На правах рукописи

Сироткин Дмитрий Валерьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ И О ВЕРШИННОЙ k-РАСКРАСКЕ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

Специальность 01.01.09 —
«дискретная математика и математическая кибернетика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2019 г.

Работа выполнена в лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Научный руководитель: Малышев Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Официальные оппоненты:

Жуковский Максим Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», доцент кафедры дискретной математики

Куликов Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН», заведующий лабораторией прикладных вероятностных и алгоритмических методов

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», кафедра дискретного анализа

Защита состоится 23 января 2020 г. в 16:20 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 в ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 2, ауд. 254

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», http://www.unn.ru/

Автореферат разослан ____________________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
кандидат физико-математических наук,
доцент Николай Владимирович Кротов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследований, значение основных результатов диссертации

На настоящее время накоплено огромное количество фактов о полиномиальной разрешимости и о NP-полноте задач на графах в различных классах графов, причем корпус соответствующей литературы ежегодно пополняется. Упомянем электронный ресурс www.graphclasses.org, на котором представлены несколько тысяч результатов такого типа. Направляющие мотивы к получению новых сведений о сложности могут быть самыми разнообразными, но среди них можно выделить, пожалуй, наиболее распространенные — установить NP-полноту задачи для более узких классов графов и разработать полиномиальный алгоритм решения задачи для более широких классов. Часто одновременно имеют место мотивации обоих типов и тогда, по-существу, ставится цель найти пределы эффективной разрешимости и труднорешаемости. Например, можно рассматривать какие-нибудь скалярные параметры задач и решать проблему сложностной классификации, строя разделяющую поверхность в пространстве данных параметров. Так, например, задача k-КНФ полиномиально разрешима при $k \in \{1, 2\}$, но является NP-полной для любого $k \geqslant 3$ (см. книгу[1]). Задача ЦЛП полиномиально разрешима в классе полиэдров с целыми вершинами, но она NP-полна в классе многогранников с целыми и полуцелыми вершинами[2]. В настоящей диссертации содержатся результаты о сложности задач о независимом множестве и о вершинной k-раскраске (далее, задач НМ и k-ВР), в той или иной мере ориентированные на решение проблемы сложностной классификации в некоторых семействах классах графов.

Известны несколько алгоритмических инструментов для редукции графов при решении задачи НМ. Например, двойное подразбиение произвольного ребра любого графа увеличивает его число независимости (т.е. размер наибольшего независимого множества) ровно на единицу[3]. Другой пример — удаление из графа вершины степени два и отождествление ее соседей уменьшает число независимости на единицу[3]. В. Е. Алексеев в работе[4] предложил рассматривать отображения множества вершин графа в себя, не являющихся автоморфизмами, при которых любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, такого рода сжатие преобразует граф в его порожденный подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости.

[1] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 С.

[2] Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. — 1989. — V. 45, № 1–3. — P. 139–172.

[3] Алексеев В.Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике, Горький: Из-во Горьковского гос. университета. — 1983. — С. 3–13.

[4] Алексеев В.Е. О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики, М.: Наука. — 1979. — Т. 36. — С. 23–31.

В работе[5] была сделана попытка дать общее определение локального преобразования графов. Там рассматривались так называемые схемы замен, определяющие заменяемый и заменяющий подграфы, а также правила преобразования множества ребер, соединяющих изменяемую часть графа с неизменяемой. Там же был приведен критерий сохранения числа независимости при применении схемы замен. В настоящей диссертации для задач НМ и k-ВР рассматривается и исследуется подкласс класса схем замен, когда множество ребер между изменяемой и неизменяемой частями графа не изменяется. В ней эти замены (а также близкие к ним) используются с целью анализа вычислительной сложности задач НМ и k-ВР в некоторых классах графов.

Класс графов с NP-полной задачей на графах П будем называть П-*сложным*. Класс графов с полиномиальной разрешимой задачей П будем называть П-*простым*.

В работе[6] было показано, что класс планарных графов с треугольными гранями (кроме, быть может, внешней) с логарифмической от количества вершин максимальной степенью вершин является НМ-сложным. В первой главе диссертационной работы данный результат улучшается (в терминах верхней оценки на степени вершин). По теореме Брукса[7] для любого k задача k-ВР полиномиально разрешима в классе $\mathcal{D}(k)$ графов со степенями всех вершин не более чем k. Вместе с тем, класс $\mathcal{P}(4)$ является 3-ВР-сложным[8], где $\mathcal{P}$ — класс планарных графов и $\mathcal{P}(d) = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(d)$. Задача 3-ВР разрешима за линейное время в классе *плоских триангуляций*[9], т.е. планарных графов, у которых все грани (включая и внешнюю) являются треугольниками. Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором сложность задачи 3-ВР меняется с полиномиальной разрешимости на NP-полноту и при этом иметь графы с невысокой максимальной степенью вершин. В первой главе диссертации представлен соответствующий результат.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$. Если наследственный класс задается конечным множеством запрещенных порожденных подграфов, то он называется *конечно определенным*.

Триодом $T_{i,j,k}$ называется дерево, получаемое отождествлением трех конце-

[5] Алексеев В. Е., Лозин В. В. О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. — 1998. — Т. 5, № 1. — С. 3–19.

[6] Кобылкин К. С. Вычислительная сложность задачи вершинного покрытия в классе планарных триангуляций // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 153–159.

[7] Brooks R. L. On colouring the nodes of a network // Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences. — 1941. — V. 37. — P. 194–197.

[8] Dailey D. Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete // Discrete Mathematics. — 1980. — V. 30, № 3. — P. 289–293.

[9] Aichholzer O., Aurenhammer F., Hackl T., Huemer C., Pilz A., Vogtenhuber B. 3-Colorability of pseudo-triangulations // International Journal of Computational Geometry and Applications. — 2015. — V. 25, № 4. — P. 283–298.

вых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$ длины i, j, k соответственно. Класс $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является триодом. В работе[10] было доказано, что любой конечно определенный класс $\mathcal{X}$, включающий $\mathcal{T}$, является НМ-сложным. Это же верно, если вместо $\mathcal{X}$ рассматривать классы $\mathcal{P} \cap \mathcal{X}, \mathcal{D}(d) \cap \mathcal{X}, \mathcal{P}(d) \cap \mathcal{X}$, где $d \geqslant 3$. В той же работе[9] было выдвинуто предположение о том, что любой конечно определенный класс, не включающий $\mathcal{T}$, является НМ-простым. Для этого достаточно показать, что для любого графа $G \in \mathcal{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым. На настоящее время это доказано для любого графа $G \in \mathcal{T}$ с не более чем 5 вершинами. Сложностной статус задачи НМ не известен уже для класса $Free(\{P_6\})$.

Вместе с тем, было бы интересным исследовать сложность задачи НМ для классов вида $\mathcal{Y} \cap Free(\{G\})$, где $G \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{Y}$ — собственное наследственное подмножество множества всех графов. В работе[11] было доказано, что для любых d, i класс $\mathcal{D}(d) \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым. В работах[12,13] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,2,i}\})$ является НМ-простым. В работе[14] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым. В работе[15] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,i}\})$ является НМ-простым. В работе[16] было доказано, что класс $\mathcal{D}(3) \cap Free(\{T_{2,2,2}\})$ является НМ-простым. Отметим, что во всех представленных результатах фигурируют триоды, у которых значения хотя бы двух индексов не более чем 2. Во второй главе диссертации доказывается, что класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ является НМ-простым.

Существует множество «белых пятен» на «карте» вычислительной сложности задачи о вершинной k-раскраске в семействе наследственных классов графов. Имеется два способа для уменьшения количества этих «белых пятен». Первый — увеличение количества запрещенных порожденных подграфов, а второй — увеличение размера таких подграфов. Ограничение на размер или количество запрещенных порожденных структур образует некоторое подсемейство семейства наследственных классов. Возможное сокращение совокупности «белых пятен» состоит в получении полной сложностной дихотомии для бóльших значений данной границы.

[10] Alekseev V. E. On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 132, № 1–3. — P. 17–26.

[11] Lozin V. V., Milanic M. Maximum independent sets in graphs of low degree // Proceedings of 18 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. — 2007. — P. 874–880.

[12] Малышев Д. С., Алексеев В. Е. Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 3–10

[13] Lozin V. V., Milanic M. On the maximum independent set problem in subclasses of planar graphs // Journal of Graph Algorithms and Applications. — 2010. — V. 14, № 2. — P. 269–286.

[14] Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanic M. The maximum independent set problem in planar graphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2008. — V. 5162. — P. 96–107.

[15] Малышев Д. С. Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве является полиномиально разрешимой // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, № 3. — С. 26–44.

[16] Lozin V. V., Monnot J., Ries B. On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // Journal of Discrete Algorithms. — 2015. — V. 31. — P. 104–112.

Для задачи k-ВР сложностной статус является открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным фрагментом. Вычислительная сложность задачи 3-ВР известна для всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leqslant 6$, см. работу[17]. Подобный результат был получен[18] для задачи 4-ВР и всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leqslant 5$. Для каждого фиксированного k задача k-ВР разрешима за полиномиальное время[19] в классе $Free(\{P_5\})$. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$, см. работу[20]. Для каждого фиксированного $k \geqslant 5$ задача k-ВР является NP-полной[21] в классе $Free(\{P_6\})$. Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$, см. работу[21]. Вычислительный статус задачи k-ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_6\})$ и $k = 4$.

В работе[22] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе наследственных классов, определяемых парой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. В работе[23] был получен аналогичный результат для всех троек запретов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. В третьей главе диссертации рассматриваются наследственные классы, определяемые четверкой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин, а также для всех таких классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР. Для двух из трех оставшихся случаев доказывается полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему.

Цели и задачи диссертационной работы

Целями диссертационного исследования являются развитие методов построения полиномиальных алгоритмов и полиномиальных сведений для задач о независимом множестве и о вершинной k-раскраске, а также их применение для анализа вычислительной сложности актуальных подзадач данных задач.

Задачи диссертационного исследования:

1. Развить метод локальных преобразований графов для исследования вычислительной сложности задач о независимом множестве и о вершинной k-раскраске.

---

[17] Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science — 2012. — V. 414, № 1. — P. 9–19.

[18] Golovach P. A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H-free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — V. 161, № 1–2. — P. 140–150.

[19] Hoang C., Kaminski M., Lozin V. V., Sawada J., Shu X. Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time // Algorithmica. — 2010. — V. 57, №. 1 — P. 74–87.

[20] Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. — 2017. — P. 1–23.

[21] Huang S. Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs // European Journal of Combinatorics. — 2016. — V. 51. — P. 336–346.

[22] Malyshev D. S. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. — 2015. — V. 338, № 11. — P. 1860–1865.

[23] Malyshev D. S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. — 2017. — V. 33, № 4. — P. 1009–1022.

2. Установить сложностной статус задачи о независимом множестве в некоторых подмножествах множества планарных графов. Установить сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске в некоторых подклассах класса планарных графов и в некоторых наследственных классах, определяемых небольшими запрещенными порожденными структурами.

Методы исследования

В диссертации использованы методы теории графов, теории сложности вычислений и комбинаторного анализа.

Положения диссертации, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Рассмотрен некоторый класс замен подграфов в графах, сохраняющих k-раскрашиваемость и определяемых набором разбиений множества на подмножества. Конструктивным образом показано, что заменяющий подграф существует для любого набора разбиений множества на подмножества.

2. Доказана NP-полнота задачи о независимом множестве в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18.

3. Доказана NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая.

4. Доказана полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для субкубических планарных графов, не содержащих порожденного дерева, получаемого отождествлением концов трех путей длины 3,3,2.

5. Для всех наследственных классов, кроме трех, которые определяются четверкой запрещенных порожденных подграфов, каждый с не более чем 5 вершинами, установлен сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске. Для двух из трех оставшихся случаев доказана полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему.

Научная новизна

В диссертации рассматриваются и исследуются некоторые локальные преобразования графов, ориентированные на редукцию данных в задачах о независимом множестве и о вершинной 3-раскраске. При помощи новых приемов алгоритмической теории графов (в. т.ч. использования локальных преобразований графов) устанавливается вычислительный статус актуальных подзадач данных задач. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при анализе сложности задач о независимом множестве и о вершинной k-раскраске. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по теории графов.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежит общее руководство диссертационным исследованием, предложения по редактуре текста и оптимизация некоторых доказательств.

Апробация работы, степень достоверности результатов и публикации

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- 7th and 8th International Conferences on Network Analysis (Нижний Новгород, 2017; Москва, 2018).
- Финал второго конкурса студенческих работ по теоретической информатике и дискретной математике имени Алана Тьюринга (Санкт-Петербург, 2017).
- Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018» и «Ломоносов-2019» (Москва, 2018 и 2019).
- Workshop on graphs, networks, and their applications (Москва, 2018 и 2019).
- X Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 2018).
- Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН (руководитель В.А. Калягин).
- Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (руководители В.Н. Шевченко и Н.Ю. Золотых).
- Семинар международной лаборатории теоретической информатики НИУ ВШЭ (руководители Н.К. Верещагин, М.Н. Вялый, В.В. Подольский)
- Научно-исследовательский семинар по математической логике МГУ (руководители акад. РАН С.И. Адян, акад. РАН А.Л. Семенов, чл.-корр. РАН Л.Д. Беклимишев)
- Семинар кафедры дискретного анализа Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова (руководитель В.А. Бондаренко)

Все результаты диссертации, полученные автором, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях. По теме диссертации имеется 5 публикаций в изданиях из перечня Министерства науки и высшего образования РФ рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук. Две работы в журнале «Дискретный анализ и исследований операций» (входит в базу цитирования Scopus), одна работа в журнале «Дискретная математика» (входит в базы цитирования Web of Science и Scopus) и две работы в журнале «Журнал Средневолжского математического общества» (входит в базу цитирований ZentralBlatt Mathematics).

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты по гранту Российского Научного Фонда № 17-11-01336 и лаборатории ЛАТАС НИУ ВШЭ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 53 наименования. Общий объем диссертации составляет 96 страниц и включает 28 рисунков. Нумерация всех теорем и лемм ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из трех частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая номеру раздела, а третья порядковому номеру внутри раздела. Точно также нумеруются рисунки. Нумерация теорем, лемм, следствий ведется независимо.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, представлены обзор литературы по теме исследований, цели и задачи работы, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость работы, методы диссертационного исследования, основные результаты диссертации, структура работы, а также представлены степень достоверности результатов работ, апробации результатов работ и публикации по теме диссертации.

Глава 1 состоит из пяти разделов. В **первом разделе** главы 1 приводятся некоторые обозначения и сведения из теории графов. Во **втором** и **третьем разделах** главы 1 рассматриваются некоторые локальные преобразования графов, ассоциированные с задачами о независимом множестве и о вершинной k-раскраске. Сформулируем необходимые определения.

Независимым множеством в графе называется любое подмножество попарно несмежных его вершин. Независимое множество графа с максимально возможным количеством элементов называется *наибольшим*, а его размер называется *числом независимости*, которое для графа G обозначается как $\alpha(G)$. *Задача НМ* для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geqslant k$ или нет.

Хроматическим числом графа G, которое обозначается через $\chi(G)$, называется такое наименьшее k, что существует отображение $c: V(G) \longrightarrow \overline{1,k}$, для которого $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любого $v_1v_2 \in E(G)$. Граф G называется *k-раскрашиваемым*, если выполнено неравенство $\chi(G) \leqslant k$. *Задача k-ВР* для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, является ли он k-раскрашиваемым или нет.

Класс графов с NP-полной задачей НМ будем называть *НМ-сложным.* Класс графов с полиномиальной разрешимой задачей НМ будем называть *НМ-простым.* По аналогии определяются понятия k-ВР-сложного и k-ВР-простого классов графов.

Предположим, что G — некоторый граф, а H — некоторый его порожденный подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовем *H-отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Предположим, что граф G содержит порожденный подграф G_1 с G_1-отделяющим множеством A, G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$. *Замена G_1 на G_2 в графе* G состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$.

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются *α-подобными относительно* $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если существует такая константа c, что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(G_1 \setminus X) = \alpha(G_2 \setminus X) + c$. Во **втором разделе** первой главы доказывается, что в этом случае замена G_1 на G_2 приводит к графу G^* такому, что $\alpha(G^*) - \alpha(G) = \alpha(G_2) - \alpha(G_1)$.

Для произвольного графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим $\mathfrak{M}_\alpha(G, A)$ — семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(G \setminus X) < \alpha(G \setminus Y)$. Во **втором разделе** первой главы доказывается, что G_1 и G_2 будут α-подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$.

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются *(χ, k)-подобными относительно* $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если для любых k-раскрасок c_1 и c_2, соответственно, графов G_1 и G_2 существуют k-раскраски c'' и c', соответственно, графов G_2 и G_1 такие, что для любой вершины $v \in A$ справедливы равенства $c_1(v) = c''(v)$ и $c_2(v) = c'(v)$. В этом случае, если G^* — результат замены G_1 на G_2, то G является k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G^*.

Для заданных графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A)$ следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений подмножества A на не более чем k непустых частей, каждое из которых *не продолжается* до k-раскраски графа G. Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 будут (χ, k)-подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G_1, A) = \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G_2, A)$.

В **третьем разделе** главы 1 решается задача реализации, связанная с рассматриваемыми заменами подграфов для задачи k-ВР. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $\overline{1,n}$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m,n,k) = \max\limits_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где $g_\chi(\varrho) = \min\limits_{\{H|\ \overline{1,n} \subseteq V(H),\ \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H,\overline{1,n})=\varrho\}} |V(H)|$. В **третьем разделе** главы 1 доказывается справедливость следующего утверждения:

Теорема 1.3.2 *Для любых n и $k \geqslant 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существуют граф G и подмножество вершин $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G,A) = \varrho$. При этом справедливо соотношение $f_\chi(m,n,k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.*

Локальные преобразования графов, рассматриваемые во втором и третьем разделах первой главы, а также близкие к ним, используются в диссертации для анализа сложности задач НМ и k-ВР в некоторых классах графов.

В **четвертом разделе** главы 1 предлагается новое доказательство известного факта о том, что задача НМ является NP-полной в классе планарных графов. В **четвертом разделе** главы 1 также доказывается следующее утверждение:

Теорема 1.4.1 *Задача НМ является NP-полной в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18.*

Теорема 1.4.1 улучшает результат из работы[6], в которой утверждается NP-полнота задачи НМ в классе планарных графов с треугольными гранями (кроме, быть может, внешней) с логарифмической от количества вершин максимальной степенью вершин.

Через $\mathcal{D}(d)$ обозначим класс графов со степенями всех вершин не более чем d, класс планарных графов обозначим через $\mathcal{P}$, через $\mathcal{P}(d)$ обозначим класс графов $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(d)$.

Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором сложность задачи 3-ВР меняется с полиномиальной разрешимости на NP-полноту, поскольку задача 3-ВР разрешима за линейное время в классе плоских триангуляций[6]. При этом хочется иметь графы с невысокой максимальной степенью вершин, поскольку по теореме Брукса[7] она разрешима за линейное время в классе $\mathcal{D}(3)$, но она становится NP-полной в классе $\mathcal{D}(4)$[8]. В **пятом разделе** главы 1 доказывается справедливость следующего утверждения:

Теорема 1.5.1 *Класс планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая, является 3-ВР-сложным.*

Глава 2 диссертационной работы посвящена доказательству полиномиальной разрешимости задачи НМ в одном подклассе класса *субкубических планарных графов* $\mathcal{P}(3)$. Она состоит из трех частей. В **первой части** второй главы описываются замены подграфов с двух-, трех- и четырехэлементными отделяющими множествами, используемые для доказательства основного результата второй главы.

Напомним, что класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих запрещенных порожденных подграфов, это записывается так: $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$.

Напомним, что *триодом* $T_{i,j,k}$ называется дерево, получаемое отождествлением трех концевых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$ длины i, j, k соответственно.

Пара (G, A), где $A \subseteq V(G)$, называется *вырожденной*, если объединение элементов множества $\mathfrak{M}_\alpha(G, A)$ не равно A. Очевидно, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x\})$ для любого $x \in A \setminus \bigcup\limits_{A' \in \mathfrak{M}_\alpha(G,A)} \{A'\}$.

Кликой графа называется его полный подграф. Клика называется *разделяющей*, если ее удаление из графа увеличивает количество его компонент связности.

Связный граф G будем называть *неприводимым*, если одновременно выполнены следующие условия:

- Граф G принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$,
- Граф G не содержит разделяющих клик,
- Граф G не содержит порожденного подграфа H и H-отделяющего множества A таких, что $|V(H)| \leqslant 12, |A| \leqslant 4$ и (H, A) вырождена,
- Граф G не содержит связного порожденного подграфа H_1 с не более чем 12 вершинами такого, что к G можно применить операцию замены графа H_1 на некоторый граф H_2 такой, что $|V(H_2)| < |V(H_1)|$ и результат замены принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$.

В **первой части** второй главы доказываются некоторые свойства неприводимых графов и показывается, что задача НМ в классе $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для множества неприводимых графов.

Во **второй части** главы 2 доказывается, что каждый неприводимый граф принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$. В **третьей части** второй главы доказывается ее основной результат:

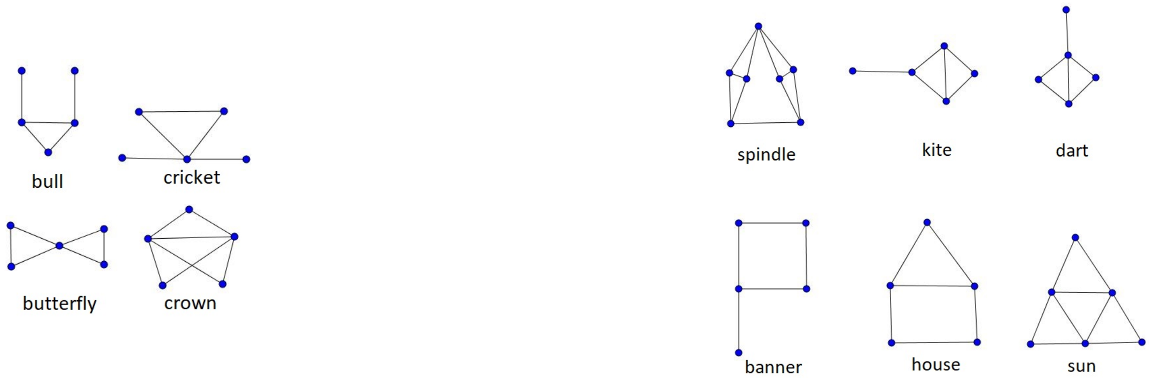
Теорема 2.3.1 *Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ является НМ-простым.*

Значение теоремы 2.3.1 состоит в том, что во всех ранее известных подобных утверждениях фигурировали триоды, у которых не менее двух индексов были не более чем 2.

В **третьей главе** диссертации исследуется сложность задачи 3-ВР для наследственных классов, определяемых небольшими запрещенными порожденными подграфами.

Через P_n и C_n обозначаются простые путь и цикл с n вершинами соответственно. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле. Через F_k $(k \geqslant 3)$ обозначим граф, получаемый добавлением вершины x к простому пути $(x_1, \ldots, x_k)$ и ребер $xx_1, xx_2, \ldots, xx_k$. Граф *diamond* изоморфен графу F_3. Граф W_k ($k \geqslant 3$) получается добавлением вершины x к простому циклу $(x_1, \ldots, x_k)$ и ребер $xx_1, xx_2, \ldots, xx_k$. Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин.

Графы $cricket, kite, butterfly, crown, house, dart, banner$ изображены на следующем рисунке.



Граф смежности ребер графа G называется *реберным графом* графа G.

В **первом разделе** главы 3 рассматриваются следующие 9 классов графов:

- $\mathcal{X}_1^*$ — множество всех лесов,
- $\mathcal{X}_2^*$ — множество реберных графов субкубических лесов,
- $\mathcal{X}_3^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, kite, diamond + P_1\}$,
- $\mathcal{X}_4^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, diamond + P_1, butterfly, crown\}$,
- $\mathcal{X}_5^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, diamond + P_1, house, C_4 + P_1, F_4, W_4, dart, crown\}$,
- $\mathcal{X}_6^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, house, banner, C_4 + P_1, C_5\}$,
- $\mathcal{X}_7^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, C_5\}$,
- $\mathcal{X}_8^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, banner, house, C_4 + P_1\}$,
- $\mathcal{X}_9^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, diamond + K_1, dart, C_4 + P_1, banner, W_4, C_5\}$.

В **первом разделе** главы 3 доказывается, что каждый из классов $\mathcal{X}_7^*$–$\mathcal{X}_9^*$ является 3-ВР-сложным. Во **втором разделе** главы 3 показывается, что класс $Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, dart\})$ является 3-ВР-простым. Основной результат главы 3 представлен в **третьем разделе**. Там устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР для всех наследственных классов, определяемых четверкой запрещенных порожденных структур, каждая не более чем с 5 вершинами, кроме трех классов:

$$Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, C_4\}),$$

$$Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, C_4 + P_1\}),$$

$$Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, W_4\}).$$

А именно, такой класс графов будет 3-ВР-сложным, если он включает хотя бы один из классов $\mathcal{X}_1^*$–$\mathcal{X}_9^*$, иначе он является 3-ВР-простым. Ранее была известна полная сложностная дихотомия для задачи 3-ВР для троек запрещенных порожденных фрагментов, каждый не более чем с 5 вершинами[23].

В заключении подводится итог к проделанной работе и обсуждаются перспективы дальнейшего развития тематики диссертационного исследования.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ
(все в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и включенных в перечень международных баз цитирования — Web of Science, Scopus, ZentralBlatt Mathematics)

[1]. Малышев Д. С., Сироткин Д. В. Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 35–60.

[2]. Сироткин Д. В., Малышев Д. С. Способ редукции графов и его приложения // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, № 3. — С. 114–125.

[3]. Сироткин Д. В. Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k-раскраске // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 2. — С. 98–104.

[4]. Сироткин Д. В. О сложности построения 3-раскраски планарных графов с короткими гранями // Журнал Средневолжского математического общества. — 2018. — Т. 20, № 2. — С. 199–205.

[5]. Сироткин Д. В., Малышев Д. С. О сложности задачи вершинной 3-раскраски для наследственных классов графов, определенных запретами небольшого размера // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 112–130.

СИРОТКИН ДМИТРИЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать . Формат $60 \times 80 \frac{1}{16}$. Печать офсетная. Бумага газетная.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,75. Тираж 100 экз. Заказ № .

Нижегородский государственный технический университет
имени Р.Е. Алексеева
Типография НГТУ, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.