}_2(...)$ -обозначение для 1-го и 2-го инвариантов «плоских» тензоров)

$$\overset{(2)}{I}_2(\hat{G}_0) = (1 + \nabla_0 H \otimes \nabla_0 H) - 2H[\overset{(2)}{I}_1(\hat{b}_0)(1 + \nabla_0 H \cdot \nabla_0 H) - \nabla_0 H \cdot \hat{b}_0^2 \cdot \nabla_0 H] +$$

$$+ H^2[2\overset{(2)}{I}_2(\hat{b}_0) + \overset{(2)}{I}{}_1^2(\hat{b}_0)(1 + \nabla_0 H \otimes \nabla_0 H) - \nabla_0 H \cdot \hat{b}_0^2 \cdot \nabla_0 H] - 2H^3 \overset{(2)}{I}_1(\hat{b}_0)\overset{(2)}{I}_2(\hat{b}_0) + H^4 \overset{(2)}{I}{}_2^2(\hat{b}_0) .$$

Задавая интервалы значений геометрических параметров, соответствующих реальной геометрии оболочки и проводя оценки по локальной тензорной норме ($\forall \hat{c}_0 \in T_M^2(\sigma_0) \Rightarrow \|\hat{c}_0\|_{(2)} = \sqrt{\overset{(2)}{I}_2(\hat{c}_0 \cdot \hat{c}_0^T)}$) слагаемых в выражениях для тензоров $\hat{\Lambda}_0$ и $\hat{K}_0$, вычислим величины тензоров фиктивной деформации по указанной норме, отвечающих этим интервалам. При оценке слагаемых считаем, что выполняется условие $\|H^2\nabla_0 \otimes \hat{b}_0\|_{(2)} \le \varepsilon$, не накладывающее существенных ограничений на выбор поверхности приведения σ_0. В Таблице 1 представлены результаты проведенных оценок (здесь ε - некоторая малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей).

Таблица 1. Оценка геометрических параметров

<table>
<tr><th colspan="3">$\left\| H^2 \nabla_0 \otimes \hat{b}_0 \right\|_{(2)} \le \varepsilon$</th><th rowspan="2">$\left\| \hat{\Lambda}_0 \right\|_{(2)} \sim$</th><th rowspan="2">$\left\| H \hat{K}_0 \right\|_{(2)} \sim$</th><th rowspan="2">№ группы</th></tr>
<tr><th>$\left\| H \hat{b}_0 \right\|_{(2)} \sim$</th><th>$\left\| \nabla_0 H \right\|_{(2)} \sim$</th><th>$\left\| H \nabla_0 \otimes \nabla_0 H \right\|_{(2)} \sim$</th></tr>
<tr><td rowspan="6">ε
(тонкие оболочки)</td><td rowspan="2">ε</td><td>ε</td><td rowspan="4">ε</td><td>ε</td><td>I</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{\varepsilon}$</td><td rowspan="2">$\sqrt{\varepsilon}$</td><td rowspan="3">II</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{\varepsilon}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ε</td><td rowspan="2">ε</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">III</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{\varepsilon}$</td><td>$\sqrt{\varepsilon}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\sqrt{\varepsilon}$
(оболочки средней толщины)</td><td rowspan="2">ε</td><td>ε</td><td rowspan="4">$\sqrt{\varepsilon}$</td><td rowspan="6">$\sqrt{\varepsilon}$</td><td>IV</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{\varepsilon}$</td><td rowspan="3">V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{\varepsilon}$</td><td>ε</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{\varepsilon}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>ε</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">VI</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{\varepsilon}$</td></tr>
</table>

Анализ Таблицы 1 показывает, что абсолютное большинство математических моделей механики деформирования многослойных оболочек со слоями переменной толщины можно разделить на шесть групп, положив в основу этой классификации:

1) параметр $\left\| H \hat{b}_0 \right\|_{(2)}$, характеризующий относительную толщину слоя пакета оболочки (или относительную толщину многослойной оболочки в целом);

2) параметры $\left\| \nabla_0 H \right\|_{(2)}$ и $\left\| H \nabla_0 \otimes \nabla_0 H \right\|_{(2)}$, характеризующие изменяемость функций толщин слоев оболочки (или толщины оболочки в целом) в тангенциальных направлениях.

Из Таблицы 1 следует, что к I и IV группам рассматриваемой классификации относятся математические модели тонких многослойных оболочек и оболочек средней толщины соответственно с малыми значениями величины показателей изменяемости функций толщин слоев. Соответственно для теорий тонких многослойных оболочек из I группы отсутствует необходимость формулировки и решения геометрической задачи, связанной с построением согласованной параметризации слоев пакета оболочки. Для таких моделей допустимо геометрию всевозможных поверхностей, определяющих структуру пакета, отождествлять с геометрией срединной поверхности оболочки. Для моделей IV группы, как и для любой математической модели многослойных оболочек средней толщины, решение проблемы параметризации слоев остается актуальной задачей. В настоящее время модели этих групп являются наиболее разработанными и с ними связано основное число публикаций.

Ко II группе относятся математические модели тонких многослойных оболочек со средним значением показателя изменяемости функций толщин слоев. К рассматриваемой группе относятся, например, модели трехслойных оболочек с несущими слоями, срединные поверхности которых являются пологими относительно срединной поверхности заполнителя, а также многослойных оболочек со слоями, пологими относительно некоторой поверхности, принятой в качестве базы параметризации. В моделях, относящихся к этой группе, предполагается, что внутренняя геометрия поверхностей с заданной степенью точности отождествляется с внутренней геометрией поверхности приведения σ_0, однако в уравнениях при этом учитывается взаимный наклон векторов нормалей к данным поверхностям, что априори предполагает выполнение оценки $\left\|H\hat{K}_0\right\|_{(2)} \le \sqrt{\varepsilon}$. Для многослойных оболочек с параметрами $\left\|\nabla_0 H\right\|_{(2)} \sim \varepsilon$ и $\left\|H\nabla_0 \otimes \nabla_0 H\right\|_{(2)} \sim \varepsilon$ указанные различия в геометрии поверхностей σ_0 и σ можно не учитывать (т.е. полностью отождествлять эти поверхности), т.к. для них имеет место $\left\|H\hat{K}_0\right\|_{(2)} \sim \varepsilon$.

В III группу сведены математические модели тонких многослойных оболочек с большими показателями изменяемости функций толщин слоев. Геометрическая форма слоев таких оболочек требует полного описания при формулировке соответствующей задачи о согласованной параметризации слоев пакета оболочки.

Математические модели V и VI групп классификации являются расчетными схемами для большого числа реальных элементов конструкций, и, в частности, несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов, резервуаров для различного рода жидкостей и газов. Отметим, что V группу составляют модели оболочек средней толщины со средним значением показателя изменяемости функций толщин слоев, а в VI группу объединены теории указанных оболочек с большим показателем изменяемости функций толщин слоев. Число научных публикаций по вопросам математического моделирования таких оболочек не велико.

Использование построенной классификации проиллюстрировано на примере построения законов распределения трансверсальных напряжений в поперечном направлении в математической модели механики деформирования трансверсально-мягкого слоя. Так, для слоя средней толщины (модели IV, V, VI групп) закон распределения поперечно-касательных напряжений по поперечной координате определяется равенством

$$\sigma^z_{r3}(\alpha^i, z) = q_r(\alpha^i)\frac{[1-(2k_r + k_{\bar{r}})h]}{[1+(2k_r + k_{\bar{r}})z]}, \quad (r=1,2),$$

где введены обозначения для напряжений $\sigma^z_{r3}(\alpha^i, z=-h) = q_r(\alpha^i)$ и $k_r = k_r(\alpha^i)$, $(r=1,2)$ главные кривизны поверхности приведения. Для тонких многослойных оболочек (модели I, II, III групп) закон распределения этих напряжений с принятой степенью точности можно принять в виде $\sigma^z_{r3}(\alpha^i, z) = q_r(\alpha^i)$, $(r=1,2)$.

Для трехслойных (многослойных) оболочек средней толщины математические модели IV группы предполагают учет изменения компонент $\sigma^z_{33}(\alpha^i, z)$ вдоль z в заполнителе по закону

$$\sigma^z_{33} = \frac{(1-2Hh)}{(1+2Hz)}q_3 - \sum_{r=1}^{2}\frac{(z+h)}{A_r A_{\bar{r}}}\frac{(1-2Hh)}{[1+(2k_{\bar{r}} + k_r)z]}\partial_r(A_{\bar{r}} q_r),$$

тот же закон для моделей V группы запишется в виде

$$\sigma^z_{33} = \frac{(1-2Hh)}{(1+2Hz)}q_3 - \sum_{r=1}^{2}\left(\frac{(z+h)\partial_r(A_{\bar{r}} q_r)}{A_r A_{\bar{r}}} + \frac{q_r \partial_r h}{A_r}\right)\frac{(1-2Hh)}{[1+(2k_{\bar{r}} + k_r)z]},$$

а для математических моделей VI группы определяется равенством

$$\sigma^z_{33} = \frac{(1-2Hh)}{(1+2Hz)}q_3 - \sum_{r=1}^{2}\frac{(z+h)}{A_r A_{\bar{r}}}\frac{(1-2Hh)}{[1+(2k_{\bar{r}} + k_r)z]}\partial_r(A_{\bar{r}} q_r) + \frac{\partial_r h}{[1+(2k_{\bar{r}} + k_r)z]}\frac{q_r}{A_r}\big((1-2Hh) - (z+h)(k_r \rho_{z\bar{r}} + k_{\bar{r}}\rho_{zr}\big).$$

Здесь введены обозначения: $\sigma^z_{33}(\alpha^i, z=-h) = q_3(\alpha^i)$, $2H = k_1 + k_2$ Гауссова кривизна поверхности приведения заполнителя, $A_r = A_r(\alpha^i)$ параметры Ламе, $\rho_{zr} = (1+zk_r)$, $(r=1,2)$ - введенная функция.

Во **второй главе** описывается построение замкнутой системы соотношений нелинейной комбинированной дискретно-структурной математической модели статического деформирования и устойчивости многослойных оболочек со слоями сложной геометрии, которая допускает использование в качестве универсальной математической модели для широкого класса расчетных схем типовых оболочечных подструктур в составе сложных составных тонкостенных конструкциях из композиционных материалов и полностью удовлетворяет требованиям корректного описания механизмов потери устойчивости реальных многослойных оболочечных элементов конструкций.

Базовые гипотезы, допущения и математическая реализация комбинированной математической модели является дальнейшим логическим развитием основных положений, работ Э.И.Григолюка, А.П.Чулкова, В.Н.Паймушина, И.Х.Саитова на более широкий класс исследуемых объектов. В качестве последних здесь рассматриваются многослойные оболочки произвольной толщины, пакет которых состоит из слоев сложной геометрии. Все слои оболочки будем полагать тонкими, однако показатели изменяемости функций их толщин могут иметь и большую величину, вплоть до $\left\|\nabla_0 H\right\|_{(2)} \sim 1$.

В качестве физического объекта комбинированной математической модели многослойных оболочек принимается выделенный при декомпозиции составной конструкции многослойный оболочечный фрагмент, все функции которого, характеризующие внутреннюю геометрию, свойства и внешнее воздействие, полагаются гладкими. Континуум оболочечного фрагмента подразумевается образованным из произвольно чередующихся между собой в поперечном направлении (толщины) мягких слоев заполнителя и жестких несущих слоев. Механика деформирования жестких слоев оболочки описывается классической кинематической моделью Кирхгофа - Лява для случая среднего изгиба, или они рассматриваются, как безмоментные. Для моделирования заполнителей используются уравнения трехмерной теории упругости, упрощенные в рамках модели трансверсально - мягкого слоя. Такой подход позволяет пренебречь в уравнениях равновесия для заполнителей тангенциальной частью тензора напряжений и получить прямым интегрированием законы распределения в поперечном направлении векторов перемещения точек заполнителей и их основных параметров НДС.

Гладкие поверхности сопряжения слоев многослойного оболочечного фрагмента при самых общих допущениях на изменяемость геометрической формы ограниченного ими континуума могут задаваться естественным образом как границы сред с различными физико-механическими характеристиками, а для однородных массивных тел выбираться искусственно. В соответствии с терминологией механики оболочек такие слои здесь названы слоями сложной геометрии, каждый из которых представляет слой переменной толщины.

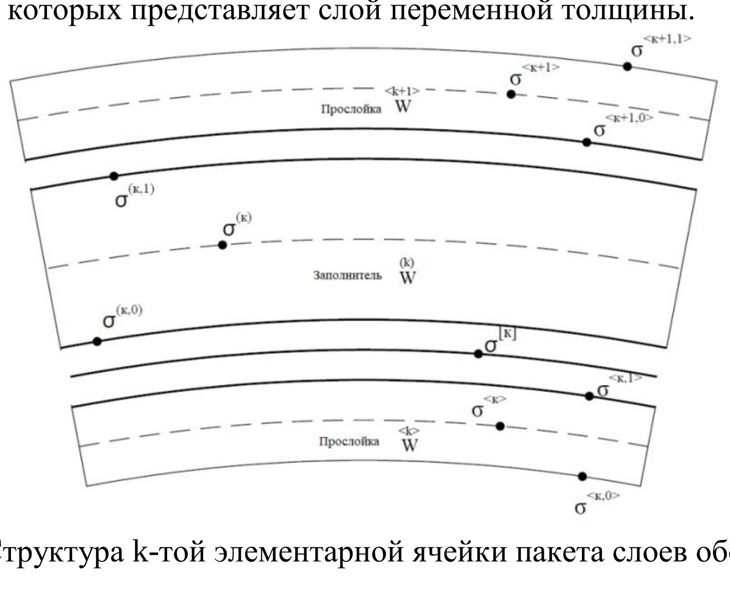


Рис. 1. Структура k-той элементарной ячейки пакета слоев оболочки.

При построении основных соотношений комбинированной математической модели с целью повышения ее алгоритмичности примем концепцию периодичности структуры пакета слоев многослойного оболочечного фрагмента (см. фрагмент пакета на Рис. 1). В соответствии с ней оболочечный фрагмент $\bar{W} \subset E_3$ трактуется в виде объекта $\Sigma = \left\{\Sigma_k\right\}_{k \in \mathrm{K}}$, состоящего из семейства характерных повторяющихся элементов $\Sigma_k = (\overset{(k)}{W}, \overset{[k]}{\bar{\sigma}}, \overset{<k>}{W}) \in \mathrm{E}_3 \times \mathrm{E}_3 \times \mathrm{E}_3$, $\forall k \in K$ и K - множество номеров элементов семейства. Элемент семейства Σ_k, т.е. тройку $(\overset{(k)}{W}, \overset{[k]}{\bar{\sigma}}, \overset{<k>}{W})$ будем называть k-той элементарной ячейкой многослойного оболочечного фрагмента. С геометрической точки зрения континуум k-той элементарная ячейка состоит из основного слоя заполнителя $\overset{(k)}{W} = pr_1\Sigma_k \subset E_3$, жесткого несущего слоя $\overset{<k>}{W} = pr_3\Sigma_k \subset E_3$, расположенного под основным слоем, и соответствующей поверхности сопряжения основного слоя и прослойки, обозначаемой $\overset{[k]}{\bar{\sigma}} = pr_2\Sigma_k \subset E_3$. Основой для такого разделения элементарной ячейки послужил тот факт, что механика деформирования слоев многослойной оболочки моделируется в рамках различных кинематических гипотез и при возможности произвольного исключения из состава ячейки любого слоя, охватывает практически все встречающиеся в расчетной практике математические модели многослойных оболочек. При построении уравнений модели будем учитывать различие в величинах геометрических параметров поверхностей, т.е. различать по геометрическим параметрам поверхности сопряжения несущего слоя и слоя заполнителя $\overset{[k]}{\sigma}$, поверхности приведения слоев заполнителя $\overset{(k)}{\sigma}$ и поверхности приведения несущих слоев $\overset{<k>}{\sigma}$. Выбор в слоях пакета оболочки поверхностей приведения, на которых определяются нормально связанные криволинейные системы гауссовых координат $(\alpha^i, z)_{i=\overline{1,2}}$, (здесь Z - поперечная координата), осуществляется по правилу: для несущих слоев такие поверхности могут быть выбраны произвольно, а для слоев заполнителя указанные поверхности определяются из соблюдения условия

$$\overset{(k,1)}{B}\ \overset{(k,0)}{B^{-1}} \approx 1 ,$$

где скалярные функции $\overset{(\ ,0)}{B}(\alpha^i)$ и $\overset{(\ ,1)}{B}(\alpha^i)$ вычисляются по правилу

$$\overset{(\ ,0)}{B} = \sqrt{\det(\overset{(\ ,0)}{a_{ij}})[\det(a_{ij})]^{-1}}(\vec{m}\cdot \overset{(\ ,0)}{\vec{m}}) \ , \ \overset{(\ ,1)}{B} = \sqrt{\det(\overset{(\ ,1)}{a_{ij}})[\det(a_{ij})]^{-1}}(\vec{m}\cdot \overset{(\ ,1)}{\vec{m}}) \ ; \ i, j = \overline{1,2}.$$

Здесь индексами (,0) и (,1) обозначены величины, определяемые на нижней и верхней лицевых поверхностях слоя заполнителя соответственно (индекс k опущен). Величины без индекса задаются на определяемой поверхности приведения (через a_{ij} обозначены ковариантные компоненты первого метрического тензора соответствующих поверхностей, а через $\vec{m}$, $\overset{(\ ,0)}{\vec{m}}$, $\overset{(\ ,1)}{\vec{m}}$ - векторы единичных нормалей к этим поверхностям). Необходимость такого выбора обусловлена тем, что при практической параметризации многослойных элементов конструкций с сотовыми заполнителями в силу их конструктивного исполнения, нормаль к поверхностям приведения слоев заполнителей может не совпадать с направлением распространения стенок сот. Выполнение указанного условия приводит к минимизации погрешности, вызванной принятием модели трансверсально-мягкого слоя для таких сотовых заполнителей.

В качестве кинематических неизвестных комбинированной математической модели принимаются поля векторов перемещения $\overset{[k]}{\vec{\upsilon}} \in T_{M_{[k]}} \overset{(k)}{W}$ точек поверхностей $\overset{[k]}{\sigma}$, что обеспечивает линейную зависимость количества неизвестных модели лишь от числа слоев заполнителя. Наличие или отсутствие в любой последовательности несущих слоев, описываемых классическими моделями, не изменяет этого количества и не приводит к вырождениям.

Для слоя заполнителя прямым интегрированием уравнений равновесия строятся законы распределения векторных и тензорных полей параметров НДС по поперечной координате, которые используются в дальнейших выкладках. Можно показать, что для нормальной составляющей вектора перемещения точек заполнителя закон распределения в поперечном направлении определяется равенством (где $\overset{(0)}{\delta} \le z \le \overset{(1)}{\delta}$)

$$\hat{\mu} \otimes (\vec{V}^{(z)} \cdot \vec{m}) = \frac{1}{2} \hat{\mu} \otimes (\vec{V}^{z=\overset{(0)}{\delta}} - \vec{V}^{z=\overset{(1)}{\delta}}) \cdot \vec{m} - \frac{1}{h}(z - \overset{(0)}{\delta})\hat{\beta}_3 + \hat{\lambda}_3^{(z)} +$$

$$+\frac{1}{2h}[2z - (\overset{(0)}{\delta} + \overset{(1)}{\delta})]\hat{\mu} \otimes (\vec{V}^{z=\overset{(1)}{\delta}} - \vec{V}^{z=\overset{(0)}{\delta}}) \cdot \vec{m} + \frac{1}{2}(z - \overset{(0)}{\delta})(\overset{(1)}{\delta} - z)\hat{A}_3 \cdot\cdot \hat{\mu} \otimes (\nabla \cdot \vec{q}) ,$$

здесь введены обозначения для вектора поперечно-касательных напряжений $\vec{q} = \vec{q}(\alpha^i)$ и

$$\hat{\mu} = \vec{m} \otimes \vec{m},\ \hat{\mu} \in T_M^2 N ,\ \hat{\lambda}_3^{(z)}(\alpha^i, z) = \int_{\overset{(0)}{\delta}}^{z} \alpha_3^{(\xi)} \Delta T d\xi ,\ \hat{\lambda}_3^{(z)} \in T_M^2 N ,\ \hat{\beta}_3(\alpha^i) = \int_{\overset{(0)}{\delta}}^{\overset{(1)}{\delta}} \hat{\alpha}_3^{(\xi)} \Delta T d\xi ,\ \hat{\beta}_3 \in T_M^2 N .$$

Для трансверсальной части вектора перемещений точек заполнителя имеет место равенство

$$\hat{a} \cdot \vec{V}^{(z)} = \hat{a} \cdot \vec{V}^{z=0} + \hat{A} \cdot \vec{q} \quad z - \nabla \otimes \{\frac{1}{2} z \quad (\vec{V}^{z=\overset{(0)}{\delta}} - \vec{V}^{z=\overset{(1)}{\delta}}) \cdot \vec{m} + \frac{1}{2} h^{-1}[z^2 - z \quad (\overset{(0)}{\delta} + \overset{(1)}{\delta})](\vec{V}^{z=\overset{(1)}{\delta}} - \vec{V}^{z=\overset{(0)}{\delta}}) \cdot \vec{m} +$$

$$+m \cdot\cdot \quad \hat{L}_3^{(z)} - h^{-1}(\frac{z^2}{2} - \overset{(0)}{\delta} z)c_3 - (\quad \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4}(\overset{(0)}{\delta} - \overset{(1)}{\delta}) + \overset{(0)}{\delta}\overset{(1)}{\delta}\frac{z}{2}) \quad a_3 \nabla \cdot \vec{q}\} ,$$

где $\hat{A} \in T_M^2 \sigma$ - тензор сдвиговых упругих характеристик податливости материала заполнителя, $a_3 = \hat{\mu} \cdot\cdot \hat{A}_3 \cdot\cdot \hat{\mu}$, $c_3 = \hat{\mu} \cdot\cdot \beta_3$.

Вектор перемещения точек жесткого несущего слоя для k-той элементарной ячейки, выраженный через кинематические неизвестные модели определяется в виде равенства

$$\overset{<k>}{\vec{V}}_{(z)} = \overset{[k]}{\vec{V}} + (\overset{<k,1>}{\delta} - \overset{<k>}{z}) \overset{<k,1>}{\hat{Z}}{}^{-1} \cdot (\overset{<k>}{\nabla} \otimes \overset{[k]}{\vec{V}}) \cdot \overset{<k>}{\vec{m}} . \tag{3}$$

Основные соотношения математической модели строятся вариационным методом. Сформулированная несвободная вариационная задача о стационарности функционала Лагранжа

$$R = \iiint_W \{\hat{\sigma}_{(z)} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}^{(z)}\} dW - A, \tag{4}$$

(где A работа внешних сил, а $\hat{\sigma}_{(z)}$, $\hat{\varepsilon}^{(z)}$ - тензоры напряжений и деформаций) имеет дополнительные условия в виде ограничений на поля векторов перемещений точек элементарной ячейки, обусловленные идеальным кинематическим контактом слоев оболочки. Указанные ограничения состоят из условий сопряжения $\forall k \in [1, K+1]$ (см. Рис. 1):

1) в точках поверхности $\overset{[k]}{\sigma}$ и верхней лицевой поверхности несущего слоя $\overset{<k,1>}{\sigma}$:

$$\vec{V}^{z=\overset{<k,1>}{\delta}} = \overset{[k]}{\vec{V}} ; \tag{5}$$

2) в точках нижней лицевой поверхности следующего несущего слоя и верхней лицевой поверхности слоя заполнителя $\overset{<k+1,0>}{\sigma}$:

$$\vec{V}^{z=\overset{(k,1)}{\delta}} = \overset{<k+1,0>}{\vec{V}} ; \tag{6}$$

3) в точках поверхности $\overset{[k]}{\sigma}$ и нижней лицевой поверхности слоя заполнителя $\overset{(k,0)}{\sigma}$:

$$\vec{V}^{z=\overset{(k,0)}{\delta}} = \overset{[k]}{\vec{V}} . \tag{7}$$

Ограничение (5) реализуется при построении соотношений модели выполнением равенства (3). Для учета ограничений (6) и (7) представим их в виде разложения на касательную и нормальную составляющие

$$(\overset{[k]}{\vec{V}} - \vec{V}^{z=\overset{(k,0)}{\delta}}) \cdot \overset{(k)}{\hat{a}} + (\overset{[k]}{\vec{V}} - \vec{V}^{z=\overset{(k,0)}{\delta}}) \cdot \overset{(k)}{\vec{m}} \otimes \overset{(k)}{\vec{m}} = 0 , \tag{8}$$

$$(\vec{V}^{z=\overset{(k,1)}{\delta}} - \overset{<k+1,0>}{\vec{V}}) \cdot \overset{(k)}{\hat{a}} + (\vec{V}^{z=\overset{(k,1)}{\delta}} - \overset{<k+1,0>}{\vec{V}}) \cdot \overset{(k)}{\vec{m}} \otimes \overset{(k)}{\vec{m}} = 0 , \tag{9}$$

где $\overset{<k+1,0>}{\vec{V}}$ - вектор перемещений нижней лицевой поверхности несущего слоя, следующей k+1 - вой ячейки, который с учетом (3) выражается через выбранные неизвестные по формуле

$$\overset{<k+1,0>}{\vec{V}} = \overset{[k+1]}{\vec{V}} + \overset{<k+1>}{h}\ \overset{<k+1,1>}{\hat{Z}}{}^{-1}\cdot(\overset{<k+1>}{\nabla}\otimes\overset{[k+1]}{\vec{V}})\cdot\overset{<k+1>}{\vec{m}}\ . \tag{10}$$

Вторые слагаемые в ограничениях (8) и (9) учитываются при выводе уравнений в виде равенств

$$(\overset{[k]}{\vec{V}}-\overset{(k,0)}{\vec{V}^{z=\delta}})\cdot\overset{(k)}{\vec{m}}=0,\ (\overset{(k,1)}{\vec{V}^{z=\delta}}-\overset{<k+1,0>}{\vec{V}})\cdot\overset{(k)}{\vec{m}}=0\ , \tag{11}$$

а первые слагаемые посредством использования метода множителей Лагранжа, что проводит к рассмотрению расширенного функционала

$$R^{*}=\iiint_{W}\{\hat{\sigma}_{(z)}\cdot\cdot\ \hat{\varepsilon}^{(z)}\}\ dW-A-I_{q},\quad I_{q}=\sum_{k=1}^{K-1}\overset{[k]}{I_{q}}\ , \tag{12}$$

$$\overset{[k]}{I_{q}}=\iint_{\overset{<k+1,0>}{\sigma}}\{(\overset{(k,1)}{\vec{V}^{z=\delta}}-\overset{<k+1,0>}{\vec{V}})\cdot\overset{(k)}{\hat{a}}\cdot\overset{<k+1,0>}{\vec{\varphi}}\}d\overset{<k+1,0>}{\sigma}+\iint_{\overset{[k]}{\sigma}}\{(\overset{[k]}{\vec{V}}-\overset{(k,0)}{\vec{V}^{z=\delta}})\cdot\overset{(k)}{\hat{a}}\cdot\overset{[k]}{\vec{\varphi}}\}\ d\overset{[k]}{\sigma}, \tag{13}$$

эквивалентного по точкам стационарности функционалу (4). Здесь через $\overset{[k]}{\vec{\varphi}}$, $\overset{<k+1,0>}{\vec{\varphi}}$ обозначены векторные поля, принимаемые в качестве множителей Лагранжа и представляющие собой вектора напряжений в точках лицевых поверхностей заполнителя на площадках, ортогональных нормалям $\overset{[k]}{\vec{m}}$ и $\overset{<k+1,0>}{\vec{m}}$ соответственно

$$\overset{[k]}{\vec{\varphi}}=\overset{(k,0)}{\hat{\sigma}^{z=\delta}}\cdot\overset{[k]}{\vec{m}}=(\overset{(k)}{\vec{q}}\otimes\overset{(k)}{\vec{m}}+\overset{(k)}{\vec{m}}\otimes\overset{(k)}{\vec{q}}+\overset{(k)}{\hat{q}}_{m})\cdot\overset{[k]}{\vec{m}}\ ,\quad \overset{<k+1,0>}{\vec{\varphi}}=\overset{(k,1)}{\hat{\sigma}^{z=\delta}}\cdot\overset{<k+1,0>}{\vec{m}}=(\overset{(k)}{\vec{q}}\otimes\overset{(k)}{\vec{m}}+\overset{(k)}{\vec{m}}\otimes\overset{(k)}{\vec{q}}+\overset{(k)}{\hat{q}}_{m})\cdot\overset{<k+1,0>}{\vec{m}}\ . \tag{14}$$

Для построения линеаризованных уравнений нейтрального равновесия используется вариационный критерий теории упругой устойчивости. Если обозначить через $\overset{<k>}{\vec{V}}{}^{z0}$, $\overset{(k)}{\vec{V}}{}^{z0}$, $\overset{(k)}{\vec{q}}{}^{0}$ векторы перемещений и касательных напряжений, которые реализуются в начальном невозмущенном состоянии равновесия, то соответствующие векторы неизвестных в возмущенном равновесном состоянии представляются в виде

$$\overset{<k>}{\vec{V}}{}^{z*}=\overset{<k>}{\vec{V}}{}^{z0}+\overset{<k>}{\vec{V}}{}^{z/},\quad \overset{(k)}{\vec{V}}{}^{z*}=\overset{(k)}{\vec{V}}{}^{z0}+\overset{(k)}{\vec{V}}{}^{z/},\quad \overset{(k)}{\vec{q}}{}^{*}=\overset{(k)}{\vec{q}}{}^{0}+\overset{(k)}{\vec{q}}{}^{/}\ ,$$

где $\overset{<k>}{\vec{V}}{}^{z/}$, $\overset{(k)}{\vec{V}}{}^{z/}$, $\overset{(k)}{\vec{q}}{}^{/}$ - малые векторы дополнительных перемещений и напряжений, определяющие переход многослойной оболочки в смежное возмущенное состояние равновесия.

Уравнения нейтрального равновесия и соответствующие им граничные условия ищутся из традиционного для задач устойчивости вариационного уравнения Треффца:

$$\delta\overset{(k)}{U''}+\delta\overset{<k>}{U''}-\delta\overset{[k]}{I''_{q}}=0,\ \ \forall k\in[1,K].$$

Построенная комбинированная математическая модель, представляющая по существу совокупность важнейших с практической точки зрения расчетных моделей, наделена способностью к трансформации в иные варианты компоновки, которые можно рассматривать как частные случаи основной комбинированной схемы. Развитый универсализм комбинированной модели вытекает из возможности манипулирования составом элементарной ячейки многослойной оболочки. Исключительная простота такой модификации вытекает из анализа компонентной формы основных соотношений комбинированной модели. Из уравнений следует, что достаточно обнуления значений $\overset{<k>}{h}$ и $\overset{<k,1>}{z}$, а также жесткостей материала жесткого слоя $\overset{<k>}{W}$, чтобы вывести последний в элементарной ячейке Σ_k из рассмотрения. Те же действия, но с сохранением цилиндрических жесткостей несущего слоя редуцируют последний к расчетной схеме безмоментной теории оболочек. Обнуление толщин и жесткостей слоя заполнителя имеет следствием его тривиальное исключение из структуры элементарной ячейки.

Приведенные рассуждения достаточно просто реализуются в алгоритмах численного решения краевых задач, сформулированных с привлечением комбинированной математической модели.

В последней части главы приводятся соотношения нелинейной математической модели среднего изгиба трехслойных сферических и цилиндрических оболочек со слоями переменной толщины при их термосиловом нагружении. Уравнения модели являются вариантом соотношений универсальной комбинированной модели, дополненные построением реальных послойных законов распределения температурных полей в поперечном направлении, полученных на основе решения уравнений теплопроводности при удовлетворении условий на лицевых поверхностях и условий идеального теплового контакта между слоями оболочки

В первой части **третьей главы** разработан новый высокоэффективный численный метод решения одномерных краевых задач статики оболочек типа С.П.Тимошенко, который имеет в своей основе лагранжеву конечно-элементную схему с численным интегрированием.

Главными характерными положительными особенностями предлагаемого метода являются алгоритмическая простота и единообразие построения матрицы результирующей системы независимо от количества внутренних узлов каждого конечного элемента (КЭ) и способа их расположения, независимость числа обусловленности матрицы от количества и способа расположения внутренних узлов КЭ, которые таким образом могут выбираться лишь из соображений точности метода.

Для построения вычислительной процедуры запишем одномерные уравнения равновесия оболочек типа С.П.Тимошенко в векторно-матричной форме

$$-\partial_1\left[\sum_{m=1}^{3}\Big(p_{im}(\alpha^1)w_m(\alpha^1)+a_{im}(\alpha^1)u_m(\alpha^1)\Big)\right]+\sum_{m=1}^{3}\Big(b_{im}(\alpha^1)w_m(\alpha^1)+q_{im}(\alpha^1)u_m(\alpha^1)\Big)=f_i(\alpha^1),\quad \forall i\in\{1:3\},$$

где $U=(u_i(\alpha^1), i\in\{1:3\})$, $U\in\Re(3,1)$ вектор с компонентами из функций перемещений модели, относительно которых формируются граничные условия и $W=(w_i(\alpha^1), i\in\{1:3\})$, $W\in\Re(3,1)$ вектор с компонентами из основных неизвестных, в качестве которых принимаются старшие производные функций перемещений, входящие в уравнения для определения компонент внутренних усилий и моментов $T=(t_i(\alpha^1), i\in\{1:5\})$, $T\in\Re(5,1)$. Здесь и далее через $\Re(m,n)$ обозначается *(m,n)* - мерное линейное пространство всех вещественных прямоугольных матриц размера (m x n). Для дальнейших преобразований приняты обозначения для матричного аналога кинематических соотношений модели, который записывается в виде

$$\varepsilon=B^uU+B^wW\,,$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_i(\alpha^1), i\in\{1:5\})$, $\varepsilon\in\Re(5,1)$ - вектор компонент тензора деформации, а матричный аналог физических соотношений в виде

$$T=D\varepsilon=DB^uU+DB^wW\,,$$

где матрица $D=(d_{ij}(\alpha^1), i,j\in\{1:5\})$, $D\in\Re(5,5)$ - матрица упругих констант.

Пусть на отрезке $\alpha^1\in[\alpha^1_0,\alpha^1_N]$ определена сетка $\omega=\{\alpha^1_0<\alpha^1_1<...<\alpha^1_N\}$, узлы которой делят отрезок изменения независимой переменной α^1 на N КЭ. Тогда для $i-$го КЭ его длина определяется как $l_i=\alpha^1_i-\alpha^1_{i-1}$, а локальная независимая переменная $\bar\alpha^1\in[\alpha^1_{i-1},\alpha^1_i]$. Уравнения равновесия приведем к эквивалентному интегральному виду, использующему интегральные операторы типа Вольтера относительно производных искомых функций

$$\sum_{m=1}^{3}\left(p^{(i)}_{jm}(\bar\alpha^1)w^{(i)}_m(\bar\alpha^1)+a^{(i)}_{jm}(\alpha^1)[\int_{\alpha^1_{i-1}}^{\bar\alpha^1}w^{(i)}_m(\xi)d\xi+k^{(i-1)}_m]\right)+\sum_{m=1}^{3}\left(\int_{\bar\alpha^1}^{\alpha^1_i}b^{(i)}_{jm}(\xi)w^{(i)}_m(\xi)d\xi+\right.\qquad(15)$$

$$\left.+\int_{\bar\alpha^1}^{\alpha^1_i}q^{(i)}_{jm}(\xi)[\int_{\alpha^1_{i-1}}^{\varsigma}w^{(i)}_m(\varsigma)d\varsigma+k^{(i-1)}_m]\right)+c^{(i)}_j=\int_{\bar\alpha^1}^{\alpha^1_i}f^{(i)}_j(\xi)d\xi\,,$$

где введено обозначение для статических $c_j^{(i)} = -\sum_{m=1}^{3}\left(p_{jm}^{(i)}(\bar\alpha^1) w_m^{(i)}(\bar\alpha^1) + a_{jm}^{(i)}(\bar\alpha^1) u_m^{(i)}(\bar\alpha^1)\right)\Big|_{\bar\alpha^1=\alpha_i^1}$ и кинематических $k_m^{(i-1)} = u_m^{(i)}(\alpha_{i-1}^1)$ констант интегрирования. Соотношения (15) дополняются равенством

$$\int_{\alpha_{i-1}^1}^{\alpha_i^1} w_m^{(i)}(\bar\alpha^1) d\bar\alpha^1 = k_m^{(i)} - k_m^{(i-1)}. \qquad (16)$$

Построим на отрезке $[\alpha_{i-1}^1, \alpha_i^1]$ $i-$го КЭ сетку $\omega^{(i)} = \{\alpha_{i-1}^1 < \bar\alpha_1^1 < \bar\alpha_2^1 < \ldots < \bar\alpha_{n^{(i)}}^1 < \alpha_i^1\}$, образованную узлами квадратурной формулы Гаусса. Введем в рассмотрение множества $\mathrm{A}^{(i)} = \{1:3n^{(i)}\}$ и $\mathrm{B}^{(i)} = \{1:5n^{(i)}\}$, необходимые для нумерации элементов матриц. Здесь $n^{(i)}$ число узлов (степень полинома Лежандра) на $i-$ом КЭ. Введем матричные аналоги интегральных операторов для для i-го КЭ – $J^{(i)} = (j_{jk}^{(i)},\ \forall j,k \in \mathrm{A}^{(i)})$ и $J^{*(i)} = (j_{jk}^{*(i)},\ \forall j,k \in \mathrm{A}^{(i)})$. Матрицы $J^{(i)}$ и $J^{*(i)}$ представляют собой квадратные трех-блочно-диагональные матрицы с соответствующими интегрирующими матрицами в качестве указанных блоков. Тогда систему уравнений (18) можно переписать в окончательном матричном виде

$$\left(p^{(i)} + a^{(i)}J^{(i)} + J^{*(i)}b^{(i)} + J^{*(i)}q^{(i)}J^{(i)}\right)W^{(i)} + \left(a^{(i)}E_K^{(i)} + J^{*(i)}q^{(i)}E_K^{(i)}\right)K^{(i)} + \left(E_K^{(i)}\right)C^{(i)} = J^{*(i)}f^{(i)}.$$

Соотношение (16) запишется в виде равенства

$$-E\,K^{(i+1)} + E\,K^{(i)} + J^{0(i)}W^{(i)} = 0, \qquad (17)$$

где $J^{0(i)} = (j_{jk}^{0(i)}\ \forall j \in \{1:3\} \wedge k \in \mathrm{A}^{(i)})$ блочно-диагональная матрица, в качестве блоков которой использована последняя строка интегрирующей матрицы $J^{(i)}$ для рассматриваемого конечного элемента. Условия сопряжения КЭ запишется в виде структурного равенства

$$Q_1^{(i-1)} + Q_0^{(i)} = 0, \quad \forall i \in \{2:N\},$$

где слагаемые представляют собой матрицы, для построения которых использованы базисные функции $\psi_0^i(x) = (x_i - x)/h_i$, $\psi_1^i(x) = (x - x_{i-1})/h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ и имеющие представление через неизвестные в виде

$$Q_1^{(i-1)} = Q_{W1}^{(i-1)}W^{(i-1)} + Q_{K1}^{(i-1)}K^{(i-1)} - Q_{P1}^{(i-1)}, \quad Q_0^{(i)} = Q_{W0}^{(i)}W^{(i)} + Q_{K0}^{(i)}K^{(i)} - Q_{P0}^{(i)}.$$

При формировании дискретного аналога граничных условий на торце $\alpha^1 = \alpha_0^1$ следует учесть тот факт, что при построении внутренней сетки КЭ использованы нули полиномов Лежандра, которые не совпадают с координатами узлов разбиения на КЭ (т.е. не совпадают с границами интервала интегрирования), а узловые значения производных не входят в множество неизвестных дискретезированной задачи. Для их отыскания разработана специальная процедура, использующая равенства

$$\partial_1 u_m^{(1)}\Big|_{\alpha^1=\alpha_0^1} = w_m^{(1)}(\alpha_0^1) = \sum_{i=1}^{n} w_{mj}^{(1)}\bar L_j(-1), \qquad \partial_1 u_m^{(N)}\Big|_{\alpha^1=\alpha_N^1} = w_m^{(N)}(\alpha_N^1) = \sum_{i=1}^{n} w_{mj}^{(N)}\bar L_j(1), \quad \forall m \in \{1:3\},$$

где $L_j(\bar\alpha^1) \in P_{n-1},\ \forall j \in \{1:n\}$– базисная функция Лагранжа. Тогда на торце $\alpha^1 = \alpha_0^1$ граничные условия в матричном виде определяются равенством

$$A_W^0 W^{(1)} + A_K^0 K^{(1)} = 0,$$

а на торце $\alpha^1 = \alpha_N^1$ в виде

$$\left(E - \varphi^N\right)J^{0(N)}W^{(N)} + \left(E - \varphi^N\right)K^{(N)} + \varphi^N C^{(N)} = 0.$$

С учетом граничных условий на левом и правом торцах оболочки, условий статического сопряжения КЭ между собой, дополнительных условий (17) структура матрицы жесткости для четырех конечных элементов представлена на Рис. 2. На этом же рисунке выделена область матрицы жесткости, которая может быть сформирована в ходе выполнения независимого вычислительного процесса.

На Рис. 3 изображены расчетные схемы и результаты вычислительных экспериментов, полученные при апробации и исследовании практической сходимости разработанного численного метода.

Во второй части **третьей главы** приводится описание разработанного численного метода решения двумерных краевых задач механики деформированного твердого тела. В основу метода положена процедура предварительного сведения исходной краевой задачи к эквивалентной интегральной форме относительно одной из независимых переменных в рамках подхода Канторовича, который здесь применяется при преобразовании двумерной краевой задачи к системе одномерных интегральных уравнений. Такой подход обладает более высокой устойчивостью по сравнению с дискретизацией дифференциальных уравнений, не содержит производных от функций и, следовательно, не налагает больших ограничений на их гладкость, допуская существование и разрывных решений.

На основе приведенных выше положений разработан новый высокоточный численный метод решения двумерных краевых задач механики деформирования оболочек типа С.П.Тимошенко, относящийся к классу метода конечных элементов гибридной схемы. Этот метод использует в своей основе, в направлении более плавного решения, вычислительную схему Галеркина - Петрова, а в противоположном – описанную выше конечно-элементную схему с численным интегрированием. В главе приводится замкнутая система двумерных соотношений, описывающая механику деформирования оболочек типа С.П.Тимошенко.

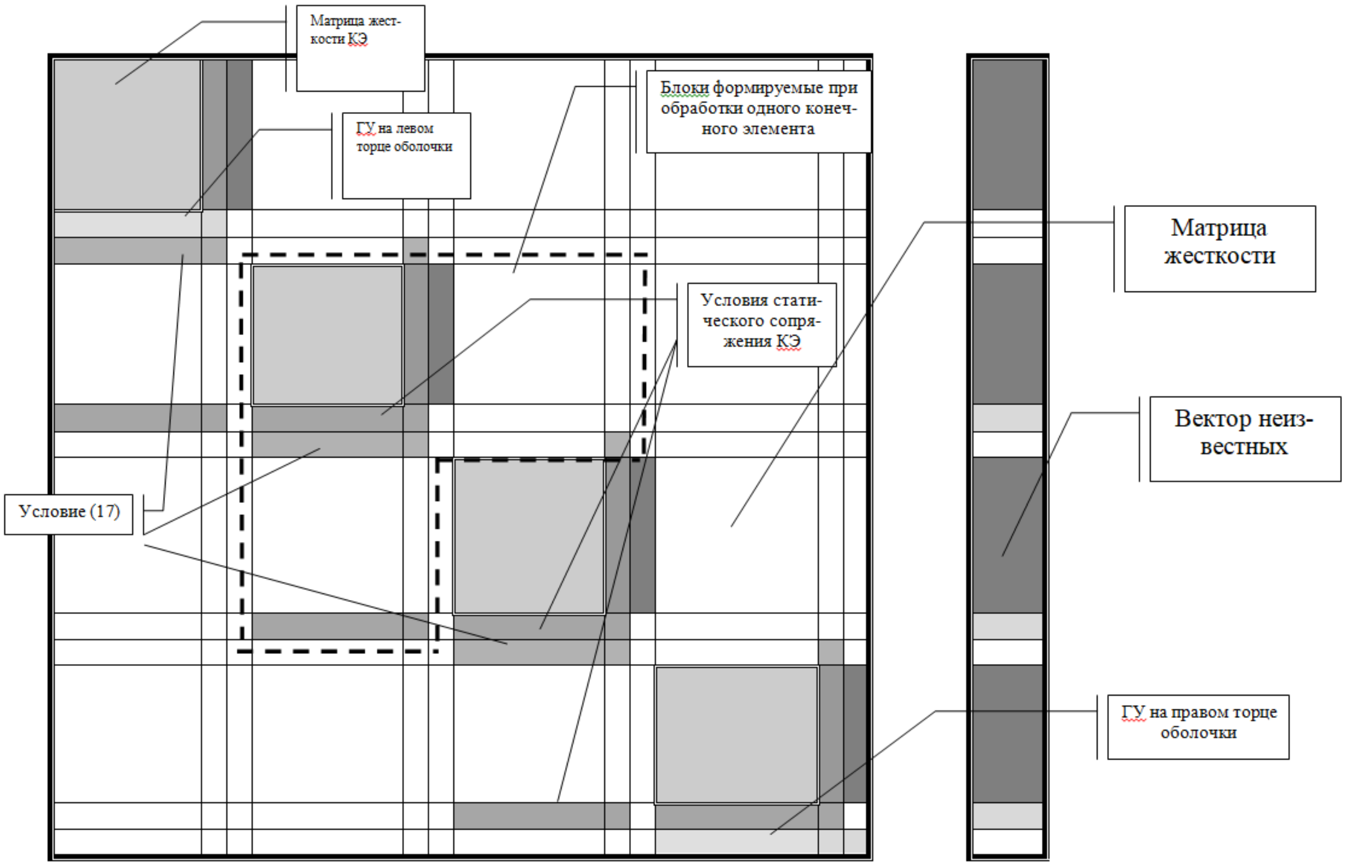


Рис. 2. Структура матрицы жесткости для четырех КЭ.

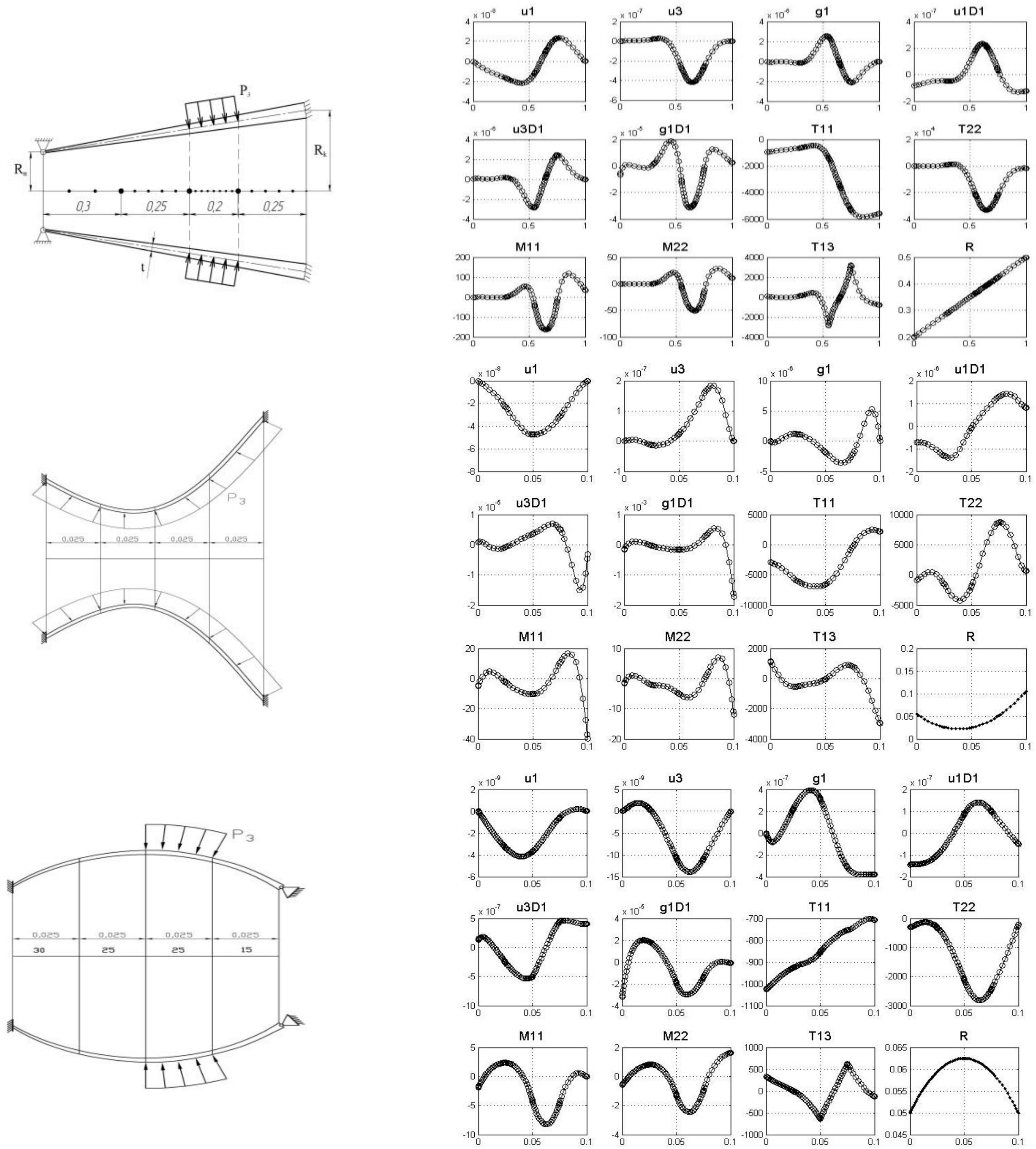


Рис. 3. Результаты численных экспериментов.

Разрабатывается проекционная схема дискретизации линейных дифференциальных уравнений. Приводится построение гибридного суперэлемента двумерной краевой задачи оболочек типа С.П.Тимошенко. Рассматривается проблема выбора базисных и проекционных функций. Решаются вопросы, связанные с исследованием практической сходимости разработанной вычислительной процедура на примерах решения ряда задач статики различных оболочек (см. Рис. 4).

В **четвертой главе** для численной реализации математических моделей статики и устойчивости стержневых и оболочечных подструктур разработаны алгоритмы высокоточного вычислительного метода и реализующее их программное обеспечение для выявления и исследования всех возможных классических и неклассических ФПУ при действии произвольной нагрузки. Разработанный численный метод использует модифицированный метод интегрирующих матриц, в рамках которого исходная система уравнений равновесия или уравнений устойчивости и соответствующие граничные условия приводятся к интегральному

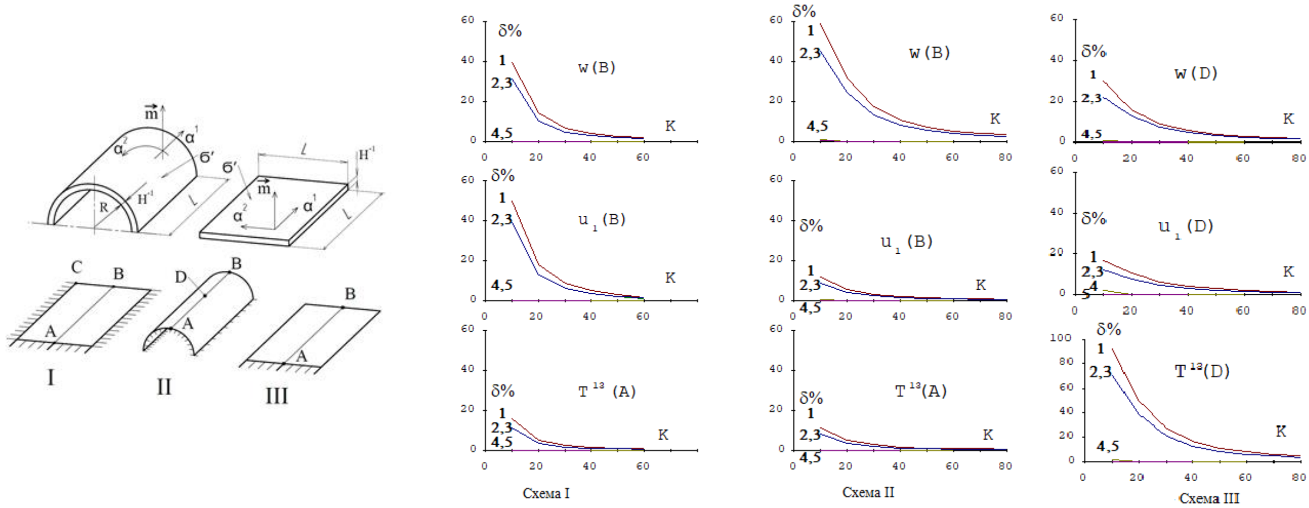


Рис. 4. Исследование практической сходимости.

виду, включающему интегральные уравнения типа Вольтера. Их дискретный аналог строится путем замены интегральных операторов специальными матрицами (интегрирующими), строящиеся с использованием квадратурных формул относительно дискретных узловых значений искомых неизвестных (указанные аналоги интегральных операторов использованы в главе 3, при аппроксимации уравнений в пределах конечного элемента), в качестве которых выбираются старшие производные кинематических функций (перемещений и углов поворота).

Достоинством такого подхода является то, что обусловленность разрешающей системы алгебраических уравнений численного метода практически не зависит от числа узлов сетки разбиения (узлов коллокации). Это позволяет, в отличие от стандартного метода конечных элементов, производить сильное локальное сгущение узлов сетки без повышения числа обусловленности матриц. Кроме того, интегральное представление позволяет естественным образом исключить производные функций, входящих в состав коэффициентов при неизвестных, и, как следствие, снизить требования к их гладкости. Важной положительной особенностью разработанного численного метода является и то, что конструирование разрешающей системы линейных алгебраических уравнений и последующее восстановление приближенного решения в узлах сетки выполняется при помощи однотипных операций с одними и теми же один раз построенными матрицами. Алгоритм разработанного численного метода для построения матричных аналогов интегральных операторов (модифицированных интегрирующих матриц) использует вариант квадратурных формул, базирующийся на аппроксимации функций неизвестных полиномами Лагранжа на неравномерной сетке, в качестве узлов которой выбираются нули соответствующих полиномов Лежандра. Этого оказывается достаточно для получения не насыщаемого алгоритма, имеющего экспоненциальную точность, и обеспечения симметричности матрицы разрешающей системы алгебраических уравнений.

Для оценки эффективности модифицированных интегрирующих матриц воспользуемся сравнительной оценкой точности вычисления интегралов классическими интегрирующими матрицами, основанными на скользящей кубической аппроксимации, матрицами, основанными на сплайн аппроксимациях и указанными модифицированными интегрирующие матрицы. В рамках этой процедуры проведем численное вычисление интеграла с переменным верхним пределом $I=\int_a^{x_i} y(x)dx$ от известных аналитических функций с различным характером поведения $y_1 = \frac{1}{10}x^4$; $y_2 = \sin x$; $y_3 = \frac{1}{3}e^x$ на интервале $x \in [-3,3]$. Точность численного вычисления указанных интегралов будем определять посредством подсчета величины среднеквадратичной ошибки, сравнивая результат вычислений с аналитическим значением. Результаты расчетов представим в виде зависимости логарифма среднеквадратичной ошибки вычислений от числа узлов сетки на интервале интегрирования (см. Рис. 5).

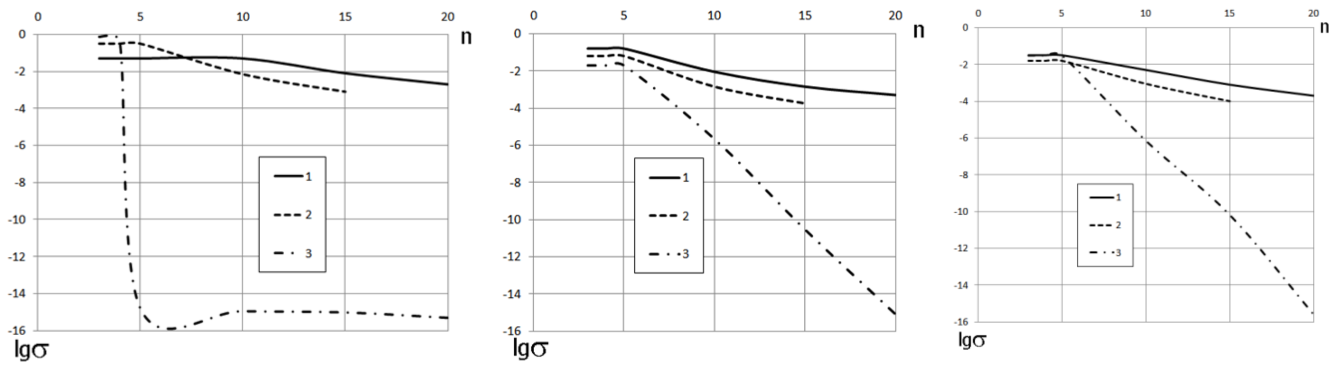


Рис. 5. Точность вычисления интегралов. 1- вычисление интегрирующей матрицей, основанной на скользящей полиноминальной аппроксимации, 2- вычисление интегрирующей матрицой, базирующихся на сплайн-аппроксимации, 3 - вычисление модифицированной интегрирующей матрицей.

Представленные результаты показывают, что точность операции численного интегрирования при использовании третьего типа интегрирующих матриц значительно превосходит ту же точность вычислений с использованием первых двух вариантов интегрирующих матриц и уже при числе сечений, большем n=15, приближается к машинной точности.

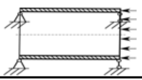
В **пятой главе** в рамках уравнений непротиворечивых математических моделей стержней типа С.П.Тимошенко проводится численное исследование задач о выявлении и исследовании неклассических ФПУ прямых и криволинейных стержней при различных видах их нагружения консервативными усилиями и формировании в них неоднородных вдоль осевой линии внутренних докритических усилий и моментов.

Для описания и исследования неклассических ФПУ оболочечных подструктур разработан численный метод исследования задач устойчивости цилиндрических оболочек типа С.П.Тимошенко, в рамках которого разработаны специализированный матричный алгоритм формирования соотношений математической модели (на основе этих уравнений с помощью матричных представлений выведены двумерные уравнения нейтрального равновесия цилиндрических оболочек с учетом как статических, так и кинематических параметрических слагаемых, которые позволяют выявить и исследовать все возможные классические и неклассические ФПУ цилиндрических оболочек). Численное решение указанных задач осуществляется в два этапа. На первом этапе решается задача статики и определяются параметры докритического напряженно-деформированного состояния, а на втором этапе решается задача устойчивости. Для дискретизации краевой задачи используется модифицированный метод интегрирующих матриц. При этом дискретный алгебраический аналог краевой задачи с помощью специально разработанной процедуры приводится к симметричному виду.

Численные методы реализованы в виде пакетов прикладных программ среды системы MATLAB. С их использованием проведены вычислительные эксперименты по выявлению и всестороннему исследованию неклассических форм потери устойчивости прямых и криволинейных стержней при различных видах их нагружения и закрепления торцевых сечений, а также цилиндрических оболочек различных классов при различных видах нагружения и закрепления торцов оболочки (см. Рис. 6).

В **шестой главе** представлены исследования, целью которых являлось проведение углубленного изучения результатов, полученных на основе ранее построенных по непротиворечивым моделям аналитических решений и сформулированных в соответствии с их анализом выводов, относящихся к исследованию неклассических ФПУ цилиндрической оболочки, и их сравнении с результатами других авторов. Для этого разработаны алгоритмы и реализующая их вычисленная процедура, для выявления и исследования по статическому и динамическому критериям неклассических ФПУ цилиндрических оболочек при действии внешнего давления, которое в рамках разработанной процедуры может считается

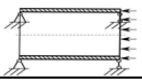
Тонкие длинные оболочки



R=0.25

№	$t_o=0.005$			$t_o=0.01$		
	$\lambda=0.025$	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.025$	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.1$
1	n=5 $p_{кр}=7.9588\cdot10^{4}$	n=11 $p_{кр}=1.6073\cdot10^{5}$	n=11 $p_{кр}=3.3353\cdot10^{5}$	n=4 $p_{кр}=3.2213\cdot10^{5}$	n=8 $p_{кр}=6.3253\cdot10^{5}$	n=9 $p_{кр}=1.3127\cdot10^{6}$
2	n=5 $p_{кр}=7.9342\cdot10^{4}$	n=11 $p_{кр}=1.6062\cdot10^{5}$	n=11 $p_{кр}=3.3301\cdot10^{5}$	n=4 $p_{кр}=3.2006\cdot10^{5}$	n=8 $p_{кр}=6.3116\cdot10^{5}$	n=9 $p_{кр}=1.3092\cdot10^{6}$
3	n=5 $p_{кр}=7.9331\cdot10^{4}$	n=11 $p_{кр}=1.5902\cdot10^{5}$	n=12 $p_{кр}=3.2889\cdot10^{5}$	n=4 $p_{кр}=3.2046\cdot10^{5}$	n=8 $p_{кр}=6.2434\cdot10^{5}$	n=9 $p_{кр}=1.2719\cdot10^{6}$
4	n=5 $p_{кр}=7.9087\cdot10^{4}$	n=11 $p_{кр}=1.5891\cdot10^{5}$	n=12 $p_{кр}=3.2836\cdot10^{5}$	n=4 $p_{кр}=3.1842\cdot10^{5}$	n=8 $p_{кр}=6.2299\cdot10^{5}$	n=9 $p_{кр}=1.2680\cdot10^{6}$

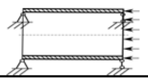
Тонкие оболочки средней длины



R=0.25

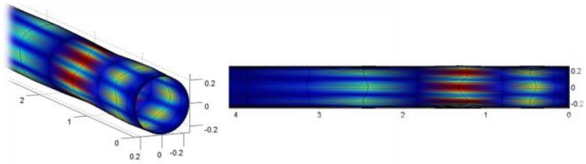
№	$t_o=0.005$			$t_o=0.01$		
	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$
1	n=12 $p_{кр}=8.0973\cdot10^{5}$	n=8 $p_{кр}=1.6723\cdot10^{6}$	n=9 $p_{кр}=3.5126\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=3.3192\cdot10^{6}$	n=1 $p_{кр}=6.8257\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=1.4430\cdot10^{7}$
2	n=12 $p_{кр}=8.0844\cdot10^{5}$	n=7 $p_{кр}=1.6685\cdot10^{6}$	n=1 $p_{кр}=3.5022\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=3.3080\cdot10^{6}$	n=1 $p_{кр}=6.7856\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=1.4369\cdot10^{7}$
3	n=12 $p_{кр}=7.7780\cdot10^{5}$	n=11 $p_{кр}=1.6016\cdot10^{6}$	n=11 $p_{кр}=3.3184\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=3.1766\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=6.4814\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=1.3553\cdot10^{7}$
4	n=12 $p_{кр}=7.7640\cdot10^{5}$	n=11 $p_{кр}=1.5983\cdot10^{6}$	n=11 $p_{кр}=3.3110\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=3.1641\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=6.4541\cdot10^{6}$	n=8 $p_{кр}=1.3491\cdot10^{7}$

Тонкие короткие оболочки

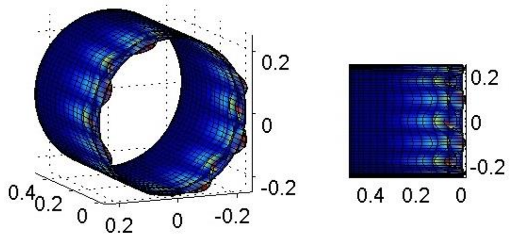


R=0.25

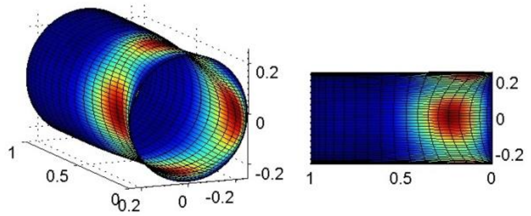
№	$t_o=0.005$			$t_o=0.01$		
	$\lambda=2$	$\lambda=4$	$\lambda=6$	$\lambda=2$	$\lambda=4$	$\lambda=6$
1	n=11 $p_{кр}=7.5010\cdot10^{6}$	n=10 $p_{кр}=1.6666\cdot10^{7}$	n=9 $p_{кр}=2.5174\cdot10^{7}$	n=8 $p_{кр}=3.1502\cdot10^{7}$	n=6 $p_{кр}=6.6697\cdot10^{7}$	n=5 $p_{кр}=1.1910\cdot10^{8}$
2	n=11 $p_{кр}=7.4837\cdot10^{6}$	n=10 $p_{кр}=1.6625\cdot10^{7}$	n=9 $p_{кр}=2.5102\cdot10^{7}$	n=8 $p_{кр}=3.1349\cdot10^{7}$	n=6 $p_{кр}=6.6330\cdot10^{7}$	n=5 $p_{кр}=1.1804\cdot10^{8}$
3	n=11 $p_{кр}=7.0381\cdot10^{6}$	n=10 $p_{кр}=1.5670\cdot10^{7}$	n=9 $p_{кр}=2.3946\cdot10^{7}$	n=8 $p_{кр}=2.9496\cdot10^{7}$	n=6 $p_{кр}=6.3148\cdot10^{7}$	n=5 $p_{кр}=1.1438\cdot10^{8}$
4	n=11 $p_{кр}=7.0210\cdot10^{6}$	n=10 $p_{кр}=1.5629\cdot10^{7}$	n=9 $p_{кр}=2.3875\cdot10^{7}$	n=8 $p_{кр}=2.9347\cdot10^{7}$	n=6 $p_{кр}=6.2785\cdot10^{7}$	n=5 $p_{кр}=1.1337\cdot10^{8}$



ФПУ длинной тонкой оболочки при действии осевого сжатия (n=4)

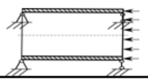


ФПУ тонкой оболочки средней длины при действии осевого сжатия (n=8)



ФПУ оболочки средней длинны и средней толщины при действии осевого сжатия (n=2)

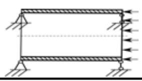
Оболочки средней длинны средней толщины



R=0.25

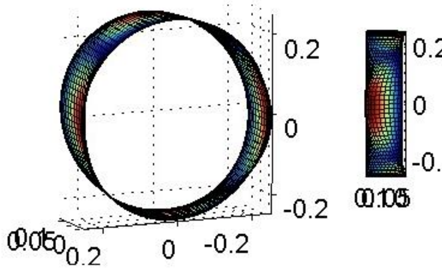
№	$t_o=0.1$			$t_o=0.3$		
	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=0.25$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$
1	n=3 $p_{кр}=3.3354\cdot10^{8}$	n=3 $p_{кр}=7.2152\cdot10^{8}$	n=2 $p_{кр}=1.5977\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=2.7523\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=6.2564\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.4536\cdot10^{10}$
2	n=3 $p_{кр}=3.2183\cdot10^{8}$	n=3 $p_{кр}=6.9257\cdot10^{8}$	n=2 $p_{кр}=1.5257\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=2.4902\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=5.5757\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.2242\cdot10^{10}$
3	n=3 $p_{кр}=3.0835\cdot10^{8}$	n=3 $p_{кр}=6.6175\cdot10^{8}$	n=2 $p_{кр}=1.4710\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=2.4703\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=5.5764\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.3149\cdot10^{10}$
4	n=3 $p_{кр}=2.9665\cdot10^{8}$	n=3 $p_{кр}=6.3386\cdot10^{8}$	n=2 $p_{кр}=1.4001\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=2.2217\cdot10^{9}$	n=2 $p_{кр}=4.9486\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.0994\cdot10^{10}$

Короткие оболочки средней толщины

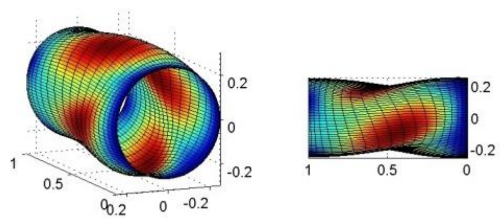


R=0.25

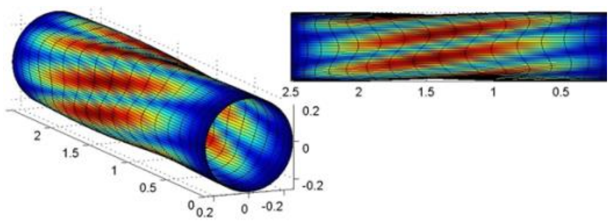
№	$t_o=0.1$			$t_o=0.3$		
	$\lambda=2$	$\lambda=4$	$\lambda=6$	$\lambda=2$	$\lambda=4$	$\lambda=6$
1	n=2 $p_{кр}=4.0238\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.8764\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=4.1815\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=4.3748\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=9.2767\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=1.3915\cdot10^{11}$
2	n=2 $p_{кр}=3.6929\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.5672\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=3.5495\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=3.7407\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=9.1641\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=1.3863\cdot10^{11}$
3	n=2 $p_{кр}=3.7676\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.7987\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=4.1094\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=4.2580\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=9.2572\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=1.3912\cdot10^{11}$
4	n=2 $p_{кр}=3.4625\cdot10^{9}$	n=1 $p_{кр}=1.4970\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=3.3920\cdot10^{10}$	n=1 $p_{кр}=3.4711\cdot10^{10}$	n=2 $p_{кр}=8.5789\cdot10^{10}$	n=15 $p_{кр}=1.3060\cdot10^{11}$



ФПУ короткой оболочки средней толщины при действии осевого сжатия (n=2)



ФПУ оболочки средней длинны и средней толщины при действии крутящего момента (n=2)



ФПУ длинной тонкой оболочки при действии крутящего момента (n=4)

Рис. 6. Результаты вычислительного эксперимента по исследованию неклассических ФПУ цилиндрической оболочки.

консервативной или неконсервативной нагрузкой. В расчетах моделировалась потеря устойчивости цилиндрических оболочек различных классов: длинных тонких оболочек, тонких оболочек средней длины, тонких коротких оболочек и коротких оболочек средней толщины.

Исследовалось влияние на критическое давление слагаемых, учитывающих инерцию поворотов, а также влияние на эту же величину уменьшения величины сдвиговой жесткости (для выявления и исследования чисто сдвиговой ФПУ). В главе приводятся результаты численных экспериментов с полным анализом и выводами по проведенным исследованиям.

Установлено, что для всех указанных групп оболочек в рамках динамической постановки задачи устойчивости при действии следящего внешнего давления получен тип их неустойчивости, носящий название статической (дивергентной) неустойчивостью. На Рис. 7 приведены графики $\Omega_i^2 = \Omega_i^2\,(q^\partial)$, иллюстрирующие поведение первых трех собственных частот оболочки вблизи границы их устойчивости в зависимости от величины следящего давления, где линии разных типов обозначают оболочки разной относительной толщины.

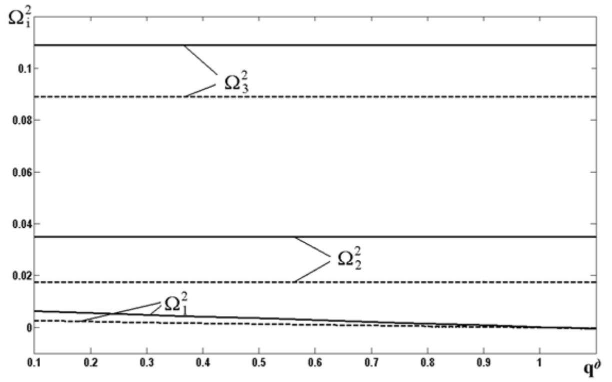


Рис. 7.

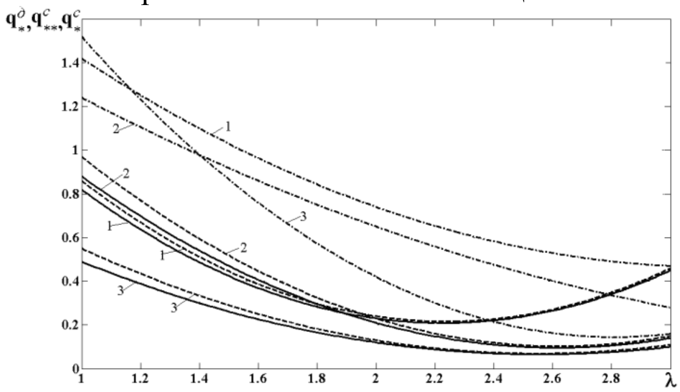


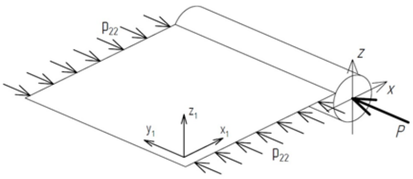
Рис. 8.

На Рис. 8 проиллюстрировано исследование реализации сдвиговой ФПУ при уменьшение сдвиговой жесткости для коротких оболочек (зависимости параметров критической нагрузки, вычисляемые по различным критериям от относительной длины оболочки λ)

В **седьмой главе** разработана комплексная процедура учета кинематических связей стержневых и оболочечных подструктур (учет ограничений посредством их общего решения и использования неопределенных множителей Лагранжа) сложной цепной составной оболочечно-стержневой конструкции, представляющая собой конструктивный алгоритм сведения глобальной вариационной задачи к эквивалентной свободной с получением полной замкнутой системы разрешающих соотношений математической модели, как условий стационарности сформулированного функционала. Приводятся уравнения кинематического сопряжения стержневых и оболочечных подструктур, уравнения докритического равновесия и устойчивости для рассматриваемых конструкций.

С целью апробации построенных математических моделей, реализующих их алгоритмов и обобщения результатов, полученных при исследовании обособленных оболочечных и стержневых подструктур по разработанной вычислительной процедуре, проводится численное моделирование с целью выявления и исследования классических и неклассических форм потери устойчивости составной конструкции, состоящей из прямоугольной ортотропной пластины и шарнирно связанного с ней по одной из кромок подкрепляющего прямолинейного стержня. На Рис. 9 приведена расчетная схема составной конструкции и результаты исследования ее неклассических изгибно-крутильных ФПУ.

Для составной конструкции в виде двух соосных цилиндрических оболочек разных радиусов, соединяемых между собой жестко или шарнирно через шпангоут, исследуются все возможные классические и неклассические формы потери устойчивости при осесимметричных видах нагружения. При сохранении и отбрасывании в соотношениях для оболочек групп параметрических слагаемых по разработанной вычислительной процедуре проведено исследование устойчивости конструкции рассматриваемого класса в случае действия на шпангоут внешнего давления, скручивающего момента, а также в случае ее осевого растяжения, при котором шпангоут оказывается в условиях деформации «выворачивания», при этом в оболочке большего диаметра формируются докритические окружные напряжения сжатия (см. Рис. 10).



Вид ГУ	$G_{13}=G_{23}$	N	$a=10$		$a=30$		$a=50$		$a=100$	
			$q_ч$	ФПУ	$q_ч$	ФПУ	$q_ч$	ФПУ	$q_ч$	ФПУ
Свободный край	$7.7\cdot10^{10}$	1	0.92	мик-z	0.79	мик-x	0.79	мик-x	0.82	мик-x
	$7.7\cdot10^{9}$	2	0.54	ик-z	0.54	ик-zx	0.54	ик-zx	0.54	ик-zx
	$7.7\cdot10^{8}$	3	0.1	ик-z	0.1	ик-z	0.1	ик-z	0.1	ик-z
Защемление	$7.7\cdot10^{10}$	4	0.92	мик-z	0.92	мик-zx	0.84	мик-x	0.83	мик-x
	$7.7\cdot10^{9}$	5	0.54	ик-z	0.54	ик-z	0.54	ик-zx	0.54	ик-zx
	$7.7\cdot10^{8}$	6	0.1	ик-z	0.1	ик-z	0.1	ик-z	0.1	ик-z
Шарнирное опирание	$7.7\cdot10^{10}$	7	0.92	мик-z	0.79	мик-x	0.79	мик-x	0.82	мик-x
	$7.7\cdot10^{9}$	8	0.54	ик-z	0.54	ик-zx	0.54	ик-zx	0.54	ик-zx
	$7.7\cdot10^{8}$	9	0.1	ик-z	0.1	ик-z	0.1	ик-z	0.1	ик-z

Рис. 9. Исследование изгибно-крутильных ФПУ составной конструкции.

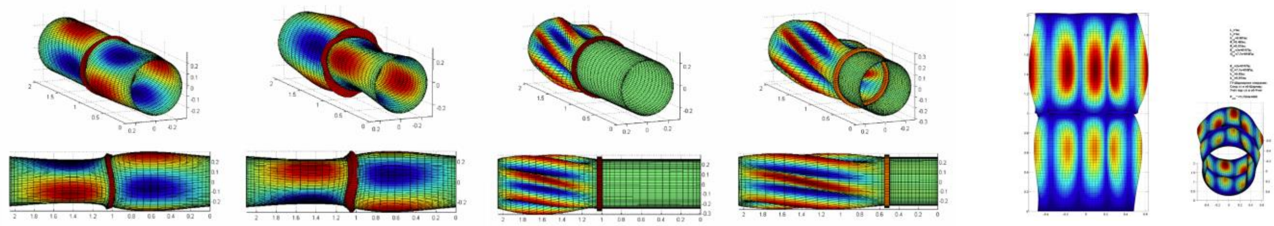


Рис. 10. Исследование ФПУ составной конструкции.

В **восьмой главе** с целью апробации построенных ранее комбинированной математической модели механики деформирования и устойчивости многослойных оболочек со слоями сложной геометрии и процедуры учета кинематических связей сложной составной оболочечно-стержневой конструкции приведены соотношения модели в компонентной форме, которые затем упрощаются для случая многослойных оболочек вращения со слоями переменной толщины. На основе разработанного матричного алгоритма численного моделирования задач статики и устойчивости многослойных оболочек вращения (основанного на модифицированном методе интегрирующих матриц или в варианте конечно-элементной процедуры с численным интегрированием, см. глава 3 и глава 4) исследуется устойчивость ряда типовых тонкостенных элементов конструкций. При этом рассмотрено влияние на ФПУ и параметры критической нагрузки жесткостных параметров пакета оболочки, схем его закрепления и способов нагружения. Изучены вопросы необходимости удержания статических или кинематических параметров докритического напряженно-деформированного состояния. На основании проведенных численных исследований разработан оптимальный алгоритм определения достоверных значений параметра критической нагрузки и функций ФПУ для многослойных оболочек вращения со слоями переменной толщины.

В рамках математического моделирования механики деформирования зон законцовок трехслойных панелей из полимерных композиционных материалов разработан вычислительно-экспериментальный метод определения достоверных значений физико-механических и прочностных характеристик трансверсально-мягких заполнителей. Проведен анализ, в том числе и численный по разработанной вычислительной процедуре, схем и конструктивных параметров тест-образцов (см. Рис. 11 - Рис. 14) при испытании заполнителей на сдвиг.

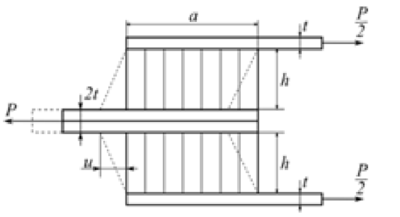


Рис. 11. Конструктивная схема тест-образцов для испытания на сдвиг

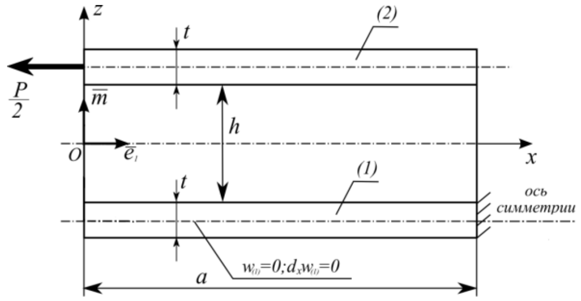


Рис. 12. Расчетная схема тест-образца для испытания на сдвиг

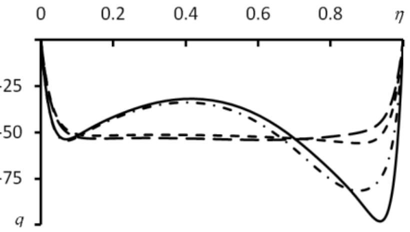


Рис. 13. Распределение касательных напряжений в тест-образце.

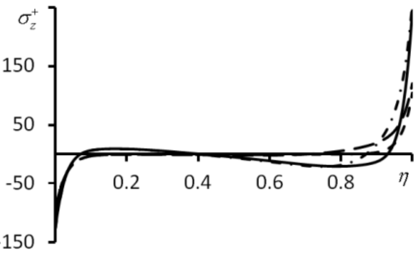


Рис. 14. Распределение нормальных напряжений в тест-образце

Определены требуемые значения геометрических и жесткостных параметров тест-образца и его кинематическая схема, которая оформлена в качестве патента на изобретение.

Разработанная вычислительно-экспериментальная методология построения диаграммы деформирования заполнителя при сдвиге использует данные экспериментальной диаграммы, построенной в процессе испытания тест-образца (см. Рис. 15), на основе которой расчетным способом с помощью разработанной вычислительной процедуры строится диаграмма деформирования (см. Рис. 16) и определяются достоверные значения физико-механических и прочностных характеристик заполнителя.

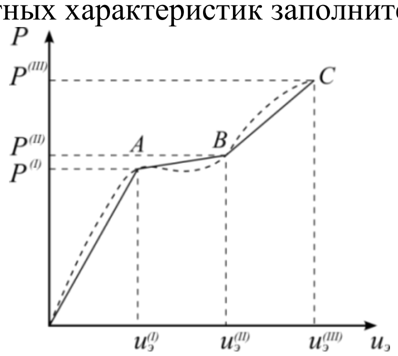


Рис. 15. Экспериментальная диаграмма $P = P(u_э)$

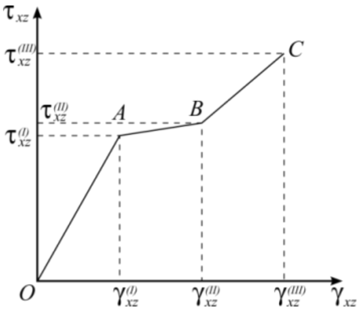


Рис. 16. Диаграмма деформирования $\tau_{xz} = \tau_{xz}(\gamma_{xz})$

На Рис. 17 - 20 представлены некоторые результаты математического моделирования механики деформирования законцовки трехслойной панели из композиционных материалов.

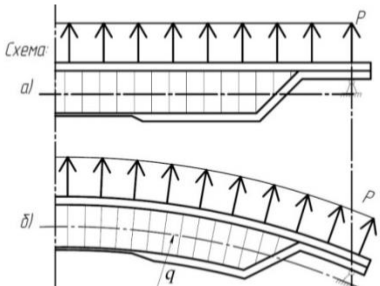


Рис. 17. Расчетные схемы трехслойных панелей

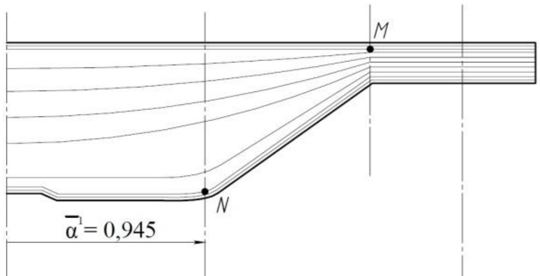


Рис. 18. Расчетная схема законцовки трехслойной панели

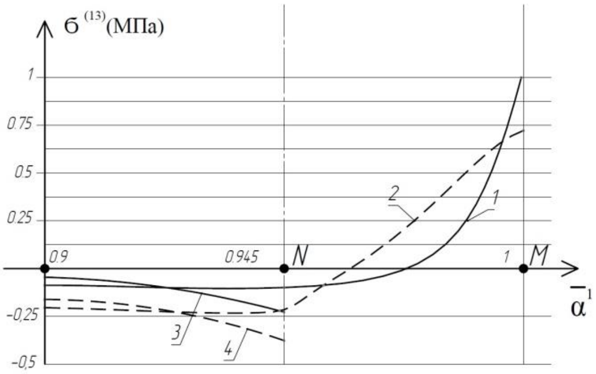


Рис. 19. Эпюры тангенциальных напряжений $\sigma^{(11)}$ на нижней $\overset{<1,0>}{\sigma}$ и верхней $\overset{<9,1>}{\sigma}$ лицевых поверхностях несущих слоев трехслойных панелей

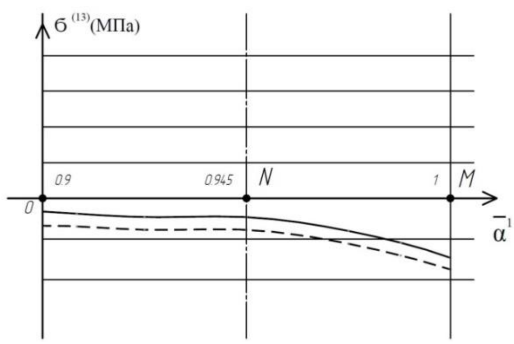


Рис. 20. График значений поперечно-касательных напряжений в заполнителе по его длине на уровне $\overline{z} = z/h = 0,5$

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы по диссертационному исследованию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В диссертационной работе получили развитие методы математического моделирования и численного анализа механики статического деформирования и устойчивости как отдельных стержневых и оболочечных (в том числе и многослойных) подструктур сложной геометрии, так и составленных из них многослойных оболочечно-стержневых конструкций.

В процессе проведения исследований получен ряд новых результатов:

1. Разработан *новый концептуальный подход математического моделирования* механики деформирования и устойчивости сложных составных оболочечно-стержневых конструкций с многослойными оболочечными элементами сложной геометрии как решение комплексной проблемы, включающей:

- разработку новой методологии формирования математических моделей механики деформирования многослойных оболочек, связанной с требуемым геометрическим описанием многослойного континуума оболочки при построении уравнений моделей и использующей разработанную систему априорных оценок, отражающих реальную геометрию многослойной оболочки, использование которой позволяет как определять требуемую степень учета изменения метрики в математической модели, проводить оценку слагаемых в разрешающих соотношениях, минимизировать сложность решения задачи согласованной параметризации многослойного континуума оболочки, так и создать основу для разработки новой классификации математических моделей механики деформирования многослойных оболочек по геометрическим параметрам;
- разработку новой классификации математических моделей – классификации моделей механики деформирования многослойных оболочек по геометрическим параметрам, характеризующим относительную толщину слоев и их изменяемость в тангенциальных направлениях и позволяющую определять место каждого из вариантов математической модели по отношению к адекватно описываемому этой моделью классу конструкций. В рамках разработанной классификации все многообразие математических моделей многослойных оболочек разделено на шесть групп, где в зависимости от величин показателей изменяемости функций толщин слоев тонкие многослойные оболочки и многослойные оболочки средней толщины образуют по три группы математических моделей, описывающие оболочки с различной геометрий. В работе приведена библиография по выделенным группам.
- разработку геометрической модели многослойных оболочек как составной неотъемлемой части математических моделей их механики деформирования, включающей совокупность базовых понятий и определений с наложенными на них ограничениями и имеющими в своей основе положения теории множеств и теории гладких дифференциально-геометрических структур, что обеспечивает требуемое геометрическое описание реального многослойного

оболочечного континуума в соотношениях математической модели,
- разработку методологии записи и преобразований соотношений математических моделей механики многослойных оболочек, представляющую развитие аппарата бескомпонентных тензорных преобразований, на класс геометрических объектов с периодической слоистой структурой, слои которой наделены индивидуальной метрикой,
- разработку новой нелинейной комбинированной дискретно-структурной модели многослойных оболочек со слоями сложной геометрии (учитывающую существенное различие метрики и ориентации базисных векторов смежных слоев) и ее использование в качестве универсальной математической модели для многослойных оболочечных элементов составных оболочечно-стержневых конструкций при определении их несущей способности в задачах статического деформирования и устойчивости;
- разработку комплексной процедуры учета ограничений (кинематических связей между стержневыми и оболочечными подструктурами в сложных составных конструкциях методом их общих решений и введением неопределенных множителей Лагранжа для учета части связей), обеспечивающую, путем использования положений теорию множеств, формирование глобальной эквивалентной свободной вариационной задачи с получением в качестве условий стационарности сформированного функционала полной замкнутой системы разрешающих соотношений общей математической модели статического деформирования и устойчивости составных оболочечно-стержневых конструкций,
- разработку нового вычислительно-экспериментального метода определения достоверных значений физико-механических и прочностных характеристик трансверсально-мягких заполнителей, основанного на синтезе и комбинированном использовании данных физического эксперимента с результатами вычислительных экспериментов, что потребовало проведение анализа известных схем испытаний тест-образцов заполнителей многослойных конструкций на сдвиг и их численного моделирования для определения параметров напряженно-деформированного состояния заполнителя в тест-образцах (предложена уточненная схема их конструктивного исполнения, закрепления и нагружения, обеспечивающая реализацию по длине заполнителя практически нулевого напряжения поперечного обжатия и постоянного касательного напряжения за исключением коротких зон краевых эффектов);

- разработку оптимального алгоритма численного определения достоверных значений параметра критической нагрузки и функций формы потери устойчивости многослойных оболочек со слоями переменной толщины, основанного на анализе решений, полученных при проведении вычислительных экспериментов для ряда определенных модельных задач устойчивости многослойных оболочек с различной структурой пакета слоев;

2. *Новая* уточненная нелинейная *математическая модель* среднего изгиба трехслойных сферических и цилиндрических оболочек со слоями переменной толщины, описывающая механическое поведение указанных оболочек при их термосиловом нагружении, полученная модифицированием соотношений комбинированной модели и включающая определение реальных послойных законов распределения температурных полей в поперечном направлении из решения уравнений теплопроводности;

3. *Новый высокоточный численный метод (его программная реализация, оценка практической сходимости и достоверности)* решения одномерных краевых задач статики и устойчивости оболочек типа С.П.Тимошенко, основанный на высокоточной лагранжевой конечно-элементной схеме с численным интегрированием и использующий векторно-матричное представление численных алгоритмов с возможностью их реализации на многопроцессорных платформах;

4. *Новый эффективный численный метод (его программная реализация, оценка практической сходимости и достоверности)* решения двумерных краевых задач статики оболочек типа С.П.Тимошенко, основанный на использовании специальных конечно-элементных схем, учитывающих разномасштабность производных решения в различных направлениях и относящийся к классу метода конечных элементов гибридной схемы с численным интегрированием;

5. *Новый высокоточный численный метод (его программная реализация, оценка практической сходимости и достоверности)* решения одномерных задач механики деформирования и устойчивости стержневых и оболочечных элементов конструкций, основанный на алгоритмах модифицированного метода интегрирующих матриц и использующий эффективные векторно-матричные алгоритмы формирования дискретных аналогов уравнений;

6. *Эффективные векторно-матричные алгоритмы* формирования дискретных матричных аналогов одномерных и двумерных соотношений математических моделей статического деформирования и устойчивости, используемые в разработанных вычислительных процедурах и обеспечивающие возможность многопроцессорной реализации, минимизацию трудоемкости и упрощенный контроль ошибок при разработке проблемно ориентированных комплексов программ;

7. *Новая вычислительная процедура,* служащая для выявления и исследования по статическому и динамическому критерию устойчивости всех возможных ФПУ цилиндрических оболочек при действии внешнего давления;

8. *Новая высокоточная вычислительная процедура* выявления и исследования в рамках непротиворечивой математической модели неклассических форм потери устойчивости составной конструкции в виде подкрепленной стержнем пластины;

9. *Новая высокоточная вычислительная процедура* выявления и исследования в рамках непротиворечивой математической модели неклассических форм потери устойчивости цепной составной конструкции в виде соединенных через шпангоут цилиндрических оболочек;

10. *Результаты комплексного численного исследования* статического деформирования и устойчивости ряда составных конструкций.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Публикации в ведущих рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК и приравниваемых к ним:

1. Луканкин С.А. Соотношения упругости в комбинированной теории многослойных оболочек со слоями сложной геометрии. / Луканкин С.А., Рахманкулов Н.У. // Расчет пластин и оболочек в хим. машиностроении: межвуз. сб. науч. тр., – Казань: Изд-во КГТУ, –1994. - С.72-76.
2. Паймушин В.Н. Построение иерархической математической модели многослойных элементов конструкций / Паймушин В.Н., Саитов И.Х., Луканкин С.А.//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация: межвуз. сб. науч. тр. М.: Тов-во науч. изд. КМК, – 1997, – С.152-162.
3. Паймушин В.Н. Нелинейная теория многослойных оболочек с жесткими несущими слоями и трансверсально-мягкими заполнителями переменной толщины / Паймушин В.Н., Луканкин С.А.//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация: межвуз. сб. науч. тр. М.: Тов-во науч. изд. КМК, – 1997, – С.75-94.
4. Паймушин В.Н. Классификация многослойных оболочек по геометрическим параметрам, характеризующим относительные толщины слоев и их изменяемость /Паймушин В.Н, Луканкин С.А. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Серия Механика. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, – 2002, – Вып.1(4) – С.86-96.
5. Паймушин В.Н. Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных сферических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины / Паймушин В.Н., Иванов В.А., Луканкин С.А. // Изв. вузов «Авиационная техника», – №4, – 2002, – С.11-16. (индексируется в базе **Scopus**).
6. Pajmushin V.N. Problems on stress-strain state of a three-layer cylindrical shell with transversally soft filler of arbitrary thickness under external pressure and end compression of carrying layers by unequal forces / Pajmushin V.N., Ivanov V.A., Lukankin S.A., Vyalkov, A.E. //Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij Aviatsionnaya Tekhnika, – 2003 – (1), – pp. 8-13. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Задачи о напряженно-деформированном состоянии трехслойной цилиндрической оболочки с трансверсально-мягким заполнителем

произвольной толщины при внешнем давлении и торцевом сжатии несущих слоев неодинаковыми усилиями/ Паймушин В.Н., Иванов В.А., Луканкин С.А., Вялков А.Е.// Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2003. № 1. С. 8-13). (индексируется в базе **Scopus**).

7. Pajmushin V.N. Mixed bending forms for stability loss of a three-layer cylindrical shell of arbitrary form under external pressure and compression of load-carrying layers by unequal loads / Pajmushin V.N., Ivanov V.A., Lukankin S.A. //Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij. Aviatsionnaya Tekhnika, – 2004 – (2), – pp. 14-21. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Смешанные изгибные формы потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки произвольной толщины при внешнем давлении и сжатии несущих слоев неодинаковыми усилиями/ Паймушин В.Н., Иванов В.А., Луканкин С.А., Вялков А.Е.// Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2004. № 2. С. 14-21). (индексируется в базе **Scopus**).
8. Paimushin, V.N. Research in the flexural buckling modes of a cylindrical sandwich shell under the action of a temperature field inhomogeneous across its thickness / Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Lukankin, S.A., Bushkov, A.A. //Mechanics of Composite Materials. – 2004. – 40(6) – pp. 461-472. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Исследование изгибных форм потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки при температурном нагружении, неоднородном по толщине / Паймушин В. Н., Иванов В.А., Луканкин С. А., Бушков А.А. // Механика композитных материалов. 2004. Т. 40. № 6, с.461-472). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).
9. Paimushin, V.N. Stress-strain state of a cylindrical sandwich shell in an axisymmetric temperature field inhomogeneous across the thickness / Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Lukankin, S.A., Bushkov, A.A. //Mechanics of Composite Materials. – 2004. – 40(3) – pp.323-340. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Напряженно деформированное состояние трехслойной цилиндрической оболочки в осесимметричном температурном поле, неоднородном по толщине/ Паймушин В. Н., Иванов В.А., Луканкин С. А., Бушков А.А. // Механика композитных материалов. 2004. Т. 40. № 3, с. 323-340). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).
10. Paimushin, V.N. Shear and flexural buckling modes of a spherical sandwich shell in a centrosymmetric temperature field inhomogeneous across the thickness/ Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Lukankin, S.A., Bushkov, A.A. //Mechanics of Composite Materials. – 2004. – 40(4) – pp.479-508. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Сдвиговая и изгибная формы потери устойчивости трехслойной сферической оболочки в центросимметричном температурном поле, неоднородном по толщине / Паймушин В. Н., Иванов В.А., Луканкин С. А., Бушков А.А. // Механика композитных материалов. 2004. Т. 40. № 4, с. 479-508). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).
11. Paimushin, V.N. Shear buckling modes of cylindrical sandwich shells under external pressure, tension-compression of bearing layers with unequal forces, and inhomogeneous across-the-thickness temperature/ Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Lukankin, S.A., Bushkov, A.A., Vyalkov, A.E. //Mechanics of Composite Materials. – 2005. – 41(1) – pp.23-32. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Сдвиговые формы потери устойчивости трехслойных цилиндрических оболочек при внешнем давлении, растяжении-сжатии несущих слоев не равными силами и неоднородном по толщине температурном воздействии / Паймушин В. Н., Иванов В.А., Луканкин С. А., Бушков А.А., Вялков А.Е. // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41. № 1, с. 23-32). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).
12. Paimushin, V.N. Exact analytical and numerical solutions of stability problems for a straight composite bar subjected to axial compression and torsion / Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Lukankin, (...), Firsov, V.A., Kholmogorov, S.A. //Mechanics of Composite Materials. – 2009. – 45(2) – pp.113-136 (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Точные аналитические и численные решения задач устойчивости прямого композитного стержня при осевом сжатии с кручением/ Паймушин В. Н., Иванов В.А., Луканкин С. А., Полякова Н.В., Холмогоров

С.А. // Механика композитных материалов. 2009. Т. 45. № 2, с. 167-201). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).

13. Pajmushin V.N. Quality analysis of nonlinear elasticity theory for the stability problems of planar laminated curved beams. Problem statement. / Paimushin V.N., Gunal I.Sh., Lukankin S.A., Firsov V.A. //Russian Aeronautics, – 2010 – 53(2), – pp. 167-172 (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Исследование качества нелинейных уравнений теории упругости на задачах устойчивости плоских криволинейных стержней слоистой структуры (постановка задачи)/ Паймушин В.Н., Гюнал И.Ш., Луканкин С.А., Фирсов В.А.// Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2010. № 2. С. 167-172). (индексируется в базе **Scopus**).
14. Pajmushin V.N. Quality analysis of nonlinear elasticity theory for the stability problems of planar laminated curved beams. Algorithm and results of numerical study. / Paimushin V.N., Gunal I.Sh., Lukankin S.A., Firsov V.A. //Russian Aeronautics, – 2010 – 53(3), – pp. 264-270 (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Исследование качества нелинейных уравнений теории упругости на задачах устойчивости плоских криволинейных стержней слоистой структуры (алгоритм и результаты численного исследования)/ Паймушин В.Н., Гюнал И.Ш., Луканкин С.А., Фирсов В.А.// Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2010. № 3. С. 264-270). (индексируется в базе **Scopus**).
15. Paimushin, V.N. Computational-experimental method to determine the averaged elastic and strength characteristics of fillers of multilayered structures in shear / Paimushin V.N., Zakirov I.M., Lukankin S.A., Zakirov I.I. //Mechanics of Composite Materials. – 2012. – 48(4) – pp.355-368. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Вычислительно-экспериментальный метод определения усредненных упругих и прочностных характеристик при сдвиге заполнителей многослойных конструкций/ Паймушин В. Н., Закиров И. М., Луканкин С. А., Закиров И. И. // Механика композитных материалов. 2012. Т. 48. № 4. с. 521-539). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).
16. Paimushin, V.N. Average elastic and strength characteristics of a honeycomb core and a theoretical-experimental method of their determination / Paimushin V.N., Zakirov I.M., Lukankin S.A., Zakirov I.I., Kholmogorov S.A. //Mechanics of Composite Materials. – 2012. – 48(5) – pp.511-524. (Версия на русском языке: Паймушин В.Н. Усредненные упругие и прочностные характеристики сотового заполнителя и теоретико-экспериментальный метод их определения/ Паймушин В. Н., Закиров И. М., Луканкин С. А., Закиров И. И., Холмогоров // Механика композитных материалов. 2012. Т. 48. № 5. с. 745-765). (индексируется в базах **Web of Science, Scopus**).
17. Lukankin S.A. Non-classical forms of loss stability of cylindrical shells joined by a stiffening ring for certain forms of loading / Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics – 2014. – 78(4) – pp.395-408. (Версия на русском языке: Луканкин С.А. О неклассических формах потери устойчивости соединенных шпангоутом цилиндрических оболочек при некоторых видах нагружения./ Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.// Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 4. с. 557-575). (индексируется в базе **Scopus**).
18. Lukankin S.A. Static and dynamic buckling modes of a cylindrical shell under external pressure. / Lukankin S.A., Paimushin V.N. // Mechanics of Solids – 2014. – 49(1) – pp. 83-98. (Версия на русском языке: Луканкин С.А. Статические и динамические формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при действии внешнего давления./ Луканкин С.А., Паймушин В.Н.// Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 1. С. 108-128). (индексируется в базе **Scopus**).
19. Луканкин С.А. Уточненная теория среднего изгиба трехслойных сферических и цилиндрических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины при термосиловом нагружении. // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. науч. тр. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, – выпуск 68, – 2006, – С.5-16.
20. Луканкин С.А. К геометрическим вопросам в построении математических моделей многослойных оболочек со слоями переменной толщины. / Луканкин С.А., Булашов

Д.А. // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. –Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та,— 2008. – №1, – С.49-52.
21. Луканкин С.А. Классификация математических моделей многослойных оболочек по геометрическим параметрам. / Луканкин С.А., Булашов Д.А., Холмогоров С.А. // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. –Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та,— 2008. – №1, – С.44-48.
22. Закиров И.М. Испытание клинч-соединения на прочность. / Закиров И.М, Сосов А.В., Никитин А.В. Луканкин С.А. // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. –Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та,— 2012. – №4-2, – С.58-60.
23. Бережной Д.В. Моделирование поведения железобетонной обделки тоннеля в деформируемом грунте с учетом одностороннего контактного взаимодействия ее блоков через упругие прокладки. / Бережной Д.В., Голованов А.И., Луканкин С.А., Секаева Л.Р. // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. –Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та,— 2010. – №2, – С.73-75.
24. Каюмов Р.А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов./ Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т.157, – кн. 4. – С.112-132. (индексируется в базе **Scopus**).

Публикации в прочих изданиях, в том числе материалы конференций

25. Саитов И.Х. Комбинированная теория неоднородных многослойных оболочек со слоями сложной геометрии. Кинематические соотношения. / Саитов И.Х., Луканкин С.А. // Расчет пластин и оболочек в хим. машиностроении: межвуз. сб. науч. тр., – Казань: Изд-во КГТУ, – 1994. -С.109-113.
26. Саитов И.Х. Комбинированная математическая модель слоистых оболочек сложной геометрии. / Саитов И.Х., Луканкин С.А. // Труды XVI Междун. конф. по теории оболочек и пластин, Т.2. – Н.Новгород: Изд-во НГУ, –1994. – С.183-190.
27. Saitov I.Kh. The theory and method of mechanics deformation researh within wide class junction of thin-walled aircraft structures from composite materials / Saitov I.Kh., Lukankin S.A. // International Conference. Fundamental Research and aerospace science. Book Abstracts, 1994. – Zhukovsky: Central Aerohydrodynamic Institute, – p.91-92.
28. Паймушин В.Н. Произвольные формы потери устойчивости трехслойных оболочек и их конечно-элементный анализ. / Паймушин В.Н., Бобров С.Н., Голованов А.И., Луканкин С.А.// Труды XVIII междунар. конф. по теории оболочек и пластин, Саратов, – 1997. – том 2. – С.236-238.
29. Паймушин В.Н. Уточненная теория устойчивости многослойных оболочек с трансверсально - мягкими заполнителями переменной толщины. / Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Булашов Д.А.//Механика оболочек и пластин. Сб. докладов XIX Междун. конф. по теории оболочек и пластин. Н. Новгород: Изд-во НКГУ, – 1999, – С. 154-160.
30. Паймушин В.Н. Гибридные конечные элементы высокого порядка точности. / Паймушин В.Н., Карчевский Н.М., Даутов Р.З., Луканкин С.А. // Материалы Международной конференции BEM/FEM – 2000. – С-Пб, – С.17-22 .
31. Паймушин В.Н. Уточненная теория устойчивости многослойных оболочек сложной геометрии со слоями переменной толщины./ Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Булашов Д.А.// Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междун. конф., посвящ. 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова, 80-летию проф. М..С. Корнишина. – Казань: Новое знание, – 2000, – С. 332-337.
32. Иванов В.А. Формы колебаний и потери устойчивости трехслойных пластин и оболочек вращения с нулевой изменяемостью параметров напряженно-деформированного состояния. / Иванов В.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Хусаинов В.Р.//Восьмой всероссийский съезд по теоретической и прикладной механики (Аннотации докладов). – Пермь 2001,– С. 285-286.
33. Луканкин С.А. Классификация многослойных оболочек по геометрическим параметрам, характеризующим толщины слоев и их изменяемость. / Луканкин С.А. // Материалы VII

Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”, М.: Из-во “Графросс”, –2001, – С. 22-23.
34. Андреев Д.С. Высокоточный метод и численный алгоритм решения задач статики оболочек вращения./ Андреев Д.С., Луканкин С.А.//Сборник тезисов докладов Международной научно-технической конференции “Композитные материалы в авиастроении и народном хозяйстве”, – Казань: Изд. “Магариф”, – 2001, – С.15.
35. Вялков А.Е. Уравнения теории трехслойных цилиндрических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины при среднем изгибе. / Вялков А.Е., Иванов В.А., Луканкин С.А.// Сборник тезисов докладов Международной научно-технической конференции “Композитные материалы в авиастроении и народном хозяйстве”, Казань: Изд. “Магариф”, –2001, – С. 24.
36. Вялков А.Е. Геометрически - нелинейные уравнения теории трехслойных сферических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины. / Вялков А.Е., Иванов В.А., Луканкин С.А.//Сборник тезисов докладов Международной научно-технической конференции “Композитные материалы в авиастроении и народном хозяйстве”, Казань: Изд. “Магариф”, – 2001, – С. 25.
37. Бушков А.А. Уточненная нелинейная математическая модель термоупругого деформирования трехслойных цилиндрических и сферических оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями произвольной толщины. / Бушков А.А., Паймушин В.Н, Луканкин С.А.// VIII Четаевская международная конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением": Тезисы докладов. Изд-во КГТУ, – 2002, – С.309.
38. Бушков А.А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного цилиндра в осесимметричном температурном поле, неоднородном по толщине. / Бушков А.А., Иванов В.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н. // Материалы VIII Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций сплошных сред”, М.: – 2002, – С. 48-49.
39. Вялков А.Е. Осесимметричное напряженно-деформированное состояние трехслойной цилиндрической оболочки при внешнем давлении и несимметричном по толщине торцевом нагружении. / Вялков А.Е., Иванов В.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н. // Материалы VIII Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций сплошных сред”, М.:– 2002, – С. 50-51.
40. Луканкин С.А. Высокоточные гибридные конечные элементы в одномерных задачах механики оболочек / Луканкин С.А., Паймушин В.Н.// Материалы VIII Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций сплошных сред”, М.:–2002, – С. 75-77.
41. Вялков А.Е. Исследование изгибных форм потери устойчивости трехслойного кругового кольца при равномерном внешнем давлении. / Вялков А.Е., Иванов В.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н. // Материалы IX Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций сплошных сред”, М.: – 2003,– С. 55.
42. Иванов В.А. Анализ собственных форм колебаний центросимметрично нагруженной трехслойной сферической оболочки в окрестности бифуркационных значений статических нагрузок. / Иванов В.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н.// Материалы XI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред, М.: – 2005, –Т.1, – С. 70-71.
43. Луканкин С.А. Численное исследование неклассических форм потери устойчивости цилиндрических оболочек при различных видах нагружения. / Луканкин С.А.// Материалы XIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Избранные доклады. Изд-во:МАИ, – 2007. – с.173-174.
44. Паймушин В.Н. О численных и точных аналитических решениях задач устойчивости прямого стержня при осевом сжатии с кручением. / Паймушин В.Н., Иванов В.А., Коноплев Ю.Г., Луканкин С.А., Саченков А.А., Фирсов В.А., Холмогоров С.А.// Материалы XIV

международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. Т.1, М.: –2008, – С. 100-103.
45. Луканкин С.А. Численное исследование неклассических форм потери устойчивости прямых и криволинейных стержней при различных видах их нагружения и закрепления торцевых сечений. / Луканкин С.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А.// Материалы первой международной конференции «Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек». – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, – 2008. – С.88-90.
46. Луканкин С.А. Численные решения неклассических задач о потере устойчивости плоских криволинейных стержней при различных видах их нагружения и закрепления торцевых сечений./ Луканкин С.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А. // Материалы XV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова. Т.1, М.: – 2009, – С. 108-109.
47. Луканкин С.А. Численные исследования классических и неклассических форм потери устойчивости прямоугольной пластины, имеющей на одной из кромок подкрепление в виде прямолинейного стержня. / Луканкин С.А., Полякова Н.В., Холмогоров С.А. Карпиков Ю.А.//Материалы второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». Казань: Каз. гос. ун-т, –2009. –С. 254-256.
48. Луканкин С.А. Численные исследования неклассической изгибно-крутильной формы потери устойчивости в композитных плоских криволинейных стержнях./ Луканкин С.А., Холмогоров С.А. //Материалы второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». Казань: Каз. гос. ун-т, – 2009. – С. 256-258.
49. Паймушин В.Н. Численное исследование устойчивости тонких оболочек вращения, сопряженных через кольцевой шпангоут/ Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. //Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. 2011. т.1 – М.: ООО «ТР-принт», – С.157-159.
50. Паймушин В.Н. Статические и динамические формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при действии внешнего давления. / Паймушин В.Н., Луканкин С.А. //Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. 2011. т.1 – М.: ООО «ТР-принт»,– С.154-157.
51. Луканкин С.А. Метод интегрирующих матриц в задачах устойчивости плоских криволинейных стержней./ Луканкин С.А., Холмогоров С.А., Карпиков Ю.А., Полякова Н.В. // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. 2011. т.1 – М.: ООО «ТР-принт», – С.132-134.
52. Паймушин В.Н. Вычислительно-экспериментальный метод определения механических характеристик заполнителей при испытании на сдвиг./ Паймушин В.Н., Закиров И.М., Луканкин С.А. // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г.Горшкова., – М: ООО «ТР-принт», 2012. т.2, – С.61-63.
53. Паймушин В.Н. Неклассические формы потери устойчивости при растяжении двух соосных цилиндрических оболочек, соединяемых через шпангоут./ Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г.Горшкова., – М: ООО «ТР-принт», 2012. т.2, – С.64-67.
54. Паймушин В.Н. Исследование неклассических форм потери устойчивости двух соосных цилиндрических оболочек, соединенных через шпангоут, с учетом деформационных параметрических слагаемых. / Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. // Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г.Горшкова. Т.2.–М: ООО «ТР-принт», 2013,

– С.119–124.
55. Паймушин В.Н. Численные исследования неклассических форм потери устойчивости составной оболочечно-стержневой конструкции. / Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Холмогоров С.А. // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г.Горшкова. –М: ООО «ТР-принт», 2015, – С.192–196.
56. Паймушин В.Н. Численные исследование напряженно-деформированного состояния тест-образцов из волокнистых композитов со структурой ±45 при растяжении и сжатии. / Паймушин В.Н., Луканкин С.А., Газизуллин Р.К. // Материалы XXI Международной конференции по вычислительной математике и современным прикладным программным системам (ВМСППС2019) Материалы конференции. – 2019, – С.323–325.
57. Луканкин С.А. Моделирование докритического статического деформирования и устойчивости многослойных оболочек со слоями переменной толщины. / Луканкин С.А.// Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО "ТРП", 2020. – С. 137-140.
58. Луканкин С.А. Построение оптимального алгоритма определения достоверных численных значений параметра критической нагрузки и функций формы потери устойчивости многослойных тонкостенных конструкций со слоями переменной толщины./ Луканкин С.А. // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТРП", 2020. – С. 93-95.
59. Луканкин С.А. Комбинированная математическая модель механики деформирования стыков конструктивных элементов ЛА из КМ. / Луканкин С.А. // "XIX Гагаринские чтения" Тез. докл. молодеж. науч.- тех. конф., – М.: МАТИ, – 1993. – С.74.
60. Саитов И.Х. Исследование работоспособности соединений трехслойных тонкостенных авиационных конструкций из композиционных материалов. / Саитов И.Х., Луканкин С.А. // Тез. докл. науч. -тех. конф. "НИЧ КАИ-50 лет", – Казань: Изд-во КГТУ, – 1994. – С.35.
61. Луканкин С.А. Система физических соотношений для композитных материалов в комбинированной теории многослойных оболочек со слоями сложной геометрии. / Луканкин С.А. // Тез. докл. науч. -тех. конф. "НИЧ КАИ-50 лет", – Казань: Изд-во КГТУ, – 1994. – С.34.
62. Саитов И.Х. Соединения элементов из композиционных материалов в авиационных конструкциях и их уточненные модели деформирования. / Саитов И.Х., Луканкин С.А.// Тез. докл. Всерос. науч. -тех. конф. "Тех. обеспеч. создания и развития возд.-трансп. средств", – Казань: Изд-во КГТУ, –1994. – С.43.
63. Луканкин С.А. Уточненный подход к учету эффекта неоднородности слоев на распределение трансверсальных напряжений в многослойных элементах конструкции воздушно-транспортных средств./ Луканкин С.А., Рахманкулов Н.У. // Тез. докл. Всерос. науч. -тех. конф. "Тех. обеспеч. создания и развития возд.-трансп. средств", – Казань: Изд-во КГТУ, – 1994. – С.57.
64. Бушков А.А. Уточненная математическая модель геометрически - нелинейного термоупругого деформирования трехслойных цилиндрических и сферических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины./ Бушков А.А., Иванов В.А., Луканкин С.А.// Интеллектуальные системы и информационные технологии: Труды республиканской научно-технологической конференции. – Казань: Отечество, – 2001. – С. 232-234.
65. Паймушин В.Н. Разработка общей теории и методов решения задач устойчивости упругих трехслойных пластин и оболочек для исследования синфазных, антифазных, сдвиговых и смешанных форм выпучивания./ Паймушин В.Н., Бобров С.Н., Голованов А.И., Иванов В.А., Луканкин С.А., Муштари А.И., Полякова Т.В.// Информационный бюллетень РФФИ, 5 (1997), 1 (январь), – С.222.

66. Паймушин В.Н. Разработка общей теории и методов решения задач устойчивости упругих трехслойных пластин и оболочек для исследования синфазных, антифазных, сдвиговых и смешанных форм выпучивания. / Паймушин В.Н., Иванов В.А., Карчевский М.М., Полякова Т.В., Голованов А.И., Луканкин С.А., Муштари А.И., Бобров С.Н.// Информационный бюллетень РФФИ, 7 (1999), 1 (январь), – С.153.

Патенты

67. Паймушин В.Н. Способ проведения испытаний на сдвиг и устройство для его реализации./ Паймушин В.Н., Закиров И.М., Луканкин С.А., Талаков М.А., Каримова Г.Г. // Патент на изобретение № 2511624 от 07.02.2014.
68. Юрис В.Г. Крыло летательного аппарата из полимерного композиционного материала. / Юрис В.Г., (…) Луканкин С.А.// Патент на полезную модель RU 165349 U1, 10.10.2016.
69. Юрис В.Г. Крыло летательного аппарата из полимерного композиционного материала. / Юрис В.Г., (…) Луканкин С.А.// Патент на изобретение RU 2613661 C, 21.03.2017.

Свидетельства о государственной регистрации програм

70. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020662198. Конечно-элементный программный комплекс на базе конечных элементов с численным интегрированием для определения параметров напряженно-деформированного состояния осесимметричной оболочки типа Тимошенко /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 09.10.2020 г.
71. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020661968. Определение классических и неклассических форм потери устойчивости цилиндрической оболочки типа Тимошенко /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 05.10.2020 г.
72. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020665555. Формирование модифицированных интегрирующих матриц 1-го и 2-го типов на узлах полиномов Лежандра /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 27.10.2020 г.
73. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020662084. Определение классических и неклассических форм потери устойчивости составной конструкции в виде подкрепленной стержнем пластины /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 07.10.2020 г.
74. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020662454. Определение форм потери устойчивости цилиндрической оболочки типа Тимошенко при кручении на основе использования модифицированного метода интегрирующих матриц /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 14.10.2020 г.
75. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020662043. Численно-экспериментальный метод определения достоверных значений физико-механических и прочностных характеристик заполнителя при сдвиге /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 07.10.2020 г.
76. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020662199. Определение классических и неклассических форм потери устойчивости цилиндрической оболочки типа Тимошенко при внешнем давлении по статическому и динамическому критерию устойчивости /С.А.Луканкин, С.А.Холмогоров, Р.К.Газизуллин; зарег. в Реестре программ для ЭВМ 09.10.2020 г.