

На правах рукописи

Сандуляну Штефан Васильевич

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОВЫХ  
ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ИХ  
КОНТАКТА В ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ПОЛЕ  
ДАВЛЕНИЯ**

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии Наук (ИПМех РАН)

Научные руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
**Петров Александр Георгиевич**

Официальные оппоненты: **Бошнятов Борис Владимирович**,  
доктор технических наук,  
Институт прикладной механики РАН,  
главный научный сотрудник.

**Толоконников Сергей Львович**,  
доктор физико-математических наук,  
МГУ имени М.В. Ломоносова,  
Кафедра гидромеханики, доцент

Ведущая организация: Институт механики им. Р.Р. Мавлютова -  
обособленное структурное подразделение  
Федерального государственного бюджетного  
научного учреждения Уфимского  
федерального исследовательского центра  
Российской академии наук

Защита состоится 17 сентября 2020 г. в 15 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики Российской академии наук по адресу: 119526 Москва, проспект Вернадского, д. 101, к. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН (<http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>)

Автореферат разослан «\_\_» июля 2020 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.240.01,  
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Исследование вибрационных воздействий на газожидкостные системы представляет важную научную проблему механики многофазных сред в связи с многочисленными приложениями к различным технологическим процессам. Этой проблеме посвящены известные монографии Нигматулина Р.И. [9, 10], Ганиева Р.Ф. [4], Блехмана И.И. [1] и других ученых как в России, так и за рубежом. Наблюдаемое слияние пузырьков при вибрационных воздействиях на газожидкостные системы — явление, которое изучается более ста лет, начиная с работ С.А. Бьеркнеса и В. Бьеркнеса [12]. Бьеркнесы теоретически и экспериментально установили, что на большом расстоянии между пульсирующими в фазе сферическими пузырьками возникает сила притяжения обратно пропорциональная квадрату расстояния. Тем не менее, проблема слияния двух газовых пузырьков в жидкости при вибрационном воздействии — одна из основных нерешенных до сих пор проблем гидродинамики многофазных сред. От ее решения зависит корректность моделирования газожидкостных смесей, часто используемых в инженерных приложениях.

Наблюдения показывают, что сближение пузырьков под действием сил Бьеркнесов, известных на больших расстояниях как силы притяжения, не всегда заканчивается слиянием [7]. Поскольку сила Бьеркнеса является главной асимптотикой силы гидродинамического взаимодействия двух пульсирующих сфер на большом расстоянии их друг от друга, она не применима для описания движения сфер при приближении их к контакту. Вблизи контакта структура гидродинамических сил существенно сложнее главной асимптотики Бьеркнесов. В этой структуре нужно учитывать не только инерцию, но и вязкость жидкости. При этом каждый из этих эффектов связан с решением сложных краевых задач математической физики.

Эффекты слияния и дробления пузырьков, которые часто игнорируются, являются основными факторами, влияющими на дисперсный состав газожидкостной системы. Диссертация направлена на исследование эффектов слияния пузырьков.

**Степень разработанности темы.** Самым распространенным подходом к исследованию гидродинамического взаимодействия пульсирующих пузырьков, начатым более ста лет назад С.А. Бьеркнесом и В. Бьеркнесом, является представление силы в виде разложения по обратным расстояниям между пузырьками, что мало эффективно ввиду слабой сходимости разложений вблизи контакта.

Известны частные математические исследования силы, полученные переразложениями рядов по другому параметру: расстоянию между поверхностями сфер, который при приближении к контакту стремится к нулю. Такие исследования были выполнены для случая твердых шаров в идеальной жидкости (Raszilieg *et al.* 1990 [22]), в вязкой жидкости (Jeffrey 1982 [16]). Для случая пульсирующих сфер имеется недавнее исследование (Michelin *et al.* 2019 [20]), найдена главная асимптотика вязкой силы для расширяющегося пузырька у стенки. Для двух пульсирующих сферических пузырьков равных радиусов главные асимптотики для инерционной и вязкой сил найдены Петровым А.Г. 2011 [11]. Им построены дифференциальные уравнения для их сближения.

**Цели работы.** Определение безразмерных параметров, влияющих на слияние пузырьков произвольных радиусов и отсутствие его. Определение критериев, при которых пузырьки не будут сливаться.

**Основные задачи исследования:**

- Точное решение задач о силах вязкого и невязкого взаимодействия двух пульсирующих сфер в жидкости.
- Асимптотические разложения сил вязкого и невязкого взаимодействия двух пульсирующих сфер в жидкости вблизи контакта.
- Асимптотическое уравнение динамики пузырьков, пульсирующих в переменном поле давления вблизи контакта.
- Вывод условий слияния и отсутствия слияния пузырьков.

**Научная новизна.**

- С помощью точного решения краевой задачи для функции тока найдено новое выражение для кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух пульсирующих сфер. Это выражение удобно для получения разложений сил гидродинамического взаимодействия по малому расстоянию между поверхностями сфер.
- Из решения краевой задачи для уравнений Стокса вязкой жидкости получены точные выражения для вязких сил, действующих на две пульсирующие сферы.
- Получены асимптотические разложения по малому расстоянию между поверхностями сфер для сил гидродинамического взаимодействия пульсирующих сфер вблизи их контакта в идеальной и вязкой жидкостях.
- Проведены численное и асимптотическое исследования уравнений сближения пульсирующих пузырьков вблизи контакта.
- Методом осреднения динамики двух пульсирующих пузырьков вблизи их контакта дан вывод условий слияния и отсутствия слияния пузырьков различных радиусов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Выведены уравнения динамики пульсирующих пузырьков вблизи контакта. Методом осреднения найдены условия, при которых происходит слияние пузырьков, а также найдены условия, при которых процесс сближения заканчивается периодическими колебаниями на конечном расстоянии сфер друг от друга. Достоверность условий слияния и отсутствия его доказывается сравнением с численным решением динамических уравнений. Эти результаты можно использовать для эффективного освобождения газовой фазы из газожидкостной системы. Такие процессы типичны в химико технологических и биотехнологических реакторах [21], а также при водоочистке и обогащении [5]. В последние годы активно исследуется применение акустического воздействия на пузырьки с целью терапии и доставки лекарств [13]. Процессы слияния

пузырьков необходимо учитывать для увеличения эффективности таких методов, а также для их безопасности.

**Методология и методы исследования.** Исследование базируется на построении точных решений для функции тока течения жидкости для двух сфер переменного радиуса, скорости центров которых направлены по линии центров сфер. Решения строятся как для идеальной жидкости так и для вязкой жидкости в приближении Стокса с различными граничными условиями. Динамические уравнения составляются с помощью метода Лагранжа и упрощаются методом Рауса исключения циклической координаты. Эти уравнения решаются численно и методом осреднения.

**Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Показано, что для частоты акустического воздействия много меньше собственной частоты колебаний пузырьков относительные амплитуды колебаний пузырьков меняются по одинаковому гармоническому закону с частотой равной частоте акустического воздействия.
2. Уравнения движения пузырьков записаны в виде уравнений Лагранжа второго рода. Функцией Лагранжа является кинетическая энергия жидкости, создаваемая движением в ней по линии центров двух сфер, радиусы которых меняются по найденному гармоническому закону; обобщенные координаты - координаты центров сфер, обобщенные силы - вязкие силы.
3. Кинетическая энергия жидкости представлена в виде квадратичной формы от четырех скоростей центров сфер и их радиусов. Все коэффициенты найдены точно и выражены через функции зазора между сферами.
4. Коэффициенты кинетической энергии представлены в виде разложений по зазору между сферами с любой степенью точности.
5. Для движения двух сфер переменных радиусов в вязкой жидкости в приближении Стокса дано точное решение задачи о силе, действующей на

сферы для различных видов граничных условий. Вязкая сила выражена точно через зазор между сферами.

6. Для различных видов граничных условий для силы получено асимптотическое разложение вязкой силы по зазору между сферами.
7. Доказано, что сингулярности гидродинамических сил равны по величине и противоположны по знаку, что позволяет уравнения динамики методом Рауса свести к одному уравнению.
8. Методом осреднения найдено разложение безразмерной силы по малому зазору между сферами с коэффициентами, зависящими от трех безразмерных параметров: отношения радиусов, относительной амплитуды давления и параметра вязкости. Полученная функция определяет условия слияния и отсутствия слияния пузырьков в пульсирующем поле давления.
9. Получен критерий слияния и отсутствия слияния пузырьков. Найдено критическое отношение радиусов пузырьков равное 2,8. Если отношение радиусов пузырьков меньше критического, пузырьки в акустической волне сливаются. При большем отношении радиусов слияние может не происходить.

**Достоверность.** Достоверность полученных автором точных и асимптотических решений обосновывается сравнением с ранее полученными решениями в иной форме с помощью других методов, совпадение с частным решением для сфер с постоянными и переменными радиусами в работах отечественных и зарубежных авторов. Проводится контроль асимптотических решений численными решениями выведенных точных уравнений.

**Апробация работы.** Основные результаты работы в разное время докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях:

- 55-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2012

- 57-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 24-29 ноября 2014
- XIX Международная конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24-31 мая 2015.
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20-24 августа 2015.
- 9th International Symposium on Cavitation, Lausanne, 6-10 Dec. 2015.
- Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва", посвященной 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН 4-8 сентября 2017.
- 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2018.
- XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24-31 мая 2019.
- 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 18-24 ноября 2019.
- 10-ая международная научная школа молодых ученых "Волны и вихри в сложных средах", Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 3 - 5 декабря 2019,

а также докладывались на семинарах Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН: 1) Механика систем им. академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем (руководители: В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов) 2) Асимптотические методы в математической физике (руководитель: С.Ю. Доброхотов).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 3 статьи [A1-A3] индексированные в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus), а также 9 тезисов международных и всероссийских конференций [A4-A12].

**Личный вклад автора.** Все результаты диссертации получены лично соискателем при научном руководстве Петрова А.Г. Личный вклад со-



искателя в работах с соавторами заключается в следующем: [A1, A4-A6, A10] – вывод уравнений Лагранжа и Рауса, аналитическое исследование методом осреднения, численное решение уравнений Лагранжа; [A2, A8] – вывод трехчленных разложений коэффициентов кинетической энергии жидкости.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения. Работа содержит 129 страниц, включая 36 рисунков и 4 таблиц. Список литературы содержит 93 наименования.

## Содержание работы

Во **введении** рассмотрена актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Сформулированы цели диссертации, отражена научная новизна работы, описаны используемые методы исследования и приведены положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** диссертации приводится литературный обзор поставленной задачи. Отмечается, что вблизи контакта не применимы традиционные подходы.

Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости с радиусами  $R \sim 10 - 50$  мкм в пульсирующем поле давления  $p(t) = p_\infty + \Delta p \cos(\omega t)$  ( $p_\infty$  – среднее статическое давление,  $\Delta p$  – амплитуда колебаний давления с круговой частотой  $\omega \sim 10^4 - 10^5$  рад/с) предлагается изучить с помощью метода Лагранжа с обобщенными координатами: радиусы сферических пузырьков  $R_1, R_2$  ( $R_1 \leq R_2$ ) и положение их центров  $z_1, z_2$  (рассматривается движение центров вдоль оси симметрии  $z$ , см. Рис. 1). При этом следуя Ландау [8], гидродинамические силы разделяются на инерционные, которые определяются в рамках модели идеальной жидкости, и вязкие силы, которые учитываются в безынерционном приближении Стокса.

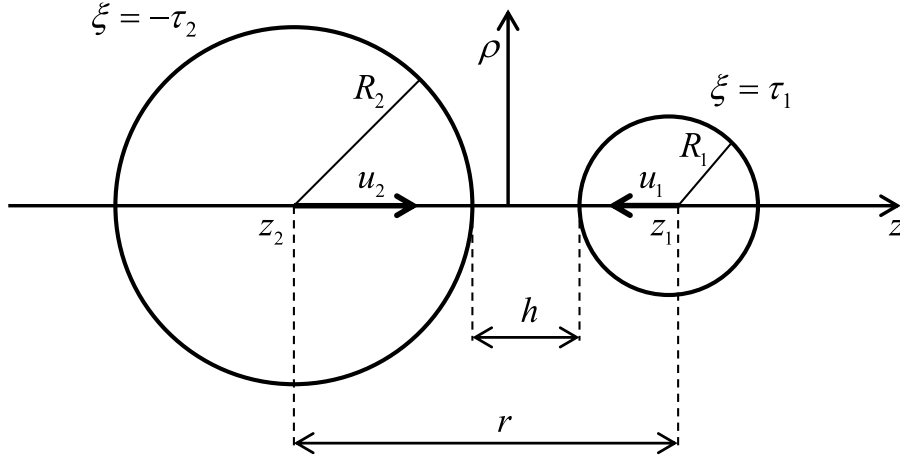


Рис. 1: Постановка задачи

Система из четырех уравнений Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} = F_B + F_{\mu 1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} = -F_B + F_{\mu 2}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{R}_1} = \frac{\partial T}{\partial R_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial R_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{R}_2} = \frac{\partial T}{\partial R_2} - \frac{\partial \Pi}{\partial R_2}, \quad (2)$$

где введено обозначение обобщенной силы Бьеркнеса  $F_B = \partial T / \partial r$ ,  $T$  – кинетическая энергия жидкости.

Из уравнений Лагранжа относительно радиусов (2) было показано, что для частоты акустического воздействия меньше собственной частоты колебаний пузырьков  $\omega^2 \ll \omega_0^2$  ( для  $R \sim 10 - 50$  мкм собственная частота  $\omega_0 \sim (0,4 - 2) \times 10^6$  рад/с) относительные амплитуды колебаний пузырьков  $\varepsilon_i(t) = (R_i(t) - R_{i0})/R_{i0}$  меняются по одинаковому гармоническому закону с одинаковыми амплитудами и фазами  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ ,  $\varepsilon_0 = -\Delta p / (3\gamma p_\infty)$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты газа в пузырьках.

Тем самым система с четырьмя степенями свободы сведена к системе уравнений Лагранжа с двумя степенями свободы относительно центров сфер (1). Для их решения необходимо найти, как кинетическую энергию, так и вязкие силы вблизи контакта.

Также отмечается, что при постоянном отношении радиусов

$R_1(t)/R_2(t) = R_{10}/R_{20}$  существенно облегчается решение задачи взаимодействия пузырьков, как численно, так и аналитически.

При рассмотрении динамики пузырьков не учитывались силы Архимеда. Как показано в экспериментальных работах [18, 19], подтверждающих теоретические результаты диссертации, градиент давления стоячей волны по вертикали уравнивает силу Архимеда, при этом стабилизация пузырьков происходит в одной горизонтальной плоскости. Сферичность пузырьков оправдывается малостью числа Вебера [11].

**Во второй главе** рассматривается задача нахождения кинетической энергии потенциального осесимметричного течения безграничной несжимаемой жидкости плотности  $\rho_l$ . Течение жидкости вызывают две сферы радиусов  $R_1, R_2$ , меняющиеся со скоростями  $\dot{R}_1, \dot{R}_2$ . Центры сфер на оси  $z$  имеют координаты  $z_1, z_2$  ( $z_1 > z_2$ ) и двигаются со скоростями  $u_1 = -\dot{z}_1, u_2 = \dot{z}_2$ , направленными на встречу друг другу (Рис. 1). Расстояние между центрами сфер  $r = z_1 - z_2$ , расстояние между поверхностями сфер (зазор)  $h = r - R_1 - R_2$ . Цель второй главы – найти аналитический вид зависимости кинетической энергии  $T(R_1, R_2, r, u_1, u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2)$ . При таком выборе аргументов кинетическая энергия симметрична по перестановке индексов 1 и 2.

Ввиду осевой симметрии трехмерная задача сводится к двумерной и поле скоростей может быть определено с помощью функции тока Стокса. Учитывая геометрию задачи, была введена бисферическая система координат  $(\xi, \zeta, \theta)$

$$\rho = c \frac{\sin \zeta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}, \quad z = c \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}, \quad (x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta). \quad (3)$$

Тогда поверхность первой сферы задается уравнением  $\xi = \tau_1 = \operatorname{const}$ ,  $\zeta \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , поверхность второй сферы задается аналогично при  $\xi = -\tau_2$ , где  $\tau_1, \tau_2, c$  находятся из уравнений

$$R_1 \operatorname{sh} \tau_1 = c, \quad R_2 \operatorname{sh} \tau_2 = c, \quad r = R_1 \operatorname{ch} \tau_1 + R_2 \operatorname{ch} \tau_2. \quad (4)$$

Преимущество бисферических координат заключается в том, что и граничные условия и интегралы на поверхностях сфер зависят только от одной координаты  $\zeta$ .

При потенциальном течении функцию тока следует искать в виде [17] в разложении по полиномам Гегенбауэра  $C_n^{-1/2}(\cos \zeta)$

$$\begin{aligned} \psi &= (\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\cos \zeta), \\ U_n(\xi) &= \frac{\alpha_n \operatorname{sh}(n - 1/2)(\xi + \tau_2) + \beta_n \operatorname{sh}(n - 1/2)(\tau_1 - \xi)}{\operatorname{sh}(n - 1/2)(\tau_1 + \tau_2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты  $\alpha_n, \beta_n$  были найдены как функции скоростей  $u_1, u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$  и параметров  $c, \tau_1, \tau_2$  из нормальных граничных условий на поверхностях сфер.

Трехмерный интеграл кинетической энергии жидкости был сведен к одномерному интегралу по контуру

$$T = \frac{\rho l}{2} \iiint v^2 dV = \int_{\xi=-\tau_2}^{\tau_1} \psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\zeta} \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} d\xi + \int_{\zeta=0}^{\pi} \psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\xi} \Big|_{\xi=-\tau_2}^{\xi=\tau_1} d\zeta, \quad (6)$$

где  $\psi'_{\zeta} = \partial\psi/\partial\zeta, \quad \psi'_{\xi} = \partial\psi/\partial\xi$ .

Подставляя функцию тока (5), после некоторых преобразований была получена квадратичная форма кинетической энергии содержащая десять коэффициентов

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\rho l (A_1 u_1^2 + 2B u_1 u_2 + A_2 u_2^2 + D_1 \dot{R}_1^2 + 2E \dot{R}_1 \dot{R}_2 + D_2 \dot{R}_2^2 + \\ &+ C_{11} u_1 \dot{R}_1 + C_{12} u_1 \dot{R}_2 + C_{21} u_2 \dot{R}_1 + C_{22} u_2 \dot{R}_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты зависят от  $c$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и представлены в виде рядов

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}, \\
B &= c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}, \\
C_{11} &= 2c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} S_n(\tau_1), \\
C_{12} &= 2c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} S_n(\tau_2), \\
D_1 &= R_1^3 + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n^2(\tau_1)}{(2n-1)^2 - 1}, \\
E &= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(\tau_1+\tau_2)}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n(\tau_1) S_n(\tau_2)}{(2n-1)^2 - 1},
\end{aligned} \tag{8}$$

причем введено обозначение  $S_n(x) = (e^{(2n-1)x} - (2n-1) \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) / \operatorname{sh}^2 x$ , а коэффициенты  $A_2$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  и  $D_2$  получаются перестановкой 1 на 2 в формулах для  $A_1$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{11}$  и  $D_1$ .

Следует отметить, что ряды (8) можно также выразить через исходные параметры  $R_1, R_2, r$ , подставив:

$$c = \sqrt{(r^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} / (2r), \quad e^{-\tau_1} = b - \sqrt{b^2 - 1}, \tag{9}$$

где  $b = (r^2 + R_1^2 - R_2^2) / (2r R_1)$ . Аналогично можно выразить  $e^{-\tau_2}$ . Однако, при устремлении  $h$  к нулю,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  также стремятся к нулю:

$$\tau_i = \frac{\bar{R}}{R_i} \sqrt{\frac{2h}{\bar{R}}} + O(h^{3/2}), \quad c = \sqrt{2h\bar{R}} + O(h^{3/2}), \quad \bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{10}$$

Для случая твердых сфер точное выражение кинетической энергии впервые было найдено Хиксом [15] методом отражения. Затем Негман [14] и Воинов О.В. [3] развили метод Хикса для случая переменных радиусов. Ряды Негман-Воинова по виду отличаются от рядов (8). Однако, в диссертации доказана тождественность этих рядов, что подтверждает их достоверность.

Для получения асимптотического разложения кинетической энергии жидкости вблизи контакта, была использована методика разработанная в [22]

для двух твердых сфер, то есть для коэффициентов  $A_1, A_2, B$ . Данная методика была развита для случая сфер переменных радиусов, то есть для остальных семи коэффициентов. С помощью преобразования Меллина, члены рядов (8) были представлены в виде интеграла по оси параллельной мнимой. После перестановки знаков суммы и интеграла, оказалось, что можно осуществить бесконечное суммирование. Оси интегрирования можно передвинуть влево, при этом осуществляется переход через полюса подынтегральной функции для целых значений аргумента интегрирования. Каждый последующий полюс дает следующую степень в переразложении. Таким образом было получено асимптотическое по Пуанкаре разложение по малому параметру  $\tau_1 + \tau_2$  вблизи контакта.

Для практических целей более удобно перейти от параметра  $\tau_1 + \tau_2$  к зазору  $h$ . Тогда разложение коэффициентов кинетической энергии принимает вид

$$X = f_X(h) + g_X(h) \ln \left( \frac{h}{2\bar{R}} \right), \quad \bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad X = \{A_i, B, C_{ij}, D_i, E\}, \quad (11)$$

где  $f_X(h)$ ,  $g_X(h)$  – степенные полиномы вида  $a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_n h^n$ ,  $n$  – степень приближения.

Из рядов Хикса [15] и Негман-Воинова [14, 3] с помощью специальных преобразований были также получены три первых члена разложения (11).

Сходимость приближений коэффициента  $A_1$  полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия) показана на Рис. 2а и для производной  $dA_1/dh$  – на Рис. 2б. Как видно из рисунков с увеличением степени полинома наблюдается значительное повышение точности.

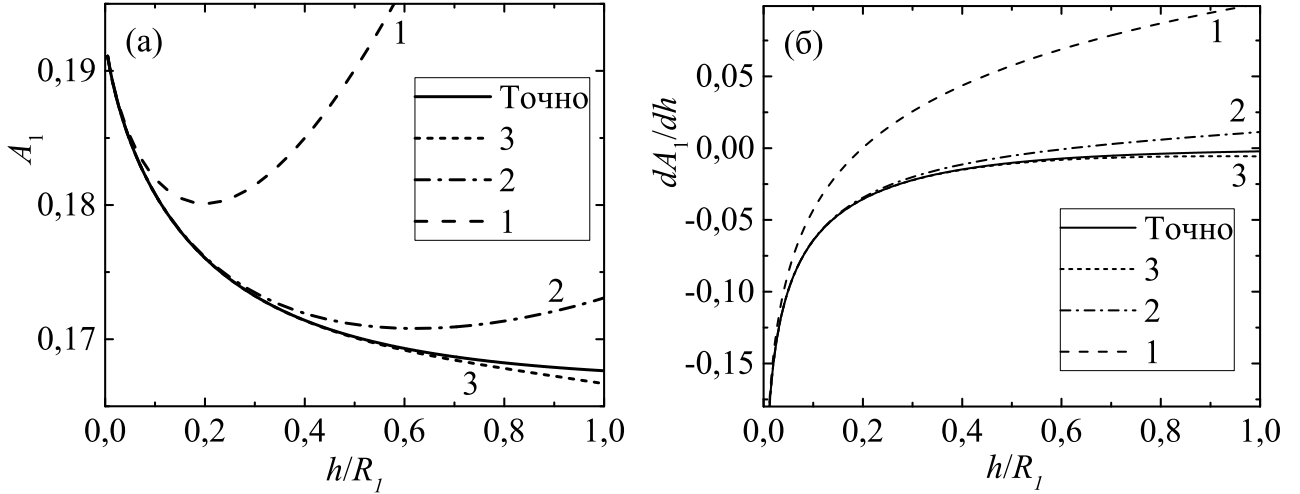


Рис. 2: Сходимость приближений (а) коэффициента  $A_1$  и (б) производной  $dA_1/dh$  полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия).

Сила Бьеркнеса представлена в виде разложения по  $h$  следующего вида

$$F_B = \frac{\pi\rho}{2}\bar{R}^2 \ln\left(\frac{h}{2\bar{R}}\right) \dot{h}^2 + a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + (b_1 h + \dots + b_n h^n) \ln\left(\frac{h}{2\bar{R}}\right). \quad (12)$$

**В третьей главе** рассматривается взаимодействие двух сферических пузырьков переменных радиусов при движении вдоль линии центров в вязкой жидкости в приближении Стокса. Течение жидкости, как и **во второй главе**, предполагается осесимметричным и определяется функцией тока, удовлетворяющей бигармоническому уравнению, общий вид которой найден в работе [23]

$$\begin{aligned} \psi &= (\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\cos \zeta), \\ U_n(\xi) &= a_n \operatorname{ch}(n - 3/2)\xi + b_n \operatorname{sh}(n - 3/2)\xi + \\ &+ c_n \operatorname{ch}(n + 1/2)\xi + d_n \operatorname{sh}(n + 1/2)\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты  $a_n, b_n, c_n, d_n$  как функции скоростей  $u_1, u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$  и параметров  $c, \tau_1, \tau_2$  были найдены из четырех граничных условий на поверхностях сфер, два из них – для нормальной компоненты скорости, другие два – для тангенциальной скорости, либо для касательного напряжения.

Для твердых шаров в работе [23] была получена следующая формула для результирующей силы, действующей на каждый шар

$$F_{\mu} = \pi\mu_l \int \rho^3 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\Phi^2(\psi)}{\rho^2} \right) ds, \quad (14)$$

где  $n$  наружная нормаль поверхности сферы,  $ds$  – элемент меридиана,  $\mu_l$  – вязкость жидкости, интеграл берется по меридиану соответствующего шара. Оператор  $\Phi^2$  задается формулой

$$\Phi^2 \equiv \frac{\text{ch } \xi - \mu}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\text{ch } \xi - \mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (\text{ch } \xi - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right). \quad (15)$$

Было доказано, что формула (14) справедлива и в случае сфер переменных радиусов. Подставляя функцию тока (13), получим точные выражения для вязких сил, действующих на сферы в проекции на ось  $z$

$$\begin{aligned} F_{\mu_1} &= -\mu_l \frac{8\pi c \dot{R}_1}{\text{sh}^2 \tau_1} + \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n), \\ F_{\mu_2} &= \mu_l \frac{8\pi c \dot{R}_2}{\text{sh}^2 \tau_2} + \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - b_n + c_n - d_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для движения двух сфер переменных радиусов в вязкой жидкости в приближении Стокса дано точное решение задачи о силе, действующей на сферы для различных видов граничных условий.

Ограничивая суммирование в (16) до  $n \leq 1/(\tau_1 + \tau_2)$

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{2\sqrt{2}}{c} \sum_{n=2}^{\frac{1}{\tau_1 + \tau_2}} (a_n + b_n + c_n + d_n) + O(1), \quad (17)$$

были найдены асимптотики вязких сил с точностью до константы, как для случая прилипания на границе

$$\begin{aligned} F_{\mu_1} \approx -F_{\mu_2} &= -6\pi\mu_l \bar{R}^2 \frac{\dot{h}}{h} - 6\pi\mu_l \bar{R} \ln \left( \frac{\bar{R}}{h} \right) \left( \frac{1}{5} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right) \dot{h} - \\ &- 6\pi\mu_l \bar{R} \ln \left( \frac{\bar{R}}{h} \right) \left( \frac{R_2(R_2 + 2R_1)}{(R_1 + R_2)^2} \dot{R}_1 + \frac{R_1(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \dot{R}_2 \right) + O(1), \end{aligned} \quad (18)$$

так и для случая нулевого тангенциального напряжения

$$F_{\mu_1} \approx -F_{\mu_2} = -2\pi\mu_l \bar{R} \dot{h} \ln \frac{\bar{R}}{h} + O(1), \quad (19)$$



где  $\dot{h} = -(\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + u_1 + u_2)$ ,  $\bar{R} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ , остаточный член можно представить в виде  $a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + (b_1 h + \dots + b_n h^n) \ln \bar{R}/h$ . Для частного случая постоянных радиусов разложение согласуется с результатами, известными из литературы.

Для вязких сил, действующих на пузырьки со стороны жидкости равенство  $F_{\mu_1} + F_{\mu_2} = 0$ , вообще говоря, не выполняется. Однако приближенно, с точностью до  $O(1)$ , как видно из асимптотик, справедливо  $F_{\mu_1} + F_{\mu_2} \approx 0$ .

Отдельно был рассмотрен случай проскальзывания на границе. Главные расходящиеся асимптотики были получены методом тонкого слоя.

**Четвертая глава** посвящена изучению динамики пузырьков вблизи контакта. Из-за того, что главные асимптотики вязких сил равны по модулю и противоположны по знаку следует, что приближенно выполняется закон сохранения импульса системы двух пузырьков, который был положен равным нулю. Благодаря этому оставшиеся два уравнения Лагранжа относительно центров сфер (1) можно свести к уравнению Рауса для одной степени свободы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_R}{\partial \dot{h}} = \frac{\partial T_R}{\partial h} + \frac{F_{\mu_i}}{2\pi\rho_l}, \quad (20)$$

где  $T_R$  - квадратичная форма трех скоростей  $\dot{h}, \dot{R}_1, \dot{R}_2$ , коэффициенты которой выражаются через коэффициенты кинетической энергии  $T$ , зависят от  $h, R_1, R_2$  и по параметру  $h$  представлены в виде разложений вида  $f_X(h) + g_X(h) \ln(h/(2\bar{R}))$ . Далее уравнение Рауса (20) было приведено к безразмерному виду как функция времени и относительного расстояния  $\delta = h/R_1$ .

В случае отсутствия слияния пузырьков, устанавливается периодическая пульсация пузырьков с фиксированным средним зазором  $\delta_0$  между поверхностями сфер. Для аналитического описания такого режима применяется метод осреднения [6]. С помощью данного метода безразмерное уравнение динамики пузырьков приведено к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} (\mu_{11}\dot{x} + \eta_{11}x + \mu_{12}\dot{\varepsilon} + \eta_{12}\varepsilon) &= \bar{f}(M, k, \delta_0), \\ x = \delta - \delta_0, \quad \delta = h/R_1, \quad k = R_2/R_1, \quad M = \mu_l/(\rho\omega R_{10}^2) &\ll 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты  $\mu_{11}, \eta_{11}, \mu_{12}, \eta_{12}$  явно выражены через  $\delta_0, k, M$ .

Показано, что притяжение или отталкивание пузырьков зависит от знака правой части  $\bar{f}(M, k, \delta_0)$ , которая явно выражена через безразмерные параметры  $M, k, \delta_0$ .

Отдельно были рассмотрены случай прилипания на границе и случай свободной границе.

В первом случае было получено, что для отношений радиусов пузырьков  $k \leq 2,8$  при всех значениях  $M$  средняя сила  $\bar{f}(M, k, \delta_0)$  отрицательная, что приводит к слиянию пузырьков (см. Рис. 3а). Данный вывод согласуется с численным решением уравнений Лагранжа (1). Характерная зависимость сближения пузырьков приведена на Рис. 3б.

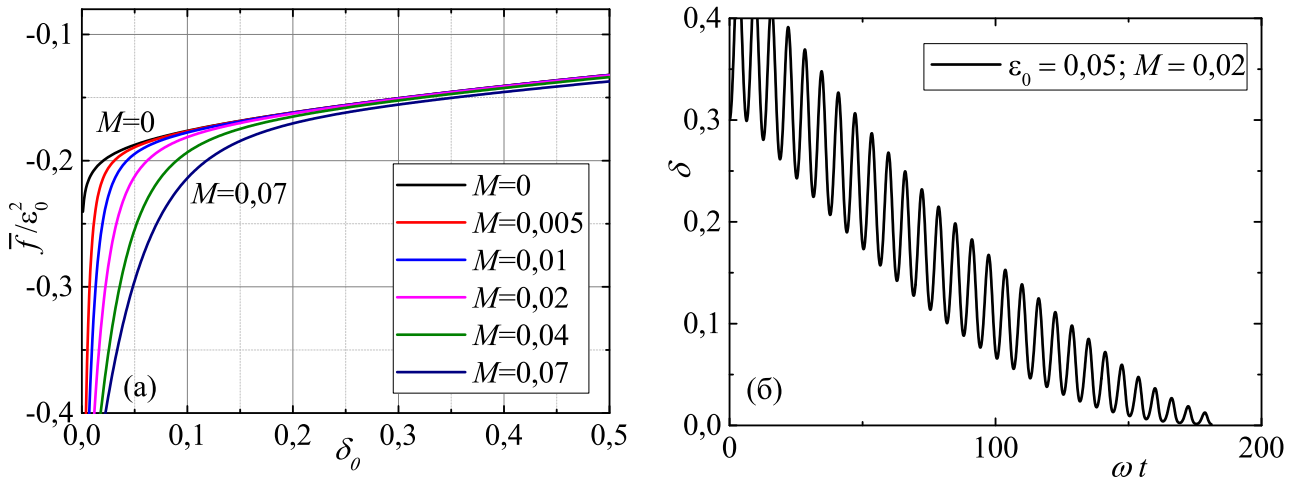


Рис. 3: (а) Зависимость осредненной силы  $\bar{f}/\varepsilon_0^2$  от среднего расстояния между пузырьками  $\delta_0$  для  $R_2/R_1 = 1$  при разных параметрах  $M$ , (б) Зависимость относительного расстояния между пузырьками  $\delta = h/R_1$  от безразмерного времени  $\omega t$  для  $R_2/R_1 = 1$  при  $M = 0,02$  и  $\varepsilon_0 = 0,05$ .

При  $k \geq 3$  средняя сила может изменить знак. В этом случае, начиная с некоторого значения  $M$ , пузырьки останавливаются на некотором расстоянии, зависящем от параметра  $M$ . Это расстояние увеличивается с ростом  $M$ . Зависимость осредненной силы  $\bar{f}$  от среднего расстояния между пузырьками  $\delta_0$  для  $k = R_2/R_1 = 3$  при разных параметрах  $M$  представлена на рис. 4а. Траектория, рассчитанная по точным уравнениям (1), показана на Рис. 4б. Как видно из него, процесс сближения заканчивается периодическими колебаниями относительно расстояния 0,04. Это значение соответствует условию

$\bar{f} = 0$  при  $M = 0,02$  на Рис. 4а. Таким образом, подтверждается достоверность теоретического условия отсутствия слияния при  $\bar{f}(M, k, \delta_0) > 0$ . Однако, если выбрать достаточно малый параметр  $M$  и большую относительную амплитуду пульсаций пузырьков  $\varepsilon_0$ , то относительное расстояние  $\delta(\omega t)$  при минимальном значении может быть ниже  $10^{-3}$  (Рис. 5) или для расстояния между сфер  $h_{min} \sim 10 - 100$  нм, что в соответствии с литературными данными будет означать слияние пузырьков. Из численных экспериментов для  $\varepsilon_0 \in [0,001; 0,05]$  и  $R_2/R_1 = 3$  было получено, что пузырьки не достигают критического расстояния  $h_{min}$  (т.е. не сливаются) при выполнении соотношения

$$\frac{\varepsilon_0}{M} < 16/\lg(1/\varepsilon_0) - 4. \quad (22)$$

Величина  $\varepsilon_0/M = \rho_l R_{10}(\omega R_{10} \varepsilon_0)/\mu_l$  является аналогом числа Рейнольдса  $Re$ . Для него в экспериментальной работе [2] получено условие отсутствия слияния в виде  $Re = \rho_l R v/\mu_l < 12$ , что качественно согласуется с (22).

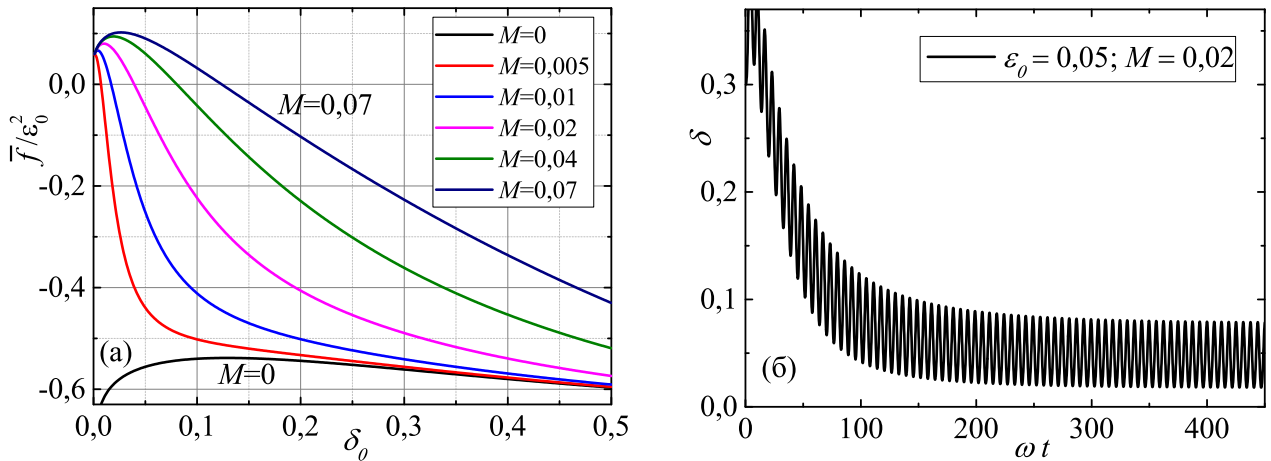


Рис. 4: а) Зависимость осредненной силы  $\bar{f}/\varepsilon_0^2$  от среднего расстояния между пузырьками  $\delta_0$  для  $R_2/R_1 = 3$  при разных параметрах  $M$ , б) Зависимость относительного расстояния между пузырьками  $\delta = h/R_1$  от безразмерного времени  $\omega t$  для  $R_2/R_1 = 3$  при  $M = 0,02$  и  $\varepsilon_0 = 0,05$ .

Для случая свободной границы, как методом осреднения, так и численным решением уравнений Лагранжа (1), было получено, что взаимодействие пульсирующих пузырьков всегда заканчивается слиянием.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

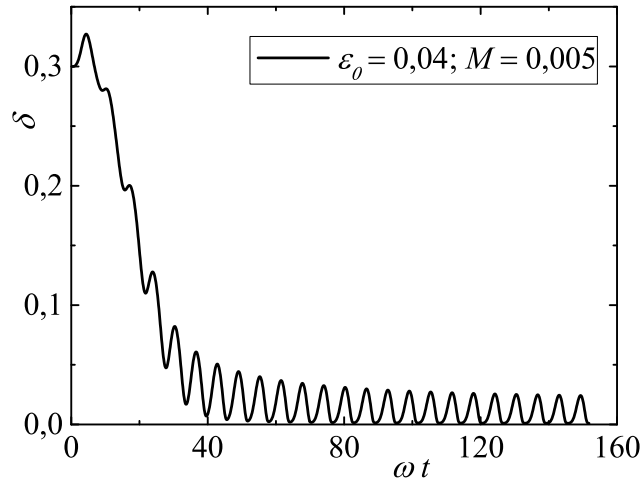


Рис. 5: Зависимость относительного расстояния между пузырьками  $\delta = h/R_1$  от безразмерного времени  $\omega t$  для  $R_2/R_1 = 3$  при  $M = 0,005$  и  $\varepsilon_0 = 0,04$ .

1. Точно решена краевая задача для движения двух пульсирующих сфер, центры которых двигаются вдоль оси симметрии в потенциальном потоке идеальной жидкости, и из нее найдена новая форма для коэффициентов кинетической энергии жидкости.
2. Разработана процедура построения всех членов разложения коэффициентов кинетической энергии по малому расстоянию между поверхностями сфер (зазору между сферами) в окрестности их контакта.
3. В приближении Стокса найдены выражения вязких сил взаимодействия двух пульсирующих сфер, центры которых двигаются вдоль оси симметрии.
4. Построено двухчленное разложение вязких сил, действующих на сферы вблизи контакта. Главный член обратно пропорционален малому зазору, а второй член зависит от него логарифмически.
5. Составлены четыре уравнения Лагранжа для координат центров и радиусов пузырьков.
6. Показано, что для частоты акустического воздействия много меньшей собственной частоты колебаний пузырьков относительные амплитуды

пульсаций пузырьков меняются по одинаковому закону, тем самым было уменьшено количество уравнений Лагранжа до двух.

7. Доказано, что приближенно выполняется закон сохранения импульса системы и с помощью метода исключения циклической координаты Рауса система уравнений сведена к одному динамическому уравнению.
8. Методом осреднения при малой амплитуде пульсаций пузырьков получено условие слияние пузырьков. При отношении радиусов пузырьков меньше 2,8 пульсирующие в периодическом поле давления пузырьки сближаются до их контакта. При отношении радиусов больше 3 сближение прекращается и устанавливается равновесный зазор между пузырьками. Достоверность аналитического решения, полученного методом осреднения, подтверждается сравнением с численным решением полных динамических уравнений.

Автор выражает признательность научному руководителю Александру Георгиевичу Петрову за руководство диссертацией и за постановку интересной, актуальной и перспективной задачи.

Также автор выражает благодарность коллективу кафедры Теоретической механики Московского физико-технического института за поддержку и творческую атмосферу.

## Публикации автора по теме диссертации

- A1 *Sanduleanu S. V., Petrov A. G.* Interaction of two pulsating spherical bubbles in external pressure field near the contact // *Journal of Physics: Conference Series*. – IOP Publishing, 2015. – Vol. 656. – no. 1. – P. 012035. (WoS, Scopus)
- A2 *Сандуляну Ш. В., Петров А. Г.* Трехчленные разложения коэффициентов кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух сфер вблизи их контакта // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 483, № 4. – С. 389–393. (WoS, Scopus)
- A3 *Сандуляну Ш. В.* Асимптотическое разложение кинетической энергии жидкости при движении в ней двух сфер переменных радиусов вблизи их контакта // ПММ. – 2020. Т. 84. № 3. – С. 311-326 (Scopus) [*Sanduleanu S. V.* Fluid kinetic energy asymptotic expansion for two variable radii moving spherical bubbles at small separation distance // [arXiv:1912.05936](https://arxiv.org/abs/1912.05936)]
- A4 *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* О слиянии двух газовых пузырьков во внешнем периодическом поле давления // 55-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2012
- A5 *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Взаимодействие двух пульсирующих газовых пузырьков во внешнем периодическом поле давления // 57-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 24-29 ноября 2014
- A6 *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Взаимодействие двух пульсирующих газовых пузырьков во внешнем периодическом поле давления // Материалы XIX международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. ВМСППС'2015. 24-31 мая 2015 г. Алушта.

- A7 *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Вынужденные колебания газовых пузырьков в жидкости вблизи контакта // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Казань, 2015 г.
- A8 *Сандуляну Ш.В.* Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости вблизи контакта // Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва", посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, г. Новосибирск, 2017.
- A9 *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Трехчленные разложения коэффициентов кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух сфер вблизи их контакта // 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2018.
- A10 *Сандуляну Ш.В.* Силы взаимодействия двух пульсирующих в жидкости пузырьков вблизи контакта // XXI Международная конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24-31 мая 2019.
- A11 *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости вблизи их контакта в пульсирующем поле давления // 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 18-24 ноября 2019.
- A12 *Сандуляну Ш.В.* Силы вязкого взаимодействия двух пульсирующих пузырьков в жидкости вблизи их контакта // 10-ая международная научная школа молодых ученых "Волны и вихри в сложных средах", Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 3 - 5 декабря 2019

# Литература

- [1] *Блехман И. И.* Вибрационная механика. – М : Наука. Физматлит, 1994.
- [2] *Бошнятов Б. В.* Роль гидродинамического взаимодействия при коалесценции пузырьков газа в жидкости // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 427. – №. 3. – С. 321-323.
- [3] *Воинов О.В.* Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости. В сб.: Науч. конференция. Ин-т механ. МГУ. Тезисы докл. М., 1970, С. 10-12
- [4] *Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. Волновые и колебательные явления в основе высоких технологий // М.: Институт компьютерных исследований. – 2011.
- [5] *Дерягин Б. В., Духин С. С., Рулев Н. Н.* Микрофлотация // М.: Химия. – 1986. – Т. 112.
- [6] *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний // М.: Наука, 1988.
- [7] *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* Эффект самопросветления для акустических волн в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. – 1979. – Т. 30. – №. 7. – С. 423-425.
- [8] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.,* Гидродинамика М.: Наука. 1986. Стр. 130-132
- [9] *Нигматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – Т. 1., Т. 2.



- [10] *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
- [11] *Петров А. Г.* Вынужденные колебания в жидкости двух газовых пузырей в окрестности их контакта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2011. – №. 4. – С. 81-99.
- [12] *Bjerknes V.* Fields of force. – The Columbia university press, 1906.
- [13] *Coussios C. C., Roy R. A.* Applications of acoustics and cavitation to noninvasive therapy and drug delivery // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 40. – P. 395-420.
- [14] *Herman R. A.* Herman R. A. On the motion of two spheres in fluid and allied problems // Q. Jl Pure Appl. Math. – 1887. – Vol. 22. – P. 204-262.
- [15] *Hicks W. M.* On the motion of two spheres in a fluid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1880. – no. 171. – P. 455-492.
- [16] *Jeffrey D. J.* Low-Reynolds-number flow between converging spheres // Mathematika. – 1982. – Vol. 29. – no. 1. – P. 58-66.
- [17] *Jeffery G. B.* On a form of the solution of Laplace's equation suitable for problems relating to two spheres // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. – 1912. – Vol. 87. – no. 593. – P. 109-120.
- [18] *Jiao J., He Y., Leong T., Kentish S. E., Ashokkumar M., Manasseh R. and Lee J.* Experimental and theoretical studies on the movements of two bubbles in an acoustic standing wave field // The Journal of Physical Chemistry B. – 2013. – Vol. 117. – no. 41. – P. 12549-12555.
- [19] *Jiao J., He Y., Yasui K., Kentish S. E., Ashokkumar M., Manasseh R. and Lee J.* Influence of acoustic pressure and bubble sizes on the coalescence of two contacting bubbles in an acoustic field // Ultrasonics sonochemistry. – 2015. – Vol. 22. – P. 70-77.

- [20] *Michelin S., Gallino, G., Gallaire, F., Lauga, E.* Viscous growth and rebound of a bubble near a rigid surface // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2019. – Vol. 860. – P. 172-199.
- [21] *Oolman T. O., Blanch H. W.* Bubble coalescence in stagnant liquids // *Chemical Engineering Communications.* – 1986. – Vol. 43. – no. 4-6. – P. 237-261.
- [22] *Raszillier H., Guiasu I., Durst F.* Optimal approximation of the added mass matrix of two spheres of unequal radii by an asymptotic short distance expansion // *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – 1990. – Vol. 70. – no. 2. – P. 83-90.
- [23] *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous fluid // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A.* – 1926. – Vol. 111. – no. 757. – P. 110-116.

**Сандуляну Штефан Васильевич**

**Асимптотические и численные методы исследования  
взаимодействия газовых пузырьков в жидкости вблизи  
их контакта в пульсирующем поле давления**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 06 июля 2020 г. Заказ № 03-2020. Тираж 90 экз.

---

Отпечатано на ризографе Института проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН  
119526, Москва, проспект Вернадского д.101, корп.1