



На правах рукописи

Муняев

Муняев Вячеслав Олегович

**Синхронизация и хаос в ансамблях связанных
ротаторов**

Специальность 1.3.4 —
«Радиофизика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Осипов Григорий Владимирович

Официальные оппоненты: **Короновский Алексей Александрович**,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный
исследовательский государственный универ-
ситет имени Н.Г. Чернышевского»,
заведующий кафедрой физики открытых си-
стем

Станкевич Наталия Владимировна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономи-
ки»,
старший научный сотрудник лаборатории то-
пологических методов в динамике

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Пермский государственный на-
циональный исследовательский университет»

Защита состоится «15» февраля 2023 г. в 15:00 на заседании диссертацион-
ного совета 24.2.340.03 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по
адресу: 603022, г. Нижний Новгород 23, корп. 1, ауд. 420.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского» и на сайте:
<https://diss.unn.ru/1316>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учре-
ждения, просьба направлять по адресу: 603022, г. Нижний Новгород 23,
корп. 1, ауд. 241, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.340.03.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.340.03,
д-р физ.-мат. наук

Клюев Алексей Викторович

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Коллективная динамика сложных систем различной природы, синхронизация ансамблей взаимодействующих осцилляторов, формирование разнообразных диссипативных структур и их эволюция представляют собой одно из центральных направлений исследований в нелинейной динамике и связанных междисциплинарных областях науки. Данная область важна как для теоретического понимания сложных процессов, так и для широкого круга практических приложений. Полученные результаты отражены в большом количестве монографий и статей.

Одной из главных особенностей коллективного поведения является синхронизация¹, под которой обычно понимают процесс достижения коллективного ритма функционирования связанных осцилляторов. Возможна синхронизация как двух или трех элементов, так и элементов ансамблей, состоящих из сотен и тысяч единиц. Известно, что даже слабая связь может оказывать влияние на фазы и частоты осцилляторов, вызывая их синхронизацию. Однако это не всегда так, даже если система симметрична и элементы сильно связаны. В силу явления потери симметрии в популяции идентичных элементов, при существующем полностью синхронном режиме, могут реализовываться устойчивые решения, в которых состояния некоторых элементов отличаются друг от друга². Выделяют три типа синхронизации: полная (глобальная) – все осцилляторы синхронизованы, частичная (кластерная) – существуют группы синхронизованных осцилляторов, и химерные состояния (кластерная синхронизация в ансамблях идентичных осцилляторов).

Многие задачи по синхронизации осцилляторов изначально сформулированы как задачи синхронизации фазовых систем или *ротаторов*, которые имеют в качестве переменных только фазовую (угловую) переменную и ее производные по времени, или сводятся к подобным задачам. Наиболее распространенными являются такие модели фазовых систем как

- $\dot{\varphi} = \gamma$, фазовый осциллятор;
- $\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = \gamma$, фазовый осциллятор с инерцией;
- $\dot{\varphi} = \gamma - \sin \varphi$, активный ротатор;
- $\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = \gamma$, маятник.

¹Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. (The Cambridge nonlinear science series ; 12); Synchronization in Oscillatory Networks / G. V. Osipov, J. Kurths, C. Zhou ; ed. by H. Haken. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. (Springer Series in Synergetics); Synchronization: From Simple to Complex / A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, O. Sosnovtseva. Berlin : Springer, 2009. (Springer Series in Synergetics).

²Spontaneous synchrony breaking / A. E. Motter // Nature Physics. 2010. Vol. 6, no. 3. P. 164—165.

Все указанные системы могут (а фазовые системы всегда) демонстрировать процессы неограниченного роста фазы, т.е. вращения. Системы связанных фазовых систем или *ротаторов* являются одной из актуальных моделей в различных областях науки и техники. Несмотря на относительную простоту таких моделей, они адекватно описывают как поведение механических объектов, так и различные процессы в полупроводниковых структурах, молекулярной биологии и в системах фазовой синхронизации. Фазовые системы часто выбираются в качестве основы для теоретических исследований массивов связанных джозефсоновских контактов. Приведенные примеры показывают, что изучение поведения подобных систем является актуальной темой исследований и имеет важное прикладное значение.

Кластерные и химерные состояния в ансамблях различной размерности представляют особый интерес при изучении явлений синхронизации и нарушения симметрии³. Состояния первого типа характеризуются двумя или более группами взаимно синхронизованных осцилляторов. Эти состояния уже известны в течение многих лет, но все еще привлекают большое внимание исследователей в различных областях науки и техники. Кластерные состояния возникают как в ансамблях с конечным числом элементов, так и в распределенных колебательных средах. Состояния частичной синхронизации могут являться промежуточными в процессах перехода от режима полной синхронизации ансамбля к режиму полной десинхронизации. Одним из возможных сценариев является переход через уединенные состояния (“solitary states”)⁴. Для уединенных состояний характерно, что отдельные осцилляторы при вариации коэффициента связи начинают покидать синхронный кластер в случайных положениях в пространстве. Примеры уединенных состояний были найдены в различных типах сетей, системах нелокально связанных элементов, системах осцилляторов Стюарта–Ландау.

В случае сетей связанных идентичных элементов с топологией “звезда” можно наблюдать так называемые “drum-head” моды. В таких режимах периферийные элементы демонстрируют синхронную динамику, в то время как центральные элементы не синхронизированы друг с другом⁵. В частности, эти состояния наблюдались в моделях нейронной активности.

Важным фактором, влияющим на динамику ансамблей и активных сред, является действие случайных сил, порождаемых внутренними

³Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives / A. Pikovsky, M. Rosenblum // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2015. Vol. 25, no. 9. P. 097616.

⁴Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions / Y. Maistrenko, B. Penkovsky, M. Rosenblum // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, no. 6. P. 060901.

⁵Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems / L. M. Pecora, T. L. Carroll // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80, no. 10. P. 2109—2112.

и внешними источниками шума. Обычно случайные воздействия (шум) препятствуют синхронизации и разрушают пространственные структуры. Однако в определенных случаях в распределенных системах наблюдаются стохастические эффекты, приводящие к росту упорядоченности и формированию структур. Это стохастический и когерентный резонансы, индуцированная шумом синхронизация, перемежаемость и ряд других.

Среди множества моделей, предложенных для описания процесса синхронизации, наиболее популярной является модель Курамото. Разработка данной модели была мотивирована явлением коллективной синхронизации, при которой даже очень большие неоднородные системы осцилляторов переходят к режиму, характеризующемуся общей частотой функционирования всех элементов⁶. Модель Курамото является упрощением модели, разработанной Уинфри для изучения динамики больших популяций связанных осцилляторов. Курамото показал, что для любой системы слабосвязанных осцилляторов, движущихся близ своих предельных циклов, долгосрочная динамика задается фазовыми уравнениями элементов, связанных через среднее поле⁷. Благодаря своей относительной простоте модель Курамото позволяет аналитически изучать вопросы перехода к синхронизации. Для характеристики степени синхронизации фазовых осцилляторов в рамках модели Курамото часто используют так называемый параметр порядка – комплексную величину, определяющую степень фазовой когерентности группы соседних элементов (локальный параметр порядка) или всех элементов рассматриваемого ансамбля (глобальный параметр порядка).

Важным обобщением модели Курамото является ансамбль глобально связанных ротаторов с инерцией. Особенности синхронизации глобально связанных ротаторов, как детерминированных, так и при наличии шума, были широко изучены⁸. Однако на данный момент для систем связанных ротаторов с инерцией и шумом стационарные распределения были найдены только численно. Также отсутствуют аналитические выражения, описывающие параметр порядка как функцию других параметров модели Курамото с шумом.

⁶Biological Rhythms and the Behavior of Populations of Coupled Oscillators / A. T. Winfree // Journal of Theoretical Biology. 1967. Vol. 16, no. 1. P. 15—42; From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators / S. H. Strogatz // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000. Vol. 143, no. 1. P. 1—20.

⁷Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence / Y. Kuramoto; ed. by H. Haken. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1984. (Springer Series in Synergetics; 19).

⁸Synchronization in populations of globally coupled oscillators with inertial effects / J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, R. Spigler // Physical Review E. 2000. Vol. 62, no. 3. P. 3437—3454; Synchronization transitions in globally coupled rotors in the presence of noise and inertia: Exact results / M. Komarov, S. Gupta, A. Pikovsky // Europhysics Letters. 2014. Vol. 106, no. 4. P. 40003; Kuramoto model of synchronization: equilibrium and nonequilibrium aspects / S. Gupta, A. Campa, S. Ruffo // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2014. Vol. 2014, no. 8. R08001.

Исследования синхронизации и хаоса в ансамблях различной природы, включая ансамбли связанных ротаторов, получили широкое развитие в работах В.С. Анищенко, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, М.А. Закса, М.В. Иванченко, А.А. Короновского, В.Б. Казанцева, Ю.С. Кившаря, С.П. Кузнецова, Й. Курамото, Ю. Куртца, П.С. Ланды, К. Лейнга, Ю.Л. Майстренко, В.В. Матросова, Ю.И. Неймарка, В.И. Некоркина, Г.В. Осипова, А.С. Пиковского, М.И. Рабиновича, М.Г. Розенблюма, С. Строгаца, А.Е. Храмова, В.Д. Шалфеева и многих других. Однако в силу трудоёмкости задач и широкого спектра вопросов по-прежнему существует ряд нерешённых проблем. Ключевым остаётся вопрос о закономерностях формирования пространственно-временных структур взаимодействующих ротаторов в зависимости от топологии связей и внешних факторов, таких как шум. Важный вопрос – изучение переходов к хаотическому и гиперхаотическому поведению. Существенная проблема – недостаток аналитических результатов и методов исследования подобных систем.

Целью диссертационной работы является выявление и детальный анализ пространственно-временных структур, синхронных и асинхронных режимов, регулярных и хаотических процессов в ансамблях взаимодействующих фазовых систем. Основной акцент делается на теоретическом и численном исследовании поведения ансамблей произвольного числа элементов с различными топологиями связей в зависимости от их параметров, таких как сила связи между элементами, размер ансамбля, неоднородность ансамбля по характеристикам элементов, влияние шума и т.д., а также разработке соответствующих аналитических подходов, необходимых для их изучения.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Выявить разнообразие и механизмы формирования регулярных и хаотических синфазных и несинфазных кластерных структур в короткой цепочке идентичных маятников, взаимодействующих через локальную нелинейную связь.
2. Установить закономерности формирования и описать синфазные и несинфазные (кластерные или полностью несинфазные) вращательные режимы в цепочечных моделях того же типа при произвольном количестве элементов; исследовать хаотическую динамику в таких системах.
3. Обнаружить регулярные и хаотические вращательные режимы, проанализировать процесс потери симметрии и описать механизм формирования несинфазных вращательных структур в ансамблях глобально связанных идентичных маятников.
4. Разработать аналитические методы для описания синфазных и несинфазных кластерных структур и анализа их устойчивости в

ансамблях нелинейно взаимодействующих маятников с различной топологией связей.

5. Описать стационарные синхронные режимы в ансамбле неидентичных глобально связанных ротаторов с инерцией и шумом. Проанализировать процесс перехода к синхронизму; найти аналитические критерии, позволяющие установить тип перехода (суперкритический/субкритический).

Научная новизна. Работа посвящена решению задач анализа динамики в ансамблях взаимодействующих фазовых систем. Совокупность результатов работы существенно расширяет представления о механизмах формирования, структуре и свойствах регулярных и хаотических динамических структур в подобных ансамблях, таких как синфазные и несинфазные кластерные структуры, уединенные состояния, “drum-head” моды и т.д. Результаты работы находятся в соответствии с установившимися представлениями в этой области науки, расширяя и дополняя их. Новизна основных результатов подтверждается публикациями в ряде научных статей в высокорейтинговых журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ.

В процессе проведения исследований получены следующие научные результаты:

1. Разработана асимптотическая теория неустойчивости синфазного вращательного режима в цепочках произвольной длины и ансамблях глобально связанных идентичных маятников. Теория позволяет определить все области параметров неустойчивости синфазного вращательного режима при малой величине диссипации.
2. Создана теория, позволяющая предсказать тип реализующегося в интервалах неустойчивости синфазного вращательного синхронного по частоте (полностью несинфазного или кластерно синфазного) режима в цепочках произвольной длины локально связанных идентичных маятников.
3. Обнаружен и описан переход к хаотической вращательной динамике при изменении индивидуальных параметров элементов и силы связи в цепочке локально связанных маятников. Показано, что он связан с плотностью перекрытия зон неустойчивости синфазного вращения, и происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода или бифуркации разрушения тора.
4. Показано, что к возникновению (исчезновению) хаотической вращательной динамики в цепочке локально связанных маятников может приводить изменение количества ее элементов. Установлена квазилинейная корреляция между размерностью гиперхаотических режимов и длиной цепочки.

5. Найдены аналитически и исследованы на устойчивость несинфазные вращательные режимы в ансамбле глобально связанных идентичных маятников. Показана связь их появления с развитием неустойчивости синфазного вращения. Обнаружен переход к хаотической динамике через бифуркации разрушения тора и каскад удвоения периода.
6. Аналитически описаны стационарные синхронные режимы в больших ансамблях глобально связанных неидентичных по частоте ротаторов с инерцией (массой) и шумом. Аналитическое решение справедливо в пределе малой массы. Для безынерционных ротаторов (модель Курамото–Сакагучи) с шумом получено точное выражение для стационарного значения модуля параметра порядка.
7. Найден критерий, позволяющий определить тип перехода к синхронизации, супер- или субкритический, в системе неидентичных глобально связанных ротаторов с инерцией и шумом. Для ряда часто используемых распределений данный критерий был найден в явном виде.

Теоретическая и практическая значимость. В работе решено множество научных задач в области нелинейной динамики, посвященных детальному анализу механизмов формирования различных типов динамических регулярных и хаотических структур, их устойчивости и изучению процессов перехода к синхронизации в ансамблях взаимодействующих фазовых систем. Результаты работы носят в основном фундаментально научный характер, расширяют и дополняют имеющиеся представления в актуальной области исследований, связанных с изучением закономерностей и свойств формирования пространственно-временных структур в сетях взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Работа содержит большое количество разработанных методов и аналитических результатов, позволяющих производить исследование ансамблей с различными топологиями связей в зависимости от таких параметров как размер ансамбля, сила связи, неоднородность ансамбля по характеристикам элементов, интенсивность шума. Полученные результаты носят не только фундаментально научный характер, но имеют существенное прикладное значение. Исследования формирования структур и эффектов их синхронизации важны при моделировании и анализе процессов в системах фазовой синхронизации, полупроводниковых структурах, молекулярной биологии, электросетях и т.д.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использован широкий спектр аналитических и численных методов теории колебаний, математической физики и бифуркационного анализа. Поставленные задачи подразумевали проведение глубокого численного

исследования изучаемых моделей связанных ротаторов и разработку аналитических обоснований результатов. Для построения асимптотических решений и исследования устойчивости движения в задачах, имеющих малый параметр, применялись различные методы теории возмущений и их модификации. В частности, для аналитического описания вращательных режимов использовался метод Линдштедта–Пуанкаре. При изучении линейной устойчивости применялись методы и сведения из теории матриц, позволившие в случаях матриц особой структуры произвести точное вычисление их спектров. Устойчивость вращательных режимов определялась посредством вычисления спектра Флоке–Блоха периодических линеаризованных операторов. Для описания систем с шумом в пределе большого числа элементов применялось уравнение Фоккера–Планка, теоретический и численный анализ решений которого преимущественно проводился в матричном представлении, для перехода к которому использовался специальный базис. Для отыскания стационарных решений уравнения Фоккера–Планка был применен метод матричных непрерывных дробей. Для прямого моделирования детерминированной динамики ансамблей связанных ротаторов главным образом использовался классический метод Рунге–Кутты, в то время как моделирование стохастических систем производилось с помощью схемы Эйлера первого порядка. Для численного поиска вращательных траекторий использовался алгоритм Ньютона–Рафсона.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических методов теоретического и численного анализа, обоснованных и многократно проверенных в исследованиях нелинейных процессов в сложных системах. Достоверность результатов подтверждается их воспроизводимостью с использованием различных подходов и численных схем, а также согласованностью с данными, полученными ранее другими авторами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что в системе трех идентичных связанных маятников с ростом силы связи происходит рождение несинфазных вращательных периодических движений, связанных с потерей устойчивости синфазного синхронного режима. Причем существуют две такие области неустойчивости, что было доказано численно и аналитически. Одна область неустойчивости соответствует появлению “drum-head” моды. Для исследуемой системы установлена бистабильность синфазного и несинфазного периодических вращательных режимов.
2. Аналитически определено количество областей неустойчивости синфазного режима в цепочке локально связанных идентичных маятников. В интервалах неустойчивости синфазного синхронного режима реализуются различные (полностью несинфазные или

кластерно синфазные) синхронные по частоте режимы. Показано, что иерархия эволюций синфазного режима в несинфазный с ростом параметра связи однозначно зависит от числа элементов в цепочке. Развитый анализ позволяет предсказать какой именно тип синхронного режима будет реализован.

3. Описаны сценарии возникновения хаотической вращательной динамики в цепочках из трех и более связанных маятников. Показано, что переход к хаотической динамике при увеличении диссипации происходит через каскад бифуркаций удвоения периода периодических движений или в результате бифуркации разрушения инвариантных торов, обусловленных сближением и перекрытием зон неустойчивости синфазного режима. Продемонстрировано, что хаос может возникнуть при добавлении или исключении элементов в ансамбле. Обнаружена квазилинейная корреляция между размерностью гиперхаоса и длиной цепочки.
4. Установлена единственная область параметрической неустойчивости симметричного синфазного режима системы глобально связанных идентичных маятников. Разработан аналитический подход, позволяющий построить асимптотическое разложение для вращательных мод, возникающих в результате потери устойчивости синфазного режима, и исследовать их устойчивость в случае малой диссипации. Разработанный метод был применен для системы из трех и большего числа элементов. Описан сценарий возникновения хаотической вращательной динамики.
5. Разработано аналитическое описание стационарных синхронных режимов в ансамбле глобально связанных ротаторов с шумом. Основное аналитическое выражение справедливо для малых масс. Рассмотрены различные предельные случаи. Для безмассовых ротаторов (стандартные осцилляторы Курамото) получено точное выражение. Оно представляет собой аналитическую формулу для стационарных решений модели Курамото (или, в более общем случае, для модели Курамото–Сакагучи) с шумом. Найдено аналитическое выражение для критической массы ротаторов, при котором происходит изменение типа перехода к синхронизации (суперкритический/субкритический).

Апробация результатов и публикации. Основные результаты работы докладывались на:

1. XXII научная конференция по радиофизике, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 15.05.2018 – 29.05.2018, Вращательная динамика в системе связанных маятников (секционный, внутривузовский).
2. International Conference-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2018, ННГУ им. Лобачевского, Нижний Новгород, 16.07.2018 –

- 20.07.2018, Rotational dynamics in the ensemble of three coupled pendulums (секционный, международный).
3. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 17.12.2018 – 18.12.2018, Symmetry broken states in an ensemble of coupled pendulums (секционный, международный).
 4. XXIII научная конференция по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения Н.А. Железцова, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 13.05.2019 – 21.05.2019, Кластерные вращательные режимы в ансамбле глобально связанных маятников (секционный, внутривузовский).
 5. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2019, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 09.12.2019 – 13.12.2019, Analytical approach to synchronous states of globally coupled noisy rotators (секционный, международный).
 6. XXIV научная конференция по радиофизике, посвященная 75-летию радиофизического факультета, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 13.05.2020 – 31.05.2020, Вращательные состояния с потерей симметрии в цепочке связанных маятников (секционный, внутривузовский).
 7. Mathematical modeling and supercomputer technologies, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 23.11.2020 – 27.11.2020, Синхронные состояния в ансамблях глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией и шумом (секционный, международный).
 8. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 17.12.2020 – 18.12.2020, Appearance of chaos in evolving pendulum network (секционный, международный).
 9. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 17.12.2020 – 18.12.2020, Stationary and periodic regimes in the noisy Kuramoto system with a bimodal frequency distribution (секционный, международный).

Результаты работы также обсуждались на научных семинарах кафедры теории управления и динамики систем ННГУ им. Н.И. Лобачевского и кафедре хаоса и статистической физики Потсдамского университета (Германия).

Исследования, результаты которых вошли в настоящую работу, проводились при поддержке Российского научного фонда (проекты №№14-12-00811, 17-12-01534, 19-12-00367, 22-12-00348), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№17-32-50096, 18-29-10068_mk, 19-52-12053).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных работах, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 9 — в тезисах докладов.

Личный вклад. Диссертант принимал участие в постановке задач, разработке аналитических подходов для их решения, обсуждении и интерпретации полученных результатов. Результаты численного моделирования получены диссертантом с применением самостоятельно реализованных программных комплексов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 6 приложений. Полный объем диссертации составляет 128 страниц, включая 35 рисунков. Список литературы содержит 93 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена изучению регулярных вращательных режимов в цепочках локально связанных идентичных маятников со свободными граничными условиями, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = \gamma + \sum_{\tilde{n}=1}^N K_{n\tilde{n}} \sin(\varphi_{\tilde{n}} - \varphi_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где λ — коэффициент затухания, ответственный за диссипативные процессы в системе; γ — постоянный вращающий момент, одинаковый для всех N маятников; коэффициенты $K_{n\tilde{n}} = K(\delta_{n+1,\tilde{n}} + \delta_{n,\tilde{n}+1})$ ($\delta_{n,m}$ — символ Кронекера) характеризуют нелинейную связь между элементами. Исследование вращательной динамики подразумевает рассмотрение области параметров (λ, γ) , при которых фазовое пространство единичного элемента системы имеет периодическую вращательную траекторию (области V_2 и V_3 на рисунке 1), а система (1), соответственно, синфазное вращательное движение

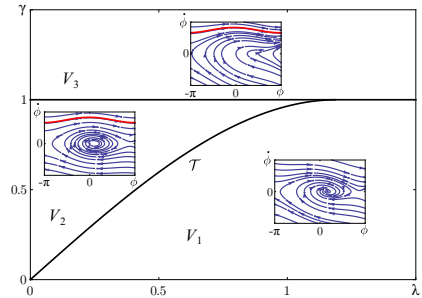


Рис. 1 — Бифуркационная диаграмма и структурно устойчивые фазовые портреты системы (2).

$\varphi_1(t) = \dots = \varphi_N(t) = \phi(t)$, подчиняющееся уравнению маятника

$$\ddot{\phi} + \lambda\dot{\phi} + \sin\phi = \gamma. \quad (2)$$

Для количественной характеристики периодических вращательных режимов использовалась величина Ξ , описывающая степень частотной отстройки маятников на периоде вращения T :

$$\Xi = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n_1, n_2=1}^N \max_{0 < t < T} |\dot{\varphi}_{n_1}(t) - \dot{\varphi}_{n_2}(t)|,$$

В разделе 1.1 изучается вращательная динамика в короткой цепочке (1), состоящей из трех элементов. Численно установлено, что при любых значениях параметров индивидуальных элементов λ , γ из V_2 существуют две области значений величины силы связи K , при которых синфазное вращательное движение является неустойчивым (области A_2 и A_4 на рисунке 2а). Разработана асимптотическая теория, позволяющая найти границы областей неустойчивости синфазного вращения по параметру силы связи K в пределе малой диссипации. Численно и аналитически было показано, что потеря устойчивости синфазного вращения $\phi(t)$ происходит в результате бифуркации удвоения периода, приводящей к рождению 4π -периодических несинфазных вращательных режимов (за период элементы совершают два полных оборота). Реализующиеся вращения представляют собой двух- и трехкластерные состояния (ветви B_1 – B_2 и B_3 – B_6 на рисунке 2а, соответственно). При этом в случае двухкластерного состояния наблюдается частотная синхронизация периферийных элементов, в то время как центральный элемент с ними не синхронизирован, что позволяет интерпретировать данный режим как “drum-head” моду. Численно изучена область существования реализующихся двух- и трехкластерных состояний и их устойчивость; установлена возможность бистабильности с синфазным вращательным движением; исследованы бифуркации, приводящие к потере устойчивости и исчезновению режимов при изменении параметра силы связи K .

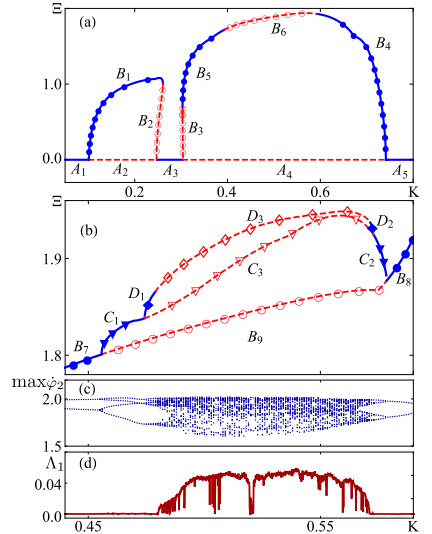


Рис. 2 — (а,б) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов. (с) Локальные максимумы $\dot{\varphi}_2$. (д) Старший показатель Ляпунова. Параметры: $\lambda = 0.7$, $\gamma = 0.97$.

Увеличение коэффициента затухания λ приводит к сближению областей неустойчивости синфазного режима A_2 и A_4 , развивается каскад бифуркаций удвоения 4π -периодических вращений. Рисунок 2b демонстрирует несколько первых бифуркаций этой последовательности, при которых рождаются 8π - и 16π -периодические вращательные режимы (ветви C_1 – C_3 и D_1 – D_3 , соответственно). При дальнейшем росте λ происходит рождение двух хаотических аттракторов, существующих в различных областях по параметру K : первый характеризуется двухкластерной, а второй полностью несинфазной вращательной динамикой. Последующее увеличение λ приводит к сближению областей (по K) хаотического движения и их перекрытию, приводящему к хаотической динамике с перемежаемостью, а затем к полностью несинфазному хаотическому вращению.

В разделе 1.2 исследуются синхронные структуры в цепочках (1) с произвольным количеством элементов N . Аналитически показано, что при фиксированных значениях параметров индивидуальных элементов λ , γ из V_2 (см. рисунок 1) всегда существует $N - 1$ область значений величины силы связи K , при которых синфазное вращательное движение $\phi(t)$ цепочки является неустойчивым. Границы всех областей неустойчивости синфазного вращения $I_n = (K_1^{(n)}, K_2^{(n)})$ могут быть найдены с помощью выражения

$$K_{1,2}^{(n)} = \frac{K_{1,2}^*}{2[1 + \cos(n\pi/N)]}, \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

где K_1^* и K_2^* – левая и правая граница единственной области неустойчивости тривиального решения уравнения $\ddot{\psi} + \lambda\dot{\psi} + [K^* + \cos\phi(t)]\psi = 0$ по параметру K^* . Разработана асимптотическая теория, позволяющая в пределе малого значения отношения λ/γ определить величину K_1^* и K_2^* :

$$K_{1,2}^* = \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \right] + O\left(\frac{\lambda^4}{\gamma^4}\right). \quad (3)$$

Была изучена структура и распределение областей неустойчивости I_n синфазного вращения в зависимости от параметров цепочки (рисунок 3). Показано, что увеличение параметра λ или длины цепочки N приводит к сближению и последующему перекрытию его областей неустойчивости I_n (рисунок 3b). Обнаружены

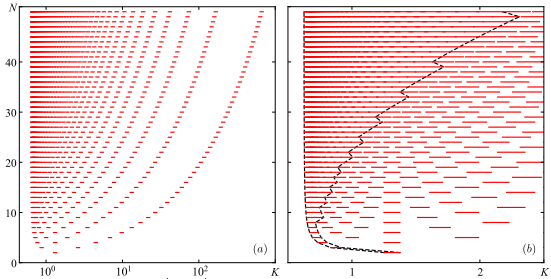


Рис. 3 — (a,b) Области неустойчивости синфазного вращения I_n . Черная линия – граница области, образованной перекрытием интервалов I_n . Параметры: $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.97$.

различные сценарии развития перекрытий, вплоть до слияния в единую область неустойчивости, в зависимости от параметров системы.

Показано, что потеря устойчивости синфазного вращения с ростом силы связи K происходит через бифуркацию удвоения периода, в результате которой рождаются различные 4π -периодические несинфазные вращательные режимы. Данные режимы найдены численно, исследована их устойчивость и возможные бифуркации. Развитая теория позволяет предсказать тип реализующегося несинфазного вращения: определить число синфазных кластеров и их размеры. Число кластеров 4π -периодического несинфазного вращения, соответствующего n -ой области неустойчивости I_n , равно $M_n(N) = \left\lfloor \frac{N}{\text{НОД}(2N, N-n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ($\lfloor \dots \rfloor$ – округление к меньшему). При этом, если это возможно при данных N и $M_n(N)$, все кластеры содержат равное число элементов; в противном случае один из кластеров содержит в два раза меньше элементов, чем остальные.

Во **второй главе** исследуется развитие вращательной хаотической и гиперхаотической динамики в цепочке локально связанных идентичных маятников (1) произвольной длины в зависимости от изменения (i) индивидуального параметром элементов, а именно диссипации, и (ii) свойств всего ансамбля, то есть силы связи K и количества элементов N .

В разделе 2.1 формулируется исследуемая математическая модель (1); определяется область параметров (λ, γ) , при которых возможна вращательная динамика отдельных маятников цепочки, а в системе – 2π -периодический синфазный режим $\phi(t)$; приводятся краткие результаты главы 1 об устойчивости синфазного вращения $\phi(t)$ и механизмах рождения несинфазных вращений большей периодичности.

В разделе 2.2 продолжено исследование взаимного расположения областей неустойчивости синфазного вращения I_n в зависимости от параметров λ и N , так как их сближение и перекрытие влияет на существование различных динамических структур, их мультистабильность и сложность реализующихся режимов, что было продемонстрировано на примере короткой цепочки в главе 1. Численно показано, что при малой величине параметра λ области I_n не перекрываются, в то время как его рост приводит к их сближению с последующим объединением в единую область. Аналитически установлены три сценария развития перекрытий при добавлении новых элементов: (i) при $K_2^*/K_1^* < 3$ одна из областей I_n всегда будет отделена от остальных окном устойчивости; (ii) при $3 < K_2^*/K_1^* < 4$ существует критическое число элементов N^* , до которого все области I_n перекрываются; (iii) при $K_2^*/K_1^* > 4$ все области I_n перекрываются для любого N .

В разделе 2.3 показано, что при увеличении коэффициента затухания λ от малых значений в цепочке фиксированной длины происходит рождение хаотических аттракторов, существующих в разных областях

по параметру K и характеризующихся различными типами кластерной вращательной динамики. Дальнейший рост λ приводит к увеличению и сближению областей существования (по K) хаотических движений и их частичному (наблюдается перемежаемость соответствующих режимов), а затем и полному перекрытию (наблюдается полностью несинфазное вращение).

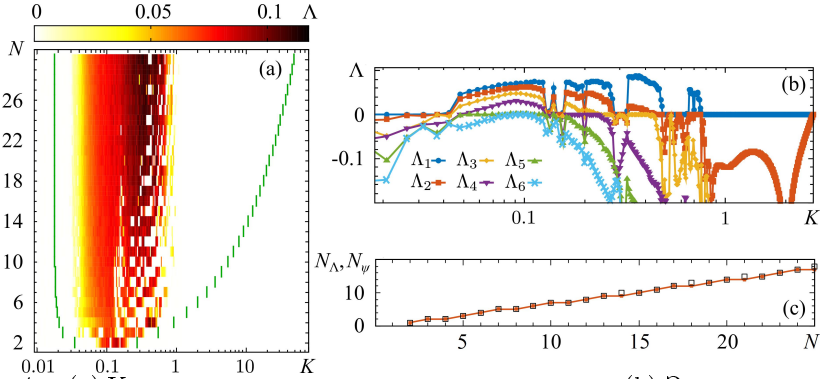


Рис. 4 — (а) Карта старшего ляпуновского показателя. (б) Эволюция шести старших ляпуновских показателей при $N = 7$. (с) Количество положительных показателей Ляпунова N_Λ (линии) и теоретическая аппроксимация N_ψ (черные маркеры) при $K = 0.1$. Параметры: $\lambda = 0.9$, $\gamma = 0.97$.

Установлено, что при изменении силы связи K возможен переход к хаотической динамике через каскад бифуркаций удвоения периода периодических вращений и через последовательность бифуркации Неймарка–Сакера с последующим разрушением инвариантного тора.

Вычислительные эксперименты показали, что при значениях силы связи K , соответствующих большому числу перекрывающихся областей неустойчивости I_n , всегда наблюдается хаотическая динамика. Развитая теория позволяет найти оценку данного значения $K \sim K_2^*/4$ (на рисунке 4а $K \sim 0.1$). Добавление элементов при таких K может только увеличить размерность хаотических колебаний. Для данного случая построена аналитическая оценка размерности гиперхаоса (см. пример на рисунке 4б), то есть количества положительных показателей Ляпунова (рисунок 4с):

$$N_\psi = \theta(K - K_1^*/4) \left[\frac{2N}{\pi} \arccos \left(\sqrt{\frac{K_1^*}{4K}} \right) \right] - \theta(K - K_2^*/4) \left[\frac{2N}{\pi} \arccos \left(\sqrt{\frac{K_2^*}{4K}} \right) \right],$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда. При больших значениях параметра K добавление элемента может приводить как к хаотизации, так и к регуляризации динамики ($0.12 \lesssim K \lesssim 1.0$ на рисунке 4а). Установлено, что хаотические режимы реализуются на относительно узком интервале значений K ; сильная связь приводит к регуляризации вращений маятников.

Третья глава посвящена исследованию регулярной и хаотической вращательной динамики в ансамблях N глобально связанных идентичных маятников, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = \gamma + \frac{K}{N} \sum_{\bar{n}=1}^N \sin(\varphi_{\bar{n}} - \varphi_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где λ – коэффициент затухания, ответственный за диссипативные процессы в системе; γ – постоянный вращающий момент; коэффициент K характеризует силу нелинейной связи между элементами.

В [разделе 3.1](#) формулируется исследуемая математическая модель (4); аналитически показано, что устойчивость 2π -периодического синфазного вращательного режима $\phi(t)$ определяется параметрами λ , γ , K и не зависит от количества элементов N . Посредством численного анализа найдена область V_* значений параметров (λ, γ) , при которых возможна неустойчивость синфазного вращения $\phi(t)$. Установлено, что V_* представляет собой объединение области V_2 и части V_3 (см. рисунок 1), кроме того для всех значений параметров из V_* имеется единственная область неустойчивости $\phi(t)$ по параметру силы связи K . Найдено выражение для границ K_1^* , K_2^* данной области (оно совпадает с (3)) и разработан общий подход к анализу устойчивости периодических кластерных вращательных режимов.

Показано, что смена устойчивости синфазного вращения $\phi(t)$ при увеличении силы связи K происходит в результате бифуркации удвоения периода, приводящей к одновременному рождению 4π -периодических кластерных вращательных режимов различных типов, число которых равно $N - 1$. Разработанный подход, позволяет построить асимптотические разложения для данных решений и исследовать их устойчивость при малых значениях λ . Аналитически и численно установлено, что реализуются только двухкластерные, включая уединенные состояния, и трехкластерные вращения, причем два кластера из трех содержат равное количество элементов.

В [разделе 3.2](#) развитый анализ применяется к системе трех элементов. Смена устойчивости синфазного вращения $\phi(t)$ приводит к одновременному рождению 4π -периодического двухкластерного (ветви B_4 – B_5 – B_8 – B_9 и B_6) и полностью несинфазного вращения (ветви B_1 – B_2 и B_3 на рисунке 5а). Численно изучены области их существования и устойчивость в зависимости от параметров системы; установлена возможность бистабильности друг с другом и синфазным вращением $\phi(t)$; исследованы бифуркации, приводящие к потере устойчивости и исчезновению режимов при изменении параметра силы связи K .

Установлено, что увеличение коэффициента затухания λ значительно влияет на сложность реализующихся режимов. В то время как при малой диссипации динамика регулярна, увеличение значения

параметра λ может приводить к рождению хаотических аттракторов, существующих в разных областях по параметру K . В случае ансамбля трех элементов наблюдался сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода 4π -периодического двухкластерного вращения (рисунок 5b). При этом хаотический режим остается двухкластерным и возможна его бистабильность с синфазным вращением $\phi(t)$.

При больших значениях λ с увеличением силы связи K наблюдался сценарий перехода к хаотической динамике через последовательность бифуркации Неймарка–Сакера 4π -периодического полностью несинфазного вращения с последующим разрушением инвариантного тора.

В разделе 3.3 аналогичным образом рассматривается регулярная и хаотическая вращательная динамика в ансамблях с большим числом элементов N .

В четвертой главе разрабатывается аналитический подход для описания стационарных синхронных состояний в больших неоднородных ансамблях глобально связанных ротаторов с шумом и малой инерцией.

В разделе 4.1 формулируется исследуемая математическая модель ансамбля N глобально связанных неидентичных по приложенным вращательным моментам ротаторов, взаимодействующих через комплексное среднее поле R ($n = 1, \dots, N$):

$$\mu \ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n = \omega_n + \varepsilon r \sin(\psi - \varphi_n) + \sigma \zeta_n(t), \quad R \equiv r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n}, \quad (5)$$

где μ – параметр инерции ротаторов; ε характеризует силу нелинейную связи между элементами; ω_n – вращательный момент, приложенный к n -му ротатору; считается, что распределение моментов ω_n описывается плотностью $g(\omega)$. На ротаторы действуют независимые источники белого гауссовского шума $\sigma \zeta_n(t)$ с равными амплитудами σ , нулевым средним $\langle \zeta_n(t) \rangle = 0$, и автокорреляторами $\langle \zeta_n(t_1) \zeta_{n'}(t_2) \rangle = 2\delta_{nn'} \delta(t_1 - t_2)$.

В разделе 4.2, для исследования поведения больших ансамблей, система (5) рассматривается в термодинамическом пределе ($N \rightarrow \infty$). При анализе использовалось матричное представление соответствующего

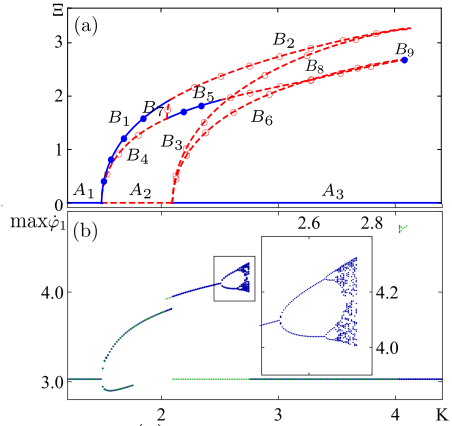


Рис. 5 — (а) Бифуркационная диаграмма синхронных вращательных режимов, (б) локальные максимумы $\dot{\varphi}_1$. Параметры: $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.8$.

уравнения Фоккера–Планка; для поиска стационарных распределений применялся метод непрерывных матричных дробей. Основным результатом раздела является замкнутая аналитическая формула для параметра порядка подгрупп $a_{0,1}(\nu, A)$ идентичных ротаторов, вычисленная до первого порядка по параметру инерции μ для случая распределений $g(\omega)$, симметричных относительно некоторой частоты ω_0 :

$$a_{0,1}(\nu, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)}{I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \left(1 - \mu \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\sin\left(i\pi\frac{\nu}{\sigma^2}\right)}{I_{-i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) I_{i\frac{\nu}{\sigma^2}}\left(\frac{A}{\sigma^2}\right)} \right) + o(\mu). \quad (6)$$

Общее параметрическое представление модуля параметра порядка r как функции силы связи ε имеет вид,

$$r = \sqrt{2\pi} \int d\nu g(\omega_0 + \nu) a_{0,1}^*(\nu, A), \quad \varepsilon = \frac{A}{r},$$

где A – неотрицательный параметр.

В разделе 4.3 рассматривается форма выражения (6) в нескольких частных случаях: для безынерционных ротаторов ($\mu \rightarrow 0$) выражение (6) дает точное решение для модели Курамото с шумом; вычислены параметры порядка подгрупп идентичных ротаторов в отсутствие шума ($\sigma \rightarrow 0$).

Показано, что начало нетривиальной ветви решения $r(\varepsilon)$ имеет вид

$$r = C_0^2 \sqrt{\left(\varepsilon_c^{(1)} - \varepsilon\right)} / C_1,$$

где константы $\varepsilon_c^{(1)}$ и C_1 определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_c^{(1)} = \left(\frac{1}{2} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{1 + y^2} (1 - \mu \sigma^2 y^2) \right)^{-1},$$

$$C_1 = -\frac{1}{8\sigma^4} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{(1 + y^2)^2 (4 + y^2)} (2(1 - 2y^2) - \mu \sigma^2 y^2 (13 + y^2)).$$

Характер перехода к синхронизму с ростом силы связи ε зависит от знака коэффициента C_1 : суперкритический переход происходит при $C_1 < 0$; при $C_1 > 0$ переход субкритический. Данный критерий был сформулирован в виде критического значения инерции μ^* , превышение которого меняет характер перехода с суперкритического на субкритический:

$$\mu^* = \frac{2}{\sigma^2} \left(\int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)(1 - 2y^2)}{(1 + y^2)^2 (4 + y^2)} \right) / \left(\int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)y^2 (13 + y^2)}{(1 + y^2)^2 (4 + y^2)} \right).$$

Выражение является верным только в случае, если получаемое значение μ^* достаточно малó.

В разделе 4.4 представлены явные вычисления характеристик перехода к синхронизму C_1 , μ^* для нескольких широко исследуемых распределений частот $g(\omega)$: распределения Гаусса, Лоренца, бимодального и равномерного распределения. Произведено сравнение теоретических результатов с результатами численного моделирования для соответствующих систем с бесконечным ($N \rightarrow \infty$) и большим числом элементов (рисунок 6). Обнаружено влияние шума, связанное с конечным размером системы, на переход к синхронизму и обратно: асинхронное состояние более чувствительно к шуму, что приводит к смещению точки перехода к меньшим значениям параметра силы связи ε (рисунок 6b).

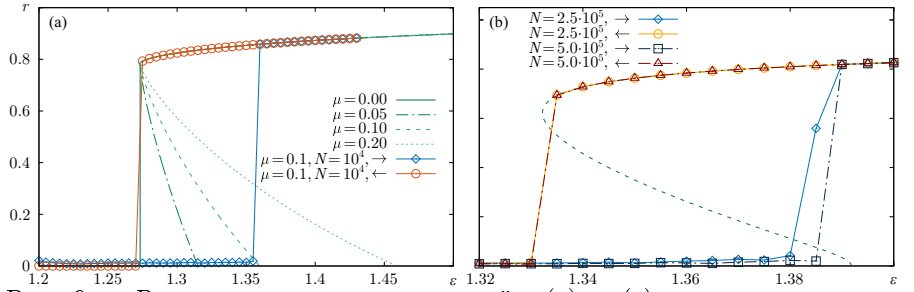


Рис. 6 — Ветви стационарных решений $r(\varepsilon)$ в (a) детерминированном случае и (b) при наличии шума для прямоугольного распределения (с единичной полушириной). Пунктирные кривые получены теоретически, кривые с маркерами — в результате прямого численного моделирования. Параметры (b): $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$.

В разделе 4.5 развитый подход обобщается на случай, когда все параметры ротаторов различны. Каждый ротатор характеризуется своим параметром инерции μ_n , силой связи ε_n со средним полем, фазовым сдвигом в члене связи β_n и амплитудой шума σ_n ($n = 1, \dots, N$):

$$\mu_n \ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n = \omega_n + \varepsilon_n r \sin(\psi - \varphi_n - \beta_n) + \sigma_n \zeta_n(t), \quad R \equiv r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n}.$$

В **заклЮчении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Детально изучена динамика цепочки трех связанных идентичных маятников. Показано, что в цепочке с ростом силы связи возможно рождение несинфазных вращательных периодических движений, связанных с потерей устойчивости симметричного синхронного режима. Причем существуют две области неустойчивости, что было доказано численно и аналитически. Одна область неустойчивости

- соответствует появлению “drum-head” моды. Кроме того, проанализированы бифуркации, приводящие к появлению и исчезновению несинфазных вращательных режимов.
2. Для случая малой диссипации разработана асимптотическая теория, объясняющая неустойчивость синфазного режима в цепочке произвольной длины и ансамблях глобально связанных идентичных маятников. Найдены аналитические формулы для границ интервала неустойчивости синфазного предельного режима вращения относительно параметра силы связи.
 3. Аналитически определено количество областей неустойчивости синфазного режима в цепочке локально связанных идентичных маятников. В интервалах неустойчивости синфазного режима реализуются различные (полностью несинфазные или кластерно синфазные) синхронные по частоте режимы. Показано, что из вид однозначно зависит от числа элементов в цепочке. При этом предсказано какой тип синхронного (синфазный или несинфазный: вариант кластерного или вариант полностью несинфазного) режима будет реализован.
 4. Установлены сценарии развития хаотической вращательной динамики в цепочках трех и более связанных маятников. Показано, что переход к хаотической динамике при изменении параметра диссипации и силы связи вызван перекрытием зон неустойчивости синфазного вращения, и происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода или бифуркации разрушения тора. К хаотической динамике также может приводить изменение количества элементов цепочки. В системе обнаружен гиперхаос и найдены оценка для его размерности.
 5. Установлена единственная область неустойчивости симметричного синфазного режима системы глобально связанных идентичных маятников. Описан аналитический подход, позволяющий построить асимптотическое разложение для вращательных движений, возникающих в результате потери устойчивости синфазного режима, и исследовать их устойчивость в случае малой диссипации. Разработанный метод был применен для системы трех и большего числа элементов.
 6. Описан механизм реализации хаотических режимов и перемежаемости в системе глобально связанных идентичных маятников, наблюдаемых при больших значениях параметра диссипации.
 7. Разработано аналитическое описание стационарных синхронных режимов в ансамбле глобально связанных ротаторов с инерцией (массой) и шумом. Основное аналитическое выражение справедливо для малых масс. Рассмотрены различные предельные случаи. Для безмассовых ротаторов (стандартные осцилляторы Курамото)

получено точное выражение. Оно представляет собой аналитическую формулу для стационарных решений модели Курамото (или, в более общем случае, для модели Курамото–Сакагучи) с шумом. Подход обобщен на случай, когда различаются массы, силы связи и фазовые сдвиги в связях или интенсивности шума ротаторов.

8. Найдено аналитическое выражение для критической массы ротаторов, при котором происходит изменение типа перехода к синхронизации (суперкритический/субкритический) в ансамбле глобально связанных ротаторов с шумом. Результаты применены к ряду часто используемых распределений, что позволяет записать критерий в виде алгебраических аналитических формул.

Публикации автора по теме диссертации

1. Variety of rotation modes in a small chain of coupled pendulums / M. I. Bolotov, V. O. Munyaev, A. K. Kryukov, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 033109.
2. Symmetry broken states in an ensemble of globally coupled pendulums / M. I. Bolotov, V. O. Munyaev, L. A. Smirnov, A. E. Hramov // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2020. — Vol. 402. — P. 132266.
3. Analytical approach to synchronous states of globally coupled noisy rotators / V. O. Munyaev, L. A. Smirnov, V. A. Kostin, G. V. Osipov, A. Pikovsky // *New Journal of Physics*. — 2020. — Vol. 22, no. 2. — P. 023036.
4. Synchronization structures in the chain of rotating pendulums / V. O. Munyaev, D. S. Khorkin, M. I. Bolotov, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // *Nonlinear Dyn.* — 2021. — Vol. 104. — P. 2117—2125.
5. Appearance of chaos and hyperchaos in evolving pendulum network / V. O. Munyaev, D. S. Khorkin, M. I. Bolotov, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // *Chaos*. — 2021. — Vol. 31, no. 6. — P. 063106.
6. Rotational dynamics in the ensemble of three coupled pendulums / M. I. Bolotov, V. O. Munyaev, A. K. Kryukov, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // *Dynamics, Bifurcations and Chaos 2018, Book of Abstracts*. — 2018. — P. 7.
7. Вращательная динамика в системе связанных маятников / М. И. Болотов, В. О. Муняев, А. К. Крюков, Л. А. Смирнов, Г. В. Осипов // *Труды XXII научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию Нижегородской радиолaborатории*. — 2018. — С. 236—238.

8. Symmetry broken states in an ensemble of coupled pendulums / M. I. Bolotov, V. O. Munyaev, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018, Book of Abstracts. — 2018. — P. 14.
9. Кластерные вращательные режимы в ансамбле глобально связанных маятников / М. И. Болотов, В. О. Муняев, Л. А. Смирнов, Г. В. Осипов // Труды XXIII научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения Н.А. Железцова. — 2019. — С. 206—209.
10. Analytical approach to synchronous states of globally coupled noisy rotators / V. O. Munyaev, L. A. Smirnov, V. A. Kostin, G. V. Osipov, A. Pikovsky // International Conference-School Shilnikov WorkShop 2019, Book of Abstracts. — 2019. — P. 99.
11. Вращательные состояния с потерей симметрии в цепочке связанных маятников / Д. С. Хорькин, М. И. Болотов, В. О. Муняев, Л. А. Смирнов, Г. В. Осипов // Труды XXIV научной конференции по радиофизике, посвященной 75-летию радиофизического факультета. — 2020. — С. 175—178.
12. Синхронные состояния в ансамблях глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией и шумом / В. О. Муняев, Л. А. Смирнов, В. А. Костин, Г. В. Осипов, А. С. Пиковский // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX международной конференции. — 2020. — С. 275—277.
13. Appearance of chaos in evolving pendulum network / V. O. Munyaev, D. S. Khorkin, M. I. Bolotov, L. A. Smirnov, G. V. Osipov // International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020, Book of Abstracts. — 2020. — P. 47—48.
14. Stationary and periodic regimes in the noisy Kuramoto system with a bimodal frequency distribution / V. O. Munyaev, L. A. Smirnov, V. A. Kostin, G. V. Osipov, A. Pikovsky // International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020, Book of Abstracts. — 2020. — P. 49—50.

Муляев Вячеслав Олегович

Синхронизация и хаос в ансамблях связанных ротаторов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____