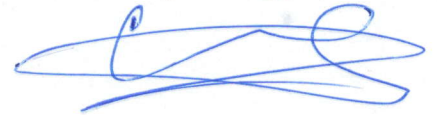


На правах рукописи



СИДОРОВ Станислав Михайлович

**ПОЛУМАРКОВСКИЕ И СКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ
МОДЕЛИ СИСТЕМ С РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ**

**05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой
степени кандидата технических наук

Севастополь – 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Севастопольский государственный университет».

Научный руководитель: **Обжерин Юрий Евгеньевич**
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры
«Высшая математика» ФГАОУ ВО «СевГУ»

Официальные
оппоненты: **Рябченко Владимир Николаевич,**
доктор технических наук, доцент, главный технолог АО
«НТЦ ФСК ЕЭС», г. Москва; профессор кафедры
«Системы автоматического управления», факультет РКТ,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва.

Бойченко Олег Валериевич,
доктор технических наук, профессор, профессор
кафедры бизнес-информатики и математического
моделирования, Институт экономики и управления
ФГАОУ ВО "Крымский федеральный университет им.
В.И. Вернадского", г. Симферополь.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева
Сибирского отделения Российской академии наук, г.
Иркутск.

Защита диссертации состоится 26 января 2021 г. в 15:00 часов на заседании
объединенного диссертационного совета Д 999.231.02 при Федеральном государственном
бюджетном научном учреждении Институте природно-технических систем (ИПТС),
Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего
образования «Севастопольский государственный университет» по адресу: **299053, г.
Севастополь, ул. Университетская, 33.**

С диссертацией можно ознакомиться у ученого секретаря ИПТС (или в библиотеке
СевГУ) и на сайте www.иптс.рф. Автореферат размещен на официальном сайте Высшей
аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации
[http:// vak.minobrnauki.gov.ru /](http://vak.minobrnauki.gov.ru/) и на сайте www.иптс.рф.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах с подписью составителя, заверенные
печатью организации, просим направлять по адресу: 299011, г. Севастополь, ул. Ленина, 28
на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.999.231.02
кандидат физико- математических
наук



В.П. Евстигнеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. При проектировании и эксплуатации систем большое внимание уделяется надежности и эффективности как самой системы в целом, так и отдельных ее компонентов. Вопросам надежности систем различного назначения посвящены работы Ф. Байхельта, Р. Барлоу, Ю.К. Беляева, Г.В. Дружинина, В.А. Каштанова, В.С. Королюка, А.Ф. Турбина, Г.Н. Антонова, Ю.Н. Руденко, Н.А. Северцева, Г.Н. Черкесова, Б.П. Креденцера, И.А. Ушакова, А. Birolini, F. Grabski и др. Существуют различные способы повышения надежности и эффективности функционирования систем, одним из которых является временное резервирование. Оно получило довольно широкое применение, как требующее сравнительно меньших затрат и позволяющее значительно повысить надёжность и гибкость системы.

Временное резервирование — это метод повышения надёжности и эффективности систем, при котором системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать некоторое дополнительное время (резерв времени) на восстановление характеристик. Для систем с временным резервированием нарушение работоспособности системы не обязательно сопровождается отказом системы, так как имеется возможность восстановить работоспособность системы за резервное время.

Резерв времени может создаваться за счёт увеличения времени, выделяемого системе для выполнения задания и называемого оперативным временем. Он может возникать при создании запаса производительности всей системы или отдельных её элементов. Наличие резерва времени характерно для систем, обладающих функциональной инерционностью. Источниками резерва времени являются промежуточные накопители, используемые в автоматизированном производстве и в информационных системах.

Временное резервирование применяется в газотранспортных системах, в которых источником резерва времени являются подземные хранилища газа, в энергетических системах резерв времени реализуется за счёт накопителей энергии большой ёмкости. Отметим, что в связи с появлением в последнее время и использованием накопителей энергии все большей емкости, возрастает интерес к моделированию систем с резервом времени.

Наличие резерва времени связано с человеческой надёжностью: он даёт возможность устранить последствия ошибок оператора.

Существенный вклад в исследования систем с резервом времени внесли Креденцер Б.П., Черкесов Г.Н., Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И. Вопросам исследования систем с резервом времени посвящены работы авторов Бобовича Л.М., Гениса Я.Г., Гильмана А.С., Дружинина Г.В., Зедгенидзе Г.Г., Зеленцова В.А., Харченко В.С., Новикова Е.В., Ушакова И.А., Калимулиной Э.Ю. и др. Исследования зарубежных авторов представлены в работах Barnes A.K. et al., Birolini A., Dong W. et al., Jia X. et al., Kakubava R.V., Khurodze R.A., Kumar G. et al., Kumar V.P., Wang S.J., Mendes A.A. et al., Wu X., Hillston J., Wu X., Yu H., Yan H. et al., Yao D.D., Buzacott J.A. и др.

Однако в своей монографии Ушаков И.А. отмечает, что этот метод резервирования исследован менее подробно, по сравнению с другими видами резервирования и требуются дополнительные исследования в этой области.

В ряде работ для построения моделей систем и исследования их надёжности и эффективности используется теория полумарковских процессов, скрытые марковские и скрытые полумарковские модели. В большинстве работ применяются полумарковские процессы с конечным или счётным множеством состояний. Следует отметить, что полумарковские процессы и скрытые полумарковские модели с общим фазовым пространством состояний ещё недостаточно широко вошли в практику моделирования систем.

Современные большие системы характеризуются большим числом элементов, разнообразием связей, сложной структурой. При использовании таких систем, для которых построена полумарковская модель, не всегда удаётся при изменениях её состояний полностью получить информацию, содержащуюся в кодировке состояний, а есть только возможность

получить некоторый сигнал (информацию), связанный с состояниями вложенной цепи Маркова (полумарковского процесса). Например, в фазовом состоянии полумарковского процесса для каждого элемента системы указано находится ли он в рабочем состоянии или на восстановлении, а при использовании системы можно получить сигнал только о числе работоспособных элементов. Для систем массового обслуживания, например, могут быть получены данные только о числе свободных приборов, а не о состоянии каждого прибора, содержащиеся в фазовых состояниях. При использовании систем, бывает сложно или невозможно получить значения дополнительных непрерывных компонент, которые несут полезную информацию о функционировании системы. В этих случаях состояния вложенной цепи Маркова (ВЦМ) можно считать скрытыми (ненаблюдаемыми). Поэтому возникает задача нахождения оценок характеристик вложенной цепи Маркова и полумарковского процесса на основе наблюдаемого вектора сигналов. Это можно сделать, используя скрытые марковские и скрытые полумарковские модели.

Использование аппарата теории скрытых марковских моделей (СММ) и скрытых полумарковских моделей (СПММ) получило широкое распространение в последние десятилетия, что обуславливается большим количеством публикаций и разнообразием сфер применения. СММ и СПММ применяются во многих отраслях науки и техники: распознавании речи, текста, сигналов; биоинформатике и медицине; моделировании временных рядов; экономике; энергетике; промышленности и др. Однако, большинство публикаций по данной тематике на иностранном языке, в то время как русскоязычных публикаций сравнительно мало.

Целью данной работы является разработка и развитие методов математического моделирования восстанавливаемых технологических систем с резервом времени и их моделей на основе полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний и скрытых марковских моделей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **следующие задачи**:

1. Анализ современной литературы по временному резервированию и скрытым марковским моделям.
2. Разработка полумарковских моделей производительности технологической ячейки с учетом наличия мгновенно пополняемого резерва времени.
3. Разработка полумарковских моделей функционирования двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени.
4. Развитие приближённых аналитических методов анализа систем с резервом времени на основе использования алгоритмов асимптотического и стационарного фазового укрупнения.
5. Анализ влияния величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности систем.
6. Разработка методики построения скрытой марковской модели для систем с резервом времени.
7. Разработка скрытых марковских моделей систем с резервом времени.

Объект исследования – процессы функционирования восстанавливаемых технологических систем с резервом времени.

Предмет исследования – полумарковские и скрытые марковские модели восстанавливаемых технологических систем с резервом времени.

Соответствие шифру специальности. Работа соответствует паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и охватывает следующие области исследования, входящие в специальность:

- пункт 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;
- пункт 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;
- пункт 5. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Научная новизна:

1. Впервые разработаны полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени и получены расчетные формулы их характеристик надежности и эффективности.
2. Впервые разработаны полумарковские модели производительности технологической ячейки с учетом наличия мгновенно пополняемого резерва времени и получены расчетные формулы производительности.
3. Предложена методика построения скрытой марковской модели на основе укрупненной полумарковской модели с резервом времени.
4. На основе предложенной методики, впервые разработаны скрытые марковские модели систем с резервом времени, допускающих построение полумарковской модели.
5. Разработаны компьютерные программы расчета характеристик надежности систем с резервом времени, решения задач, связанных со скрытыми марковскими моделями.

Научная и практическая значимость заключается в следующем:

1. Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели позволяют анализировать влияние величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности систем различного назначения.
2. Полученные формулы позволяют рассчитывать стационарные характеристики надежности и эффективности систем различного назначения с учетом резерва времени, решать оптимизационные задачи распределения резерва времени между элементами системы.
3. Разработанные скрытые марковские модели систем позволяют прогнозировать состояния системы на основе полученного вектора сигналов, находить наиболее вероятные последовательности состояний по сигналам.
4. Полученные результаты можно использовать для систем различного назначения.
5. Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели могут быть использованы для создания на их основе алгоритмов и информационных систем поддержки принятия решений при проектировании и эксплуатации систем различного назначения, а также прогнозирования их состояний.
6. Результаты анализа надежности и эффективности нефтепровода с поэлементными резервуарными парками при должной технологической переформулировке можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.

Методология и методы исследования. Результаты работы базируются на применении следующих аппаратов исследований: теории марковских и полумарковских процессов, скрытых марковских и скрытых полумарковских моделях, теории вероятностей, методов математического моделирования, теории надежности, теории восстановления, теории интегральных уравнений, теории принятия решений и др.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени и их характеристики надежности и эффективности.
2. Полумарковские модели и формулы производительности технологической ячейки с учетом наличия резерва времени.
3. Методика построения скрытых марковских моделей на основе укрупненной полумарковской модели системы.
4. Скрытые марковские модели на основе укрупненных полумарковских моделей систем с резервом времени.

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы обеспечены корректным использованием математического аппарата, строгостью выводов аналитических формул, апробацией на научно-технических конференциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда

фундаментальных исследований № 15-01-05840а и № 18-01-00392а, а также в рамках основной части государственного заказа № 1.10513.2018/11.12 Министерством образования и науки Российской Федерации.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях: Международная научно-технической конференции «Прикладные задачи математики», г. Севастополь, (2015-2018 гг.); Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологических систем», г. Москва, (2015-2016 гг.); Международная научно-техническая конференция «Автоматизация: проблемы, идеи, решения», г. Севастополь, (2015 г.); Международная научно-техническая конференция «Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения», г. Севастополь, (2016-2017, 2020 гг.); Международная научно-техническая конференция «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении» (ICMTMTE), г. Севастополь, (2017-2020 гг.); Международная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN), г. Москва, (2018-2019 гг.); Международный научный семинар «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», г. Иркутск, оз. Байкал, (2018 г.); Международный научный семинар «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», г. Ташкент, Республика Узбекистан, (2019 г.); Международный научный семинар «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», г. Казань, (2020 г.); XV Международная научно-техническая конференция «Динамика технических систем» (ДТС-2019), г. Ростов-на-Дону, (2019 г.); XV международная конференция по электромеханике и робототехнике «Завалишинские чтения — 2020», г. Уфа, (2020 г.).

Публикации результатов исследования. Основные результаты по теме диссертации изложены в 30 работах: 11 статей опубликовано в изданиях, входящих в международные базы Scopus и Web of Science [1-11] (Scopus Q2 – работы [5, 6], Scopus Q3 – [2, 10, 11]), 11 статей в других изданиях [14-24], 6 тезисов докладов [25-30], а также два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [12, 13].

Личный вклад. Все исследования, составляющие основное содержание диссертационной работы, проведены автором лично в процессе научной деятельности либо при его непосредственном участии. В совместно опубликованных работах научному руководителю принадлежат постановки задач. Все известные результаты, полученные другими авторами, указаны в работе со ссылками на оригиналы. В работах с соавторами, лично соискателю принадлежат следующие материалы: [1] – построение математической модели производительности ТЯ, анализ влияния величины резерва времени на производительность системы; [24] – построение полумарковской модели производительности ТЯ с мгновенно пополняемым РВ без прекращения обработки единицы продукции, решение системы интегральных уравнений; [3, 14] – построение полумарковской модели двухкомпонентной системы с резервом времени, нахождение приближенных характеристик надежности с применением АФУ; [9, 22] – построение полумарковской модели, решение системы интегральных уравнений для определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова (ВЦМ), вычисление стационарных характеристик надежности и эффективности функционирования многокомпонентной системы с поэтапным РВ; [4] – построение полумарковской модели, решение системы интегральных уравнений для вычисления стационарного распределения ВЦМ, определения стационарных характеристик надежности двухкомпонентной системы с резервом времени; [5, 23] – построение укрупненной полумарковской модели и скрытой марковской модели двухкомпонентной системы с резервом времени, решение основных задач СММ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка условных сокращений, списка условных обозначений, списка использованной литературы (149 наименований) и 10 приложений. Общий объем работы составляет 221 страниц.

Основной текст работы изложен на 138 страницах, включает 13 таблиц и 14 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе построены полумарковские модели производительности технологической ячейки (ТЯ) с мгновенно пополняемым резервом времени с прекращением и без прекращения обработки.

В параграфе 1.1 построена математическая модель функционирования ТЯ с прекращением обработки единицы продукции.

Рассмотрено функционирование системы S , состоящей из ТЯ, обрабатывающей продукцию и имеющей мгновенно пополняемый резерв времени. В начальный момент времени ТЯ приступает к обработке продукции. Время обработки ТЯ единицы продукции – случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t)=P(\alpha_1 \leq t)$ и плотностью распределения (ПР) $f_1(t)$. Время безотказной работы ТЯ – СВ α_2 с ФР $F_2(t)=P(\alpha_2 \leq t)$ и ПР $f_2(t)$. При наступлении неисправности ТЯ, начинается ее восстановление, время восстановления ТЯ – СВ β с ФР $G(t)=P(\beta \leq t)$ и ПР $g(t)$. Отказ системы S наступает в момент времени, когда время восстановления ТЯ станет равным τ ($\tau > 0$, $\tau = \text{const}$) и продолжается до восстановления ТЯ. При этом предполагается, что к моменту восстановления ТЯ резерв времени пополняется до уровня τ . При наступлении неисправности ТЯ обработка единицы продукции прекращается: если время восстановления $\beta \leq \tau$, то после восстановления ТЯ обработка единицы продукции продолжается, в противном случае ($\beta > \tau$) после восстановления ТЯ начинается обработка новой единицы продукции. Предполагается, что СВ α_1 , α_2 , β независимы и имеют конечные математические ожидания.

Временная диаграмма функционирования системы изображена на Рисунке 1. На временной диаграмме ломаной линией показана неисправность ТЯ, жирной линией – резерв времени τ .

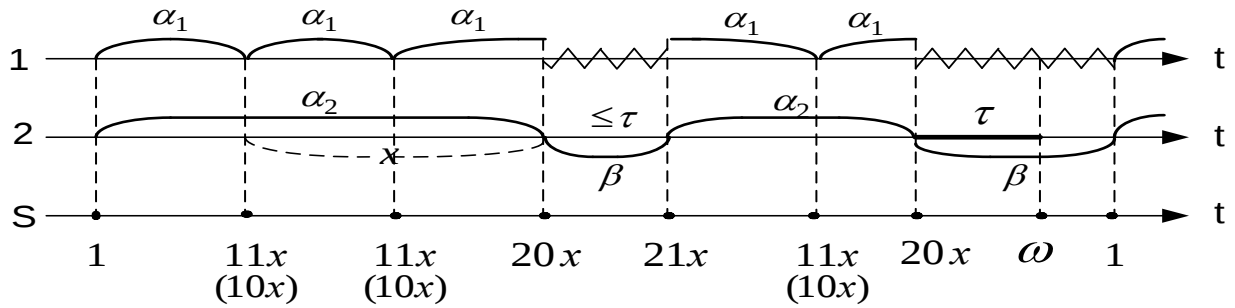


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования системы

Получена формула для расчета производительности ТЯ с мгновенно пополняемым РВ:

$$P_{ТЯ} = \frac{\bar{\Phi}_1(0)}{M(\alpha_1 \wedge \alpha_2) + \frac{M\beta}{G(\tau)} + \int_0^\infty \bar{\Phi}_1(x) \bar{F}_1(x) dx + G(\tau) \int_0^\infty \bar{\Phi}_2(x) \bar{F}_2(x) dx}, \quad (1)$$

где:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i(0) &= \int_0^\infty \varphi_i(x) dx, \quad \bar{\Phi}_i(x) = \int_x^\infty \varphi_i(t) dt, i=1,2, \\ \varphi_1(x) &= \int_0^\infty f_2(x+t) h_{f_1}(t) dt + \int_0^\infty \pi_1(x, y) dy \int_0^\infty f_2(y+t) h_{f_1}(t) dt + \\ &+ \int_0^\infty \gamma_2(x, t) dt \int_0^\infty f_1(y+t) h_{f_2}^{(\tau)}(y) dy + \int_0^\infty \pi_1(x, y) dy \int_0^\infty \gamma_2(y, t) dt \int_0^\infty f_1(z+t) h_{f_2}^{(\tau)}(z) dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) = & \frac{1}{G(\tau)} \int_0^\infty f_1(x+t) h_{f_2}^{(\tau)}(t) dt + \frac{1}{G(\tau)} \int_0^\infty \pi_2(x, y) dy \int_0^\infty f_1(y+t) h_{f_2}^{(\tau)}(t) dt + \\ & + \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x, t) dt \int_0^\infty f_2(y+t) h_{f_1}(y) dy + \int_0^\infty \pi_2(x, y) dy \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(y, t) dt \int_0^\infty f_2(z+t) h_{f_1}(z) dz,\end{aligned}$$

$h_{f_1}(t) = \sum_{n=1}^\infty f_1^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_{f_1}(t)$ процесса восстановления, порожденного СВ α_1 , $f_1^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка плотности распределения $f_1(t)$;
 $h_{f_2}^{(\tau)}(t) = \sum_{n=1}^\infty G^n(\tau) f_2^{*(n)}(t)$;

$$\gamma_1^{(\tau)}(x, t) = f_1(x+t) + \int_0^\infty h_{f_2}^{(\tau)}(y) f_1(x+y+t) dy, \quad \gamma_2(x, t) = f_2(x+t) + \int_0^\infty h_{f_1}(y) f_2(x+y+t) dy,$$

$$k_i^{(n)}(x, y) = \int_0^\infty k_i(x, t) k_i^{(n-1)}(t, y) dt, \quad k_1^{(1)}(x, y) = k_1(x, y) = G(\tau) \int_0^\infty \gamma_2(x, t) \gamma_1^{(\tau)}(t, y) dt,$$

$$k_2^{(1)}(x, y) = k_2(x, y) = G(\tau) \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x, t) \gamma_2(t, y) dt, \quad \pi_i(x, y) = \sum_{n=1}^\infty k_i^{(n)}(x, y).$$

В случае, когда все СВ имеют экспоненциальное распределение, получаем формулу:

$$P_{\text{т.я.}} = \frac{M\alpha_2(M\alpha_1 + M\alpha_2)^2}{M\alpha_1 M\alpha_2 \left((M\alpha_1 + M\alpha_2)^2 + 2M\alpha_1 M\alpha_2 + \bar{G}(\tau)(M\alpha_1)^2 \right) + (M\beta + \tau \bar{G}(\tau))(M\alpha_1 + M\alpha_2)^2}. \quad (2)$$

В параграфе 1.2 построена полумарковская модель функционирования ТЯ без прекращения обработки единицы продукции.

Временная диаграмма функционирования системы представлена на Рисунке 2.

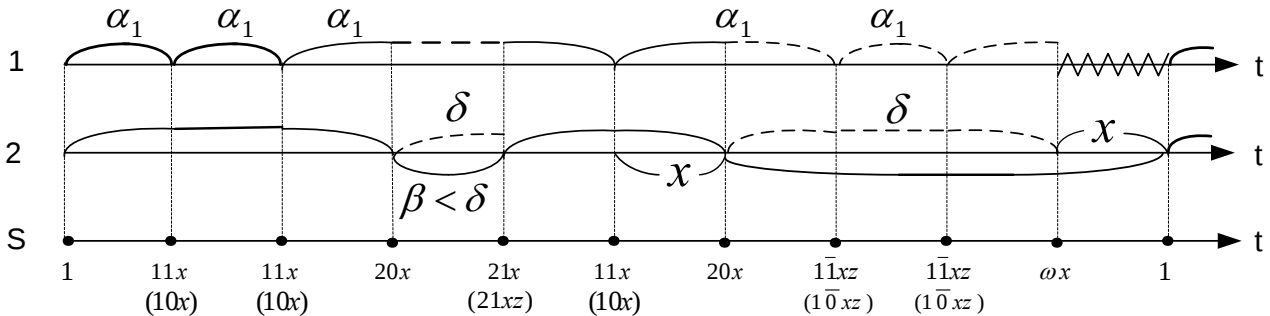


Рисунок 2 – Временная диаграмма функционирования системы

Получена и решена система интегральных уравнений для стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$. В случае, когда время обработки ТЯ единицы продукции, время безотказной работы ТЯ, время восстановления ТЯ имеют экспоненциальное распределение с функциями распределения $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$, $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$; резерв времени является случайным и имеет экспоненциальное распределение с ФР $R(t) = 1 - e^{-ht}$, получаем формулу:

$$P_{\text{т.я.}} = \frac{\lambda_1 \mu (\lambda_2 + \mu + h)}{(\lambda_2 + \mu)(\mu + h)}. \quad (3)$$

В параграфе 1.3 проведен анализ влияния величины резерва времени на производительность ТЯ на примере системы, которая является частным случаем системы из

параграфа 1.2 (время обработки ТЯ единицы продукции, время безотказной работы ТЯ, время восстановления ТЯ имеют экспоненциальное распределение, а резерв времени – общего вида).

В случае, когда резерв времени имеет распределение общего вида $R(t)=P(\delta \leq t)$:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{\mu}{\mu + \lambda_2} (\lambda_1 + \lambda_2 \int_0^{\infty} \bar{R}(t) h_{\bar{g}}(t) dt). \quad (4)$$

где $\bar{R}(t) = 1 - R(t)$, $\tilde{g}(t) = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \mu)t}$, $h_{\bar{g}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}^{*(n)}(t)$, $\tilde{g}^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка функции $\tilde{g}(t)$.

Если РВ является случайным и имеет экспоненциальное распределение с ФР $R(t) = 1 - e^{-\tau t}$, то:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{\lambda_1 \mu (\lambda_2 + \mu + \tau)}{(\lambda_2 + \mu)(\mu + \tau)}. \quad (5)$$

Отметим, что формула (5) совпадает с формулой (4), при $\tau = h$.

В случае, когда РВ является постоянным, то есть $\delta = \tau = const$, $R(t) = 1(t - \tau)$:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_2} (\mu + \lambda_2 (1 - e^{-\mu \tau})). \quad (6)$$

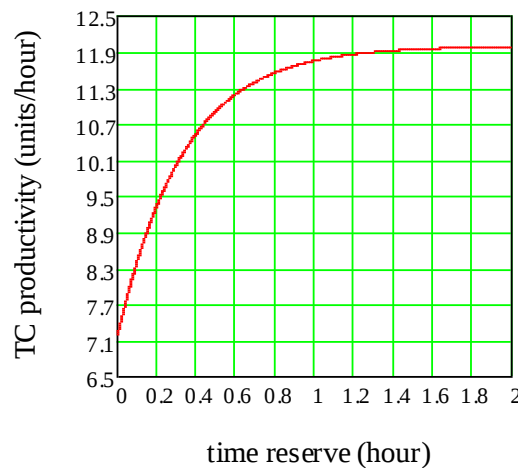


Рисунок 3 – Влияние резерва времени на производительность ТЯ

На Рисунке 3 показано влияние резерва времени на производительность ТЯ.

Во второй главе построена полумарковская модель двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени, найдены стационарные характеристики надежности. С использованием алгоритма стационарного фазового укрупнения найдены характеристики надежности, рассматриваемой системы.

В параграфе 2.1 построена модель двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени с функциями распределения случайных величин общего вида.

Рассмотрена система S , состоящая из 2-х элементов, времена безотказной работы которых СВ α_i с ФР $F_i(t)$, а времена восстановления – СВ β_i с ФР $G_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$. Каждый элемент системы имеет случайный мгновенно пополняемый резерв времени τ_i с ФР $R_i(t)$. СВ α_i , β_i , τ_i предполагаются независимыми в совокупности, имеющими конечные математические ожидания; ФР $F_i(t)$, $G_i(t)$, $R_i(t)$ – имеющими плотности $f_i(t)$, $g_i(t)$, $r_i(t)$.

Резерв времени начинает использоваться в момент начала восстановления элемента. Отказ системы S наступает тогда, когда оба элемента восстанавливаются и полностью израсходован резерв времени для каждого элемента. Он продолжается до восстановления одного из отказавших

элементов, при этом резерв времени у восстановленного элемента мгновенно пополняется до уровня τ_i .

Временная диаграмма функционирования системы представлена на Рисунке 4.

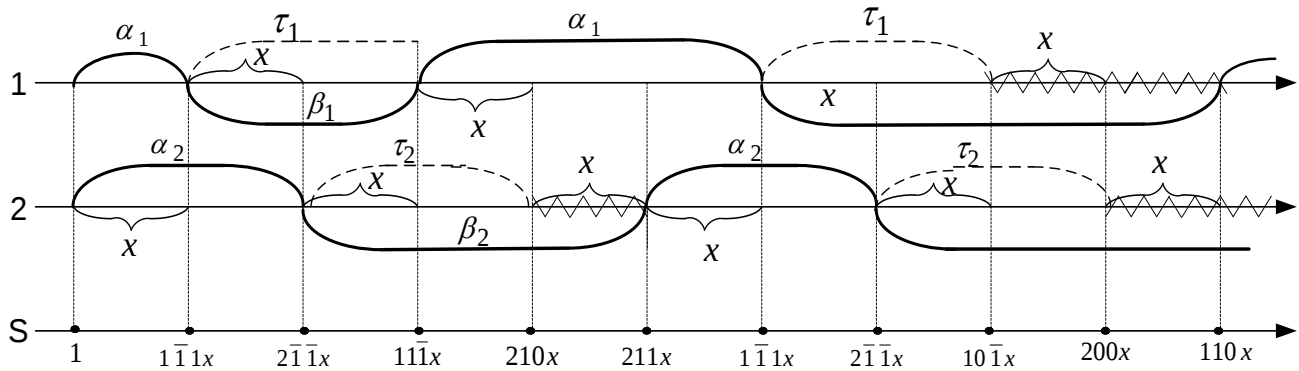


Рисунок 4 – Временная диаграмма функционирования системы

Для рассматриваемой системы получена и решена система интегральных уравнений для стационарного распределения ВЦМ, найдено стационарное распределение ВЦМ.

Средняя стационарная наработка системы на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления системы T_- и стационарного коэффициента готовности K_r имеют вид:

$$T_+ = \frac{p_1 M([\beta_1 - \tau_1]^+) (M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)) + p_2 M([\beta_2 - \tau_2]^+) (M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1))}{p_1 p_2 (M([\beta_1 - \tau_1]^+) + M([\beta_2 - \tau_2]^+))} + \frac{(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1))(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2))}{p_1 p_2 (M([\beta_1 - \tau_1]^+) + M([\beta_2 - \tau_2]^+))}, \quad (7)$$

$$T_- = \frac{M([\beta_1 - \tau_1]^+) M([\beta_2 - \tau_2]^+)}{M([\beta_1 - \tau_1]^+) + M([\beta_2 - \tau_2]^+)}, \quad (8)$$

$$K_r = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (9)$$

где $p_i = P(\beta_i > \tau_i) = \int_0^\infty \bar{G}_i(t) r_i(t) dt$, $M(\beta_i \wedge \tau_i) = \int_0^\infty \bar{G}_i(t) \bar{R}_i(t) dt$, $M([\beta_i - \tau_i]^+) = \int_0^\infty \bar{G}_i(t) R_i(t) dt / P(\beta_i > \tau_i)$, $i=1,2$.

Таблица 1. Влияние резерва времени на характеристики надежности

h_1 , ч.	h_2 , ч.	$T_-(h_1, h_2)$, ч.	$T_+(h_1, h_2)$, ч.	$K_r(h_1, h_2)$
0	0	0,385	49,551	0,99230
0	0,7	0,241	102,274	0,99765
0,1	0,6	0,241	91,035	0,99736
0,2	0,5	0,238	84,365	0,99719
0,3	0,4	0,233	82,291	0,99717
0,4	0,3	0,228	85,172	0,99733
0,5	0,2	0,224	93,617	0,99762
0,6	0,1	0,219	108,690	0,99799
0,7	0	0,214	132,300	0,99839

В Таблице 1 представлены значения средней стационарной наработки на отказ, среднего стационарного времени восстановления и стационарного коэффициента готовности рассматриваемой системы, при условии, что каждый элемент имеет неслучайный резерв времени, который изменяется от 0 до 0,7 часа с шагом 0,1 ч и $h_1 + h_2 = 0,7$. Время безотказной работы элементов K_1 и K_2 равны $M\alpha_1 = 8,33$ ч., $M\alpha_2 = 6,25$ ч.; времена восстановления элементов K_1 и K_2 равны $M\beta_1 = 0,71$ ч., $M\beta_2 = 0,83$ ч., СВ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ имеют распределение Эрланга 5-го порядка.

В параграфе 2.2 определяются характеристики надежности рассматриваемой в 2.1 системы, используя алгоритм стационарного фазового укрупнения. Следует отметить, что результаты, полученные для стационарных характеристик надежности по укрупненной модели, совпадают с результатами для исходной модели.

Используя приближенный метод асимптотического фазового укрупнения, в параграфе 2.3 приближенно находятся стационарные характеристики двухкомпонентной системы, у которой резерв времени есть только у одного элемента. Средняя стационарная наработка системы на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления системы T_- имеют вид:

$$T_+ \approx \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + \int_0^h \bar{F}_2(x) dx \int_0^x \bar{G}_1(t) dt + \int_0^h \bar{G}_1(t) dt \int_h^\infty \bar{F}_2(x) dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x) dx \int_0^x \bar{G}_2(t) dt}{\bar{G}_1(h) \left(\int_0^h \bar{F}_2(x) \bar{G}_2(h-x) dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x) \bar{G}_2(x+h) dx \right)}. \quad (10)$$

$$T_- \approx \frac{\int_h^\infty \bar{G}_1(y) dy \int_0^\infty \bar{F}_1(x) \bar{G}_2(x+y) dx + \int_h^\infty \bar{G}_1(y) dy \int_0^h \bar{F}_2(x) \bar{G}_2(y-x) dx}{\bar{G}_1(h) \left(\int_0^h \bar{F}_2(x) \bar{G}_2(h-x) dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x) \bar{G}_2(x+h) dx \right)}. \quad (11)$$

Таблица 2. Значения стационарных характеристик системы при различном РВ

h	T_+	T_-	K_r
0	70,347	0,393	0,99444
0,1	71,143	0,359	0,99498
0,2	72,851	0,322	0,99561
0,3	77,308	0,287	0,9963
0,4	86,281	0,259	0,99701
0,5	101,574	0,236	0,99768
0,6	125,693	0,219	0,99826
0,7	162,566	0,206	0,99873

Таблица 3. Сравнение коэффициентов готовности

h	Точные формулы	Приближенные формулы	Погрешность
0	0,99230	0,99444	0,00214
0,1	0,99324	0,99498	0,00174
0,2	0,99421	0,99561	0,0014
0,3	0,99520	0,99630	0,0011
0,4	0,99615	0,99701	0,00086
0,5	0,99702	0,99768	0,00066
0,6	0,99777	0,99826	0,00049
0,7	0,99839	0,99873	0,00034

В таблице 2 представлены расчеты по формулам (10), (11), (9) при различном значении величины РВ. Данная система соответствует системе, рассмотренной в разделе 2.1, когда резерв времени у второго компонента отсутствует. В Таблице 3 приведено сравнение результатов расчетов коэффициента готовности для системы из примера 2.1 (резерв времени второго элемента отсутствует, т.е. $h_2=0$). Резерв времени h изменяется от 0 до 0,7 часа с шагом 0,1 ч.

Таким образом, погрешность расчетов при использовании приближенных формул (10)-(11) составляет менее 1%.

В третьей главе разработана полумарковская модель многокомпонентной системы с поэлементным резервом времени, определены стационарное распределение и стационарные характеристики надежности и эффективности в общем виде.

В параграфе 3.1 построена полумарковская модель многокомпонентной системы с

поэлементным мгновенно пополняемым РВ (обобщение на случай N-компонент системы из 2.1).

Стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$\rho(i\bar{d}) = \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho_{d_k}^{(k)} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \bar{V}_{d_j}^{(j)}(x_j), \quad (12)$$

где константа ρ_0 находится из условия нормировки,

$$\rho_z^{(k)} = \begin{cases} \rho^{(k)}, & \text{если } z = 1, \bar{1}, \\ \bar{\rho}^{(k)}, & \text{если } z = 0, \end{cases} \quad \rho^{(k)} = \frac{1}{2 + P(\beta_k > \tau_k)}, \quad \bar{\rho}^{(k)} = \frac{P(\beta_k > \tau_k)}{2 + P(\beta_k > \tau_k)}, \quad \bar{\rho}^{(k)} = \rho^{(k)} \cdot P(\beta_k > \tau_k),$$

$V_z^{(k)}(t) = P(\delta_z^{(k)} < t)$ – ФР СВ $\delta_z^{(k)}$, $\bar{V}_z^{(k)}(t) = 1 - V_z^{(k)}(t)$, $v_z^{(k)}(t)$ – плотности распределения вероятностей СВ $\delta_z^{(k)}$:

$$v_1^{(k)}(t) = f_k(t), \quad v_{\bar{1}}^{(k)}(t) = \bar{R}_k(t)g_k(t) + \bar{G}_k(t)r_k(t), \quad v_0^{(k)}(t) = \int_0^\infty g_k(x+t)r_k(x)dx / P(\beta_k > \tau_k).$$

Случайные величины $\delta_z^{(k)}$ задаются следующим образом:

$$\delta_z^{(k)} = \begin{cases} \alpha_k, & \text{если } z = 1, \\ \beta_k \wedge \tau_k, & \text{если } z = \bar{1} \\ [\beta_k - \tau_k]^+, & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

где $\wedge$ – знак минимума, $[\beta_k - \tau_k]^+$ – СВ, ФР которой определяется равенством

$$P([\beta_k - \tau_k]^+ \leq t) = 1 - \frac{\int_0^\infty \bar{G}_k(y+t)r_k(y)dy}{P(\beta_k > \tau_k)}.$$

В параграфе 3.2 определяются стационарные характеристики надежности и эффективности, рассматриваемой модели. Для этого рассмотрим понятие отказа системы: исходя из анализа структуры системы, на множестве всех векторов $D = \{\bar{d}\}$ задается структурная функция $g(\bar{d})$ такая, что:

$$g(\bar{d}) = \begin{cases} 1, & \text{если система работоспособна} \\ \text{при данном сочетании компонентов вектора } \bar{d}; \\ 0, & \text{если система в отказе.} \end{cases}$$

Множество значений вектора $\bar{d}$, при котором система работоспособна, обозначим D_+ , а множество значений, при которых система находится в отказе – D_- , т.е. $D_+ = \{\bar{d} : g(\bar{d}) = 1\}$, $D_- = \{\bar{d} : g(\bar{d}) = 0\}$. По предположению, $D = D_+ \cup D_-$, $D_+ \cap D_- = \emptyset$.

В соответствии с выбором D_+ и D_- фазовое пространство состояний E разбивается на множества E_+ и E_- работоспособных и отказовых состояний. $E = E_+ \cup E_-$, $E_+ \cap E_- = \emptyset$.

Стационарный коэффициент готовности имеет вид:

$$K_{\Gamma} = \frac{\sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\prod_{k=1}^N (M\alpha_k + M\beta_k)}. \quad (13)$$

Для нахождения T_+ , T_- введем следующие обозначения:

D_-^1 – множество векторов $\bar{d} \in D_-$ таких, что изменение в состоянии одной компоненты переводит систему в работоспособное состояние (в D_+).

D_+^0 – множество векторов $\bar{d} \in D_+$ таких, что изменение в состоянии одной компоненты переводит систему в отказовое состояние (в D_-).

$G(\bar{d})$ – множество номеров компонент вектора $\bar{d} \in D_+^0$, изменение значения каждой из которых переводит вектор $\bar{d}$ в D_- .

Тогда,

$$T_+ = \frac{\sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\sum_{\bar{d} \in D_+^0} \sum_{j \in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1, \\ k \neq j}} M\alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1}, \\ k \neq j}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0, \\ k \neq j}} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}, \quad (14)$$

$$T_- = \frac{\sum_{\bar{d} \in D_-} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\sum_{\bar{d} \in D_+^0} \sum_{j \in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1, \\ k \neq j}} M\alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1}, \\ k \neq j}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0, \\ k \neq j}} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}, \quad (15)$$

где

$$I(d_j) = \begin{cases} P(\beta_j > \tau_j), & \text{если } d_j = \bar{1}, \\ 1, & \text{если } d_j = 1, 0. \end{cases}$$

Средняя удельная прибыль S в единицу календарного времени и средние удельные затраты C в единицу времени исправного функционирования системы имеют вид:

$$S = \frac{c_1 \sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\prod_{k=1}^N (M\alpha_k + M\beta_k)} - \frac{c_2 \sum_{\bar{d} \in D_-} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\prod_{k=1}^N (M\alpha_k + M\beta_k)}, \quad (16)$$

$$C = \frac{c_2 \sum_{\bar{d} \in D_-} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}{\sum_{\bar{d} \in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M(\beta_k \wedge \tau_k) \cdot \prod_{k:d_k=0} P(\beta_k > \tau_k) M([\beta_k - \tau_k]^+)}, \quad (17)$$

где c_1 – прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, c_2 – потери в единицу времени отказа.

Таблица 4. Влияние величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности системы

$h_1 = h_2 = h_3 = h,$ ч.	$T_-(h_1, h_2, h_3),$ ч.	$T_+(h_1, h_2, h_3),$ ч.	$K_{\Gamma}(h_1, h_2, h_3)$	$C(h_1, h_2, h_3),$ (у.е./ч.) $\cdot 10^{-3}$	$S(h_1, h_2, h_3),$ у.е./ч.
0	0,26316	316,51316	0,99917	12,47	9,97923
0,1	0,22974	388,00755	0,99941	8,8815	9,98521
0,2	0,19815	499,29585	0,9996	5,953	9,99008
0,3	0,17123	693,2207	0,99975	3,70506	9,99383
0,4	0,14992	$1,05977 \cdot 10^3$	0,99986	2,12193	9,99646
0,5	0,13357	$1,79836 \cdot 10^3$	0,99993	1,11413	9,99814
0,6	0,12109	$3,38443 \cdot 10^3$	0,99996	0,53668	9,99911
0,7	0,11147	$7,023 \cdot 10^3$	0,99998	0,23807	9,9996

В параграфе 3.3 найдены аналитические выражения для стационарных характеристик надежности в случаях параллельного и последовательного соединения элементов системы.

В параграфе 3.4 показано практическое применение результатов, полученных в главе 3, на примере анализа надежности и эффективности одноконтурного нефтепровода с резервуарными парками.

Рассмотрена задача, представленная в монографии Ю.Н. Руденко, И.А. Ушаков¹. На рисунке 5 представлена схема одноконтурного нефтепровода.

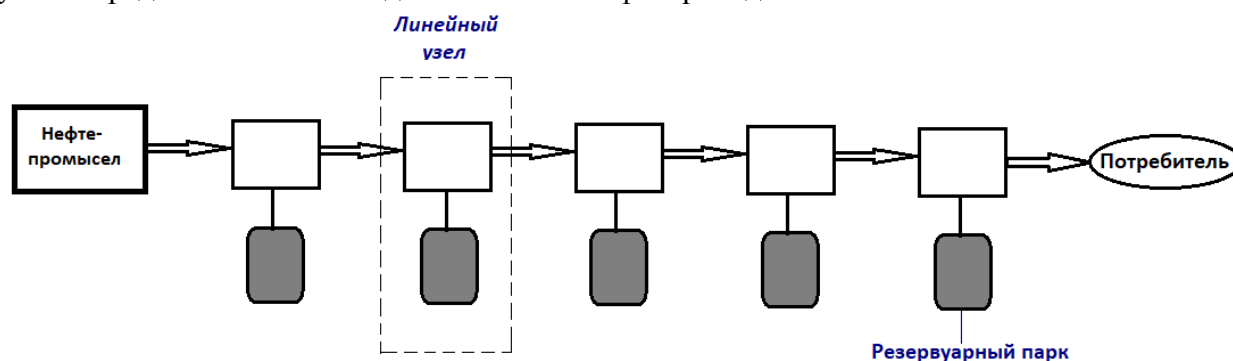


Рисунок 5 – Схема одноконтурного нефтепровода с поэлементными резервуарными парками.

Используя формулы (13) – (17), найдены расчетные формулы для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности нефтепровода. Стоит отметить, что в монографии¹ были получены только количественные характеристики системы (коэффициент готовности, вероятность безотказной работы и средняя наработка на отказ). Здесь же вычислены также временные характеристики (средняя стационарная наработка системы на отказ и среднее стационарное время восстановления системы) и экономические характеристики (средняя удельная прибыль в единицу календарного времени и средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования). Также формулы (13) – (17) позволяют находить характеристики надежности и эффективности систем с поэлементным резервом времени в случае, когда случайные величины, описывающие функционирование системы, имеют функции распределения произвольного вида.

Пример 1. Рассмотрен случай, когда $N=5$. Каждый линейный узел имеет поэлементный неслучайный резерв времени. Величина резерва времени – это время, в течение которого полностью расходуется емкость резервуарного парка, в случае отказа ЛУ. Резерв времени

¹ Руденко, Ю.Н., Ушаков, И.А. Надежность систем энергетики / Ю.Н. Руденко, И.А. Ушаков. – 2-е изд. перераб. и доп. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 328 с.

изменяется от 0 до 15 часов с шагом 1 час. Время безотказной работы первого линейного узла (ЛУ) $M\alpha_1=200$ часов ($\lambda_1=0,005$), второго ЛУ $M\alpha_2=181,82$ часа ($\lambda_2=0,0055$), третьего ЛУ $M\alpha_3=250$ часов ($\lambda_3=0,004$), четвертого ЛУ $M\alpha_4=222,22$ часа ($\lambda_4=0,0045$), пятого ЛУ $M\alpha_5=250$ часов ($\lambda_5=0,004$); время восстановления первого ЛУ $M\beta_1=20$ часов ($\mu_1=0,05$), второго ЛУ $M\beta_2=18,18$ часов ($\mu_2=0,055$), третьего ЛУ $M\beta_3=25$ часов ($\mu_1=0,04$), четвертого ЛУ $M\beta_4=22,2$ часа ($\mu_4=0,045$), пятого ЛУ $M\beta_5=25$ часов ($\mu_1=0,04$); прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, $c_1=200$ у.е., потери в единицу времени отказа $c_2=250$ у.е. Результаты вычислений для рассматриваемой системы представлены в Таблице 5 и рисунке 6.

Таблица 5. Влияние резерва времени на характеристики надежности и эффективности.

h_i , ч.	K_i	T_+ , ч.	T_- , ч.	S , у.е./ч.	C , у.е./ч.
0	0,621	43,478	26,544	29,415	152,627
1	0,635	45,766	26,306	35,75	143,701
2	0,649	48,160	26,084	41,902	135,403
3	0,662	50,667	25,876	47,872	127,679
4	0,675	53,291	25,682	53,661	120,479
5	0,687	56,038	25,500	59,269	113,761
6	0,699	58,914	25,329	64,699	107,484
7	0,711	61,924	25,170	69,953	101,614
8	0,722	65,075	25,020	75,034	96,118
9	0,733	68,373	24,879	79,943	90,968
10	0,744	71,825	24,747	84,686	86,136
11	0,754	75,438	24,623	89,264	81,60
12	0,764	79,220	24,507	93,682	77,338
13	0,773	83,178	24,398	97,942	73,33
14	0,782	87,320	24,295	102,049	69,558
15	0,791	91,655	24,199	106,007	66,005

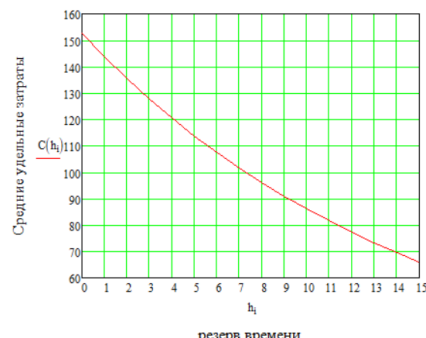
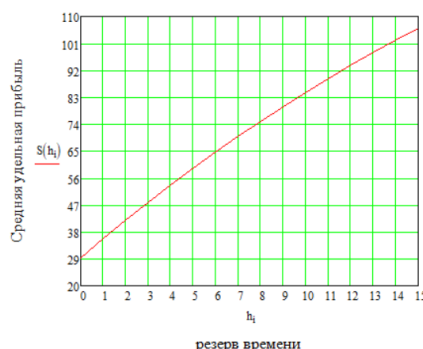
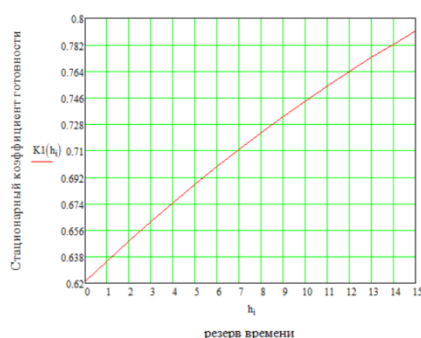
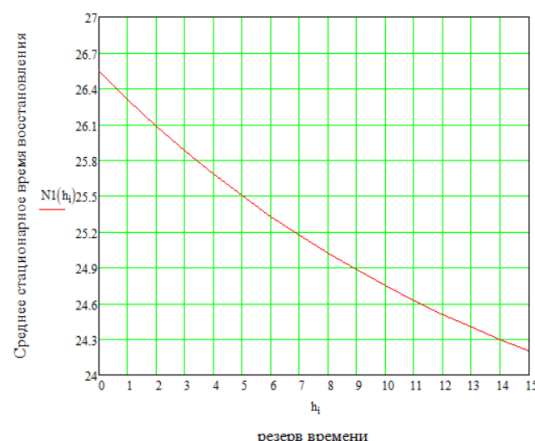
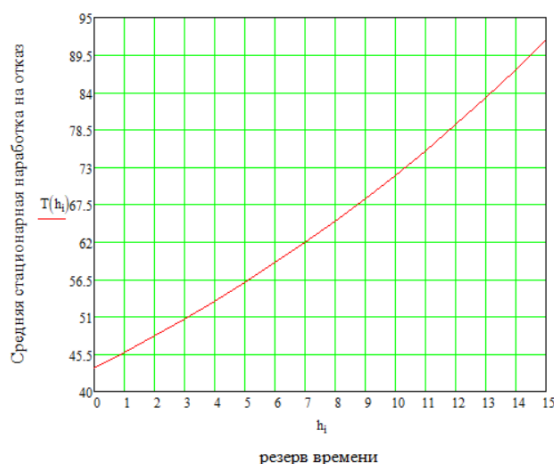


Рисунок 6 – Характеристики надежности и эффективности системы из примера 1.

Пример 2. Рассмотрен случай, когда резерв времени первого ЛУ h_1 изменяется от 0 до 15 часов, h_2 – от 15 до 0 ч., h_3 – от 5 до 20 ч., h_4 – от 20 до 5 ч., h_5 – от 3 до 18 часов с шагом 1 час (т.е. поэлементные резервы времени связаны условиями: $h_1=i$, $h_2=15-i$, $h_3=i+5$, $h_4=20-i$, $h_5=i+3$, $i=0...15$ ч.). Прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, $c_1=150$ у.е., потери в единицу времени отказа $c_2=250$ у.е. Остальные значения совпадают с примером 1.

Таблица 6. Влияние резерва времени на характеристики надежности и эффективности системы из примера 2.

h_1 , ч.	h_2 , ч.	h_3 , ч.	h_4 , ч.	h_5 , ч.	K_{Γ}	T_+ , ч.	T_- , ч.	S , у.е./ч.	C , у.е./ч.
0	15	5	20	3	0,715	63,557	25,295	36,124	99,498
1	14	6	19	4	0,721	64,938	25,182	38,229	96,946
2	13	7	18	5	0,725	66,201	25,070	40,129	94,675
3	12	8	17	6	0,730	67,332	24,960	41,823	92,674
4	11	9	16	7	0,733	68,320	24,850	43,311	90,935
5	10	10	15	8	0,736	69,151	24,742	44,594	89,450
6	9	11	14	9	0,739	69,817	24,635	45,670	88,215
7	8	12	13	10	0,741	70,307	24,529	46,540	87,223
8	7	13	12	11	0,743	70,614	24,425	47,201	86,473
9	6	14	11	12	0,744	70,733	24,321	47,653	85,962
10	5	15	10	13	0,745	70,660	24,219	47,894	85,690
11	4	16	9	14	0,745	70,395	24,119	47,923	85,657
12	3	17	8	15	0,744	69,939	24,021	47,738	85,865
13	2	18	7	16	0,743	69,295	23,926	47,337	86,319
14	1	19	6	17	0,742	68,470	23,834	46,717	87,022
15	0	20	5	18	0,740	67,471	23,745	45,875	87,981

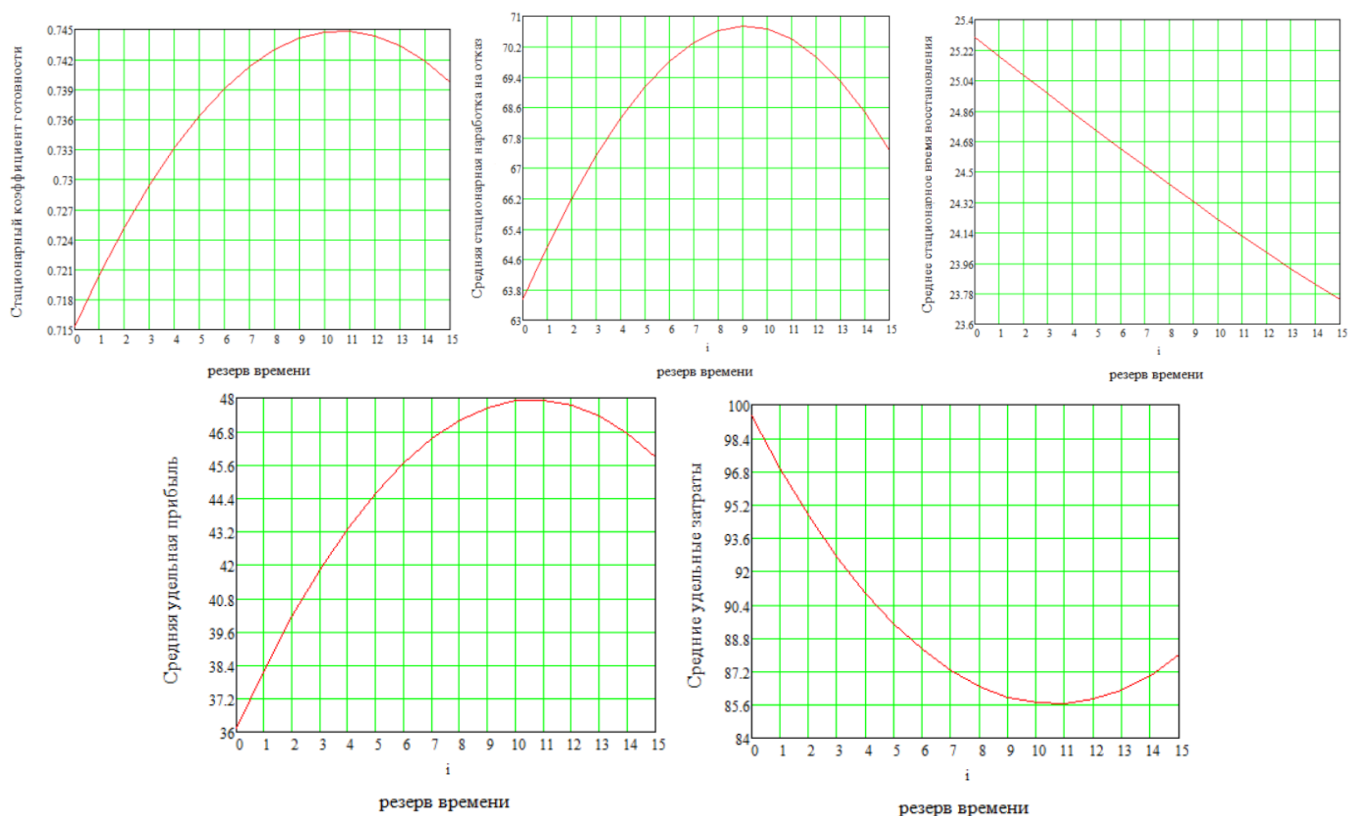


Рисунок 7 – Характеристики надежности и эффективности системы из примера 2.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что при заданном сочетании величин резерва времени наиболее оптимальными являются значения при $i=10$ и $i=11$.

В четвертой главе на примерах двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени, рассмотренной в главе 2, и двухкомпонентной системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени разработана методика построения скрытой марковской модели на

основе укрупненной полумарковской модели.

Алгоритм построения СММ на основе укрупненной полумарковской модели:

1. Построить полумарковскую модель системы.
2. Применить алгоритм стационарного фазового укрупнения, т.е. определить $\hat{E}$, $\hat{p}_k^r$, $\hat{m}_k$.
3. Определить параметры СММ следующим образом:
 - a) $\hat{E}$ – множество состояний модели.
 - b) Задать множество сигналов J .
 - c) Матрица переходных вероятностей будет состоять из вероятностей $\hat{p}_k^r$.
 - d) Задать функцию связи $R(s | x)$ состояний модели с сигналами.
 - e) Задать начальное распределение.

В параграфе 4.1 строится СММ системы из параграфа 2.1. Решаются основные задачи теории СММ.

Рассмотрен пример оценок характеристик скрытой укрупненной модели системы S , у которой средние времена безотказной работы компонентов K_1 и K_2 соответственно равны $M\alpha_1 = 8,33$ ч., $M\alpha_2 = 6,25$ ч.; СВ β_1 , β_2 имеют распределение Эрланга 5-го порядка, $M\beta_1 = 0,71$ ч., $M\beta_2 = 0,83$ ч. Компонент K_i имеет неслучайный резерв времени, равный h_i (т.е. $R_i(t) = 1(t - h_i)$), $h_1 = 0,5$ ч., $h_2 = 0,4$ ч.

Задан вектор сигналов (2, 2, 1, 1, 0, 1, 1) ($n=7$).

Вероятности перехода скрытой модели на 8-м шаге равны:

в состояние 00 с вероятностью 0,3924; в состояние 11 – 0; в состояние $\bar{1}\bar{1}$ – 0; в состояние $\bar{1}1$ – 0,2928; в состояние $1\bar{1}$ – 0,2123; в состояние 10 – 0,0846; в состояние 01 – 0,0179; в состояние $0\bar{1}$ – 0; $\bar{1}0$ – 0.

Вероятность появления сигнала 2 на 8-м шаге равна 0,5050; сигнала 1 – 0,1025; сигнала 0 – 0,3925.

Вероятность появления заданного вектора сигналов (2, 2, 1, 1, 0, 1, 1) равна 0,0009.

В Таблице 7 указаны наиболее вероятные состояния скрытой модели на каждом переходе и вероятности этих состояний.

Таблица 7. Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

Номер перехода	1	2	3	4	5	6	7
Наиболее вероятное состояние	11	$1\bar{1}$	10	$\bar{1}0$	00	10	$\bar{1}0$
Вероятность состояния	1	0,6139	0,6139	0,6139	1	0,6009	0,6009

Для нахождения наиболее вероятной цепочки состояний использовался алгоритм Витерби. Использование этого алгоритма показывает, что наиболее вероятной является цепочка состояний (11, $1\bar{1}$, 10, $\bar{1}0$, 00, 10, $\bar{1}0$).

На Рисунке 8 изображена решетчатая диаграмма функционирования укрупнённой модели, на которой для простоты используется следующая перекодировка состояний модели: $00 \leftrightarrow 1$, $11 \leftrightarrow 2$, $\bar{1}\bar{1} \leftrightarrow 3$, $\bar{1}1 \leftrightarrow 4$, $1\bar{1} \leftrightarrow 5$, $10 \leftrightarrow 6$, $01 \leftrightarrow 7$, $0\bar{1} \leftrightarrow 8$, $\bar{1}0 \leftrightarrow 9$. Жирной линией выделена наиболее вероятная цепочка состояний.

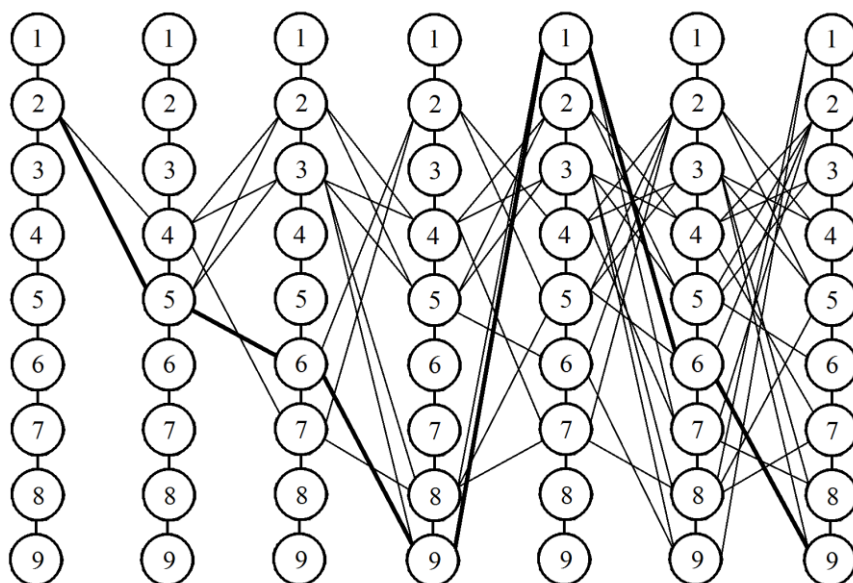


Рисунок 8 – Решетчатая диаграмма

В параграфе 4.2 построена СММ на основе укрупненной полумарковской модели системы с групповым мгновенно пополняемым РВ.

Временная диаграмма функционирования системы S изображена на Рисунке 9. На временной диаграмме ломаной линией показан отказ элементов, а жирной линией – функционирование элементов системы за счет резерва времени.

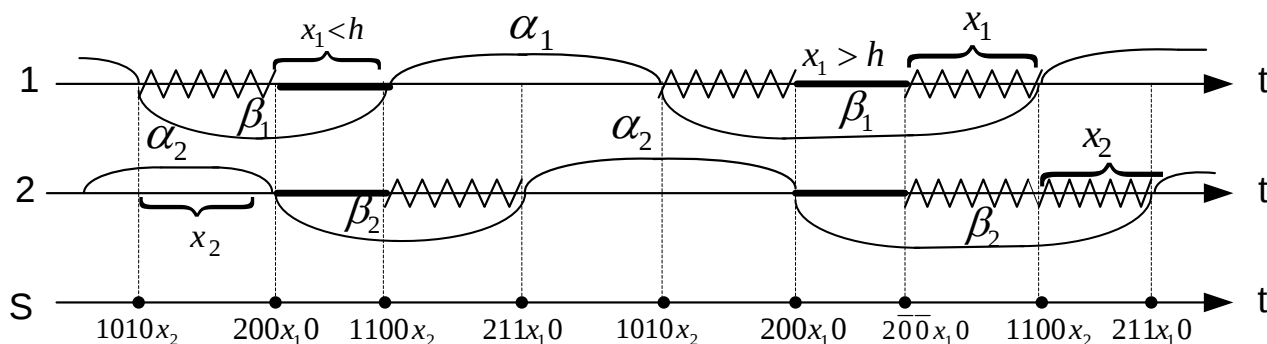


Рисунок 9 – Временная диаграмма функционирования системы

Фазовое пространство состояний E исходной модели расщепим на $N=5$ классов:

$$E_{11} = \{1110x_2, 211x_10\}, E_{10} = \{1100x_2, 210x_10\}, E_{01} = \{1010x_2, 201x_10\},$$

$$E_{00} = \{1000x_2, 200x_10\}, E_{\bar{0}\bar{0}} = \{1\bar{0}\bar{0}0x_2, 2\bar{0}\bar{0}x_10\},$$

каждый из которых «склеивается» в одно состояние укрупнённой модели.

Фазовое пространство состояний $\hat{E}$ укрупнённой модели имеет вид:

$$\hat{E} = \{11, 10, 01, 00, \bar{0}\bar{0}\}.$$

Физический смысл состояний укрупнённой модели следующий:

11 – оба элемента функционируют; 01 – элемент K_1 восстанавливается, K_2 функционирует; 10 – элемент K_1 функционирует, K_2 восстанавливается; 00 – оба элемента восстанавливаются; $\bar{0}\bar{0}$ – отказ системы.

Определены вероятности перехода $\hat{p}_k^r$ ВЦМ и средние времена пребывания в состояниях $\hat{m}_k$ укрупнённой модели.

Введём следующее множество сигналов:

$$J = \{0, 1, 2\},$$

где 0 – оба элемента восстанавливаются; 1 – работоспособен один элемент; 2 – оба элемента работоспособны.

Функция связи состояний ВЦМ укрупненной модели с сигналами представлена в Таблице 8, а граф переходов укрупненной модели изображен на рисунке 10.

Таблица 8. Функция связи $R(s|x)$ состояний ВЦМ укрупненной модели с сигналами

Сигнал, s Состояние, x	s=0	s=1	s=2
11	0	0	1
10	0	1	0
01	0	1	0
00	1	0	0
$\overline{00}$	1	0	0

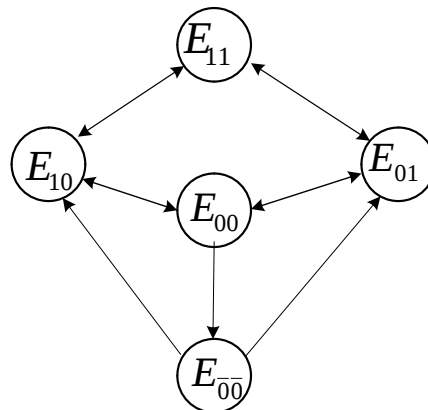


Рисунок 10 – Граф переходов укрупненной системы

Рассмотрена система S , для которой перед началом её функционирования принято, что СВ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ имеют распределение Эрланга IV порядка и $M\alpha_1 = 28,57$ ч., $M\alpha_2 = 25$ ч., $M\beta_1 = 2$ ч., $M\beta_2 = 1,6$ ч. Групповой мгновенно пополняемый резерв времени $h = 1,5$ часа.

В результате функционирования системы S получен следующий вектор сигналов: $\bar{s}_7 = (2, 1, 0, 1, 2, 1, 0), n=7$.

Рассмотрены задачи по оценке характеристик скрытой марковской модели с учетом введенных параметров:

1. на 7-ом шаге укрупнённая модель с вероятностью 1 находилась в состоянии 00. Для состояний 11, 10, 01, $\overline{00}$ эта вероятность равна нулю.
2. вероятности перехода скрытой модели на 8-ом шаге равны: в состояние 10 с вероятностью 0,3369, 01 – 0,5100, $\overline{00}$ – 0,1531; во все остальные – с нулевой вероятностью.
3. вероятности появления сигналов на 8-м шаге: сигнал 1 с вероятностью 0,8469, 0 – 0,1531, 2 – 0.
4. вероятность появления полученного вектора сигналов $\bar{s}_7$ равна 0,0031.

В Таблице 9 указаны наиболее вероятные состояния скрытой модели на указанных в ней переходах и вероятности этих состояний. Влияние величины группового мгновенно пополняемого резерва времени на вероятность появления полученного вектора сигналов $\bar{s}_7 = (2, 1, 0, 1, 2, 1, 0)$, представлено в Таблице 10.

Таблица 9. Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

Номер перехода	1	2	3	4	5	6	7
Наиболее вероятное состояние	11	01	00	01	11	01	00
Вероятность состояния	1,000	0,550	1,000	0,597	1,000	0,550	1,000

Таблица 10. Вероятность появления $\bar{s}_7$ при различных значениях резерва времени

	h=1,5 часа	h=1,1 часа	h=0,7 часа	h=0,3 часа
$P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$	0,0031	0,0025	0,0016	0,0006

Применяя алгоритм Баума-Велша, была получена уточненная матрица переходных вероятностей для рассматриваемой системы. Ниже представлены: а) исходная матрица переходных вероятностей P_i^j , б) уточненная матрица переходных вероятностей $\bar{P}_i^j$.

$$P_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,5333 & 0,4667 & 0 & 0 \\ 0,9470 & 0 & 0 & 0,0530 & 0 \\ 0,9260 & 0 & 0 & 0,0740 & 0 \\ 0 & 0,3369 & 0,5100 & 0 & 0,1531 \\ 0 & 0,4221 & 0,5779 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{P}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,4500 & 0,5500 & 0 & 0 \\ 0,3094 & 0 & 0 & 0,6906 & 0 \\ 0,3517 & 0 & 0 & 0,6483 & 0 \\ 0 & 0,4032 & 0,5968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) б)

Матрицы переходных вероятностей.

Применяя алгоритм Витерби к уточненной модели, определена наиболее вероятная цепочка состояний для полученного вектора сигналов: 11, 10, 00, 01, 11, 10, 00.

В заключении подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые к защите.

В приложениях приведены: краткие сведения из теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний; решения систем интегральных уравнений для определения стационарных распределений ВЦМ полумарковских моделей для производительности ТЯ; расчеты в MathCad стационарных характеристик надежности систем, рассматриваемых в главе 2; сведения из теории скрытых марковских моделей; программа в Maple для решения задач теории СММ из главы 4; копии свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ и акта внедрения результатов работы в учебный процесс.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В диссертационной работе решена задача разработки и развития методов математического моделирования систем различного назначения с резервом времени и их моделей на основе полумарковских и скрытых марковских моделей. Результаты работы являются новыми, имеют теоретическую и практическую ценность и позволяют анализировать влияние величины РВ на стационарные характеристики надежности и эффективности системы, что, в свою очередь, позволяет решать оптимизационные задачи, связанные с распределением величин РВ.

Основные научные результаты работы и выводы заключаются в следующем:

1. Разработаны полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени. Их существенной особенностью является то, что случайные величины времени безотказной работы, времени восстановления и резерва времени имеют функции распределения общего вида.
2. Получены расчетные аналитические и приближенные формулы для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности рассматриваемых систем, на примере которых показано, что асимптотический и стационарный алгоритмы фазового укрупнения могут быть эффективно использованы для анализа систем с резервом времени.
3. Решена задача анализа надежности и эффективности нефтепровода с поэлементными резервуарными парками, результаты которой при должной технологической переформулировке можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.
4. Разработаны полумарковские модели и получены формулы для расчета производительности ТЯ при наличии резерва времени. Проведен анализ влияния резерва времени на производительность ТЯ.
5. Предложена методика построения СММ для систем, допускающих построение полумарковской модели. Используя эту методику, построены СММ на основе укрупненной

полумарковской модели с поэлементным и групповым мгновенно пополняемым резервом времени.

6. Решены задачи определения характеристик и прогнозирования состояний скрытой модели на основе полученного вектора сигналов.
7. Полученные в ходе исследования результаты (при отсутствии резерва времени) согласуются с результатами, полученными для рассматриваемых систем без резерва времени.
8. Полученные результаты позволяют рассчитывать стационарные характеристики надежности и эффективности систем различного назначения с учетом резерва времени, решать оптимизационные задачи распределения резерва времени между элементами системы.
9. Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели могут быть использованы для создания на их основе алгоритмов и информационных систем поддержки принятия решений при проектировании и эксплуатации систем различного назначения.
10. Разработанные скрытые марковские модели систем позволяют прогнозировать состояния системы на основе полученного вектора сигналов, находить наиболее вероятные последовательности состояний по сигналам.

Основные публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, индексируемых в базе Scopus / Web of Science

1. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Fedorenko, S.N. Analysis of the time reserve influence on the technological cell productivity // MATEC Web of Conferences, Vol. 129, 2017. Art. No. 03009.
2. Obzherin, Y.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Reliability of the information system with intermediate storage devices // Communications in Computer and Information Science, Vol. 919, 2018. P. 432-444.
3. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Fedorenko, S.N. Semi-Markov model of a technical system with the component-wise instantly replenished time reserve // MATEC Web of Conferences, Vol. 224, 2018. Art. No. 04008.
4. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Analysis of reliability of systems with component-wise storages // E3S Web of Conferences, Vol. 58, 2018. Art. No. 02024.
5. Obzherin, Y.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Hidden Markov Model of Information System with Component-Wise Storage Devices // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), Vol. 11965, 2019. P. 354-364.
6. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M. Semi-Markov Model and Phase-Merging Scheme of a Multi-Component System with the Group Instantly Replenished Time Reserve // International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 26, No. 3, 2019. Art. no.1950014.
7. Obzherin, Yu.E., Nikitin, M.M., Sidorov, S.M. Application of hidden Markov models for analyzing the dynamics of technical systems // AIP Conference Proceedings, Vol. 2188, 2019. Art. No. 050019.
8. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. On application of semi-Markov processes superposition to energy systems modeling // E3S Web of Conferences, Vol. 139, 2019. Art. No. 01064.
9. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Semi-Markov model of a multi-component energy system with component-wise storages // E3S Web of Conferences, Vol. 139, 2019. Art. No. 01065.
10. Obzherin, Y., Nikitin, M., Sidorov, S. Analysis of reliability and efficiency of electric power systems on the basis of semi-markov models with common phase space of states // Smart Innovation, Systems and Technologies, Vol. 154, 2020. P. 631-641.
11. Glech, S.G., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Semi-Markov Model of a Technical System with Maintenance and Time Reserve // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 709, 2020. Art. No. 033028.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

12. Обжерин, Ю.Е., Никитин, М.М., Сидоров, С.М. Программа анализа надёжности и эффективности систем с резервом времени. – 2019. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019614657, 10.04.2019.
13. Обжерин, Ю.Е., Никитин, М.М., Сидоров, С.М. Программа расчета показателей надежности многокомпонентной системы. – 2019. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019619864, 25.07.2019.

Прочие публикации

14. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Анализ надежности и фазовое укрупнение систем с поэлементными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2019. – № 6. – С. 66– 77.

15. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Применение суперпозиции независимых полумарковских процессов и скрытых марковских моделей к моделированию систем энергетики / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2020. – № 3. – С. 69–80.
16. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Прикладные задачи математики: материалы XXIII международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2015. – С. 159–163.
17. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Влияние резерва времени на производительность технологической ячейки / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Прикладные задачи математики: материалы XXIV международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2016. – С. 145–148.
18. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М. Влияние мгновенно пополняемого резерва времени на характеристики надежности многокомпонентной системы / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров // Прикладные задачи математики: материалы XXV международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2017. – С. 150–155.
19. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Бойко, Е.Г., Федоренко, С.Н. Стационарное фазовое укрупнение двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, Е.Г. Бойко, С.Н. Федоренко // Прикладные задачи математики: материалы XXVI международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2018. – С. 208–214.
20. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Анализ надежности систем с поэлементными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // В сборнике: Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Международный научный семинар им. Ю.Н. Руденко. Иркутск, 2018. – С. 187–195.
21. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. О применении суперпозиции полумарковских процессов к моделированию систем энергетики / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // В сборнике: Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Международный научный семинар им. Ю.Н. Руденко, 91-е заседание семинара на тему «Методические и практические проблемы надежности систем энергетики», в 2-х книгах. Отв. ред. Н.И. Воропай, 2019. – С. 269–274.
22. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Полумарковская модель многокомпонентной энергетической системы с покомпонентными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Проблемы энерго- и ресурсосбережения. – 2019. – № 3–4. – С. 101–110.
23. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Hidden Markov model of information system with component-wise storage devices // В сборнике: DCCN-2019. Материалы XXII Международной научной конференции. Под общей редакцией В.М. Вишневого, К.Е. Самуйлова, 2019. С. 100–107.
24. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени (без прекращения обработки) / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Автоматизация и измерения в машино- приборостроении: научный журнал. – 2020. – № 2 (10). – С. 39 – 50.
25. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Влияние мгновенно пополняемого резерва времени на производительность технологической ячейки / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения: материалы международной научно-технической конференции. – Севастополь: Севастопольский государственный университет. – 2015. – С. 15–16.
26. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М. Полумарковские модели многофазных систем с промежуточными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – Москва: Российский университет дружбы народов. – 2015. – С. 44–46.
27. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Анализ влияния резерва времени на производительность технологической ячейки / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения: материалы международной научно-технической конференции. – Севастополь: Севастопольский государственный университет. – 2016. – С. 12–13.
28. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – Москва: Российский университет дружбы народов – 2016. – С. 107–109.
29. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Федоренко, С.Н. Полумарковская модель технической системы с групповым, мгновенно пополняемым резервом времени / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, С.Н. Федоренко // Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения. Материалы Международной научно-технической конференции. – Севастополь. – 2017. – С. 54–55.
30. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Скрытая марковская модель информационной системы с резервом времени / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // В сборнике: Проблемы информационной безопасности. Труды VI Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, 2020. – С. 35–37.